MA1477 Matematisk modellering

Veckotest v. 44 Lösningsförslag

17 november 2017

1. Förenkla så långt som möjligt

(a) $9(x-1)^2 - (3x-1)^2 - 3(1-2x)$

Lösningsförslag.

$$
\begin{aligned}
9(x-1)^2 - (3x-1)^2 - 3(1-2x) &= 9(x^2-2x+1) - (9x^2-6x+1) - (3-6x) \\
&= 9x^2 - 18x + 9 - 9x^2 + 6x - 1 - 3 + 6x \\
&= -6x + 5
\end{aligned}
$$

(b) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{2(1-x)}{6} + \dfrac{x-1}{2}$

Lösningsförslag.

$$
\begin{aligned}
\frac{2x}{3} + \frac{2(1-x)}{6} + \frac{x-1}{2} &= \frac{2x}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{2(1-x)}{6} + \frac{x-1}{2} \cdot \frac{3}{3} \\
&= \frac{4x + 2(1-x) + 3(x-1)}{6} \\
&= \frac{4x + 2 - 2x + 3x - 3}{6} \\
&= \frac{5x-1}{6}
\end{aligned}
$$

(c) $\dfrac{27^2 \cdot 9^{-1} \cdot 6^2}{3^8 \cdot 3^{-2}}$

Lösningsförslag.

$$\frac{27^2 \cdot 9^{-1} \cdot 6^2}{3^8 \cdot 3^{-2}} = \frac{(3^2)^2 \cdot (3^2)^{-1} \cdot (2 \cdot 3)^2}{3^8 \cdot 3^{-2}}$$
$$= \frac{3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 2^2 \cdot 3^2}{3^8 \cdot 3^{-2}}$$
$$= 2^2 \cdot 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^2 \cdot 3^{-8} \cdot 3^2$$
$$= 2^2 \cdot 3^{3-2+2-8+2}$$
$$= 4 \cdot 3^0$$
$$= 4$$

(d) $\dfrac{\sqrt{50} - \sqrt{98}}{\sqrt{8}}$

Lösningsförslag.

$$\frac{\sqrt{50} - \sqrt{98}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 25} - \sqrt{2 \cdot 49}}{\sqrt{2 \cdot 4}}$$
$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{25} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{49}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{2} \cdot 5 - \sqrt{2} \cdot 7}{\sqrt{2} \cdot 2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}(5-7)}{\sqrt{2} \cdot 2}$$
$$= \frac{5-7}{2}$$
$$= -1$$

2. Lös ekvationen

(a) $4x^2 - 9 = 0$

Lösningsförslag.

$$4x^2 - 9 = 0$$
$$(2x)^2 - 3^2 = 0$$
$$(2x+3)(2x-3) = 0$$

Med hjälp av nollproduktsmetoden får vi att lösningarna till ekvationen är $x = -\frac{3}{2}$ *och* $x = \frac{3}{2}$

(b) $x^2 + 3x - 2 = 0$

Lösningsförslag. Med pq-formeln får vi att

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{8}{4}}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Lösningarna till ekvationen är $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$ *och* $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$

(c) $(x^2 - 4)(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

Lösningsförslag.

$$(x^2 - 4)(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$(x + 2)(x - 2)(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

Med nollproduktsmetoden ser vi att 3 av lösningarna är $x = -2$, $x = 2$ *och* $x = 1$. *Med pq-formeln så får vi att lösningarna till* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *är* $x = 3$ *och* $x = 2$.

Samtliga lösningar till ekvationen är $x = -2$, $x = 2$ *(dubbelrot),* $x = 1$, *och* $x = 3$.

3. Bestäm en funktion $f(x)$ på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ som uppfyller $f(0) = 3, f(1) = 2$ och $f(-2) = 3$.

Lösningsförslag. Eftersom $f(0) = 3$ *så får vi att*

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3$$

vilket ger att $c = 3$. *Vidare har vi att*

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 = a + b + 3 = 2 \tag{1}$$

och

$$f(1) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 3 = 4a - 2b + 3 = 3. \tag{2}$$

Från (1) får vi att $a = -1 - b$. Insättning av detta värde av a i (2) ger

$$4a - 2b + 3 = 3$$

$$4(-1 - b) - 2b = 0$$

$$-4 - 4b - 2b = 0$$

$$-6b = 4$$

$$b = -\frac{4}{6} = -\frac{3}{2}$$

Eftersom $a = -1 - b$ så får vi att

$$a = -1 - b = -1 - \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

Den sökta funktionen är $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 3$

4. Lös ekvationen

(a) $x^2(x + 3) - 1(x + 3) = 0$

Lösningsförslag. Bryter vi ut $(x + 3)$ ur båda termerna i vänsterledet så får vi

$$x^2(x + 3) - 1(x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(x^2 - 1) = 0$$

Eftersom $x^2 - 1 = (x + 1)()x - 1$ enligt konjugatregeln så får vi att

$$(x + 3)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$$

Lösningarna till ekvationen är $x = -3$,$x = -1$ och $x = 1$.

(b) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 1) + (x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 10) = 0$

Lösningsförslag. Bryter vi ut $x^2 + 2x - 1$ *ur båda termerna i vänsterledet så får vi att*

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 1) + (x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 10) = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 1) + 2x^2 - 10) = 0$$

$$(x + 1)^2(3x^2 - 11) = 0$$

Eftersom lösningarna till $3x^2 - 11 = 0$ *är* $x = \pm\sqrt{\dfrac{11}{3}}$ *så är samtliga lösningar till ekvation* $x = -1$ *(dubbelrot),* $x = \pm\sqrt{\dfrac{11}{3}}$

5. Faktorisera polynomen

(a) $p(x) = 4x^2 - 32x + 60$

Lösningsförslag.

$$p(x) = 4x^2 - 32x + 60$$

$$= 4(x^2 - 8x + 15)$$

Med pq-formeln finner vi att nollställena till $x^2 - 8x + 15$ *är* 3 *och* 5. *Faktoriseringen är alltså*

$$p(x) = 4(x - 3)(x - 5)$$

(b) $p(x) = 20x^2 - 245$

Lösningsförslag.

$$p(x) = 20x^2 - 245$$

$$= 5(4x^2 - 49)$$

$$= 5(2x)^2 - 7^2)$$

$$= 5(2x + 7)(2x - 7)$$