

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ
КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и
информатики»

ТС и ВС

Методическое пособие
по дисциплине
«Математические основы цифровой обработки сигналов»

Студент:
Группа ИА-332

И.А. Малиновский

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1	ЛЕКЦИЯ 1: ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ	3
2	ЛЕКЦИЯ 2:	12
3	ЛЕКЦИЯ 3:	16

1 ЛЕКЦИЯ 1: ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ

Введение

В курсе **Математических основ цифровой обработки сигналов** изучаются основы описания сигналов и методы их преобразования при помощи цифровой вычислительной техники.

Сигнал – это функция времени, которая описывает изменение напряжения и тока. Сигналы применяются для передачи сообщений в различных системах связи и управления.

Классификация сигналов

Сигналы делятся на два основных класса:

- **Детерминированные** – сигналы, которые можно точно описать математической функцией
- **Случайные** – сигналы, которые описываются вероятностными характеристиками

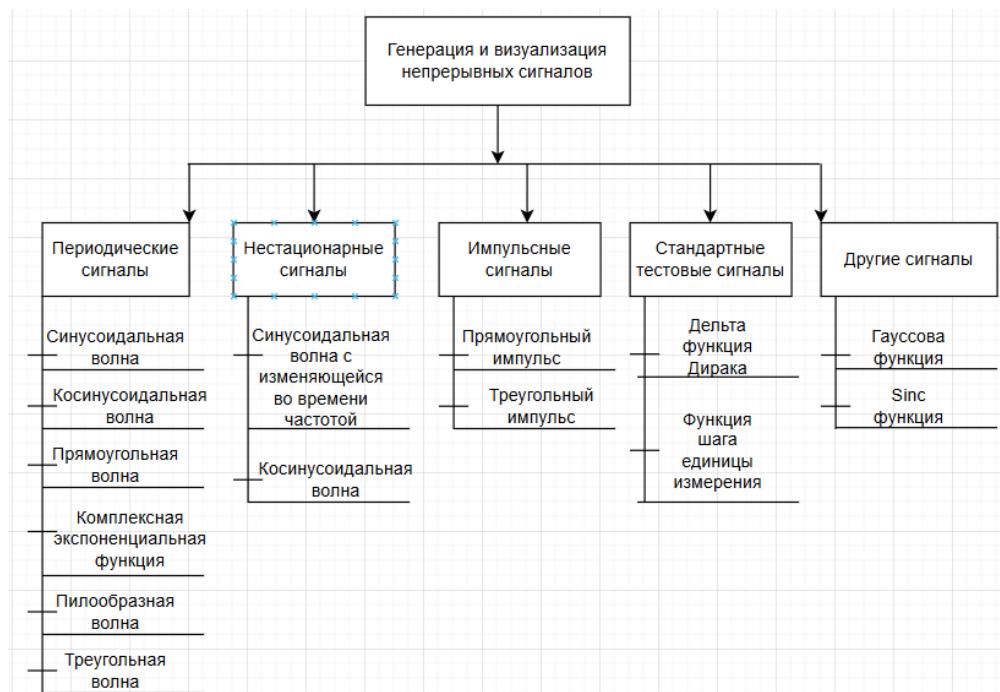


Рисунок 1 — Генерация непрерывных сигналов

Гармонические колебания

Гармонические колебания — это колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону. Это основа, которую необходимо изучить и понять, поскольку все сложные сигналы можно разложить на простые гармонические колебания

Основные формулы

Гармонические сигналы описываются функциями синуса или косинуса:

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (1)$$

$$s(t) = A \sin(\omega_0 t - \varphi) \quad (2)$$

где:

- A – **амплитуда** сигнала [В] (максимальное отклонение сигнала от нулевого значения.)
- ω_0 – **угловая частота** [рад/с] (скорость изменения фазы)
- φ – **начальная фаза** [рад] (начальное состояние)
- t – время [с]

Связь компонентов

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad [\text{рад/с}] \quad (3)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{Гц}] \quad (4)$$

$$\omega_0 = 2\pi f \quad (5)$$

Фаза – это угол, соответствующий временному промежутку от выбранного момента времени. Фаза определяет "сдвиг" сигнала во времени.

Временной сдвиг сигналов

При временном сдвиге сигнала происходит замена переменной времени:

$$t \Rightarrow t - t_1 \quad (6)$$

$$s(t) = A \cos[\omega_0(t - t_1)] = A \cos(\omega_0 t - \omega_0 t_1) \quad (7)$$

Отсюда следует, что:

$$\varphi = -\omega_0 t_1 \quad (8)$$

$$s(t - t_1) \quad \text{— сигнал, задержанный на время } t_1 \quad (9)$$

Пример анализа сигнала

Рассмотрим конкретный пример сигнала:

$$s(t) = 5 \cos(0.3\pi t + 1.2\pi) \quad (10)$$

Параметры сигнала:

$$\omega_0 = 0.3\pi \text{ рад/с}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{0.3\pi} = 6.67 \text{ с}$$

$$t_1 = -\frac{\varphi}{\omega_0} = \frac{1.2\pi}{0.3\pi} = -4 \text{ с}$$

Практический пример

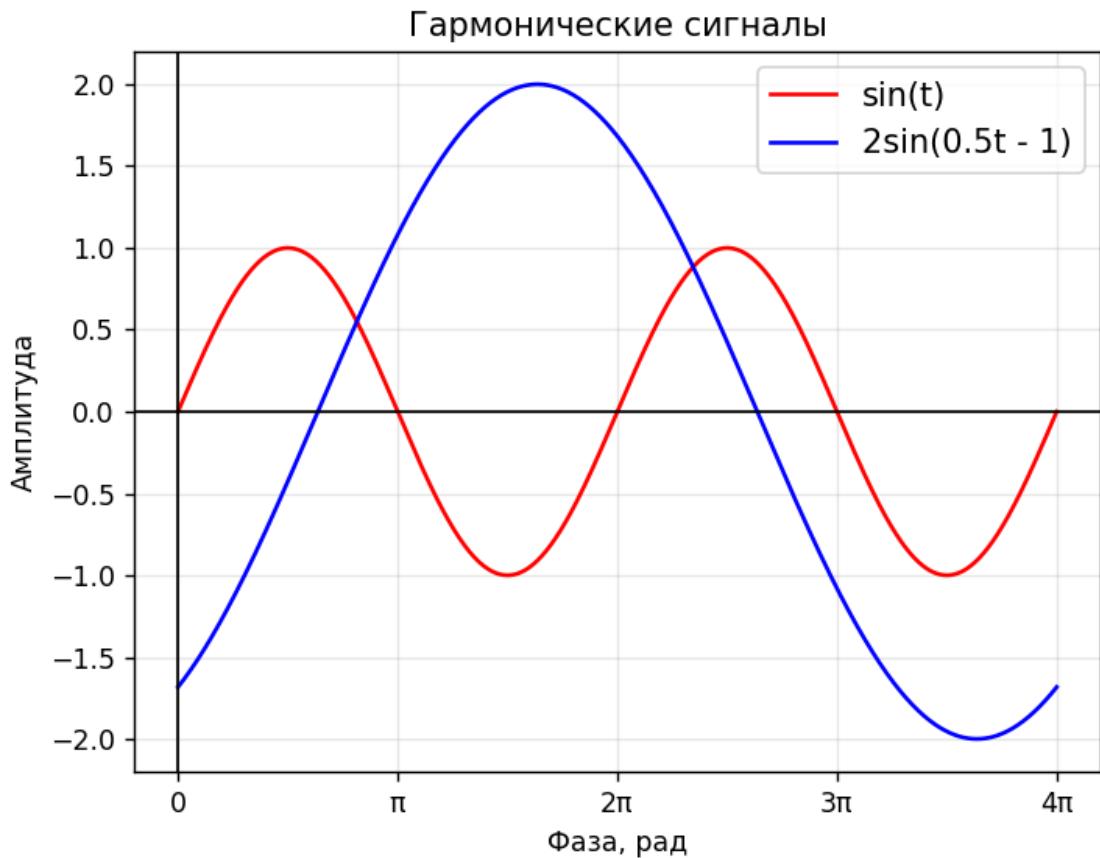


Рисунок 2 — Гармонические сигналы

На графике изображены два сигнала:

- $\sin(t)$ – стандартный гармонический сигнал
- $2 \sin(0.5t - 1)$ – модифицированный сигнал
- **Увеличение амплитуды (A):** значение амплитуд выросло до диапазона $[-2; 2]$
- **Изменение фазы (φ)** на -1 : получили небольшой сдвиг графика
- **Изменение частоты (f):** график прошёл полный цикл за 4π интервал, в то время как стандартный $\sin(t)$ за это время дважды прошёл полный цикл

Комплексное представление сигналов

Для удобства математических преобразований сигналы часто представляют в комплексной форме.

Основные определения

$$z = a + jb \quad - \text{комплексное число} \quad (11)$$

$$z^* = a - jb \quad - \text{комплексно-сопряженное число} \quad (12)$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

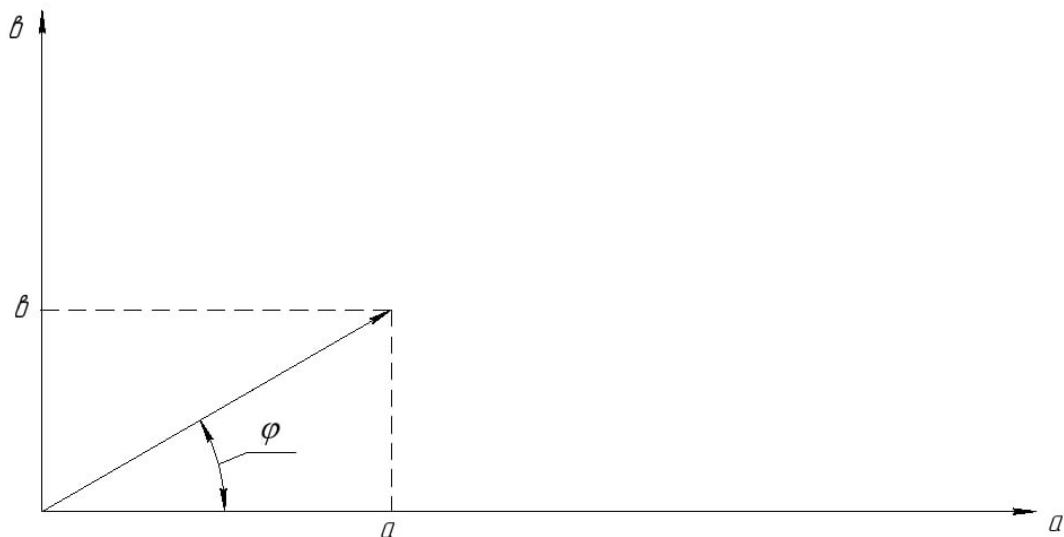


Рисунок 3 — Геометрическое представление комплексно-сопряженных чисел

Экспоненциальная форма

$$z = a + jb = |z|e^{j\varphi} \quad (13)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad - \text{модуль комплексного числа} \quad (14)$$

$$|z|^2 = z \cdot z^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 \quad (15)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{b}{a} \right) \quad - \text{аргумент комплексного числа} \quad (16)$$

Формула Эйлера

Формула Эйлера связывает комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями. Названа в честь Леонарда Эйлера, который её ввёл.

Формула Эйлера утверждает, что для любого вещественного числа x выполняется следующее равенство:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (17)$$

Произвольное комплексное число z может быть представлено в тригонометрической форме

$$z = |r| \cos \varphi + j |r| \sin \varphi \quad (18)$$

Комплексное гармониченое (экспоненциальное) колебание (КОК)

$$x(t) = A e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \quad (19)$$

Применив формулу Эйлера, получим:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + j A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (20)$$

Реальные и мнимые части - это реальные гармонические колебания

Основная причина применения комплексной формы записи - представление реальных гармонических колебаний

$$x(t) = \operatorname{Re}\{A(t)e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\} = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (21)$$

Обратная формула Эйлера

При помощи формулы Эйлера можно определить функции **sin** и **cos** следующим образом:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (22)$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad (23)$$

Используя формулу комплексного гармонического колебания и обратную формулу Эйлера, можно вывести формулу гармонического колебания:

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}}{2} = \frac{1}{2} x e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} x^* e^{-j\omega_0 t} \quad (24)$$

$X = Ae^{j\varphi}$ — комплексная амплитуда (константа)

Комплексная аналитическая форма представления гармонического сигнала:

$$z(t) = x \cdot e^{-j\omega_0 t} = Ae^{j\varphi} \cdot e^{e^{j\omega_0 t}} = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)} \quad (25)$$

Также можно записать как:

$$z(t) = xe^{j(\omega_0 t)}$$

где

$x = Ae^{j\varphi}$ — Phasor

phasor - комплексная амплитуда, которая содержит информацию о амплитуде и начальной фазе гармонического сигнала, но не содержит временной зависимости.

Нахождение комплексной амплитуды $x(t)$ на практике

Зададим гармоническое колебание $x(t)$:

$$x(t) = \sqrt{3} \cos(22\pi t + 0.3\pi)$$

Из заданного сигнала: - амплитуда $A = \sqrt{3}$, - угловая частота $\omega_0 = 22\pi$ рад/с, - начальная фаза $\varphi = 0.3\pi$ рад.

Комплексная амплитуда:

$$x = Ae^{j\varphi} = \sqrt{3}e^{j0.3\pi}$$

$x(t)$ можно записать как:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{A(t)e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\} = \operatorname{Re}\{\sqrt{3}e^{j0.3\pi} \cdot e^{j22\pi t}\}$$

Нахождение гармонического колебания на практике

Вводные данные:

$$z = \sqrt{3} + j3$$

Частота $f_0 = 60$ Гц

Комплексное число z здесь играет роль комплексной амплитуды $X = Ae^{j\varphi}$. Чтобы получить гармоническое колебание, нужно умножить z на $e^{j\omega_0 t}$ и взять вещественную часть.

1. Находим модуль r (амплитуду A):

$$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{12}$$

2. Находим аргумент φ (начальную фазу):

$$\varphi = \arctan \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

3. из этого получаем:

$$z = Ae^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 t} = \sqrt{12}e^{j\frac{\pi}{3}}$$

4. Угловая частота:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \cdot 60 = 120\pi /$$

5. Комплексный сигнал:

$$z(t) = \sqrt{12}e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j120\pi t}$$

6. Гармоническое колебание:

$$x(t) = \sqrt{12} \cos(120\pi t + \frac{\pi}{3})$$

Сложение колебаний через комплексные амплитуды

Если у нас есть несколько гармонических колебаний, с одинаковой частотой, но разными амплитудами(A) и фазами(φ), то мы можем сложить их в одно гармоническое колебание

Форма записи колебания в виде комплексных амплитуд применяется для сложения колебаний с разными амплитудами и начальными фазами:

$$x(t) = \sum_{k=1}^k A_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\sum_k A_k e^{j\varphi} = Ae^{j\varphi}$$

1. Исходно-гармоническое колебание записывается в виде комплексной экспоненты
2. Преобразуем комплексные амплитуды из полярной формы в прямоугольную при помощи формулы Эйлера
3. Складываем реальные и мнимые части
4. Преобразуем полученное комплексное число в полярную форму

2 ЛЕКЦИЯ 2:

базовая радио архитектура

SDR - software defined radio программно-определенная радиосистема. Это радиопередатчик и/или радиоприемник, в котором функции, традиционно выполняемые аппаратными средствами (усилители, фильтры, демодуляция и т. д.), осуществляются с помощью программного обеспечения. Простейшая модель радиосвязи

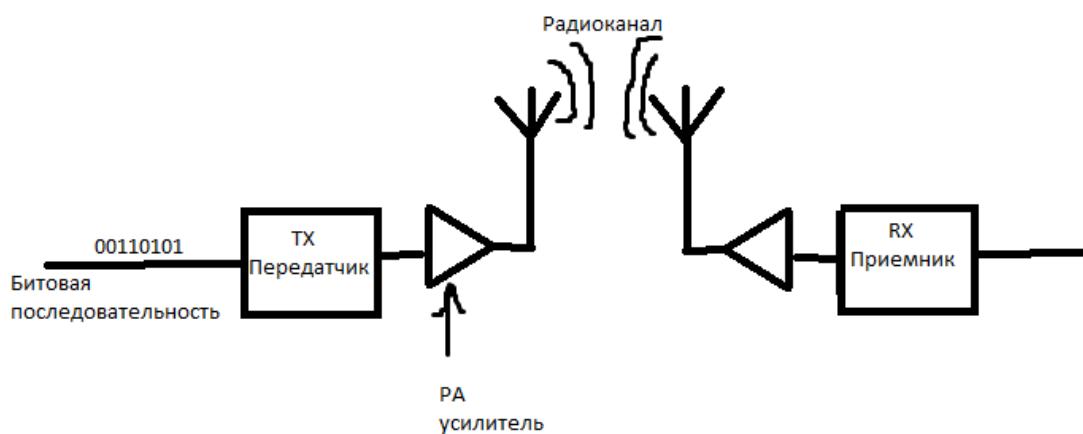


Рисунок 4 — Простейшая модель радиосвязи

Базовая архитектура:

1. Передатчик (TX)
2. Усилитель сигнала
3. Антенна (TX)
4. Радиоканал — среда, по которой распространяется сигнал
5. Антенна (RX)
6. Усилитель сигнала
7. Приемник (RX)

Основной физический принцип:

Антенна преобразует электрический ток высокой частоты в электромагнитную волну (излучение) и наоборот.

Далее происходит:

1. Ускоренное движение зарядов (электронов в проводнике антенны) — излучение электромагнитных волн
2. Взаимная связь изменяющихся электрического и магнитного полей

Работа передачи (TX)

1. Генератор ВЧ создаёт переменный ток в антенне.
2. Электроны в антенне начинают колебаться с высокой частотой.
3. Ускоренное движение зарядов создаёт вокруг антенны:
 - а Переменное электрическое поле
 - б Переменное магнитное поле
4. Эти поля взаимно порождают друг друга и отделяются от антенны, образуя электромагнитную волну.

Работа приема (RX)

1. Падающая электромагнитная волна создаёт в проводнике антенны электрическое поле, которое заставляет электроны двигаться.
2. Движение электронов создаёт ток в антенне.
3. Этот ток детектируется приёмной схемой.

На передающей стороне (в передатчике) передаваемое сообщение (дискретное) готовится к передаче

Важно! Исходящие сообщения - низкочастотные

В передатчике сигнал из baseband преобразуется по частоте вверх в выделенном частотном диапазоне.

Преобразование низкочастотного сигнала в радио называется **Модуляция**

TX архитектура:

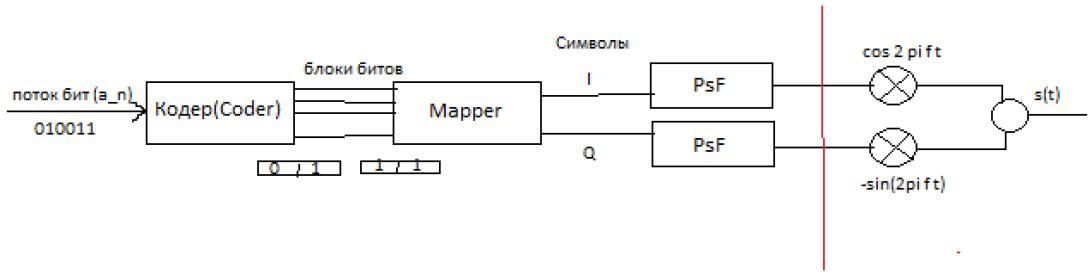


Рисунок 5 — TX архитектура

где:

- Всё, что слева от красной линии - мы будем задавать программно
- Всё, что справа от красной линии - отправляем на SDR

Принцип работы:

1. Генерация потока битов

2. Кодирование

Кодирование - это операция преобразования исходного потока бит в определенных формат.

На данном этапе добавляются проверочные биты, которые необходимы для помехоустойчивости. Позволяют исправлять ошибки на приемной стороне

- Биты попадают в кодер
- Происходит деление битов на блоки
- Размер блоков зависит от модуляции
- Добавление проверочных битов

3. Отображение (Mapper)

Mapper - это таблица, которая связывает набор передаваемых бит с передаваемыми символами

Символ - элемент сигнального множества

сигнальное множество - это набор состояний радиосвязи

- Блоки битов попадают в Mapper

- Превращаются в символы
- Сопоставляются с таблицей модуляции

4. Формирование импульса (Pulse Shaping)

- Символы попадают в PsF (Pulse Forming/Shaping)
- Символы получают свою ”длительность”
- Сопоставление символов на временной оси
- Формирование непрерывного сигнала из символов

5. Формирование непрерывного сигнала

- Математическое представление непрерывного сигнала

$$s(t) = I \cdot \cos(2\pi f t) - Q \cdot \sin(2\pi f t) \quad (26)$$

- fc - несущая частота
- k - номер текущего символа

Рассчёт символьной скорости

$$R_{\text{символ}} = \frac{R_{\text{бит}}}{\log_2 M} \quad (27)$$

- $R_{\text{символ}}$ - символьная скорость
- $R_{\text{бит}}$ - битовая скорость
- M - количество точек созвездия

3 ЛЕКЦИЯ 3: