Яндекс

Skoltech
Skolkovo Institute of Science and Technology

Основные понятия проверки гипотез

ПМИ ФКН ВШЭ, 27 сентября 2019 г.

Денис Деркач[1], Алексей Артёмов[1,2]

(Ряд слайдов взят из контента, использованного автором для MLHEP'19)

[1] ФКН ВШЭ [2] Сколтех

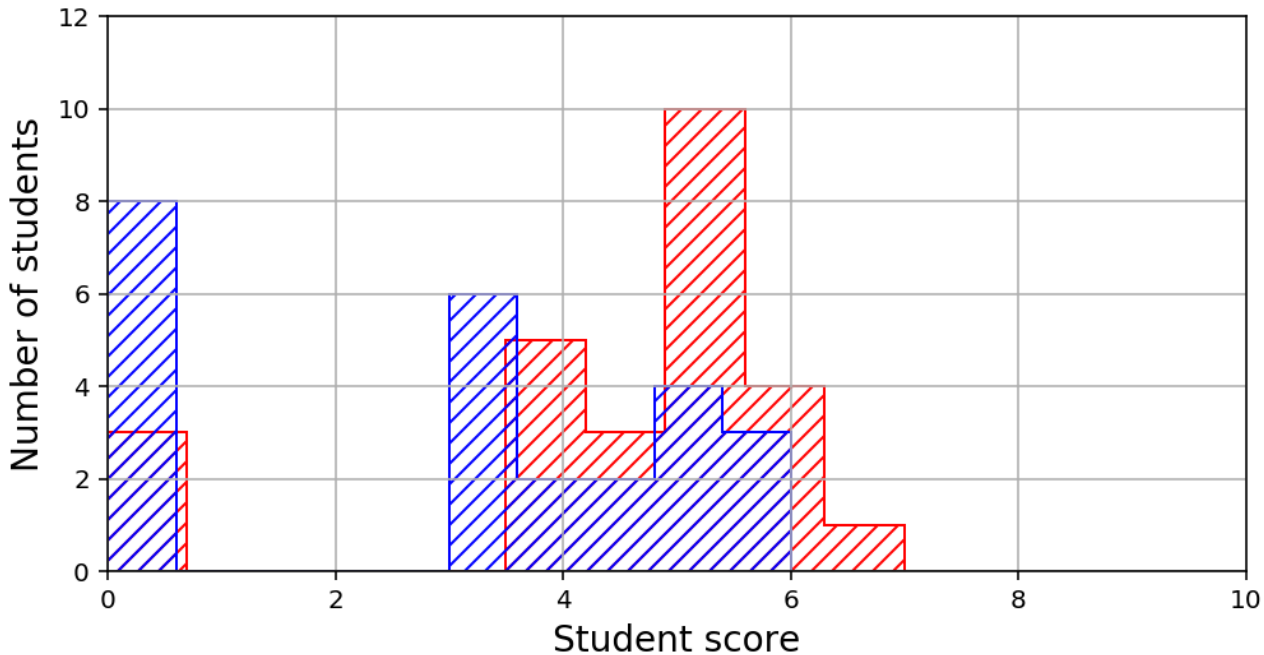
Содержание лекции

- Понятие статистической гипотезы. Нулевая гипотеза и альтернатива.
- Ошибки первого и второго рода. Мощность критерия.
- Как построить нулевую гипотезу.
- Критерий Вальда. P-значение.
- Критерий на основе отношения правдоподобия.
- Критерий Неймана-Пирсона.

Понятие статистической гипотезы

Мотивирующие приложения

› В первой группе — 26 студентов, а во второй — 24. Средний балл за тест №1 в первой группе 4.4 балла, во второй — 2.81.



› Что можно **спрашивать** об этих данных?

Понятие статистической гипотезы

Определение

Статистическая гипотеза — определенное предположение о распределении вероятностей, лежащем в основе наблюдаемой выборки данных.

- **Простая гипотеза** однозначно определяет функцию распределения на рассматриваемом множестве.
  - **Пример:** $\theta = \theta_0$ — простая гипотеза.
- **Сложная гипотеза** утверждает принадлежность распределения к некоторому множеству распределений на рассматриваемом множестве.
  - **Пример:** $\theta > \theta_0$ или $\theta < \theta_0$ — сложная гипотеза.

Понятие статистической гипотезы

Определение

Проверка статистической гипотезы — это процесс принятия решения о том, противоречит ли рассматриваемая статистическая гипотеза наблюдаемой выборке данных.

- Всегда рассматривается задача проверки гипотезы $\mathbb{H}_0$ против альтернативы $\mathbb{H}_1$ (или же задача $(\mathbb{H}_0, \mathbb{H}_1)$).

Статистический критерий и его характеристики

Односторонние и двусторонние критерии

Определение

Статистический критерий — строгое математическое правило, по которому не отвергается или отвергается статистическая гипотеза.

В зависимости от типа статистической гипотезы выделяют односторонние и двусторонние статистические критерии:

- Односторонний критерий

$$\mathbb{H}_0 : \theta \leqslant \theta_0 \quad \text{vs} \quad \mathbb{H}_1 : \theta > \theta_0.$$

- Двусторонний критерий

$$\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad \mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Параметрические и непараметрические критерии

Определение

Параметрический критерий — критерий, предполагающий, что выборка порождена распределением из заданного параметрического семейства. В частности, существует много критериев, предназначенных для анализа выборок из нормального распределения.

Определение

Непараметрический критерий — критерий, не опирающийся на дополнительные предположения о распределении.

Критическая область

- Статистический критерий — это правило, которое для каждой реализации выборки должно приводить к одному из двух решений: принять гипотезу $\mathbb{H}_0$ или отклонить ее (принять ее альтернативу $\mathbb{H}_1$).
- В связи с этим каждому критерию соответствует некоторое разбиение выборочного пространства χ на два взаимно дополняющих множества χ_0 и χ_1.
- χ_0 состоит из тех реализаций выборки x, для которых $\mathbb{H}_0$ не отвергается, а χ_1 из тех, для которых $\mathbb{H}_0$ отвергается (принимается $\mathbb{H}_1$).

Критическая область

Определение

В определениях предыдущего слайда

- χ_0 — область принятия гипотезы $\mathbb{H}_0$,
- χ_1 — область ее отклонения — **критическая область.**

- Таким образом любой критерий проверки гипотезы $\mathbb{H}_0$ однозначно задается соответствующей критической областью χ_1.

Связь с машинным обучением

- (Бинарный) классификатор — это правило, которое для вновь предъявленного экземпляра из выборки должно приводить к одному из двух решений: выдать класс $\mathbb{H}_0$ или выдать класс $\mathbb{H}_1$.
- Статистика критерия $\sim$ значение $h(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}$, соответствующее уверенности классификации.
- Одноклассовая классификация (one-class SVM, positive unlabeled learning и т.п.): ограничение области положительного класса χ_0 выборочного пространства χ.

Общий принцип принятия решений

Определение

Общий принцип принятия решений состоит в следующем:

- Если в эксперименте наблюдается **маловероятное** при справедливости гипотезы $\mathbb{H}_0$ событие, то считается, что гипотеза $\mathbb{H}_0$ не согласуется с данными и в этом случае она отклоняется (обнуляется — ср. «нулевая гипотеза»).
- В противном случае считается что данные не противоречат $\mathbb{H}_0$ и $\mathbb{H}_0$ принимается.

Уровень значимости

› В соответствии с общим принципом принятия решения критическую область χ_1 выбирают так, чтобы была мала вероятность $\mathbb{P}(\mathbf{X}^\ell \in \chi_1 | \mathbb{H}_0)$.

Определение

Говорят, что критерий **имеет уровень значимости** α, если

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}^\ell \in \chi_1 | \mathbb{H}_0) \leqslant \alpha.$$

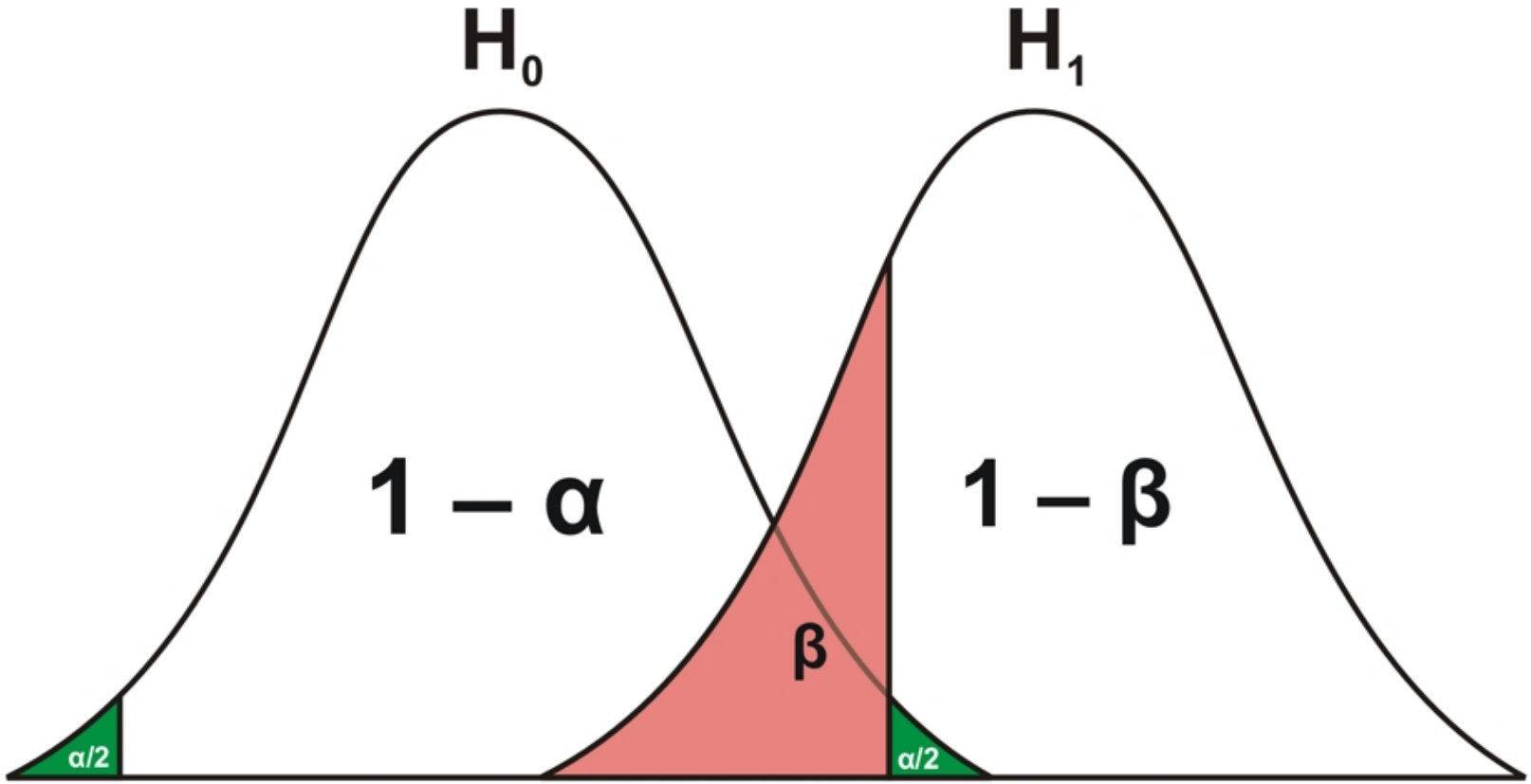
Ошибки при проверке гипотез

› Следуя любому критерию, мы можем принять правильное решение, либо совершить одну из двух ошибок — первого или второго рода.

		Верная гипотеза	
		$\mathbb{H}_0$	$\mathbb{H}_1$
Результат применения	$\mathbb{H}_0$	OK	ошибка 2-го рода β
критерия	$\mathbb{H}_1$	ошибка 1-го рода α	OK

› В соответствии с военной терминологией, ошибка 1-го рода — ложная тревога; ошибка 2-го рода — пропуск цели

Ошибки при проверке гипотез



Classification quality evaluation: accuracy

- Given a labeled sample $X^\ell = \left\{(\mathbf{x}_i, y_i)\right\}_{i=1}^{\ell}$, $y_i \in \{-1, +1\}$, and some candidate h, how well does h perform on X^ℓ?

Classification quality evaluation: accuracy

- Given a labeled sample $X^\ell = \left\{(\mathbf{x}_i, y_i)\right\}_{i=1}^{\ell}$, $y_i \in \{-1, +1\}$, and some candidate h, how well does h perform on X^ℓ?
- Let the thresholded decision rule be $a(x) = [h(x) > t]$ (t: hyperparameter)

Classification quality evaluation: accuracy

- Given a labeled sample $X^\ell = \left\{(\mathbf{x}_i, y_i)\right\}_{i=1}^{\ell}$, $y_i \in \{-1, +1\}$, and some candidate h, how well does h perform on X^ℓ?
- Let the thresholded decision rule be $a(x) = [h(x) > t]$ (t: hyperparameter)
- Obvious choice: accuracy

$$\text{accuracy}(a, X^\ell) = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell}[a(\mathbf{x}_i) = y_i]$$

- Example: Higgs challenge — selection of the interesting signal $H \to \tau\tau$ decay against the already known backround
- 164,333 background, 85,667 signal events (66% background)

Classification quality evaluation: confusion matrix

	Label $y = 1$	Label $y = -1$
Decision $a(x) = 1$	True Positive (TP)	False Positive (FP)
Decision $a(x) = -1$	False negative (FN)	True Negative (TN)

Classification quality evaluation: confusion matrix

	Label $y = 1$	Label $y = -1$
Decision $a(x) = 1$	True Positive (TP)	False Positive (FP)
Decision $a(x) = -1$	False negative (FN)	True Negative (TN)

› Rates are often more informative:

$$\text{False Positive Rate aka FPR} = \frac{\text{FP}}{\text{FP} + \text{TN}},$$

$$\text{True Positive Rate aka TPR} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}},$$

Classification quality evaluation: confusion matrix

	Label $y = 1$	Label $y = -1$
Decision $a(x) = 1$	True Positive (TP)	False Positive (FP)
Decision $a(x) = -1$	False negative (FN)	True Negative (TN)

- Rates are often more informative:

$$\text{False Positive Rate aka FPR} = \frac{\text{FP}}{\text{FP} + \text{TN}},$$

$$\text{True Positive Rate aka TPR} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}},$$

- While accuracy can be expressed, too

$$\text{accuracy} = \frac{\text{TP} + \text{TN}}{\text{TP} + \text{FP} + \text{FN} + \text{TN}}$$

Classification quality: the receiver operating curve

- Often $h(\mathbf{x})$ is more valuable than its thresholded version $a(x) = [h(x) > t]$

Classification quality: the receiver operating curve

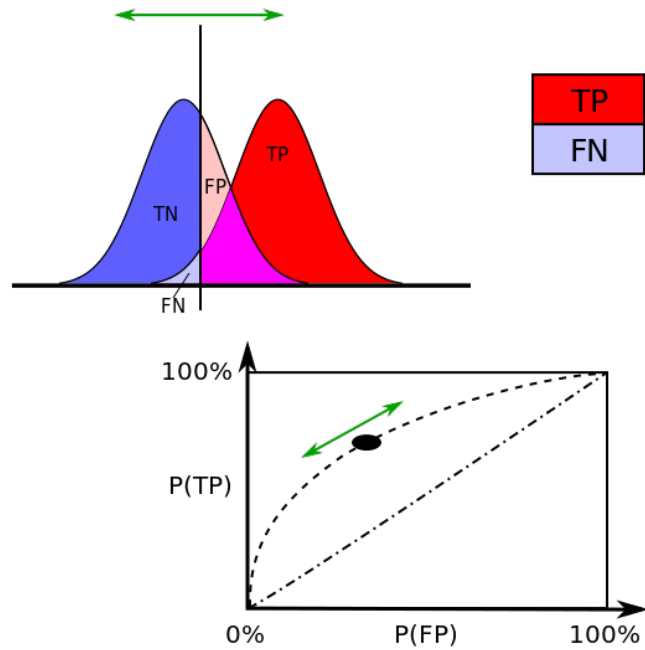
- Often $h(\mathbf{x})$ is more valuable than its thresholded version $a(x) = [h(x) > t]$
- Consider two-dimensional space with coordinates (TPR(t), FPR(t)), corresponding to various choices of the threshold t

Classification quality: the receiver operating curve

- Often $h(\mathbf{x})$ is more valuable than its thresholded version $a(x) = [h(x) > t]$
- Consider two-dimensional space with coordinates (TPR(t), FPR(t)), corresponding to various choices of the threshold t
- The plot TPR(t) vs. FPR(t) is called the receiver operating characteristic (ROC) curve

Classification quality: the receiver operating curve

- Often $h(\mathbf{x})$ is more valuable than its thresholded version $a(x) = [h(x) > t]$
- Consider two-dimensional space with coordinates (TPR(t), FPR(t)), corresponding to various choices of the threshold t
- The plot TPR(t) vs. FPR(t) is called the receiver operating characteristic (ROC) curve
- Area under curve (ROC-AUC) reflects classification quality



Source: Wikipedia

Classification quality: imbalanced data

- Recall the Higgs: 164,333 background vs. 85,667 signal events (66% background)

Classification quality: imbalanced data

- Recall the Higgs: 164,333 background vs. 85,667 signal events (66% background)
- TPR(t) vs. FPR(t) / ROC is bad for imbalanced data: for $\ell = 1000$, $n_- = 950$ (high background noise), $n_+ = 50$ (low signal), a trivial rule $h(\mathbf{x}) = -1$ ("treat everything as background") would yield:

Classification quality: imbalanced data

- Recall the Higgs: 164,333 background vs. 85,667 signal events (66% background)
- TPR(t) vs. FPR(t) / ROC is bad for imbalanced data: for $\ell = 1000$, $n_- = 950$ (high background noise), $n_+ = 50$ (low signal), a trivial rule $h(\mathbf{x}) = -1$ ("treat everything as background") would yield:
  - accuracy$(a, X^\ell) = 0.95$ (bad)

Classification quality: imbalanced data

- Recall the Higgs: 164,333 background vs. 85,667 signal events (66% background)
- TPR(t) vs. FPR(t) / ROC is bad for imbalanced data: for $\ell = 1000$, $n_- = 950$ (high background noise), $n_+ = 50$ (low signal), a trivial rule $h(\mathbf{x}) = -1$ ("treat everything as background") would yield:
  - accuracy$(a, X^\ell) = 0.95$ (bad)
  - TPR$(a, X^\ell) = 0.$ (OK)

Classification quality: imbalanced data

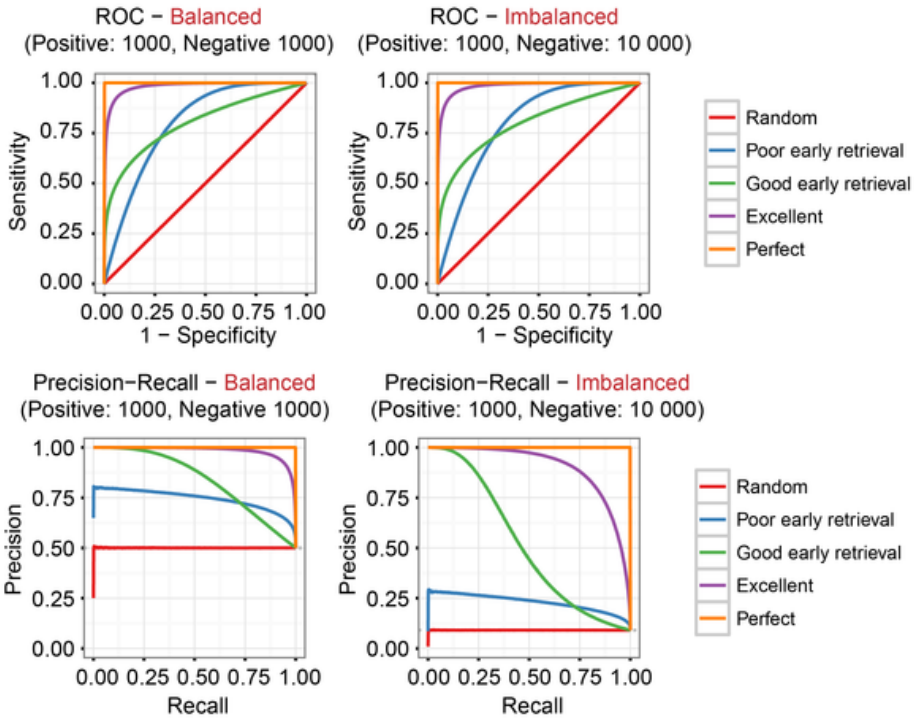
- Recall the Higgs: 164,333 background vs. 85,667 signal events (66% background)
- TPR(t) vs. FPR(t) / ROC is bad for imbalanced data: for $\ell = 1000$, $n_- = 950$ (high background noise), $n_+ = 50$ (low signal), a trivial rule $h(\mathbf{x}) = -1$ ("treat everything as background") would yield:
  - accuracy$(a, X^\ell) = 0.95$ (bad)
  - TPR$(a, X^\ell) = 0.$ (OK)
  - FPR$(a, X^\ell) = 0.$ (bad)

Classification quality: imbalanced data

- Recall the Higgs: 164,333 background vs. 85,667 signal events (66% background)
- TPR(t) vs. FPR(t) / ROC is bad for imbalanced data: for $\ell = 1000$, $n_- = 950$ (high background noise), $n_+ = 50$ (low signal), a trivial rule $h(\mathbf{x}) = -1$ ("treat everything as background") would yield:
  - accuracy$(a, X^\ell) = 0.95$ (bad)
  - TPR$(a, X^\ell) = 0.$ (OK)
  - FPR$(a, X^\ell) = 0.$ (bad)
- Criteria better suited for imbalanced problems:

$$\text{precision} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FP}}, \qquad \text{recall} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}}$$

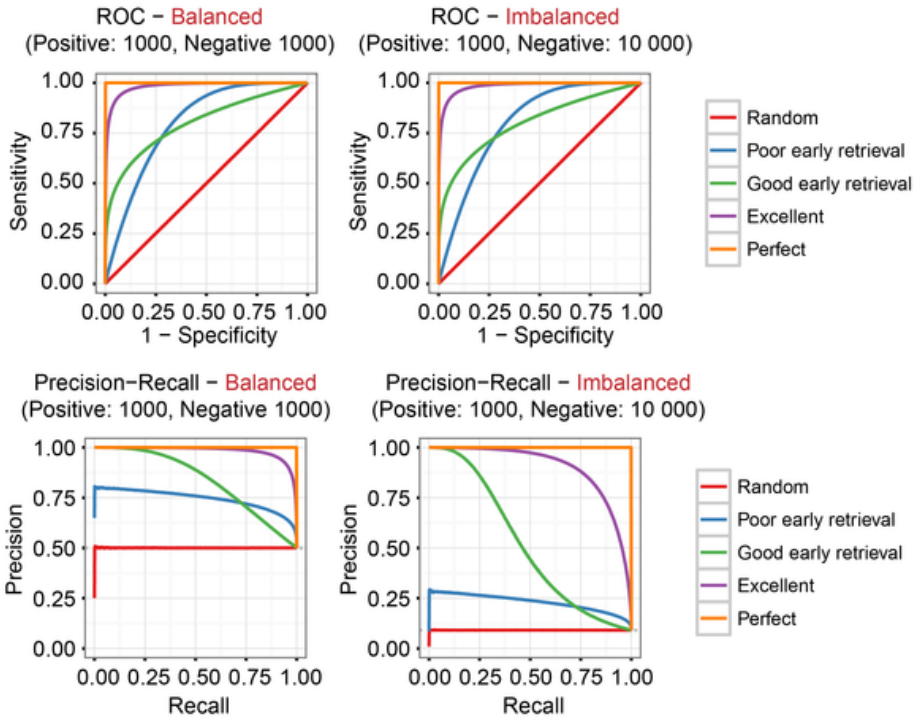
Classification quality: imbalanced data



Source: classeval.wordpress.com

› The plot recall vs. precision is called the precision-recall (PR) curve

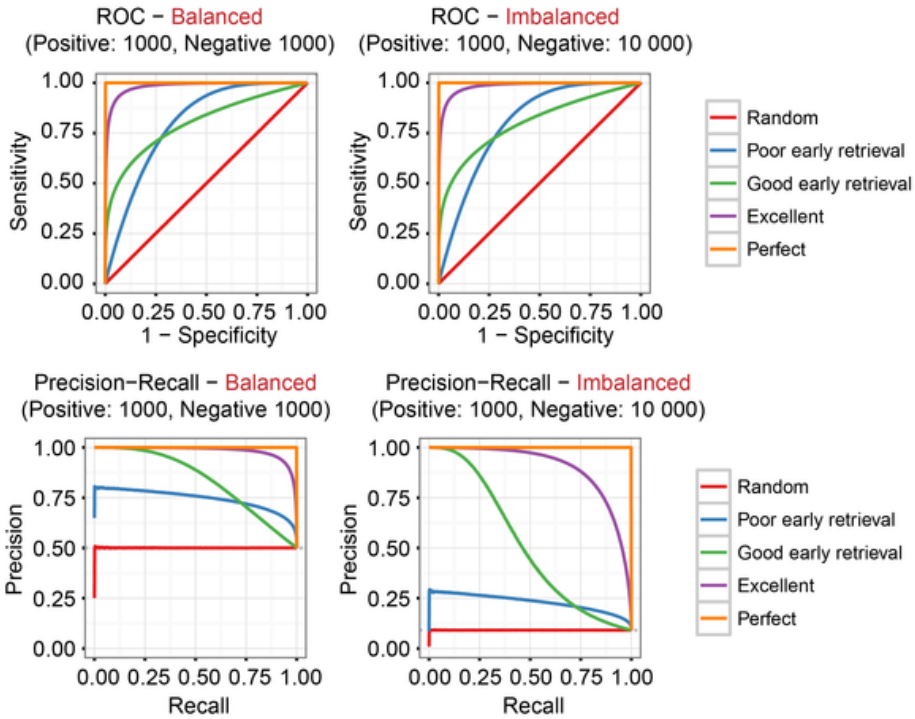
Classification quality: imbalanced data



Source: classeval.wordpress.com

- The plot recall vs. precision is called the precision-recall (PR) curve
- Recall(t) vs. Precision(t) is good for imbalanced data: for $\ell = 1000$, $n_- = 950$ (high background noise), $n_+ = 50$ (low signal), a trivial rule $h(\mathbf{x}) = -1$ would yield:

Classification quality: imbalanced data



Source: classeval.wordpress.com

- The plot recall vs. precision is called the precision-recall (PR) curve
- Recall(t) vs. Precision(t) is good for imbalanced data: for $\ell = 1000$, $n_- = 950$ (high background noise), $n_+ = 50$ (low signal), a trivial rule $h(\mathbf{x}) = -1$ would yield:
  - Recall$(a, X^\ell) = 0$. (OK)
  - Precision$(a, X^\ell) = 0$. (OK)

Мощность (чувствительность) критерия

- Пусть критерий имеет критическую область χ_1, а $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ — множество всех допустимых распределений выборки $\mathbf{X}^\ell$.
- При этом $\mathcal{F}_0$ — множество распределений, удовлетворяющих гипотезе $\mathbb{H}_0$, а $\mathcal{F}_1$ — соответственно $\mathbb{H}_1$.

Определение

Функционал

$$W(F) = W(F; \chi_1) = \mathbb{P}(\mathbf{X}^\ell \in \chi_1 | F), \qquad F \in \mathcal{F}$$

называется **функцией мощности критерия**.

- Другими словами, мощность критерия показывает вероятность попадания значения выборки $\mathbf{X}^\ell$ в критическую область χ_1, когда F — ее истинное распределение.

Связь мощности и ошибок различных родов

Через функцию мощности легко выразить вероятности обоих типов ошибок, свойственных нашему критерию.

Определение

- $W(F)$ — **вероятность ошибки первого рода** при $F \in \mathcal{F}_0$.
- $1 - W(F)$ — **вероятность ошибки второго рода** при $F \in \mathcal{F}_1$.

Размер критерия

Определение

Размер критерия:

$$\alpha = \sup_{F \in \mathcal{F}_0} W(F).$$

- Берется наихудшая из всех процедур, которые могли породить выборку $\mathbf{X}^\ell$ согласно нулевой гипотезе.
- Отсюда легко видеть что если размер критерия не превосходит α, то его уровень значимости равен α.
- Для простых гипотез ($\mathcal{F}_0 = \{F_0\}$), естественно,

$$\alpha = W(F_0) = \mathbb{P}(\mathbf{X}^\ell \in \chi_1 | F_0).$$

Условно-экстремальная постановка

- Логично стремление построить критерий так, чтобы свести к минимуму вероятности ошибок обоих типов.
- Однако при фиксированном объеме выборки сумма вероятностей ошибок обоих типов не может быть сделана сколь угодно малой.
- Поэтому руководствуются рациональным принципом выбора критической области.

Определение (Условно-экстремальная постановка)

Из всех критических областей, **удовлетворяющих заданному уровню значимости** ($\leqslant \alpha$), выбирается та, для которой **вероятность ошибки 2-го рода минимальна** ($\beta \to \inf$).

Подсчет мощности данного критерия

Пример

- Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, где σ — известно.
- Рассмотрим 2 гипотезы: $\mathbb{H}_0 : \mu \leqslant 0; \quad \mathbb{H}_1 : \mu > 0.$
- Рассмотрим критерий — $\mathbb{H}_0$ отклоняется, если $T = \overline{X}_n > c.$
- Тогда критическая область $\chi_1 = \{\mathbf{X}^\ell : T(\mathbf{X}^\ell) > c\}.$
- Значит

$$W(\mu) = \mathbb{P}(\overline{X}_n > c) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}(c-\mu)}{\sigma}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z > \frac{\sqrt{n}(c-\mu)}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(c-\mu)}{\sigma}\right),$$

где Z — стандартная нормальная величина.

Подсчет мощности данного критерия

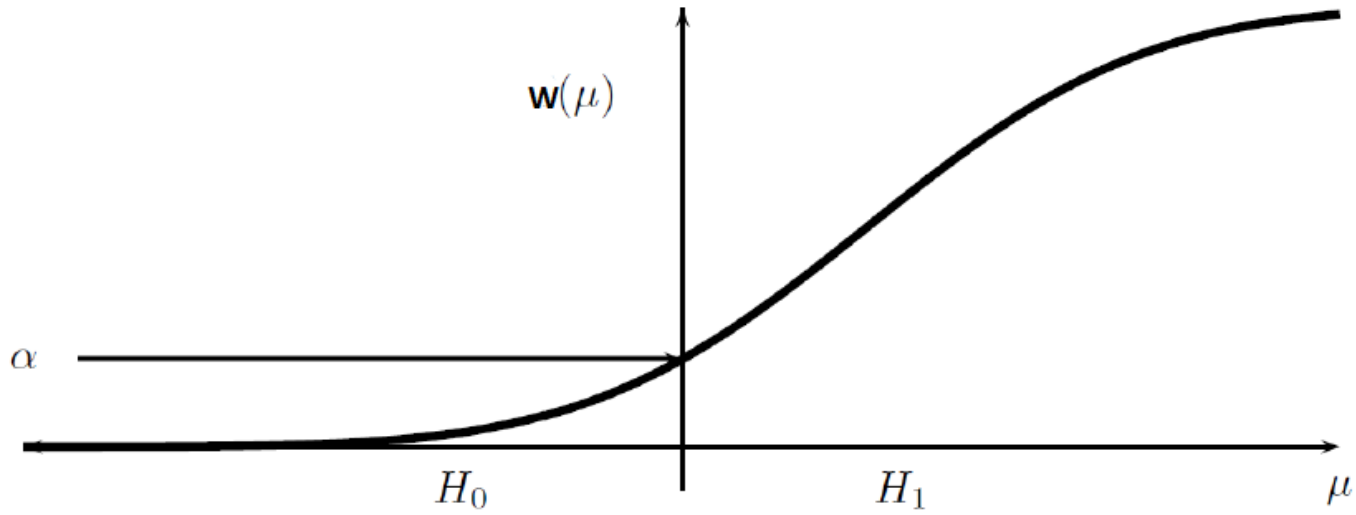


Рис.: $W(\mu)$

› Отсюда легко видеть, что размер критерия равен

$$W(0) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(c-\mu)}{\sigma} \right) \right\} = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}c}{\sigma} \right).$$

Статистический критерий и его характеристики

Пример

Чтобы размер критерия равнялся α необходимо, чтобы $c = \frac{\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{n}}$.

Определение

Наиболее мощный критерий — критерий, который имеет максимальную мощность относительно гипотезы $\mathbb{H}_1$ (т.е максимальную $1 - W(F)$ при $F \in \mathcal{F}_1$) среди всех критериев размера α.

Статистический критерий и его характеристики

- В конкретных задачах наиболее мощный критерий не всегда достижим, поэтому в реальных задачах часто приходится ограничиваться более умеренными требованиями.
- Минимальным таким требованием является требование несмещенности.

Определение

Статистический критерий называется несмещенным, если при любом альтернативном распределении данных мы должны попадать в критическую область с большей вероятностью, нежели при нулевой гипотезе.

Статистический критерий и его характеристики

В случае выборок большого объема важным также является условие состоятельности.

Определение

Статистический критерий называется состоятельным, если в случае истинности альтернативной гипотезы при большом числе наблюдений мы будем попадать в критическую область с вероятностью близкой к 1 (т.е., отклоняя нулевую гипотезу, мы будем принимать правильное решение).

Нулевая гипотеза: построение

- Hypothesis: “Adding water to toothpaste protects against cavities.”

Нулевая гипотеза: построение

- Hypothesis: “Adding water to toothpaste protects against cavities.”
- Null hypothesis ($\mathbb{H}_0$): “Adding water does not make toothpaste more effective in fighting cavities.”
- Hypothesis: “The evidence produced before the court proves that this man is guilty.”

Нулевая гипотеза: построение

- Hypothesis: “Adding water to toothpaste protects against cavities.”
- Null hypothesis ($\mathbb{H}_0$): “Adding water does not make toothpaste more effective in fighting cavities.”
- Hypothesis: “The evidence produced before the court proves that this man is guilty.”
- Null hypothesis ($\mathbb{H}_0$): “This man is innocent.”

Нулевая гипотеза: построение

- Hypothesis: “Adding water to toothpaste protects against cavities.”
- Null hypothesis ($\mathbb{H}_0$): “Adding water does not make toothpaste more effective in fighting cavities.”
- Hypothesis: “The evidence produced before the court proves that this man is guilty.”
- Null hypothesis ($\mathbb{H}_0$): “This man is innocent.”
- Ситуация «по умолчанию» — похожа на ситуацию «презумпции невиновности».

Нулевая гипотеза и фальсифицируемость

- “Фальсифицируемость (принципиальная опровержимость утверждения, опровергаемость, критерий Поппера) — критерий научности эмпирической или иной теории, претендующей на научность.”[Википедия]
- **Научная теория не может быть принципиально неопровержимой.**
- Неопровержимость — признак лженауки (точнее, объявление нефальсифицируемой теории научной — признак лженауки).
- “Если **нельзя замыслить, придумать опыт,** в результате которого гипотеза может оказаться не верна, — это антинаучная@#$%, как бы красиво она ни звучала.”

Нулевая гипотеза и фальсифицируемость

- Являются ли фальсифицируемыми утверждения:

Нулевая гипотеза и фальсифицируемость

- Являются ли фальсифицируемыми утверждения:
  - “поддержка партии власти — 65%”?

Нулевая гипотеза и фальсифицируемость

- Являются ли фальсифицируемыми утверждения:
  - “поддержка партии власти — 65%”?
  - “все лебеди — белые”?

Нулевая гипотеза и фальсифицируемость

- Являются ли фальсифицируемыми утверждения:
  - “поддержка партии власти — 65%”?
  - “все лебеди — белые”?
  - “гороскоп определяет судьбу человека”?

Нулевая гипотеза и фальсифицируемость

- Являются ли фальсифицируемыми утверждения:
  - “поддержка партии власти — 65%”?
  - “все лебеди — белые”?
  - “гороскоп определяет судьбу человека”?
  - “рисунок кожного рельефа ладоней определяет черты характера человека”?

Нулевая гипотеза и фальсифицируемость

- Являются ли фальсифицируемыми утверждения:
  - “поддержка партии власти — 65%”?
  - “все лебеди — белые”?
  - “гороскоп определяет судьбу человека”?
  - “рисунок кожного рельефа ладоней определяет черты характера человека”?
  - … you name it
- Для любопытных:
  `http://lurkmore.to/Критерий_Поппера`

Действия в задачах проверки гипотез

1. Сформулировать (математически) нулевую гипотезу $\mathbb{H}_0$.
2. Сформулировать (математически) альтернативу.
3. Выбрать уровень значимости α.
4. Получить выборку $\mathbf{X}^\ell$.
5. Подсчитать значение статистики $T = T(\mathbf{X}^\ell)$.
6. Построить критическую область $\mathcal{R}_\alpha$.
7. На основе шагов 5—6 сделать вывод **о согласии** $\mathbb{H}_0$ **с данными** $\mathbf{X}^\ell$**.**

Типы статистических критериев

Типы статистических критериев

После краткого введения в теорию проверки гипотез пререйдем непосредственно к разлизным статистическим критериям. В данной лекции будут рассмотретны следующие статистические критерии:

- Критерий Вальда.
- P-значение.
- Тестирование на основе доверительного интервала.
- Критерий на основе отношения правдоподобия.
- Критерий Неймана-Пирсона для случая двух простых гипотез.

Критерий Вальда (Z-test)

Пусть:

- θ — скалярный параметр;
- $\widehat{\theta}$ — его оценка;
- $\widehat{se}$ — оценка стандартной ошибки оценки $\widehat{\theta}$.

Гипотеза:

$$\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad \mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Определение (Критерий Вальда размера α)

Если $\widehat{\theta}$ — асимптотически нормальная оценка параметра θ, т.е.

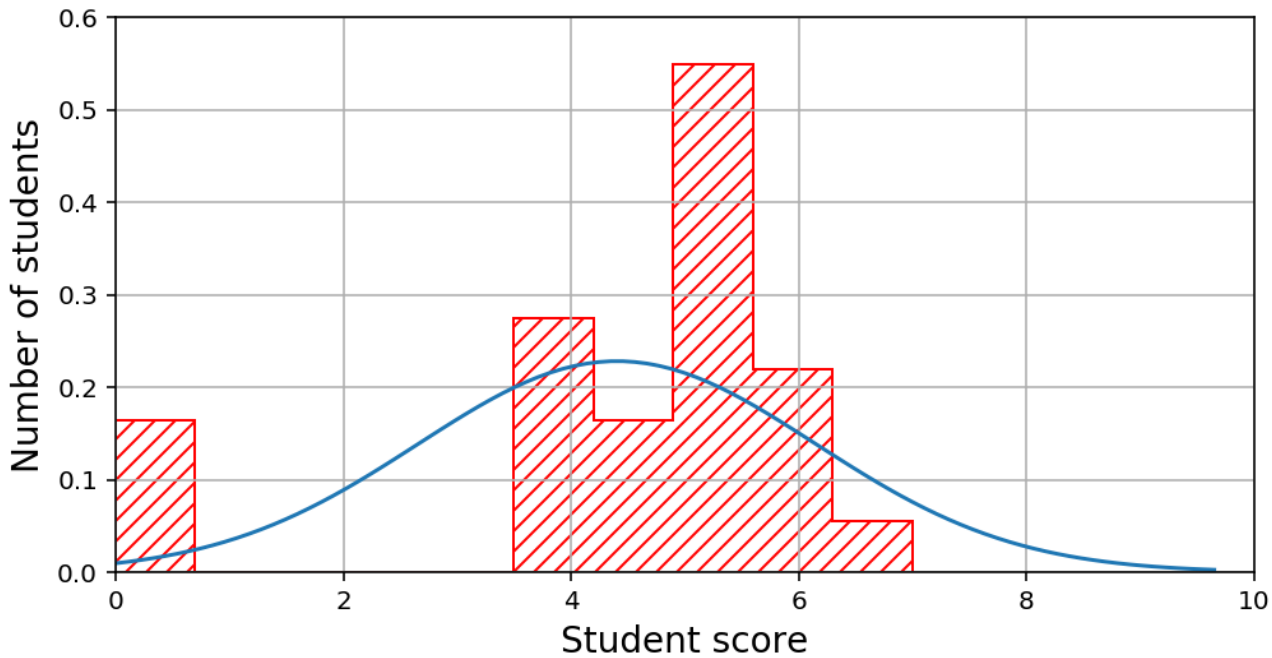
$$W = \frac{\widehat{\theta} - \theta_0}{\widehat{se}} \to \mathcal{N}(0, 1), \qquad n \to \infty,$$

то гипотеза $\mathbb{H}_0$ отклоняется, если $|W| > z_{\alpha/2}$.

Критерий Вальда (Z-test)

Рассмотрим выборку:

```
group1 = [
    6, 4, 4, 0, 5, 5, 7, 5, 4.5, 5,
    4, 4, 4.5, 0, 5, 5, 5, 5, 4, 5,
    0, 6, 5, 6, 4.5, 6]
```



Критерий Вальда (Z-test)

› Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Проверим гипотезу

$$\mathbb{H}_0 : \theta = 5 \quad \text{vs.} \quad \mathbb{H}_1 : \theta \neq 5.$$

Критерий Вальда (Z-test)

› Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Проверим гипотезу

$$\mathbb{H}_0 : \theta = 5 \quad \text{vs.} \quad \mathbb{H}_1 : \theta \neq 5.$$

› Как получить $\widehat{\theta}$ — оценку среднего?

Критерий Вальда (Z-test)

› Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Проверим гипотезу

$$\mathbb{H}_0 : \theta = 5 \quad \text{vs.} \quad \mathbb{H}_1 : \theta \neq 5.$$

› Как получить $\widehat{\theta}$ — оценку среднего?
$\widehat{\theta} = 4.4$

› Как получить $\widehat{se}$ — оценку стандартной ошибки оценки $\widehat{\theta}$?

Критерий Вальда (Z-test)

- Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Проверим гипотезу

$$\mathbb{H}_0 : \theta = 5 \quad \text{vs.} \quad \mathbb{H}_1 : \theta \neq 5.$$

- Как получить $\widehat{\theta}$ — оценку среднего?
  $\widehat{\theta} = 4.4$
- Как получить $\widehat{se}$ — оценку стандартной ошибки оценки $\widehat{\theta}$?
  $\widehat{se} = 1.748/\sqrt{26} = 0.342$
- Как получить $\widehat{se}$, если — оценка стандартной ошибки оценки $\widehat{\theta}$.

Критерий Вальда (Z-test)

- Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Проверим гипотезу

$$\mathbb{H}_0 : \theta = 5 \quad \text{vs.} \quad \mathbb{H}_1 : \theta \neq 5.$$

- Как получить $\widehat{\theta}$ — оценку среднего?
  $\widehat{\theta} = 4.4$
- Как получить $\widehat{se}$ — оценку стандартной ошибки оценки $\widehat{\theta}$?
  $\widehat{se} = 1.748/\sqrt{26} = 0.342$
- Как получить $\widehat{se}$, если — оценка стандартной ошибки оценки $\widehat{\theta}$.
  Например, бутстреп! (Для более сложных задач — информация Фишера, дельта-метод, ...)
- При $\alpha = 0.05$, поскольку $z_{\alpha/2} = 1.96$, имеем

$$W = \frac{\widehat{\theta} - \theta}{\widehat{se}} = \frac{4.4 - 5}{0.342} = -1.738$$

Теорема

Асимптотически размер критерия Вальда равен α, то есть

$$W(F) = \mathbb{P}(|W| > z_{\alpha/2}|f) \to \alpha, \;\; n \to \infty, \;\; f \in \mathcal{F}_0.$$

Доказательство.

При условии, что $\theta = \theta_0$, в силу асимптотической нормальности оценки выполнено $\frac{\widehat{\theta}-\theta_0}{\widehat{se}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. Следовательно, вероятность отклонить основную гипотезу, когда она на самом деле верна, равняется:

$$\mathbb{P}(|W| > z_{\alpha/2}|f) = \mathbb{P}\left(\frac{|\widehat{\theta} - \theta_0|}{\widehat{se}} > z_{\alpha/2}|f\right) \to$$
$$\to \mathbb{P}(|Z| > z_{\alpha/2}) = \alpha.$$

□

Пример (сравнение средних значений)

- Пусть $X_1, ..., X_m$ и $Y_1, ..., Y_n$ — две независимые выборки из генеральных совокупностей.
- Средние значения равны μ_1 и μ_2 соответственно.
- $\widehat{s}_1^2$ и $\widehat{s}_2^2$ — выборочные дисперсии.
- Положим $\delta = \mu_1 - \mu_2$.
- Проверим гипотезу $\mathbb{H}_0 : \delta = 0 \quad$ vs. $\quad \mathbb{H}_1 : \delta \neq 0$
- Построим статистики

$$\widehat{\delta} = \overline{X}_m - \overline{Y}_n; \qquad \widehat{se} = \sqrt{\frac{\widehat{s}_1^2}{m} + \frac{\widehat{s}_2^2}{n}}.$$

- Гипотеза $\mathbb{H}_0$ отвергается, если $|W| > z_{\alpha/2}$, где

$$W = \frac{\widehat{\delta} - 0}{\widehat{se}} = \frac{\overline{X}_m - \overline{Y}_n}{\sqrt{\frac{\widehat{s}_1^2}{m} + \frac{\widehat{s}_2^2}{n}}}.$$

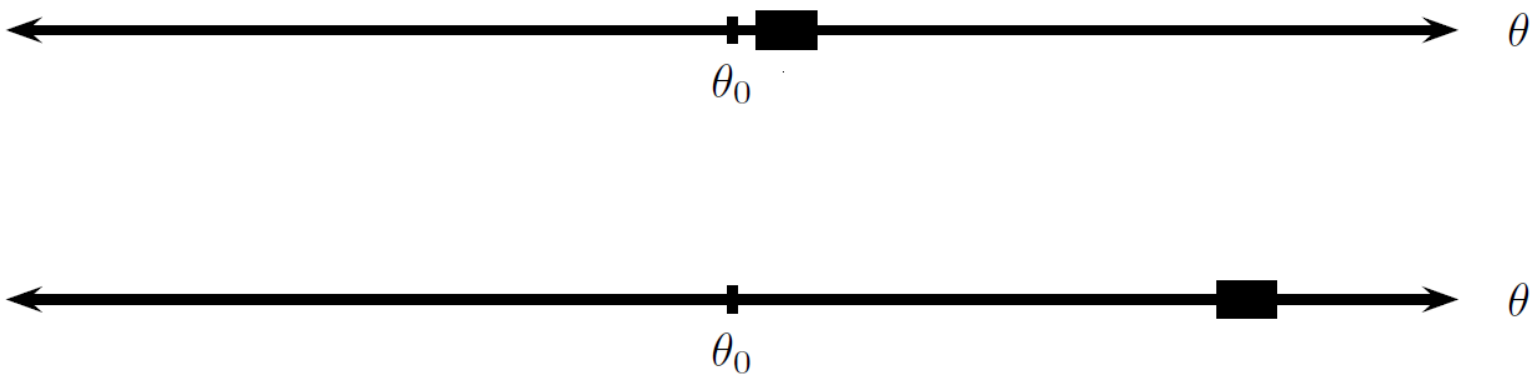
Доверительные интервалы

Теорема

Критерий Вальда размера α отклоняет гипотезу $\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0$ в пользу $\mathbb{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ если и только если $\theta_0 \notin C$, где

$$C = (\widehat{\theta} - \widehat{se} z_{\alpha/2}, \widehat{\theta} + \widehat{se} z_{\alpha/2})$$

Таким образом, тестирование гипотезы эквивалентно проверке, попало ли значение Θ_0 в доверительный интервал.



P-значение

Определение

Пусть для каждого $\alpha \in (0, 1)$ имеется критерий размера α для некоторой статистики (функции от выборки) $T(\mathbf{X}^\ell)$ с критической областью $\mathcal{R}_\alpha$. Тогда

$$p - \text{value} = \inf\{\alpha : T(\mathbf{X}^\ell) \in \mathcal{R}_\alpha\}.$$

- Таким образом, p-value - это наименьший уровень значимости, на котором еще можно отклонить $\mathbb{H}_0$.
- Чем меньше p-value - тем вероятнее, что $\mathbb{H}_0$ надо отклонить.

P-значение, rules of thumb

- Типичные значения для p-value:
  - $p < 0.01 \to \mathbb{H}_0$ — заведомо не верна
  - $p \sim 0.01 - 0.05 \to \mathbb{H}_0$ — не верна
  - $p \sim 0.05 - 0.10 \to \mathbb{H}_0$ — скорее не верна
  - $p > 0.1 \to$ ничего определенного о гипотезе $\mathbb{H}_0$ сказать нельзя
- Большое p-value не является подтверждением гипотезы $\mathbb{H}_0$. Большое p-value появляется, если:
  - $\mathbb{H}_0$ — верна
  - $\mathbb{H}_0$ — неверна, но мощность критерия недостаточна

P-значение, примеры из статей

- “Our original co-occurrence-based semantic model predicts voxel responses significantly better than the simplified model (paired t-test across all voxels; $t = 170$, $p < 1e - 16$).”

P-значение, примеры из статей

- “Our original co-occurrence-based semantic model predicts voxel responses significantly better than the simplified model (paired t-test across all voxels; $t = 170$, $p < 1e - 16$).”
- “However, we did not find a significant correlation between dextrality and PrAGMATiC generalization scores (Pearson’s $r = -0.20$, p-value$= 0.66$ for the left hemisphere; $r = -0.06$, p-value $= 0.90$ for the right).”

P-значение, примеры из статей

- “Our original co-occurrence-based semantic model predicts voxel responses significantly better than the simplified model (paired t-test across all voxels; $t = 170$, $p < 1e - 16$).”
- “However, we did not find a significant correlation between dextrality and PrAGMATiC generalization scores (Pearson’s $r = -0.20$, p-value$= 0.66$ for the left hemisphere; $r = -0.06$, p-value $= 0.90$ for the right).”
- “At least four dimensions explained a significant amount of variance ($P < 0.001$, Bonferroni-corrected bootstrap test) in all but one subject; in the last subject only three dimensions were significant (Extended Data Fig. 2)”.

Теорема

- Пусть критерий размера α, построенный для статистики $T(\mathbf{X}^\ell)$, имеет вид: $\mathbb{H}_0$ отвергается, если $T(\mathbf{X}^\ell) > c_\alpha$
- Гипотезе $\mathbb{H}_0$ соответствует семейство распределений $\mathcal{F}_0$.
- Тогда

$$p\text{-value} = \sup_{f \in \mathcal{F}_0} \mathbb{P}(T(\mathbf{X}^\ell) \geqslant T(\mathbf{x}^\ell)|f),$$

  где $\mathbf{X}^\ell$ — реализация выборки $\mathbf{x}^\ell$. Если $\mathcal{F}_0 = f$, то

$$p\text{-value} = \mathbb{P}(T(\mathbf{X}^\ell) \geqslant T(\mathbf{x}^\ell)|f).$$

- То есть p-value — это вероятность (при выполнении гипотезы $\mathbb{H}_0$) того, что статистика $T(\mathbf{X}^\ell)$ примет значение больше либо равное тому, которое реализовалось в опыте (реализация $\mathbf{X}^\ell$)

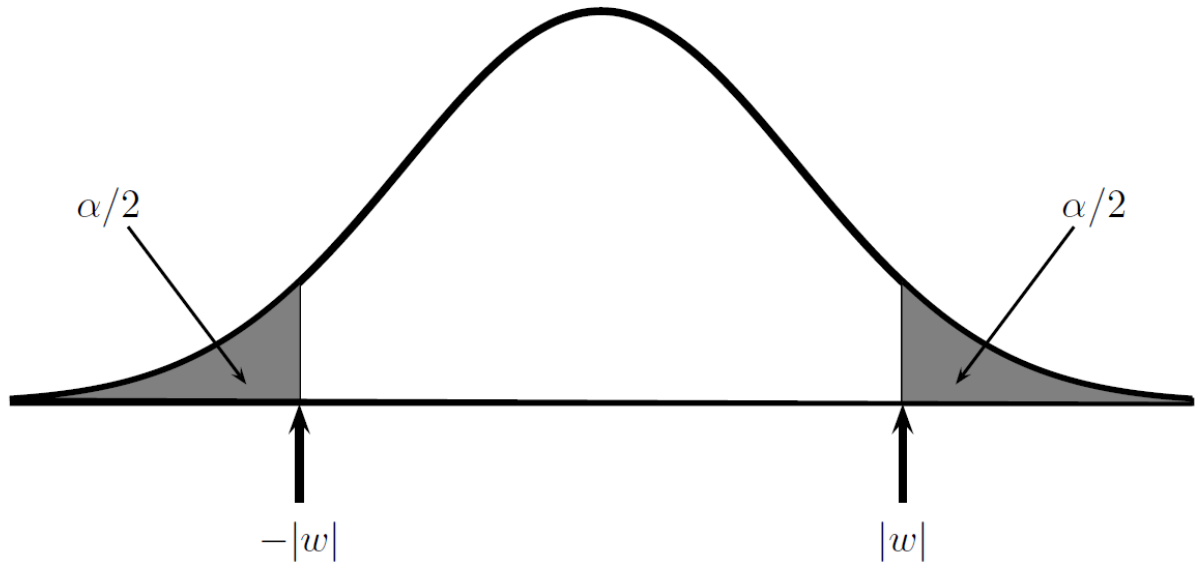
P-значение для критерия Вальда

Теорема

Пусть $w = \frac{(\widehat{\theta}-\theta_0)}{\widehat{se}}$ — наблюдаемое значение статистики Вальда W. Тогда:

$$p\text{-value} = \mathbb{P}(|W| > |w||f) \simeq \mathbb{P}(|Z| > |w|) = 2\Phi(-|w|),$$

где $Z \sim N(0,1), \quad f \in \mathcal{F}_0$.



Пример (Равенство значений холестерина в крови)

Здесь как и в примере про сравнение средних значений:

$$W = \frac{\widehat{\delta} - 0}{\widehat{se}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}} = \frac{216.2 - 195.3}{\sqrt{5^2 + 2.4^2}} = 3.78.$$

Пусть $Z \sim N(0, 1)$, тогда

$$p - value = \mathbb{P}(|Z| > 3.78) = 2 \cdot \mathbb{P}(Z < -3.78) = 0.0002$$

.

Критерий на основе отношения правдоподобия

Определение

Рассмотрим две конкурирующие гипотезы

$$\mathbb{H}_0 : f \in \mathcal{F}_0 \quad \text{vs.} \quad \mathbb{H}_1 : f \in \mathcal{F}_1$$

Пусть $\widehat{f}$ — ОМП и $\widehat{f}_0$ — ОМП при $f \in \mathcal{F}_0$ Статистика отношения правдоподобия имеет вид:

$$\lambda = 2 \log \frac{\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{L}(f)}{\sup_{f \in \mathcal{F}_0} \mathcal{L}(f)} = 2 \log \frac{\mathcal{L}(\widehat{f})}{\mathcal{L}(\widehat{f}_0)}.$$

Распределение хи-квадрат (χ^2)

Определение (распределение хи-квадрат(χ^2))

Пусть $Z_1, ..., Z_k$ - независимые стандартно нормально распределенные случайные величины. $V = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$, тогда $V \sim \chi_k^2$ - хи-квадрат с k степенями свободы

$$F(V) = \frac{v^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{V}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})}, \quad \mathbb{E}(V) = k, \quad \mathbb{V}(V) = 2k$$

$\chi^2_{k,\alpha} = F^{-1}(1-\alpha)$ - верхняя квантиль, F - функция распределения, т.е.

$$\mathbb{P}(\chi_k^2 > \chi^2_{k,\alpha}) = \alpha.$$

Теорема

Допустим, что $f = (\theta_1, \ldots, \theta_q, \theta_{q+1}, ..., \theta_r)$. Пусть $\mathcal{F}_0 = \{f : (\theta_{q+1}, \ldots, \theta_r) = (\theta_{0,q+1}, ..., \theta_{0,r})\}$.
Пусть λ - критерий на основе отношения правдоподобия. При гипотезе $\mathbb{H}_0 : f \in \mathcal{F}_0$

$$\lambda(\mathbf{X}^\ell) \rightsquigarrow \chi^2_{q,\alpha},$$

где q - размерность F за вычетом размерности $\mathcal{F}_0$. p-value для критерия равно $\mathbb{P}(\chi^2_q > \lambda)$.

Пример

Пусть $f = (\theta_1, \ldots, \theta_5)$, необходимо проверить, что $\theta_4 = \theta_5 = 0$.
Тогда у предельного распределения имеется 3 степени свободы.

Пример (Горох Менделя $1/3$)

Пример. Горох Менделя. Два типа: круглые желтые зерна и сморщенные зеленые зерна. Имеется 4 типа потомков: круглые желтые, сморщенные желтые, круглые зеленые и сморщенные зеленые. Количество потомков каждого типа образуют мультиномиальное распределение с вероятностью $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$.

Из теории следует, что

$$p = \left(\frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}\right).$$

В опыте получено, что $n = 556, X = (315, 101, 108, 32)$.

Пример (Горох Менделя $2/3$)

Статистика отношений правдоподобия для

$$\mathbb{H}_0 : p = p_0 \quad vs. \quad \mathbb{H}_1 : p \neq p_0$$

принимает вид:

$$\lambda = 2 \log \frac{\mathcal{L}(\widehat{p})}{\mathcal{L}(\widehat{p_0})} = 2 \sum_{j=1}^{4} X_j \log \frac{\mathcal{L}(\widehat{p})}{\mathcal{L}(\widehat{p_0})} = 2 \cdot (315 \log(\frac{315/556}{9/16}) +$$

$$+101 \log(\frac{101/556}{3/16}) + 108 \log(\frac{108/556}{3/16}) + 32 \log(\frac{32/556}{1/16})) = 0.48$$

Пример (Горох Менделя $3/3$)

При гипотезе $\mathbb{H}_1$ 4 параметра. Так как сумма параметров должна равняться 1, то размерность пространства параметров равна 3. При гипотезе $\mathbb{H}_0$ свободных параметров нет, значит количество степеней свободы равно 3 и χ^3_3 является предельным распределением.

$$p - value = \mathbb{P}(\chi^2_3 > 0.48) = 0.92$$

Замечание

Как правило, и критерий χ^2, и критерий отношения правдоподобий дают примерно одинаковые результаты при условии, что размер выборки достаточно большой.

Критерий Неймана-Пирсона: две простые гипотезы

Показательный пример

- Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$, а нулевая гипотеза заключается в том, что $\theta = \theta_0$.
- Назовите достаточную статистику в этой задаче.

Показательный пример

- Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$, а нулевая гипотеза заключается в том, что $\theta = \theta_0$.
- Назовите достаточную статистику в этой задаче.
- Достаточная статистика: $T(\mathbf{X}^\ell) = \overline{X}_n$.
- Какое распределение $T(\mathbf{X}^\ell)$, когда верна $\mathbb{H}_0$?

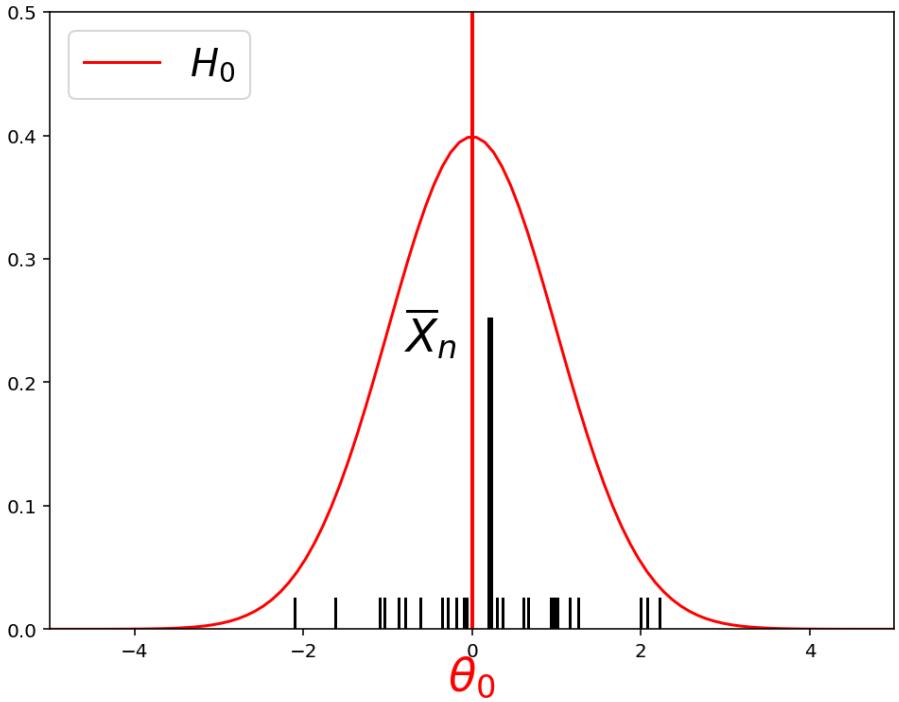
Показательный пример

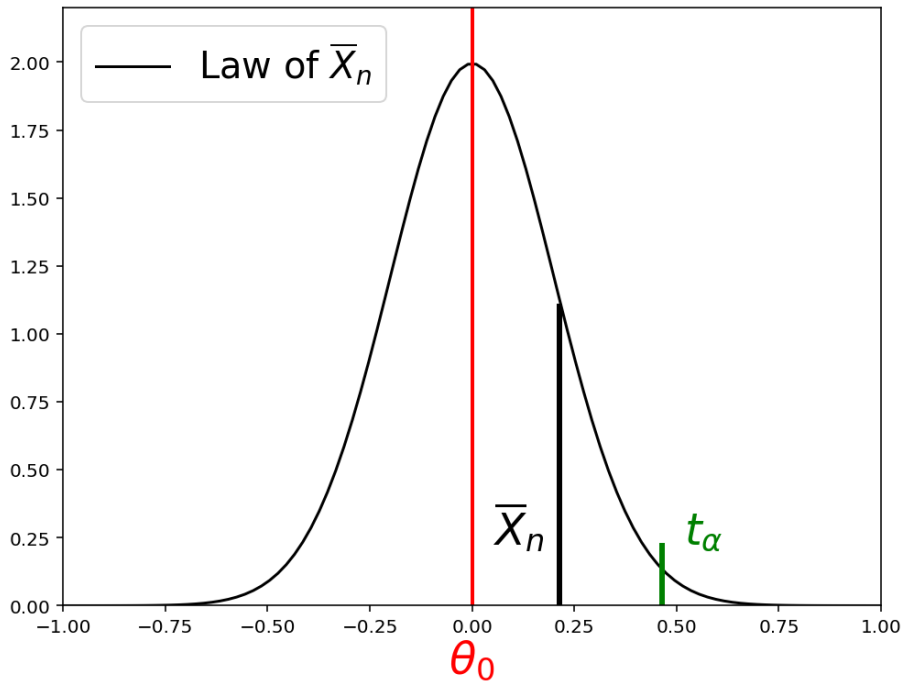
- Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$, а нулевая гипотеза заключается в том, что $\theta = \theta_0$.
- Назовите достаточную статистику в этой задаче.
- Достаточная статистика: $T(\mathbf{X}^\ell) = \overline{X}_n$.
- Какое распределение $T(\mathbf{X}^\ell)$, когда верна $\mathbb{H}_0$?
- $T(\mathbf{X}^\ell) \sim \mathcal{N}(\theta_0, \sigma^2/n)$
- Какова критическая область? (Когда отклоняем $\mathbb{H}_0$?)

Показательный пример

- Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$, а нулевая гипотеза заключается в том, что $\theta = \theta_0$.
- Назовите достаточную статистику в этой задаче.
- Достаточная статистика: $T(\mathbf{X}^\ell) = \overline{X}_n$.
- Какое распределение $T(\mathbf{X}^\ell)$, когда верна $\mathbb{H}_0$?
- $T(\mathbf{X}^\ell) \sim \mathcal{N}(\theta_0, \sigma^2/n)$
- Какова критическая область? (Когда отклоняем $\mathbb{H}_0$?)
- Критическая область $\mathcal{R}_\alpha = [t_\alpha, \infty)$, т.е. $T(\mathbf{X}^\ell) \geqslant t_\alpha$.

Показательный пример





Показательный пример

› Подсчитайте вероятность ложной тревоги в этой задаче.

Показательный пример

› Подсчитайте вероятность ложной тревоги в этой задаче.

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma} \geqslant \frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_0)}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_0)}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

› Как выбрать t_α, чтобы $\alpha \leqslant \alpha_0$?

Показательный пример

› Подсчитайте вероятность ложной тревоги в этой задаче.

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma} \geqslant \frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_0)}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_0)}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

› Как выбрать t_α, чтобы $\alpha \leqslant \alpha_0$?

$$t_{\alpha_0} = \theta_0 + \sigma x_{1-\alpha_0}/\sqrt{n}$$

Показательный пример

› Подсчитайте вероятность ложной тревоги в этой задаче.

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma} \geqslant \frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_0)}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_0)}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

› Как выбрать t_α, чтобы $\alpha \leqslant \alpha_0$?

$$t_{\alpha_0} = \theta_0 + \sigma x_{1-\alpha_0}/\sqrt{n}$$

› Пусть на самом деле верна альтернатива $\mathbb{H}_1 : \theta = \theta_1$, причем $\theta_1 > \theta_0$. Какова вероятность ошибки 2-го рода?

Показательный пример

› Подсчитайте вероятность ложной тревоги в этой задаче.

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0)}{\sigma} \geqslant \frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_0)}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_0)}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

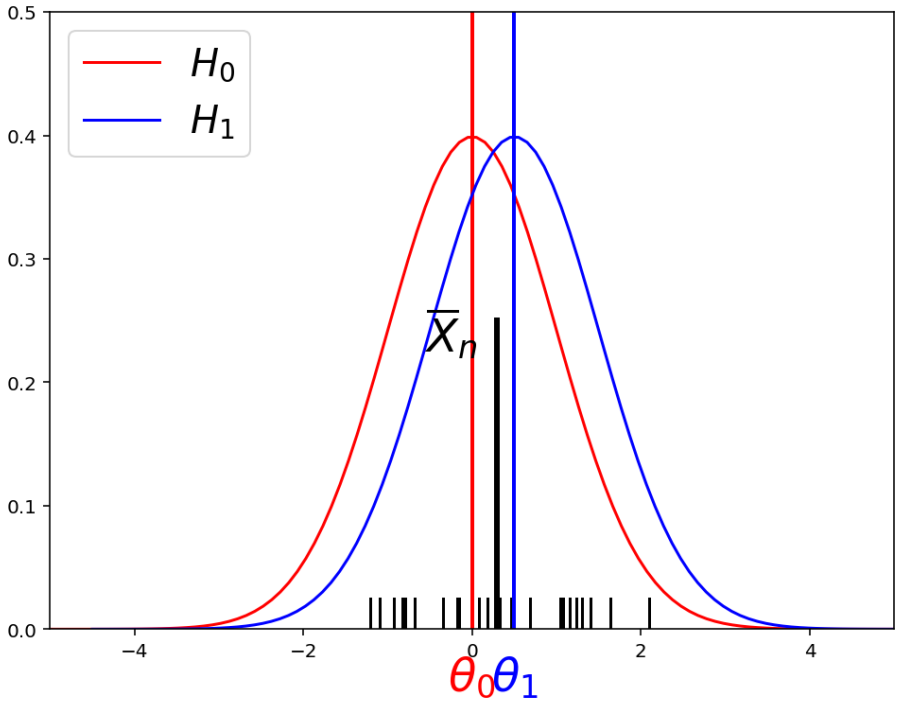
› Как выбрать t_α, чтобы $\alpha \leqslant \alpha_0$?

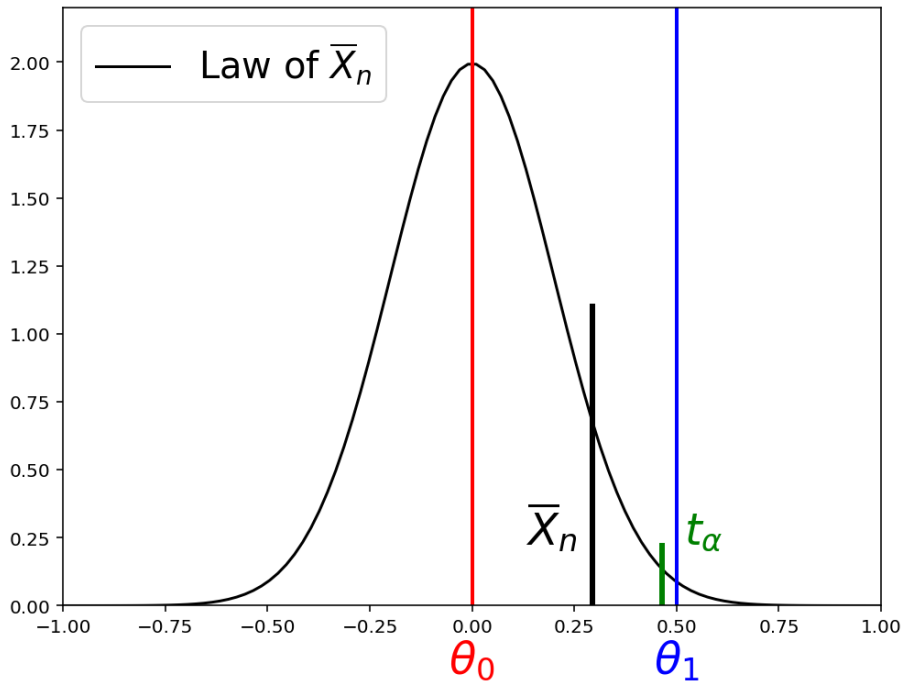
$$t_{\alpha_0} = \theta_0 + \sigma x_{1-\alpha_0}/\sqrt{n}$$

› Пусть на самом деле верна альтернатива $\mathbb{H}_1 : \theta = \theta_1$, причем $\theta_1 > \theta_0$. Какова вероятность ошибки 2-го рода?

$$\beta = \mathbb{P}_{\theta_1}\left(\overline{X}_n < t_{\alpha_0}\right) = \Phi\left(x_{1-\alpha_0} - \frac{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma}\right).$$

Показательный пример





Критерий Неймана-Пирсона для случая двух простых гипотез

Лемма (Неймана-Пирсона)

$\mathbb{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad \mathbb{H}_1 : \theta = \theta_1$

Статистика Неймана-Пирсона:

$$T = \frac{\mathcal{L}(\theta_1)}{\mathcal{L}(\theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_0)}. \tag{1}$$

Допустим, что $\mathbb{H}_0$ отвергается при $T > k$. Выберем k так, что $\mathbb{P}_{\theta_0}(T > k) = \alpha$.

Тогда, критерий Неймана-Пирсона (на основе статистики (1)) будет иметь наибольшую мощность $W(\theta_1)$ среди всех критериев размера α.