МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

ТС и ВС

Методическое пособие
по дисциплине
«Математические основый цифровой обработка сигналов»

Студент:
Группа ИА-332 *И.А. Малиновский*

Новосибирск 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЛЕКЦИЯ 1: ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ

Введение

В курсе **Математических основ цифровой обработки сигналов** изучаются основы описания сигналов и методы их преобразования при помощи цифровой вычислительной техники.

Сигнал – это функция времени, которая описывает изменение напряжения и тока. Сигналы применяются для передачи сообщений в различных системах связи и управления.

Классификация сигналов

Сигналы делятся на два основных класса:

– **Детерминированные** – сигналы, которые можно точно описать математической функцией
– **Случайные** – сигналы, которые описываются вероятностными характеристиками

Рисунок 1 — Генерация непрерывных сигналов

Гармонические колебания

Гармонические колебания — это колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону. Это основа, которую необходимо изучить и понять, поскольку все сложные сигналы можно разложить на простые гармонические колебания

Основные формулы

Гармонические сигналы описываются функциями синуса или косинуса:

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) \tag{1}$$

$$s(t) = A\sin(\omega_0 t - \varphi) \tag{2}$$

где:

- A – **амплитуда** сигнала [В] (максимальное отклонение сигнала от нулевого значения.)
- ω_0 – **угловая частота** [рад/с] (скорость изменения фазы)
- φ – **начальная фаза** [рад] (начальное состояние)
- t – время [с]

Связь компонентов

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{[рад/с]} \tag{3}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{[Гц]} \tag{4}$$

$$\omega_0 = 2\pi f \tag{5}$$

Фаза – это угол, соответствующий временному промежутку от выбранного момента времени. Фаза определяет ”сдвиг”сигнала во времени.

Временной сдвиг сигналов

При временном сдвиге сигнала происходит замена переменной времени:

$$t \Rightarrow t - t_1 \tag{6}$$

$$s(t) = A\cos[\omega_0(t - t_1)] = A\cos(\omega_0 t - \omega_0 t_1) \tag{7}$$

Отсюда следует, что:

$$\varphi = -\omega_0 t_1 \tag{8}$$

$$s(t - t_1) \quad \text{– сигнал, задержанный на время } t_1 \tag{9}$$

Пример анализа сигнала

Рассмотрим конкретный пример сигнала:

$$s(t) = 5\cos(0.3\pi t + 1.2\pi) \tag{10}$$

Параметры сигнала:

$\omega_0 = 0.3\pi$ рад/с
$T_0 = \dfrac{2\pi}{0.3\pi} = 6.67$ с
$t_1 = -\dfrac{\varphi}{\omega_0} = \dfrac{1.2\pi}{0.3\pi} = -4$ с

Практический пример

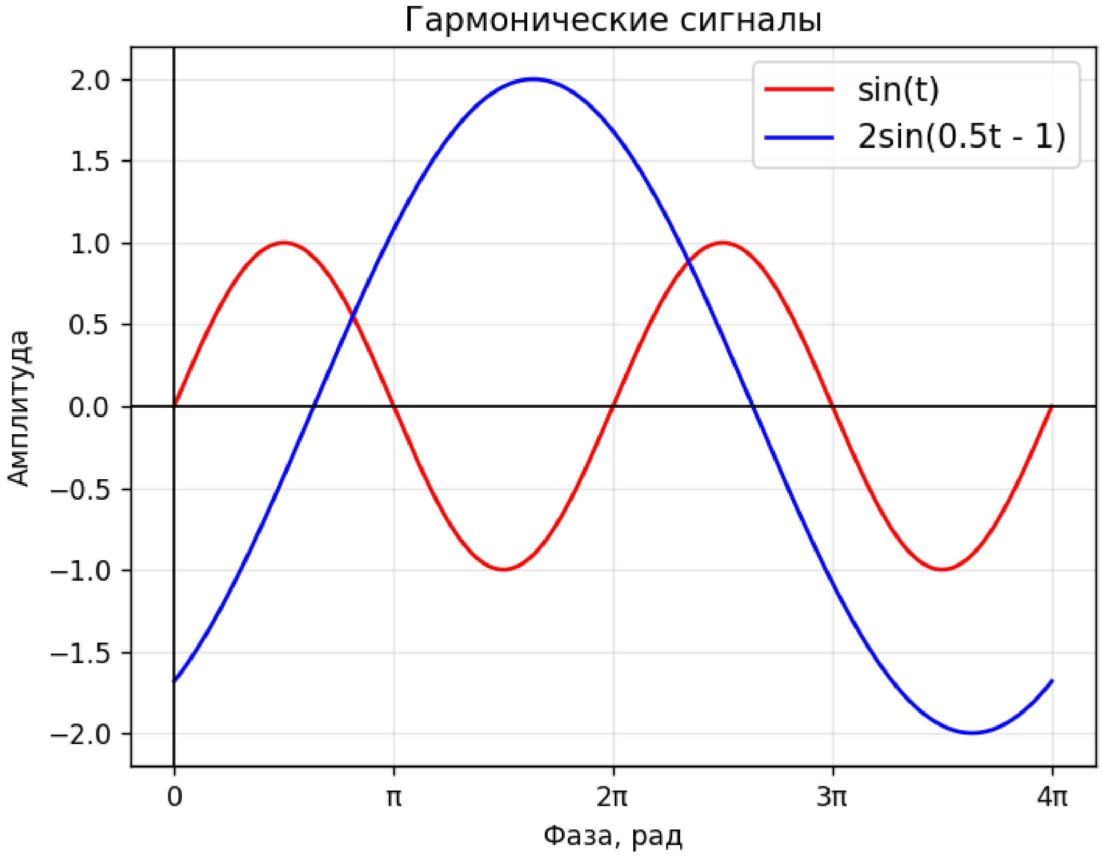

Рисунок 2 — Гармонические сигналы

На графике изображены два сигнала:

- $\sin(t)$ – стандартный гармонический сигнал
- $2\sin(0.5t - 1)$ – модифицированный сигнал

- **Увеличение амплитуды (A)**: значение амплитуд выросло до диапазона $[-2; 2]$
- **Изменение фазы (φ)** на -1: получили небольшой сдвиг графика
- **Изменение частоты (f)**: график прошёл полный цикл за 4π интервал, в то время как стандартный $\sin(t)$ за это время дважды прошёл полный цикл

Комплексное представление сигналов

Для удобства математических преобразований сигналы часто представляют в комплексной форме.

Основные определения

$$z = a + jb \quad \text{– комплексное число} \tag{11}$$

$$z^* = a - jb \quad \text{– комплексно-сопряженное число} \tag{12}$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

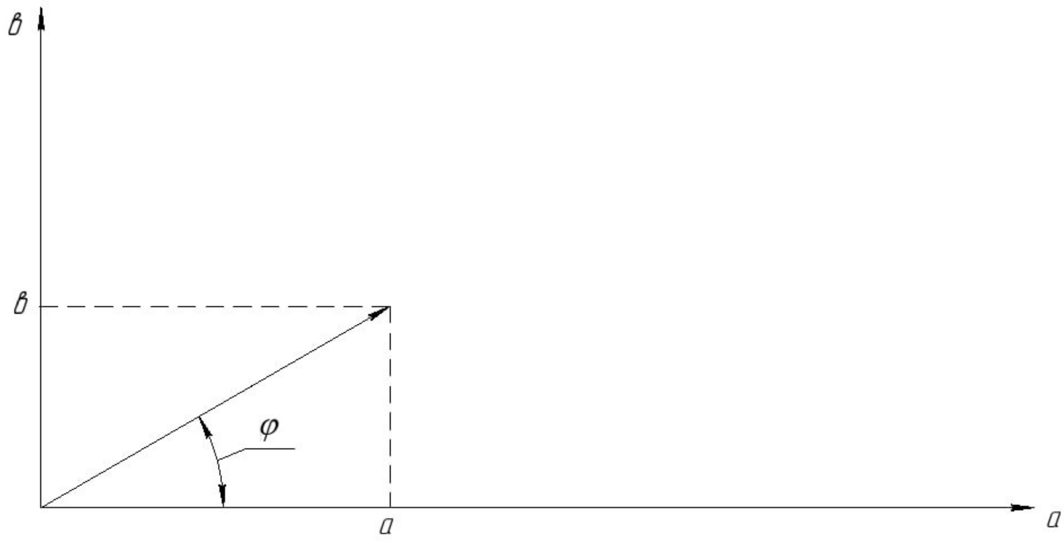

Рисунок 3 — Геометрическое представление комлексно-сопряженных чисел

Экспоненциальная форма

$$z = a + jb = |z|e^{j\varphi} \tag{13}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{– модуль комплексного числа} \tag{14}$$

$$|z|^2 = z \cdot z^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 \tag{15}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{– аргумент комплексного числа} \tag{16}$$

Формула Эйлера

Формула Эйлера связывает комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями. Названа в честь Леонарда Эйлера, который её ввёл.

Формула Эйлера утверждает, что для любого вещественного числа x выполняется следующее равенство:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \tag{17}$$

Произвольное комплексное число z может быть представлено в тригонометрической форме

$$z = |r|\cos\varphi + j|r|\sin\varphi \tag{18}$$

Комплексное гармониченое (экспоненциальное) колебание (КОК)

$$x(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} \tag{19}$$

Применив формулу Эйлера, получим:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t+\varphi) + jA\sin(\omega_0 t+\varphi) \tag{20}$$

Реальные и мнимые части - это реальные гармонические колебания

Основная причина применения комплексной формы записи - представление реальных гармонических колебний

$$x(t) = Re\{A(t)e^{j(\omega_0 t+\varphi)}\} = A(t)\cos(\omega_0 t+\varphi) \tag{21}$$

Обратная формула Эйлера

При помощи формулы Эйлера можно определить функции **sin** и **cos** следующим образом:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \tag{22}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{23}$$

Используя формулу комплексного гармонического колебания и обратную формулу Эйлера, можно вывести формулу гармонического колебания:

$$s(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi) = A\frac{e^{j(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}}{2} = \frac{1}{2}xe^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x^* e^{-j\omega_0 t} \quad (24)$$

$\boxed{X = Ae^{j\varphi}}$ — комплексная амплитуда (константа)

Комплексная аналитическая форма представления гармонического сигнала:

$$z(t) = x \cdot e^{-j\omega_0 t} = Ae^{j\varphi} \cdot e^{e^j\omega_0 t} = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} \quad (25)$$

Также можно записать как:

$$z(t) = xe^{j(\omega_0 t)}$$

где

$\boxed{x = Ae^{j\varphi}}$ — Phasor

phasor - комплексная амплитуда, которая содержит информацию о амплитуде и начальной фазе гармонического сигнала, но не содержит временной зависимости.

Нахождение комплескной амплитуды x(t) на практике

Зададим гармоническое колебание **x(t)**:

$$x(t) = \sqrt{3}\cos(22\pi t + 0.3\pi)$$

$$x = \sqrt{3}e^{j0.3\pi}$$

$$x(t) = Re\{\sqrt{3}e^{j0.3\pi} \cdot e^{j22\pi t}\}$$

2 ЛЕКЦИЯ 2:

3 ЛЕКЦИЯ 3: