CIĄGI DOLDA I PUNKTY PERIODYCZNE

GRZEGORZ GRAFF AND MATEUSZ SCHARMACH

Albrecht Dold (1928-2011) był wybitnym niemieckim matematykiem, autorem wielu klasycznych konstrukcji topologicznych. W 1984 roku udowodnił on, że ciąg klasycznych topologicznych niezmienników (indeksy punktu stałego) spełnia pewne kongruencje dla iteracji funkcji. Kongruencje Dolda zajmują ważne miejsce w teorii układów dynamicznych i topologii. Okazuje się jednak, że kongruencje których istnienie wykazał są o wiele bardziej uniwersalne. Artykuł [2] z Delty kończy się definicją, która dla nas stanowić będzie punkt wyjścia.

Ciąg całkowitoliczbowy $a = (a_n)$ nosi nazwę *ciągu Dolda* jeżeli dla wszystkich $n \geqslant 1$;

$$\sum_{k|n} \mu\Big(\frac{n}{k}\Big) a_k \equiv 0 \bmod n. \tag{0.1}$$

Funkcja μ występująca w powyższym wzorze to klasyczna funkcja Möbiusa, zdefiniowana następująco:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } n = 1, \\ 0 & \text{jeżeli } n \text{ ma dzielnik będący kwadratem}, \\ (-1)^r & \text{jeżeli } n \text{ jest iloczynem } r \text{ różnych liczb pierwszych.} \end{cases}$$

Na pierwszy rzut oka ciągi Dolda wydają się dosyć zagadkowe: np. ciąg stały jest w oczywisty sposób ciągiem Dolda, ale już tak prosty ciąg jak $c = (1, 2, 3, \ldots)$ nim nie jest, gdyż już dla $n = 2$ nie spełnia wymaganych kongruencji: $c_2 - c_1 \not\equiv 0 \bmod 2$.

Okazuje się, że ciągi Dolda mają ścisły związek z punktami stałymi iteracji, czyli punktami periodycznymi odwzorowań.

Oznaczmy przez $\mathbf{Fix}(f)$ liczbę punktów stałych odwzorowania, gdzie przeprowadza pewną przestrzeń X w siebie. Okazuje się, że niezależnie od odwzorowania ciąg $(\mathbf{Fix}(f^n))$ jest ciągiem Dolda!

Zacznijmy od kilku podstawowych definicji i faktów. Rozważmy przestrzeń X i weźmy jej odwzorowanie $f : X \to X$, mające punkt periodyczny x o okresie minimalnym n, tzn. taki, że $f^n(x) = x$, ale dla $1 \leqslant k < n$ $f^k(x) \neq x$. Zdefiniujmy zbiór $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ obejmujący wartości kolejnych iteracji f w punkcie x, zwany orbitą punktu x. Orbity punktów periodycznych o okresie minimalnym n (n-orbity) są skończone i mają n elementów. Co więcej, nietrudno zauważyć, że dwie orbity albo się pokrywają albo są rozłączne.

Zachowanie iteracji na pojedynczej n-orbicie modeluje zatem funkcja $g = f_{|O(x)}$, $g : \{p_0, \ldots, p_{n-1}\} \to \{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$, (gdzie $p_i = g^i(x)$) dana wzorem:

$$g(p_i) = p_{i+1 \bmod n}.$$

Załóżmy, teraz że zbiór punktów stałych odwzorowania f^n jest skończony. Ile może być wówczas takich punktów, innymi słowy jakie wartości przybiera ciąg $(\mathbf{Fix}(f^n))$? Odpowiedź wystarczy znaleźć dla pojedynczej orbity, a później zsumować po wszystkich orbitach f.

Każdy punkt z danej orbity $O(x)$ o okresie minimalnym k wraca do siebie dopiero po k iteracjach. Zatem pojedyncza k-orbita generuje albo k albo 0 punktów stałych odwzorowania g. W zależności od iteracji n, g^n ma $\mathrm{reg}_k(n)$ punktów stałych, gdzie:

$$\mathrm{reg}_k(n) = \begin{cases} k & \text{jeżeli } k|n; \\ 0 & \text{jeżeli } k \not| n. \end{cases}$$

Oznaczając przez $L(k)$ liczbę orbit o okresie minimalnym k i sumując po wszystkich orbitach otrzymujemy:

$$\mathbf{Fix}(f^n) = \sum_{k \leqslant n} L(k)\,\mathrm{reg}_k(n) = \sum_{k|n} L(k) \cdot k. \tag{0.2}$$

Użyjemy teraz znanej z teorii liczb inwersji Möbiusa. Mówi ona, że jeśli dwa ciągi (a_n) i (b_n) związane są relacją $a_n = \sum_{k|n} b_k$, to możemy wyrazić b_n przez a_n używając funkcji Möbiusa:

$$b_n = \sum_{k|n} \mu\Big(\frac{n}{k}\Big) a_k. \tag{0.3}$$

Stosując inwersję Möbiusa do formuły (0.2) otrzymujemy:

$$L(n) \cdot n = \sum_{k|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) \mathbf{Fix}(f^k). \tag{0.4}$$

Widzimy zatem, że lewa strona powyższej równości jest podzielna przez n, zatem prawa strona także, a zatem rzeczywiście $(\mathbf{Fix}(f^n))$ jest ciągiem Dolda.

Przyjrzyjmy się na przykładzie, jaka jest geometryczna interpretacja tego faktu. Rozważmy $n = 6$ i pewną funkcję o skończonym zbiorze punktów okresowych $f : X \to X$. Spróbujmy wyrazić liczbę punktów o okresie minimalnym 6 poprzez punkty stałe f^k dla $1 \leqslant k \leqslant 6$. Z $\mathbf{Fix}(f^6)$ musimy wyrzucić punkty o mniejszych okresach minimalnych, dzielących 6 czyli $1, 2, 3$, ale z drugiej strony wyrzuciliśmy trochę za dużo, bo $\mathbf{Fix}(f^2)$ i $\mathbf{Fix}(f^3)$ zliczają także $\mathbf{Fix}(f)$, musimy zatem przywrócić wyrzucone dwukrotnie $\mathbf{Fix}(f)$. Mamy:

$$\begin{aligned} L(6) \cdot 6 &= \mathbf{Fix}(f^6) - \mathbf{Fix}(f) - \mathbf{Fix}(f^2) - \mathbf{Fix}(f^3) + 2\,\mathbf{Fix}(f) = \\ &= \mathbf{Fix}(f^6) - \mathbf{Fix}(f^2) - \mathbf{Fix}(f^3) + \mathbf{Fix}(f) = \sum_{k|6} \mu\Big(\frac{6}{k}\Big) \mathbf{Fix}(f^k). \end{aligned}$$

Podsumowując, kongruencje Dolda wynikają z faktu, że suma po prawej stronie wzoru (0.4), dzięki zasadzie "włączeń i wyłączeń", redukuje się do liczby orbit n-elementowych pomnożonych przez n.

Inną, dość zaskakującą, cechą ciagów Dolda jest ich związek z macierzami, a konkretnie ze śladami macierzy. Zacznijmy od pewnego prostego rachunku na losowo wybranej macierzy A 2×2 i jej kwadracie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}. \tag{0.5}$$

Obliczmy teraz $\mathrm{tr}\,A^2 - \mathrm{tr}\,A$, gdzie $\mathrm{tr}\,A$ jest śladem macierzy kwadratowej, tzn. sumą elementów leżących na jej głównej przekątnej. W naszym przypadku $\mathrm{tr}\,A^2 - \mathrm{tr}\,A = 13 - 3 = 10 \equiv 0 \mod 2$. Zatem dla ciągu $(\mathrm{tr}\,A^n)$ kongruencje Dolda są spełnione dla $n = 2$. Okazuje się jednak, że są one prawdziwe dla dowolnej macierzy i dowolnego n, czyli, że ciąg śladów dowolnej macierzy całkowitoliczbowej również jest ciągiem Dolda.

Ten niebanalny fakt, odkrywany wielokrotnie, przez różnych autorów, ma liczne konsekwencje. Na przykład dla dowolnej macierzy o wyrazach całkowitych A i liczby pierwszej p otrzymujemy:

$$\operatorname{tr} A^p \equiv \operatorname{tr} A \bmod p.$$

Brzmi jakby znajomo? Rzeczywiście, otrzymaliśmy małe twierdzenie Fermata, tylko w bardziej ogólnej wersji dla - macierzy, (zauważmy, że staje się ono dokładnie tym twierdzeniem dla macierzy 1×1).

Można podać bezpośredni, ale raczej pracochłonny, dowód faktu, że $(\operatorname{tr} A^n)$ jest ciągiem Dolda. Możliwy jest jednak zręczny zabieg (dla macierzy o nieujemnych współczynnikach), który uzasadnia ten fakt na podstawie wiedzy, którą już posiedliśmy. Pokażemy mianowicie, że $(\operatorname{tr} A^n)$ jest ciągiem punktów stałych iteracji pewnego odwzorowania.

Dla danej macierzy $A = A_{ij}$ o wymiarze $s \times s$ rozważmy graf skierowany G_A o s wierzchołkach, w którym dozwolone są krawędzie wielokrotne, taki, że z i-tego wierzchołka do j-tego wierzchołka prowadzi dokładnie A_{ij} krawędzi.

W opisanym przez nas przykładzie macierzy A (0.5) potrzebujemy dwóch wierzchołków, powiedzmy W_1 oraz W_2. Z W_1 nie ma połączeń do W_1, ale z W_2 do W_2 wiodą trzy krawędzie. Ponadto z W_1 do W_2 mamy 2 krawędzie, a w przeciwnym kierunku 3 krawędzie.

Wracając do ogólnego przypadku, z własności macierzy $A = A_{ij}$ (łatwej do udowodnienia za pomocą indukcji) wynika, że A^n_{ij} jest liczbą ścieżek długości n (z dozwolonym powtarzaniem się krawędzi) prowadzących z wierzchołka i do wierzchołka j, mających długość n. Stąd ślad takiej macierzy, czyli suma elementów postaci A_{ii} będzie po prostu liczbą ścieżek rozpoczynających i kończących się w tym samym wierzchołku.

Ustaliwszy ten fakt, możemy teraz łatwo skonstruować żądane odwzorowanie. Rozpatrzmy przestrzeń X składającą się z nieskończonych ścieżek w grafie G_A, reprezentowanych jako ciągi krawędzi $(k_0, k_1, k_2, \ldots)$ i odwzorowanie $\sigma : X \to X$ dane wzorem $\sigma(k_0, k_1, k_2, \ldots) = (k_0, k_1, k_2, \ldots)$, które można geometrycznie interpretować jako przejście z jednej krawędzi do połączonej z nią kolejnej krawędzi w grafie G_A.

Punkty stałe σ to ścieżki, które przechodzą na siebie, jak np. $(k_{W_2}, k_{W_2}, k_{W_2}, \ldots)$ w naszym przykładzie, gdzie k_{W_2} oznacza jedną z krawędzi z W_2 do W_2, a ich liczba dla ścieżek wychodzących z danego wierzchołka o indeksie i jest równa wartości A_{ii}. Analogicznie, punkty stałe σ^n to ścieżki, które przechodzą na siebie w n-tej iteracji, ale tych jest, jak pokazaliśmy, dokładnie $\operatorname{tr} A^n$. Ostatecznie, $\mathbf{Fix}\,\sigma^n = \operatorname{tr} A^n$, zatem $(\operatorname{tr} A^n)$ jako ciąg liczby punktów stałych odwzorowania σ jest rzeczywiście ciągiem Dolda.

Ciągi Dolda, ze względu na opisane powyżej związki z punktami periodycznymi, stanowią obiecujący obiekt badań na pograniczu teorii układów dynamicznych, topologii i teorii liczb. Definicję ciągów Dolda można próbować uogólnić na różne sposoby. Jedną z takich prób jest rozpatrywanie ciągów wieloindeksowanych. Okazuje się, że mają one podobne właściwości do ciągów klasycznych, a ich opis podany został w pracy nagrodzonej brązowym medalem w Konkursie Prac Uczniowskich im. Pawła Domańskiego (2019) [3].

Na koniec ciekawy problem, odwrotny do rozpatrywanego na początku artykułu. Czy dowolny ciąg Dolda (a_n) składający się z nieujemnych liczb całkowitych da się przedstawić jako ciąg liczby punktów stałych pewnego odwzorowania $f : X \to X$? Łatwo jest odpowiedzieć pozytywnie, jeśli nic nie zakładamy o odwzorowaniu f ani o przestrzeni X, ale problem staje się otwarty, jeśli zażądamy na nie dodatkowych warunków np. założymy, że X jest rozmaitością, a f jest gładkie. O szczegółach związanych z tym zagadnieniem, jak również o wykorzystaniu ciągów Dolda w różnych obszarach matematyki poczytać można w [1].

Literatura

[1] J. Byszewski, G. Graff and T. Ward, *Dold sequences, periodic points, and dynamics*, Bull. London Math. Soc. (2021), 1–36, doi:10.1112/blms.12531.

[2] A. Leśniak, *O pewnym uogólnieniu Małego Twierdzenia Fermata*, Delta no. 10 (2015), 6–7.

[3] M. Scharmach, *Dwuwymiarowe Ciągi Dolda*, http://www.deltami.edu.pl/delta/redakcja/konkurs_prac_uczniowskich/2019/09/12/MateuszScharmach.pdf

Wydział Fizyki technicznej i Matematyki Stosowanej, Politechnika Gdańska ul. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk
Email address: grzegorz.graff@pg.edu.pl

III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
Email address: scharmi1500@gmail.com