MA1477 Tentamen 180111

Lösningsförslag

1. Linjen $y = \frac{1}{2}x + 4$ har lutning $k_1 = \frac{1}{2}$

En linje som är vinkelrät mot $y = \frac{1}{2}x + 4$

har alltså lutning $k_2 = -2$.

a) Linjen $y = -2x + 5$ har lutning -2

och är alltså vinkelrät mot $y = \frac{1}{2}x + 4$

b) Omskrivning av $4x = 2y + 1$ ger

$y = 2x - \frac{1}{2}$

Denna linje är inte vinkelrät mot

$y = \frac{1}{2}x + 4$

c) Omskrivning av $3y + 6x - 3 = 0$ ger

$y = -2x + 1$

Linjen är vinkelrät mot $y = \frac{1}{2}x + 4$

2. En funktion har en lokal minimipunkt i $x=1$ om $f'(1)=0$ och $f''(1)>0$.

a) $f(x) = -(x-1)^2$

$= -(x^2 - 2x + 1)$

$= -x^2 - 2x + 1$

$\Rightarrow f'(x) = -2x - 2$

$f'(1) = 0$

$f''(x) = -2 < 0$

Funktionen har lokal maximipunkt i $x=1$.

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 1$

$\Rightarrow f'(x) = x^2 + 2x - 3$

$f'(1) = 1^2 + 2 - 3 = 0$

$f''(x) = 2x + 2$

$f''(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 > 0$

Funktionen har en lokal minimipunkt i $x=1$

c) $f(x) = e^{3x} - 3xe^{3}$

$f'(x) = 3e^{3x} - 3e^{3}$

$f'(1) = 3e^{3 \cdot 1} - 3e^{3} = 0$

$f''(x) = 9e^{3x}$

$f''(1) = 9 \cdot e^{3} > 0$

Funktionen har en lokal minimipunkt i $x = 1$

3.

a) $$\frac{x^2+2xy+y^2}{2x^2y+xy^2} = \frac{(x+y)^2}{xy(2x+y)}$$ Kan ej förenklas längre

b) $(x-1)^2+2(x-1)+1$

$= x^2-2x+1+2x-2+1$

$= x^2$

c) $$\frac{x^3-xy^2}{x^2-y^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = x$$

4.

Vi har att

$$Pr(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

och

$$Pr(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Gynnsamma utfall för B är följande tärningskombinationer

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

Vidare har vi att

$$Pr(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Gynnsamma utfall för $A \cap B$ är

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3)

Vi får alltså att

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B) = \frac{13}{18}$$

5. Totalt så omfattade undersökningen 100 personer. Av dessa svarde 25 "Nej" på båda frågorna

Låt A vara händelsen att en slumpmässigt vald person svarat "Ja" på minst en av frågorna.

Då är

$$Pr(A) = 1 - Pr(\bar{A}) = 1 - \frac{25}{100}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

6. Om sannolikheten att bli godkänd på tentan är 65% så är sannolikheten att <u>inte</u> bli godkänd på tentan 35%.

Sannolikheten att inte bli godkänd på någon av de tre tentorna är

$$(0,35)^3 \approx 0,05.$$

Sannolikhenten att studenten blir godkänd på någon av tentorna är

$$1 - 0,05 = 0,95$$

Korrekt svarstalong

	a	b	c
1	X		X
2		X	X
3			X
4			X
5		X	
6			X

7.a) Låt x_i vara vikten på chipspåse

$i = 1, 2, 3, \ldots, 22$

Från det första stickprovet har vi att

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = 195$$

och för det andra stickprovet

$$\frac{\sum_{i=13}^{22} x_i}{10} = 192$$

Medelvärdet för stickproven är

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} x_i + \sum_{i=13}^{22} x_i}{22} = \frac{195 + 192}{22}$$

$$= 193,5 \text{ g}$$

7 b). Vi har att medelvärdet för stickprovet är

$$\bar{x} = \frac{190 + 192 + 195 + 200 + 205}{5}$$

$$= \frac{982}{5} = 196{,}4$$

Stickprovsvariansen blir

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{4} =$$

$$= \frac{(190 - 196{,}4)^2 + (192 - 196{,}4)^2 + \dots + (205 - 196{,}4)^2}{4}$$

$$= \frac{149{,}2}{4} = 37{,}3$$

Standardavikelsen för stickprovet är

$$s = \sqrt{37{,}3} \approx 6{,}1 \text{ g}$$

8. Vi beräknar väntevärdet för vinsten i spelautomaten

$$E(X) = \sum x \cdot p(x)$$

$$= 1 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}4$$

$$= 2{,}4$$

I genosnitt är vinsten 2,4 kr per spel.

Om insatsen är 2,5 kr så får man i det långa loppet alltså betala 0,1 kr för att spela.

Det är alltså inte värt att lägga en större mängd pengar på spelautomaten om man planerar att bli rik.