

Теоретические вопросы на доказательство

1. Представление вещественных чисел в виде десятичных дробей (определения 2.4, 2.6). Принцип полноты, его выполнение для десятичных дробей (теорема 2.7).
2. Верхняя грань и нижняя грань, максимум и минимум множества (определения 2.9, 2.10). Точные верхние и нижние грани, их существование у ограниченных множеств (определения 2.12, 2.14, теорема 2.15).
3. Предел последовательности, его основные свойства: единственность, ограниченность сходящейся последовательности (определения 3.1, 3.3, 3.8, предложения 3.7, 3.9).
4. Лемма об отделимости (лемма 3.10), арифметические свойства предела последовательности (теорема 3.11).
5. Переход к пределу в неравенствах и лемма о зажатой последовательности (предложение ??, лемма 3.13).
6. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности (теорема 3.14).
7. Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекуррентной формулы $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$, обоснование сходимости (пример 3.15).
8. Число ϵ — определение и обоснование корректности (предложение 3.16, определение 3.17).
9. Принцип вложенных отрезков (теорема 3.18), геометрическая интерпретация вещественных чисел.
10. Подпоследовательность и частичные пределы (определение 3.19, предложение 3.20). Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности (определение 3.21), их связь с множеством частичных пределов этой последовательности (теорема 3.22).
11. Теорема Больцано (следствие 3.23). Критерий сходимости последовательности в терминах частичных пределов (теорема 3.24).
12. Фундаментальная последовательность и критерий Коши (определение 3.25, предложение 3.27, теорема 3.28).
13. Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекуррентной формулы $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, обоснование сходимости (пример 3.29).
14. Числовые ряды (определение 3.31), критерий Коши для числовых рядов (теорема 3.33), необходимое условие сходимости числового ряда (следствие 3.34). Расходимость гармонического ряда (пример 3.35).
15. Абсолютная и условная сходимость рядов (определение 3.37). Сходимость абсолютно сходящегося ряда (следствие 3.36). Ограниченность частичных сумм сходящегося ряда с неотрицательными членами (предложение 3.39). Признак сравнения (предложение 3.40).
16. Признак Лобачевского-Коши (теорема 3.41). Сходимость и расходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ в зависимости от параметра p (пример 3.42).
17. Перестановки слагаемых в рядах (определение 3.43). Теорема о независимости суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых (теорема 3.44). Теорема Римана (теорема 3.45, без доказательства).
18. Определения предела функции (по множеству) по Коши (определение 4.6) и по Гейне (определение 4.5), их эквивалентность (теорема 4.10).
19. Единственность и арифметические свойства предела функции: линейность, предел произведения и отношения (теорема 4.11).
20. Предел и неравенства, ограниченность, отделимость (теорема 4.12). Теорема о пределе сложной функции (теорема 4.13).

21. Замечательные пределы (предложения 4.14, 4.15).
22. Критерий Коши существования предела функции (теорема 4.16).
23. Односторонние пределы и теорема Вейерштрасса о существовании односторонних пределов монотонной ограниченной функции (определение 4.17, теорема 4.18).
24. Отношение эквивалентности функций, примеры эквивалентных функций, лемма о эквивалентности произведения и композиции функций, предел эквивалентных функций (определение 4.24, леммы 4.25, 4.26, 4.27, 4.29).
25. Понятие функции, бесконечно малой или ограниченной относительно другой (\bar{o} и \underline{O}), теорема о связи отношения эквивалентности и представления функции с помощью \bar{o} , свойства \bar{o} и \underline{O} (определения 4.31, 4.33, теоремы 4.32, 4.34).