МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

ТС и ВС

Методическое пособие
по дисциплине
«Математические основый цифровой обработка сигналов»

Студент:
Группа ИА-332 *И.А. Малиновский*

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЛЕКЦИЯ 1: ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ

Введение

В курсе **Математических основ цифровой обработки сигналов** изучаются основы описания сигналов и методы их преобразования при помощи цифровой вычислительной техники.
Сигнал – это функция времени, которая описывает изменение напряжения и тока. Сигналы применяются для передачи сообщений в различных системах связи и управления.

Классификация сигналов

Сигналы делятся на два основных класса:

– **Детерминированные** – сигналы, которые можно точно описать математической функцией
– **Случайные** – сигналы, которые описываются вероятностными характеристиками

Рисунок 1 — Генерация непрерывных сигналов

Гармонические колебания

Гармонические колебания — это колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону. Это основа, которую необходимо изучить и понять, поскольку все сложные сигналы можно разложить на простые гармонические колебания

Основные формулы

Гармонические сигналы описываются функциями синуса или косинуса:

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) \tag{1}$$

$$s(t) = A\sin(\omega_0 t - \varphi) \tag{2}$$

где:

- A – **амплитуда** сигнала [В] (максимальное отклонение сигнала от нулевого значения.)
- ω_0 – **угловая частота** [рад/с] (скорость изменения фазы)
- φ – **начальная фаза** [рад] (начальное состояние)
- t – время [с]

Связь компонентов

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{[рад/с]} \tag{3}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{[Гц]} \tag{4}$$

$$\omega_0 = 2\pi f \tag{5}$$

Фаза – это угол, соответствующий временному промежутку от выбранного момента времени. Фаза определяет ”сдвиг”сигнала во времени.

Временной сдвиг сигналов

При временном сдвиге сигнала происходит замена переменной времени:

$$t \Rightarrow t - t_1 \tag{6}$$

$$s(t) = A\cos[\omega_0(t - t_1)] = A\cos(\omega_0 t - \omega_0 t_1) \tag{7}$$

Отсюда следует, что:

$$\varphi = -\omega_0 t_1 \tag{8}$$

$$s(t - t_1) \quad \text{– сигнал, задержанный на время } t_1 \tag{9}$$

Пример анализа сигнала

Рассмотрим конкретный пример сигнала:

$$s(t) = 5\cos(0.3\pi t + 1.2\pi) \tag{10}$$

Параметры сигнала:

$$\begin{aligned}
&\omega_0 = 0.3\pi \text{ рад/с}\\
&T_0 = \frac{2\pi}{0.3\pi} = 6.67 \text{ с}\\
&t_1 = -\frac{\varphi}{\omega_0} = \frac{1.2\pi}{0.3\pi} = -4 \text{ с}
\end{aligned}$$

Практический пример

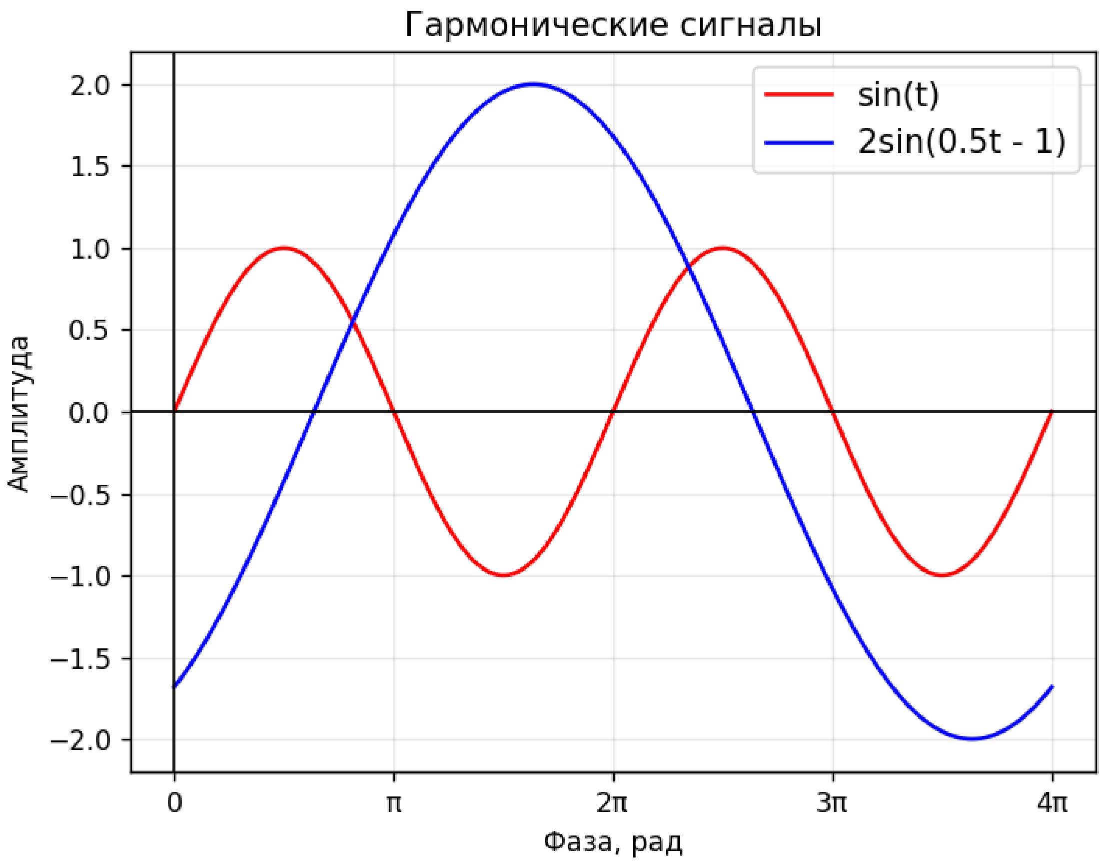

Рисунок 2 — Гармонические сигналы

На графике изображены два сигнала:

– $\sin(t)$ – стандартный гармонический сигнал
– $2\sin(0.5t - 1)$ – модифицированный сигнал

– **Увеличение амплитуды (A)**: значение амплитуд выросло до диапазона $[-2; 2]$
– **Изменение фазы (φ)** на -1: получили небольшой сдвиг графика
– **Изменение частоты (f)**: график прошёл полный цикл за 4π интервал, в то время как стандартный $\sin(t)$ за это время дважды прошёл полный цикл

Комплексное представление сигналов

Для удобства математических преобразований сигналы часто представляют в комплексной форме.

Основные определения

$$z = a + jb \quad \text{– комплексное число} \tag{11}$$

$$z^* = a - jb \quad \text{– комплексно-сопряженное число} \tag{12}$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

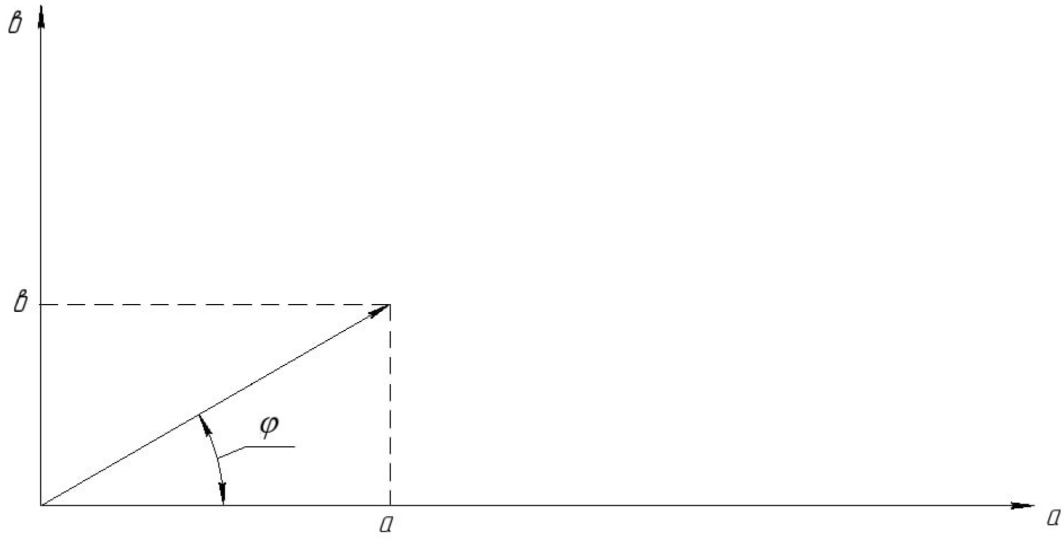

Рисунок 3 — Геометрическое представление комлексно-сопряженных чисел

Экспоненциальная форма

$$z = a + jb = |z|e^{j\varphi} \tag{13}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{– модуль комплексного числа} \tag{14}$$

$$|z|^2 = z \cdot z^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 \tag{15}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{– аргумент комплексного числа} \tag{16}$$

Формула Эйлера

Формула Эйлера связывает комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями. Названа в честь Леонарда Эйлера, который её ввёл.

Формула Эйлера утверждает, что для любого вещественного числа x выполняется следующее равенство:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \tag{17}$$

Произвольное комплексное число z может быть представлено в тригонометрической форме

$$z = |r|\cos\varphi + j|r|\sin\varphi \tag{18}$$

Комплексное гармониченое (экспоненциальное) колебание (КОК)

$$x(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} \tag{19}$$

Применив формулу Эйлера, получим:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + jA\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{20}$$

Реальные и мнимые части - это реальные гармонические колебания

Основная причина применения комплексной формы записи - представление реальных гармонических колебний

$$x(t) = Re\{A(t)e^{j(\omega_0 t+\varphi)}\} = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{21}$$

Обратная формула Эйлера

При помощи формулы Эйлера можно определить функции **sin** и **cos** следующим образом:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \tag{22}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{23}$$

Используя формулу комплексного гармонического колебания и обратную формулу Эйлера, можно вывести формулу гармонического колебания:

$$s(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi) = A\frac{e^{j(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}}{2} = \frac{1}{2}xe^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x^* e^{-j\omega_0 t} \quad (24)$$

$\boxed{X = Ae^{j\varphi}}$ — комплексная амплитуда (константа)

Комплексная аналитическая форма представления гармонического сигнала:

$$z(t) = x \cdot e^{-j\omega_0 t} = Ae^{j\varphi} \cdot e^{e^j \omega_0 t} = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} \quad (25)$$

Также можно записать как:

$$z(t) = xe^{j(\omega_0 t)}$$

где

$\boxed{x = Ae^{j\varphi}}$ — Phasor

phasor - комплексная амплитуда, которая содержит информацию о амплитуде и начальной фазе гармонического сигнала, но не содержит временной зависимости.

Нахождение комплескной амплитуды x(t) на практике

Зададим гармоническое колебание **x(t)**:

$$x(t) = \sqrt{3}\cos(22\pi t + 0.3\pi)$$

Из заданного сигнала: - амплитуда $A = \sqrt{3}$, - угловая частота $\omega_0 = 22\pi$ рад/с, - начальная фаза $\varphi = 0.3\pi$ рад.

Комплексная амплитуда:

$$x = Ae^{j\varphi} = \sqrt{3}e^{j0.3\pi}$$

x(t) можно записать как:

$$x(t) = Re\{A(t)e^{j(\omega_0 t+\varphi)}\} = Re\{\sqrt{3}e^{j0.3\pi} \cdot e^{j22\pi t}\}$$

Нахождение гармонического колебания на практике

Вводные данные:

$$z = \sqrt{3} + j3$$

Частота f_0 = 60 гц

Комплексное число z здесь играет роль комплексной амплитуды $X = Ae^{j\varphi}$. Чтобы получить гармоническое колебание, нужно умножить z на $e^{j\omega_0 t}$ и взять вещественную часть.

1. **Находим модуль r (амплитуду A):**

$$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{12}$$

2. **Находим аргумент φ (начальную фазу):**

$$\varphi = \arctan \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

3. **из этого получаем:**

$$z = Ae^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 t} = \sqrt{12}e^{j\frac{\pi}{3}}$$

4. **Угловая частота:**

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \cdot 60 = 120\pi/$$

5. **Комплексный сигнал:**

$$z(t) = \sqrt{12}e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j120\pi t}$$

6. **Гармоническое колебание:**

$$x(t) = \sqrt{12}\cos(120\pi t + \frac{\pi}{3})$$

Сложение колебаний через комплексные амплитуды

Если у нас есть несколько гармонических колебаний, с одинаковой частотой, но разными амплитудами(A) и фазами(φ), то мы можем сложить их в одно гармоническое колебание

Форма записи колебания в виде комплексных амплитуд применяется для сложения колебаний с разными амплитудами и начальными фазами:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{k} A_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\sum_k A_k e^{j\varphi} = A e^{j\varphi}$$

1. Исходно-гармоническое колебание записывается в виде комплексной экспоненты
2. Преобразуем комплексные амплитуды из полярной формы в прямоугольную при помощи формулы Эйлера
3. Складываем реальные и мнимые части
4. Преобразуем полученное комлексное число в полярную форму

2 ЛЕКЦИЯ 2:

базовая радио архитектура

SDR - software defined radio программно-определяемая радиосистема. Это радиопередатчик и/или радиоприёмник, в котором функции, традиционно выполняемые аппаратными средствами (усилители, фильтры, демодуляция и т. д.), осуществляются с помощью программного обеспечения. Простейшая модель радиосвязи

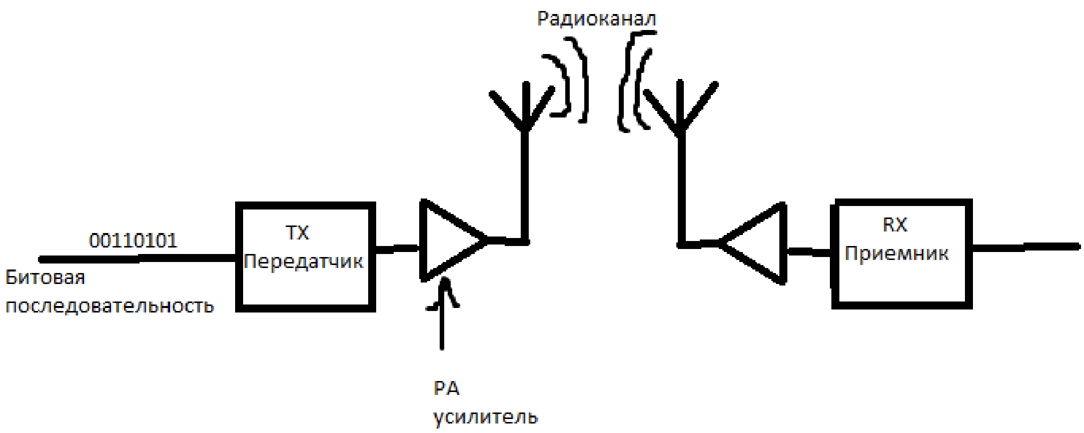

Рисунок 4 — Простейшая модель радиосвязи

Базовая архитектура:

1. Передатчик (TX)
2. Усилитель сигнала
3. Антенна (TX)
4. Радиоканал — среда, по которой распространяется сигнал
5. Антенна (RX)
6. Усилитель сигнала
7. Приёмник (RX)

Основной физический принцип:

Антенна преобразует электрический ток высокой частоты в электромагнитную волну (излучение) и наоборот.

Далее происходит:

1. Ускоренное движение зарядов (электронов в проводнике антенны) — излучение электромагнитных волн
2. Взаимная связь изменяющихся электрического и магнитного полей

Работа передачи (TX)

1. Генератор ВЧ создаёт переменный ток в антенне.
2. Электроны в антенне начинают колебаться с высокой частотой.
3. Ускоренное движение зарядов создаёт вокруг антенны:
   а Переменное электрическое поле
   б Переменное магнитное поле
4. Эти поля взаимно порождают друг друга и отделяются от антенны, образуя электромагнитную волну.

Работа приема (RX)

1. Падающая электромагнитная волна создаёт в проводнике антенны электрическое поле, которое заставляет электроны двигаться.
2. Движение электронов создаёт ток в антенне.
3. Этот ток детектируется приёмной схемой.

На передающей стороне (в передатчике) передаваемое сообщение (дискретное) готовится к передаче

Важно! Исходящие сообщения - низкочастотные

В передатчике сигнал из baseband преобразуется по частоте вверх в выделенном частотном диапазоне.

Преобразование низкочастотного сигнала в радио называется **Модуляция**

TX архитектура:

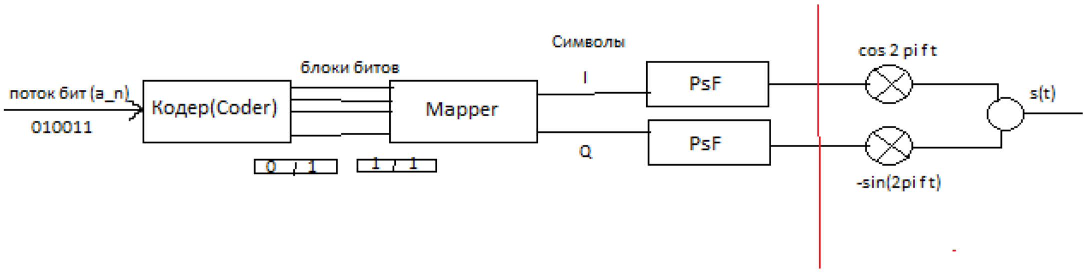

Рисунок 5 — TX архитектура

где:

- Всё, что слева от красной линии - мы будем задавать программно
- Всё, что справа от красной линии - отправляем на SDR

Принцип работы:

1. **Генерация потока битов**
2. **Кодирование**

   Кодирование - это операция преобразования исходного потока бит в определенных формат.

   На данном этапе добавляются проверочные биты, которые необходимы для помехоустойчивости. Позволяют исправлять ошибки на приемной стороне

   - Биты попадают в кодер
   - Происходит деление битов на блоки
   - Размер блоков зависит от модуляции
   - Добавление проверочных битов
3. **Отображение (Mapper)**

   Mapper - это таблица, которая связывает набор передаваемых бит с передаваемыми символами

   Символ - элемент сигнального множества

   сигнальное множество - это набор состояний радиосвязи

   - Блоки битов попадают в Mapper

- Превращаются в символы
- Сопоставляются с таблицей модуляции

4. **Формирование импульса (Pulse Shaping)**
    - Символы попадают в PsF (Pulse Forming/Shaping)
    - Символы получают свою ”длительность”
    - Сопоставление символов на временной оси
    - Формирование непрерывного сигнала из символов
5. **Формирование непрерывного сигнала**
    - Математическое представление непрерывного сигнала

$$s(t) = I \cdot \cos(2\pi ft) - Q \cdot \sin(2\pi ft) \tag{26}$$

- fc - несущая частота
- k - номер текущего символа

Рассчёт символьной скорости

$$R_{\text{символ}} = \frac{R_{\text{бит}}}{\log_2 M} \tag{27}$$

- $R_{\text{символ}}$- символьная скорость
- $R_{\text{бит}}$ - битовая скорость
- M - количество точек созвездия

3 ЛЕКЦИЯ 3:ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРЕОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ РЯДОМ ФУРЬЕ

Гармонические сигналы в линейных цепях

Форма гармонического(синусоидального) тока на выходе любой линейной электрической цепи остается гармонической.
Это означает, что линейные системы не искажают форму синусоиды, а лишь могут изменять её амплитуду и фазу.

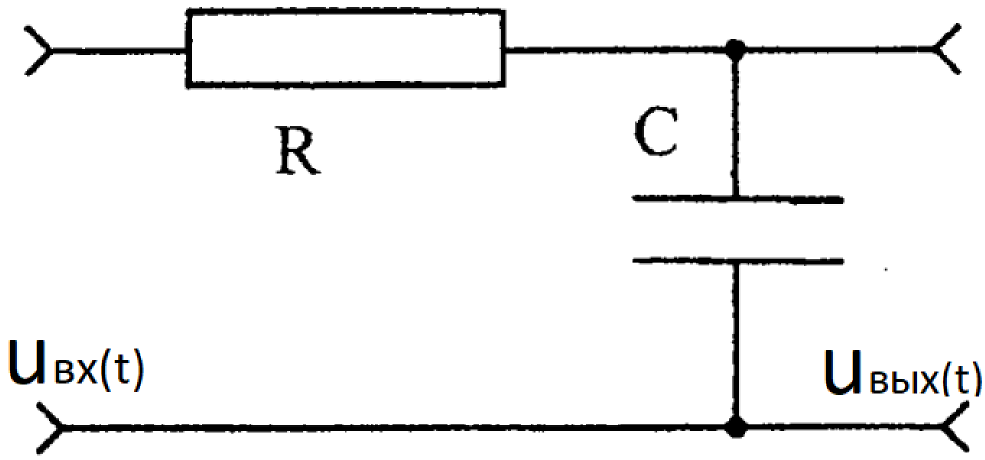

Рисунок 6 — RC-цепь

$$u_{\text{вх}} \rightarrow x(t) = A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1)$$

$$u_{\text{вых}} \rightarrow y(t) = B_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_2)$$

При рассмотрении преобразования сигналов негармонической формы, эти сигналы представляют в виде суммы гармонических колебаний

Разложение в ряд

Это представление сложной функции в виде суммы более простых

Это делается потому что линейные математические преобразования можно выполнить отдельно над простыми функциями, что гораздо удобнее и проще

Любое переодическое негармоническое колебание можно разложить в бесконечный тригонометрический ряд, состоящий из гармонических составляющих: определенных частот с определенной A(амплитудой) и φ(фазой).

Совокупность этих гармонических составляющих - это частоты спектра сигнала.

Совокупность гармонических колебаний, на который можно разложить некоторый сложный переодичный сигнал - спектр этого сигнала.

Ряд Фурье

периодическую функцию

$$s(t) = s(t + nT)$$

с периодом T можно представить в виде ряда Фурье Ряд Фурье в базовой форме:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)$$

где:

- ω_1 - основная частота (частота первой гармоники)

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

- n - номер гармоники (Сигнал содержит только частоты, кратные основной ω_1. Номер гармоники n определяет, какая это кратность)
- a_n, b_n - коэффициенты Фурье

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt - \text{среднее значение сигнала}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt$$

Физический смысл коэффициентов

1. Умножаем сигнал на гармонику определенной частоты
2. Интегрируем (находим площадь под кривой произведения)
3. Нормируем на период

Если сигнал содержит гармонику частоты $n\omega_1$, то коэффициент будет иметь какое-то, не приближенное к нулю, значение
Если гармоника отсутствует в сигнале - коэффициент будет приближен к нулю

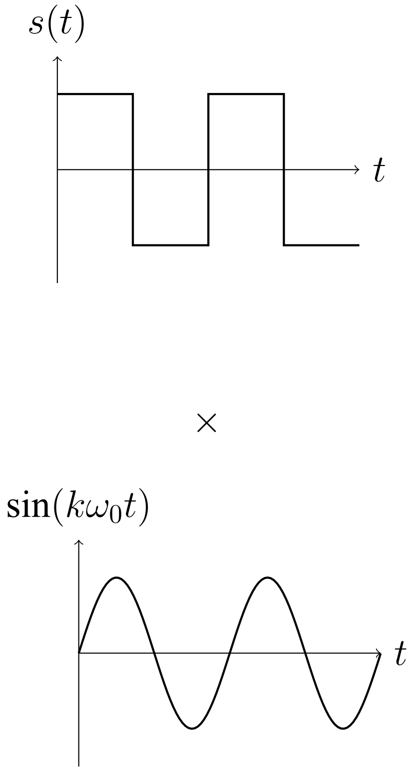

Рисунок 7 — Умножение сигнала на гармонику для вычисления коэффициента b_k

Ряд Фурье на практике

Ряд фурье бесконечен, но на практике в нём конечное число значений При выполнении практических измерений сигналов ограничиваются конечным числом слагаемых в ряде. Это дает аппроксимацию(приближенное представление) анализируемого сигнала.

Ошибка аппроксимации может быть достаточно малой, чтоб можно было не учитывать её. Она зависит от количества выбора слагаемых.

Косинусная форма ряда Фурье

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -\arctan(\frac{b_n}{a_n})$$

При вычислении коэффициентов ряда Фурье интеграл берется по периоду функции (сигнала). Четная функция содержит только косинусные составляющие, нечетная - синусные.

Если сигнал s(t) представлен в виде суммы гармонических колебаний с кратными частотами, то выполнено спектральное разложение сигнала.

Спектральная диаграмма (спектр) сигнала - графическое изображение коэффициентов ряда Фурье этого сигнала. Для представления сигнала необходимы амплитудный($_n$) и фазовый(φ_n) спектры

Колебания кратных частот $k\omega_1$ - гармоники основной частоты ω_1

- амплитудно-частотный спектр
- фазо-частотный спектр

Частота	0	Ω	2Ω	3Ω	...	nΩ	...
Амплитуда	A_0	A_1	A_2	A_3	...	A_n	...

Рисунок 8 — Амплитудный спектр

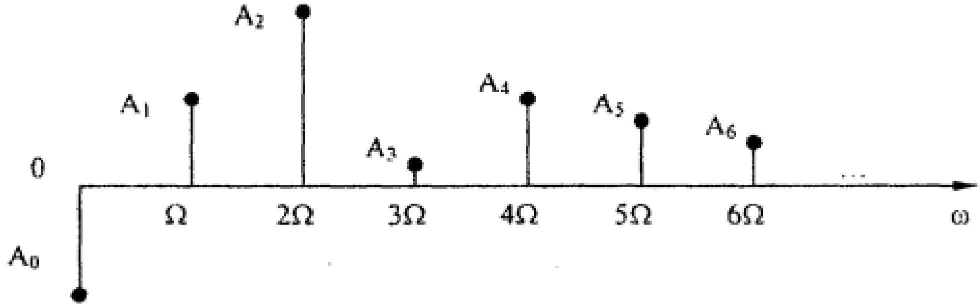

Рисунок 9 — Амплитудный спектр(Диаграмма)

Частота	0	Ω	2Ω	3Ω	...	$n\Omega$	...
Начальная фаза	–	θ_1	θ_2	θ_3	...	θ_n	...

Рисунок 10 — Фазовый спектр

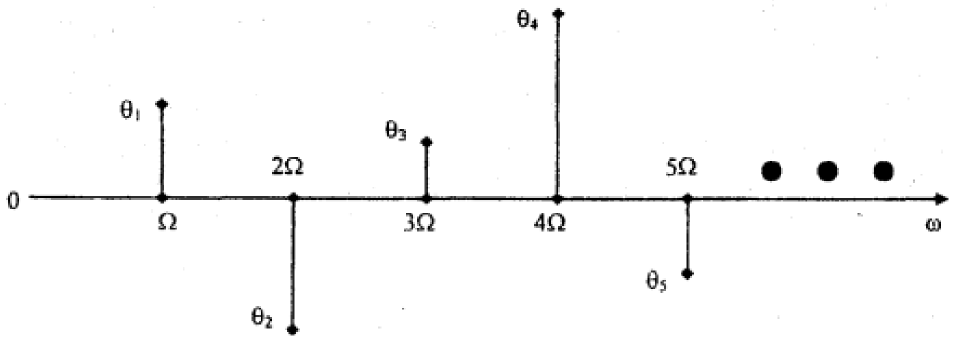

Рисунок 11 — Фазовый спектр(Диаграмма)

В разной литературе названия переменных могут варироваться:
$\Omega \rightarrow \omega$ (угловая частота)
$\theta \rightarrow \varphi$ (начальная фаза)

Спектр сигнала - совокупность гармонических составляющих с кратными частотами, определенными амплитудами и фазами, образующих в сумме исходный периодический сигнал

4 ЛЕКЦИЯ 3:

Представление переодических сигналов рядом Фурье

Форма гармонического(синусоидального) тока на выходе любой линейной электрической цепи остается гармонической.
Это свойство характерно для цепей, в которых токи и напряжения изменяются по закону синусоидальной функции.

При рассмотрении преобразования сигналов негармонической формы, эти сигналы представляют в виде суммы гармонических колебаний

Разложение в ряд

Это представление сложной функции в виде суммы более простых

Это делается потому что линейные математические преобразования можно выполнить отдельно над простыми функциями

Любое переодическое негармоническое колебание можно разложить в бесконечный тригонометрический ряд, состоящий из гармонических составляющих: определенных частот с определенной A(амплитудой) и φ(фазой).

Совокупность этих гармонических составляющих - это частоты спектра сигнала.

Совокупность гармонических колебаний, на который можно разложить некоторый сложный переодичный сигнал - спектр этого сигнала. Ряд Фурье в базовой фрме:

$$s(t) = s(t+T) \tag{28}$$