

## Задание 2. Тестирование гипотез.

Прикладная статистика в машинном обучении, осень 2019

Время выдачи задания: 14 октября.

Срок сдачи: **28 октября (понедельник), 23:59**. Срок сдачи бонусного задания: **2 ноября (суббота), 23:59**.

Среда для выполнения практического задания – PYTHON 2.x/PYTHON 3.x.

## Правила сдачи

### Инструкция по отправке:

1. Решения задач следует присылать единым файлом формата `pdf`, набранным в `LATEX`, либо в составе `ipython`-тетрадки в форматах `ipynb` и `html` (присылайте оба формата, т.к. AnyTask из-за высокой загрузки иногда не рендерит тетрадки в формате `ipynb` – а если мы не увидим ваши задачи, мы их не проверим). Отправляйте практические задачи в виде отдельных файлов (`ipython`-тетрадок или исходных файлов с кодом на языке `python`).

### Оценивание и штрафы:

1. Максимально допустимая оценка за работу над основными задачами – 10 баллов.
2. Бонусные баллы (см. конец домашнего задания) и влияют на освобождение от задач на экзамене.

3. Дедлайн жесткий. Сдавать задание после указанного срока сдачи нельзя.
4. Задание выполняется каждым студентом индивидуально и независимо от других студентов. «Похожие» решения считаются плагиатом и все студенты (в том числе те, у кого списали) не могут получить за него больше 0 баллов, причем обнуляются и бонусные баллы. Если вы нашли решение какого-то из заданий (или его часть) в открытом источнике, необходимо указать ссылку на этот источник в отдельном блоке в конце вашей работы (скорее всего вы будете не единственным, кто это нашел, поэтому чтобы исключить подозрение в плагиате, необходима ссылка на источник).

# Основные задачи

1. (2 балла) Постройте распределение плотности вероятностей для  $p$ -значения в случаях, если нулевая гипотеза верна и не верна, для следующих случаев:

- (1 балл) одновыборочный t-тест для  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(x; \mu, 1)$ , для проверки нулевой гипотезы  $H_0: \mu_0 = 0$ , против альтернативной гипотезы  $H_a: \mu_0 > 0$ . Для  $\mu = 0$ ,  $\mu = 0,5$  и  $\mu = 1$ . Тестирование проводите в случае, если  $n = 4$ .
- (1 балл) одновыборочный t-тест для  $X_1, \dots, X_n \sim \exp(x; 1)$ , для проверки нулевой гипотезы  $H_0: \mu_0 = 0$ , против альтернативной гипотезы  $H_a: \mu_0 > 0$ . Тестирование проводите в случае, если  $n = 4, 10, 100$ . Сделайте вывод о применимости метода анализа множественного тестирования Storey-Tibshirani (лекция, раздел FDR и Теорема байеса).

2. (3 балла) Вы задались целью статистически достоверно сравнить качество двух стохастических алгоритмов машинного обучения (например, алгоритмов из семейства reinforcement learning). Предположим, что качество алгоритма 1 задается (случайной) величиной  $X_1$ , а качество алгоритма 2 – величиной  $X_2$  (распределения  $X_1$  и  $X_2$  неизвестны). Алгоритм 1 назовем неразличимым по качеству с алгоритмом 2, если их средние уровни качества равны:  $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2 = EX_1 - EX_2 = 0$ ; в противном случае алгоритм 1 лучше (хуже) по качеству, чем алгоритм 2.

Для того, чтобы сравнивать алгоритмы по качеству, воспользуемся аппаратом проверки статистических гипотез. Таким образом, для сравнения алгоритмов по качеству необходимо проверить гипотезу  $\mathcal{H}_0 : \Delta\mu = 0$  против альтернативы  $\mathcal{H}_1 : |\Delta\mu| > 0$  по выборкам

$(x_1^1, \dots, x_n^1)$  и  $(x_1^2, \dots, x_n^2)$ , показывающим значения их метрик, полученных в эксперименте.

Проведите статистическое моделирование для сравнения эффективности нескольких распространенных статистических критериев в задаче различения алгоритмов по качеству.

- В качестве множества критериев рассмотрите: критерий Вальда, критерий Стьюдента, критерий Манна-Уитни-Уилкоксона, критерий знаков и критерий перестановок. Воспользуйтесь известными в библиотеках реализациями (например, критерий Манна-Уитни-Уилкоксона реализуется функцией `scipy.stats.mannwhitneyu(x1, x2, alternative='two-sided')`).
- В качестве множества постановок рассмотрите ситуации, когда  $X_1$  и  $X_2$  имеют:
  - одинаковый тип распределения и равные стандартные отклонения;
  - одинаковый тип распределения, но неравные стандартные отклонения;
  - различные типы распределения и равные стандартные отклонения;
  - различные типы распределения и неравные стандартные отклонения.
- В качестве типов распределения рассмотрите следующие: стандартное нормальное распределение, логнормальное распределение, распределение Коши (с «тяжелыми хвостами») на отрезке  $[-3, 3]$ . Все распределения отмасштабируйте так, чтобы их среднее  $\mu = 0$ , стандартное отклонение  $\sigma = 1$ . При рассмотрении различных стандартных отклонений положите  $\sigma_2 = 2\sigma_1$ .

- Проведите следующие эксперименты. Все эксперименты необходимо провести моделированием Монте-Карло с числом повторений  $N_r = 10^3$ , для каждого критерия, каждой постановки и размеров выборок  $N_s \in \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 100\}$ .
  - Измерение вероятности ложной тревоги: зафиксируйте  $\alpha = 0.05$  и при верной  $\mathcal{H}_0$  подсчитайте долю случаев, в которых была отклонена гипотеза  $\mathcal{H}_0$ .
  - Измерение мощности теста: зафиксируйте  $\alpha = 0.05$  и при верной  $\mathcal{H}_1$  подсчитайте долю случаев, в которых была отклонена гипотеза  $\mathcal{H}_0$ . При этом размер сдвига  $\Delta\mu$  варьируйте в диапазоне от 0 до 3 с шагом 0.1.

Требования к оформлению результатов в этой задаче:

- Должны быть представлены графики зависимостей вероятности ошибки I рода от размера выборки  $N_s$  для каждой постановки (при этом на одном и том же графике должны быть представлены кривые для каждого критерия). Сгруппируйте графики по типу рассматриваемой постановки (например, в разделе «одинаковый тип распределения и равные стандартные отклонения» должно быть 3 графика, на каждом по 5 кривых, и т.д.).
- Должны быть представлены графики зависимостей мощности критерия от размера выборки  $N_s$  для каждой постановки (при этом на одном и том же графике должны быть представлены кривые для каждого критерия). Сгруппируйте графики по типу рассматриваемой постановки.
- К отчету должен быть приложен исходный код, реализующий сравнение.

3. (3 балла) Во время Второй Мировой войны в лондонской газете выложили карту падения бомб V-1 и V-2 в Центральном Лондоне. Горожане обратили внимание, что есть районы с более высокой кучностью падения бомб, а есть кварталы, которые вообще не были затронуты. Из этих наблюдений жители сделали два вывода: (i) немцы обладают высокоточными бомбами; (ii) в незатронутых кварталах скорее всего живут немецкие шпионы.

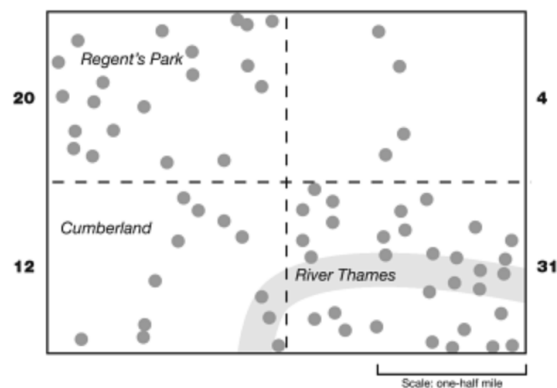


Figure 1: Adapted from Gilovich (1991)

Вам дан датасет с координатами падения бомб во Второй Мировой войне и ваша задача сказать насколько правы были жители.

- Скачайте данные:  
[https://github.com/SchattenGenie/hse-stats-course-2019/blob/master/homeworks/hw\\_2/v2\\_bombing\\_london.csv](https://github.com/SchattenGenie/hse-stats-course-2019/blob/master/homeworks/hw_2/v2_bombing_london.csv);
- В файле представлены данные с падения бомб для всего Лондона, включая предместья, поэтому необходимо сделать очистку данных, выбрав только Центральный Лондон(или по картинке выше подбирайте на глаз или попробуйте отфильтровать координаты с помощью `pr.percentile`);
- Придумайте тест для различия следующих гипотез:  $\mathcal{H}_0$  – бомбы падали равномерно на плоскости v.s.  $\mathcal{H}_1$  – бомбы падали

неравномерно;

- (1 балл) Реализуйте и примените тест для  $\alpha = 0.05$ ;
- (1 балл) Исследуйте (найдите) эмпирическую ошибку I рода;
- (1 балл) Рассмотрим следующее распределение на двумерной плоскости:  $[\text{Beta}(x; 1 + \epsilon, 1 + \epsilon) \times \text{Beta}(y; 1 + \epsilon, 1 + \epsilon)]$ .

Проварьируйте  $\epsilon \in [-1, 2]$  и постройте эмпирическую ошибку II рода для вашего теста;

- Сделайте выводы.

4. (2 балла) Вы попадаете на остров, на котором живёт племя туземцев. Вы считаете, что племя – часть определённого народа с характерной долей 1-й группы крови. Какое минимальное число  $n$  анализов крови нужно сделать, чтобы подтвердить вашу гипотезу с погрешностью не более  $\Delta = 0.02$ , с вероятностью  $q \geq 0.95$ ? Рассмотрите отдельно общий случай (людей на острове бесконечно много).

## Бонусные задачи

- (2 балла) Решите задачу 4 в случае, если на острове живёт  $N$  людей.

Подсказка 1: в этом случае общее количество людей на острове с 1-й группой крови также будет колебаться.

Подсказка 2: при решении можете использовать следующее выражение

$$\text{Var}(p) = E(p - P)^2 = \frac{P(1 - P)}{n} \frac{N - n}{n - 1},$$

где  $p$  - оценка доли 1-й группы крови в экспериментальной выборке,  $P$  - доля 1-й группы крови на острове,  $n$  - размер выборки,  $N$  - размер населения острова.

За решение задачи с использованием подсказки 2 начисляется 1 балл, за решение задачи и доказательство подсказки 2, начисляется 2 балла.