ПСМО ФКН ВШЭ, 3 курс, 1 модуль

Задание 1. Точечные и интервальные оценки.

Прикладная статистика в машинном обучении, осень 2018

Время выдачи задания: 22 сентября (воскресенье).

Срок сдачи: **6 октября (воскресенье), 23:59.**

Среда для выполнения практического задания – PYTHON 2.x/PYTHON 3.x.

Правила сдачи

Инструкция по отправке:

1. Решения задач следует присылать единым файлом формата `pdf`, набранным в LaTeX, либо в составе ipython-тетрадки в форматах `ipynb` и `html` (присылайте оба формата, т.к. AnyTask из-за высокой загрузки иногда не рендерит тетрадки в формате `ipynb` – а если мы не увидим ваши задачи, мы их не проверим). Отправляйте практические задачи в виде отдельных файлов (ipython-тетрадок или исходных файлов с кодом на языке `python`).

Оценивание и штрафы:

1. Максимально допустимая оценка за работу над основными задачами – 10 баллов.

2. Бонусные баллы (см. конец домашнего задания) и влияют на освобождение от задач на экзамене.

3. Дедлайн жесткий. Сдавать задание после указанного срока сдачи нельзя.

4. Задание выполняется каждым студентом индивидуально и независимо от других студентов. «Похожие» решения считаются плагиатом и все студенты (в том числе те, у кого списали) не могут получить за него больше 0 баллов, причем обнуляются и бонусные баллы. Если вы нашли решение какого-то из заданий (или его часть) в открытом источнике, необходимо указать ссылку на этот источник в отдельном блоке в конце вашей работы (скорее всего вы будете не единственным, кто это нашел, поэтому чтобы исключить подозрение в плагиате, необходима ссылка на источник).

Основные задачи

1. (4 балла) Пусть $x_1, .., x_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ – набор iid случайных величин с неизвестными параметрами μ, σ^2. Мы провели эксперимент и получили следующие измерения: 0,88; 1,07; 1,27; 1,54; 1,91; 2,27; 3,84; 4,50; 4,64; 9,41.

    - (1 балл) Выпишите функцию правдоподобия $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$ для приведённых результатов. Постройте двумерный контурный график функции правдоподобия для коэффициентов доверия 10%, 50%, 68% и 90%.

    - (1 балл) Постройте оценку маскимального правдоподобия $\hat{\sigma}^2$для σ_μ при фиксированном μ (без учёта полученных измерений), подставьте в функцию правдоподобия, выпишите выражение для профильного правдоподобия. Постройте график зависимости от μ.

    - (1 балл) На том же графике, постройте график зависимости от μ оценочной функции правдоподобия $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2 = \hat{\sigma}^2)$ для выборочной оценки дисперсии $\hat{\sigma^2}$) и функции правдоподобия $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2 = 1)$. Для всех трёх функций правдоподобия постройте 68% доверительный интервал. Сделайте вывод о покрытии путём анализа 100 случайных выборок для $\mathcal{N}(3, 6)$.

    - (1 балл) Выпишите профильное правдоподобие для σ^2. Известно, что для оценки выборочной дисперсии можно использовать:
    $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$
    про которую известно, что $(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$. Нарисуйте правдоподобие для σ^2 в этом случае. Сравните доверительные интервалы аналогично случаю μ.

2. (1 балл) Наблюдаемый самолёт характеризуется расстоянием до наблюдателя, r, и углом наблюдения, θ. Пусть есть m измерений R и Θ, найдите дисперсию высоты самолёта, вычисляемую по формуле $Y = R\sin\Theta$, считая что σ_R и σ_Θ известны.

   Если R фиксирована, когда достигается максимальная дисперсия Y?

3. (3 балла) Для случайной величины $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и функции $g(x) = \exp(x)/(1+\exp(x))$

   - (1 балл) При фикисрованном $\sigma^2 = 1$, найдите оценку для среднего и дисперсии $g(x)$ с помощью Дельта-метода в зависимости от μ. Постройте график зависимости оценок от μ.
   - (1 балл) Получите точные оценки на среднее и дисперсию для нескольких μ, семплировав из соответствующего нормального распределения, а затем преобразовывая согласно $g(x)$. Поставьте полученные точки на график. Сделайте вывод, в каких местах Дельта-метод дают оценку, хорошо приближающую точную оценку. Ответ иллюстрируйте графиком $g''(x)$.
   - (1 балл) Проделайте предыдущие пункты для фиксированного $\mu = 1$, варьируя σ^2.

4. (2 балла) Для проверки качества ОМП используют следующую величину:

$$pull(x) = (x - x_{true})/err,$$

   Где x – полученное ОМП, для точного параметра x_{true}, err – половина длины 68% интервала. В случае, если ОМП хорошо определена $pull \sim \mathcal{N}(0;1)$. Если среднее нормального распределения отлично от 0, говорят, что есть смещение ОМП; если дисперсия отлична от 1, есть смещение оценки дисперсии. Для оценки используется несколько искусственных наборов со значением параметра x_{true}.

- (1 балл) для ОМП постройте график качества оценки, для нескольких значений $\alpha \in [0.1; 0.7]$ с шагом 0.1 и $\beta \in [2, 7]$ с шагом 1, сделайте вывод о качестве ОМП. Для каждой точки необходимо использовать не менее 100 экспериментов.
- (1 балл) сделайте то же исследование для MAP оценки с плоским априорным знанием. Для получения интервалов используйте байесовский подход.

Бонусные задачи

Бонусная задача находится здесь: https://github.com/SchattenGenie/hse-stats-course-2019/blob/master/homeworks/hw_1/bonus_problem_task_01.ipynb