

MA1477 Tentamen 180111

Lösningsförslag

1. Linjen $y = \frac{1}{2}x + 4$ har lutning $k_1 = \frac{1}{2}$

En linje som är vinkelrät mot $y = \frac{1}{2}x + 4$

har alltså lutning $k_2 = -2$.

a) Linjen $y = -2x + 5$ har lutning -2

och är alltså vinkelrät mot $y = \frac{1}{2}x + 4$

b) Omskrivning av $4x = 2y + 1$ ger

$$y = 2x - \frac{1}{2}$$

Den här linje är inte vinkelrät mot

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

c) Omskrivning av $3y + 6x - 3 = 0$ ger

$$y = -2x + 1$$

Linjen är vinkelrät mot $y = \frac{1}{2}x + 4$.

2. En funktion har en lokal minimipunkt i $x=1$
om $f'(1) = 0$ och $f''(1) > 0$.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= -(x-1)^2 \\ &= -(x^2 - 2x + 1) \\ &= -x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x - 2$$

$$f'(1) = 0$$

$$f''(x) = -2 < 0$$

Funktionen har lokal maximipunkt i $x=1$.

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$f'(1) = 1^2 + 2 - 3 = 0$$

$$f''(x) = 2x + 2$$

$$f''(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 > 0$$

Funktionen har en lokal minimipunkt i $x=1$

$$c) \quad f(x) = e^{3x} - 3xe^3$$

$$f'(x) = 3e^{3x} - 3e^3$$

$$f'(1) = 3e^{3 \cdot 1} - 3e^3 = 0$$

$$f''(x) = 9e^{3x}$$

$$f''(1) = 9 \cdot e^3 > 0$$

Funktionen har en lokal minimipunkt i $x = 1$

3.

$$a) \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2x^2y + xy^2} = \frac{(x+y)^2}{xy(2x+y)} \quad \begin{array}{l} \text{Kan ej} \\ \text{förenklas} \\ \text{längre} \end{array}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 \\ &= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$$c) \frac{x^3 - xy^2}{x^2 - y^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} = x$$

4.

Vi har att

$$\Pr(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

och

$$\Pr(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Gynnsamma utfall för B är
följande tärningskombinationer

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$

Vidare har vi att

$$\Pr(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Gynnsamma utfall för $A \cap B$ är

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3)$

Vi får alltså att

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = \frac{4}{9}$$

5. Totalt så omfattade undersökningen 100 personer. Av dessa svarde 25 "Nej" på båda frågorna

Låt A vara händelsen att en slumpmässigt vald person svarat "Ja" på minst en av frågorna.

Då är

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= 1 - \Pr(\bar{A}) = 1 - \frac{25}{100} \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

6. Om sannolikheten att bli godkänd på tentan är 65% så är sannolikheten att inte bli godkänd på tentan 35%.

Sannolikheten att inte bli godkänd på någon av de tre tentorna är

$$(0,35)^3 \approx 0,05.$$

Sannolikheten att studenten blir godkänd på någon av tentorna är

$$1 - 0,05 = 0,95$$

Korrekt svarstalong

	a	b	c
1	X		X
2		X	X
3			X
4	X		
5		X	
6			X

7.a) Låt x_i vara vikten på chipspåse

$$i = 1, 2, 3, \dots, 22$$

Från det första stickprovet har vi att

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = 195$$

Och för det andra stickprovet

$$\frac{\sum_{i=13}^{22} x_i}{10} = 192$$

Medelvärdet för stickproven är

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} x_i + \sum_{i=13}^{22} x_i}{22} = \frac{195 + 192}{22}$$

$$= 193,5 \text{ g}$$

7 b). Vi har att medelvärdet
för stickprovet är

$$\bar{x} = \frac{190 + 192 + 195 + 200 + 205}{5}$$

$$= \frac{982}{5} = 196,4$$

Stickprovsvariansen blir

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{4} =$$

$$= \frac{(190 - 196,4)^2 + (192 - 196,4)^2 + \dots + (205 - 196,4)^2}{4}$$

$$= \frac{149,2}{4} = 37,3$$

Standardavvikelsen för stickprovet
är

$$s = \sqrt{37,3} \approx 6,1 \text{ g}$$

8. Vi beräknar väntevärdet för vinsten i spelautomaten

$$E(x) = \sum x \cdot p(x)$$

$$= 1 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,4$$

$$= 2,4$$

I genomsnitt är vinsten 2,4 kr per spel.

Om insatsen är 2,5 kr så får man i det långa loppet alltså betala 0,1 kr för att spela.

Det är alltså inte värt att lägga en större mängd pengar på spelautomaten om man planerar att bli rik.