

MA1477 Matematisk modellering

Betingad sannolikhet och oberoende händelser

Henrik Fredriksson

Blekinge Tekniska Högskola

December 13, 2017

Betingade sannolikheter

Hur förändras en sannolikhet för en händelse A om vi vet att händelse B har inträffat?

Betingade sannolikheter

Hur förändras en sannolikhet för en händelse A om vi vet att händelse B har inträffat?

Sannolikheten för att man ser en onykter person på stan en kväll beror på vilken veckodag det är.

Betingade sannolikheter

Hur förändras en sannolikhet för en händelse A om vi vet att händelse B har inträffat?

Sannolikheten för att man ser en onykter person på stan en kväll beror på vilken veckodag det är.

Sannolikheten för att en slumpvis vald person har gjort lumpen beror på om personen är en man eller kvinna.

Exempel

I en undersökning så har man frågat 789 personer om de tänkt kolla på Kalle Anka på julafton. Resultatet gav följande tabell

Exempel

I en undersökning så har man frågat 789 personer om de tänkt kolla på Kalle Anka på julafton. Resultatet gav följande tabell

Kalle Anka tittare	Man	Kvinna	Summa
Ja	152	328	480
Nej	245	64	309
Summa	397	392	789

Exempel

I en undersökning så har man frågat 789 personer om de tänkt kolla på Kalle Anka på julafton. Resultatet gav följande tabell

Kalle Anka tittare	Man	Kvinna	Summa
Ja	152	328	480
Nej	245	64	309
Summa	397	392	789

Försöket är att på slump välja en tillfrågade personerna. Om A är händelsen "Kalle Anka tittare" och B är händelsen "är en man", så gav undersökningen att

$$\Pr(A) = \frac{480}{789} \approx 0.61, \quad \Pr(B) = \frac{397}{789} \approx 0.5$$

$$\Pr(A \cap B) = \frac{152}{789} \approx 0.19$$

Exempel

I en undersökning så har man frågat 789 personer om de tänkt kolla på Kalle Anka på julafton. Resultatet gav följande tabell

Kalle Anka tittare	Man	Kvinna	Summa
Ja	152	328	480
Nej	245	64	309
Summa	397	392	789

Försöket är att på slump välja en tillfrågade personerna. Om A är händelsen "Kalle Anka tittare" och B är händelsen "är en man", så gav undersökningen att

$$\Pr(A) = \frac{480}{789} \approx 0.61, \quad \Pr(B) = \frac{397}{789} \approx 0.5$$

$$\Pr(A \cap B) = \frac{152}{789} \approx 0.19$$

Vad är då sannolikheten att en person ska titta på Kalle Anka *under förutsättning* att den tillfrågade personen är man?

Sannolikheten för A givet B betecknas med $\Pr(A|B)$.

Exempel (fortsättning)

Vi hade sannolikheterna

$$\Pr(A) = \frac{480}{789} \approx 0.61, \Pr(B) = \frac{397}{789} \approx 0.5, \Pr(A \cap B) = \frac{152}{789} \approx 0.19$$

Av de 397 tillfrågade männen så tänker 152 kolla på Kalle Anka, dvs

$$\Pr(A|B) = \frac{152}{397} \approx 0.38$$

Exempel (fortsättning)

Vi hade sannolikheterna

$$\Pr(A) = \frac{480}{789} \approx 0.61, \Pr(B) = \frac{397}{789} \approx 0.5, \Pr(A \cap B) = \frac{152}{789} \approx 0.19$$

Av de 397 tillfrågade männen så tänker 152 kolla på Kalle Anka, dvs

$$\Pr(A|B) = \frac{152}{397} \approx 0.38$$

Men detta kan även skrivas som

$$\Pr(A|B) = \frac{152}{397} = \frac{152/789}{397/789} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Betingad sannolikhet

Den betingade sannolikheten får att händelsen A under förutsättning att händelsen B inträffar är

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

där $\Pr(B) > 0$.

Betingad sannolikhet

Den betingade sannolikheten får att händelsen A under förutsättning att händelsen B inträffar är

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

där $\Pr(B) > 0$. Från definitionen av betingad sannolikhet följer följande sats

Sannolikhetslärans multiplikationssats

Om A och B är två händelser som kan inträffa vid ett slumpförsök så gäller det att

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) \cdot \Pr(A|B)$$

Exempel

Vi ska dra två kort ur en kortlek. Vad är sannolikheten att vi drar två kungar. Här är A och B händelserna att det första respektive andra kortet är en kung. Sannolikheten blir

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) \cdot \Pr(B|A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = 0.0045$$

Oberoende händelser

Antag att vi ska singlar slant två gånger. Betrakta händelserna A "krona" och B "krona". Vad är den betingade sannolikheten att att vi får en krona vid andra slantsinglingen givet att första gav en krona?

Oberoende händelser

Antag att vi ska singla slant två gånger. Betrakta händelserna A "krona" och B "krona". Vad är den betingade sannolikheten att att vi får en krona vid andra slantsinglingen givet att första gav en krona?

Vi har att

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

Oberoende händelser

Antag att vi ska singla slant två gånger. Betrakta händelserna A "krona" och B "krona". Vad är den betingade sannolikheten att att vi får en krona vid andra slantsinglingen givet att första gav en krona?

Vi har att

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

Men detta är ju sannolikheten för att singla en slant och få krona!

Rent intuitivt så inser vi att den andra slantsinglingen inte beror på vad den första blev, med andra ord B är *oberoende* av A .

Mer formellt:

Oberoende händelser

Om $\Pr(B|A) = \Pr(B)$ så är händelsen B oberoende av händelsen A .
Från detta följer multiplikationssatsen för oberoende händelser

multiplikationssatsen för oberoende händelser

Om A och B är två oberoende händelser så gäller det att