

## Задание 1. Точечные и интервальные оценки.

Прикладная статистика в машинном обучении, осень 2018

Время выдачи задания: 22 сентября (воскресенье).

Срок сдачи: **6 октября (воскресенье), 23:59.**

Среда для выполнения практического задания – PYTHON 2.x/PYTHON 3.x.

## Правила сдачи

### Инструкция по отправке:

1. Решения задач следует присылать единым файлом формата **pdf**, набранным в **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**, либо в составе **ipython**-тетradки в форматах **ipynb** и **html** (присылайте оба формата, т.к. AnyTask из-за высокой загрузки иногда не рендерит тетradки в формате **ipynb** – а если мы не увидим ваши задачи, мы их не проверим). Отправляйте практические задачи в виде отдельных файлов (**ipython**-тетradок или исходных файлов с кодом на языке **python**).

### Оценивание и штрафы:

1. Максимально допустимая оценка за работу над основными задачами – 10 баллов.
2. Бонусные баллы (см. конец домашнего задания) и влияют на освобождение от задач на экзамене.

3. Дедлайн жесткий. Сдавать задание после указанного срока сдачи нельзя.
4. Задание выполняется каждым студентом индивидуально и независимо от других студентов. «Похожие» решения считаются плагиатом и все студенты (в том числе те, у кого списали) не могут получить за него больше 0 баллов, причем обнуляются и бонусные баллы. Если вы нашли решение какого-то из заданий (или его часть) в открытом источнике, необходимо указать ссылку на этот источник в отдельном блоке в конце вашей работы (скорее всего вы будете не единственным, кто это нашел, поэтому чтобы исключить подозрение в плагиате, необходима ссылка на источник).

## Основные задачи

1. (4 балла) Пусть  $x_1, \dots, x_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  – набор iid случайных величин с неизвестными параметрами  $\mu, \sigma^2$ . Мы провели эксперимент и получили следующие измерения: 0,88; 1,07; 1,27; 1,54; 1,91; 2,27; 3,84; 4,50; 4,64; 9,41.

- (1 балл) Выпишите функцию правдоподобия  $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$  для приведённых результатов. Постройте двумерный контурный график функции правдоподобия для коэффициентов доверия 10%, 50%, 68% и 90%.
- (1 балл) Постройте оценку максимального правдоподобия  $\hat{\sigma}^2$  для  $\sigma_\mu$  при фиксированном  $\mu$  (без учёта полученных измерений), подставьте в функцию правдоподобия, выпишите выражение для профильного правдоподобия. Постройте график зависимости от  $\mu$ .
- (1 балл) На том же графике, постройте график зависимости от  $\mu$  оценочной функции правдоподобия  $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2 = \hat{\sigma}^2)$  для выборочной оценки дисперсии  $\hat{\sigma}^2$  и функции правдоподобия  $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2 = 1)$ . Для всех трёх функций правдоподобия постройте 68% доверительный интервал. Сделайте вывод о покрытии путём анализа 100 случайных выборок для  $\mathcal{N}(3, 6)$ .
- (1 балл) Выпишите профильное правдоподобие для  $\sigma^2$ . Известно, что для оценки выборочной дисперсии можно использовать:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

про которую известно, что  $(n-1) \frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ . Нарисуйте правдоподобие для  $\sigma^2$  в этом случае. Сравните доверительные интервалы аналогично случаю  $\mu$ .

2. (1 балл) Наблюдаемый самолёт характеризуется расстоянием до наблюдателя,  $r$ , и углом наблюдения,  $\theta$ . Пусть есть  $m$  измерений  $R$  и  $\Theta$ , найдите дисперсию высоты самолёта, вычисляемую по формуле  $Y = R \sin \Theta$ . Если  $R$  фиксирована, когда достигается максимальная дисперсия  $Y$ ?
3. (3 балла) Для случайной величины  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  и функции  $g(x) = \exp(x)/(1 + \exp(x))$
- (1 балл) При фиксированном  $\sigma^2 = 1$ , найдите оценку для среднего и дисперсии  $g(x)$  с помощью Дельта-метода в зависимости от  $\mu$ . Постройте график зависимости оценок от  $\mu$ .
  - (1 балл) Получите точные оценки на среднее и дисперсию для нескольких  $\mu$ , семплировав из соответствующего нормального распределения, а затем преобразовывая согласно  $g(x)$ . Поставьте полученные точки на график. Сделайте вывод, в каких местах Дельта-метод даёт оценку, хорошо приближающую точную оценку. Ответ иллюстрируйте графиком  $g''(x)$ .
  - (1 балл) Прodelайте предыдущие пункты для фиксированного  $\mu = 1$ , варьируя  $\sigma^2$ .
4. (2 балла) Для проверки качества ОМП используют следующую величину:

$$pull(x) = (x - x_{true})/err,$$

Где  $x$  – полученное ОМП, для точного параметра  $x_{true}$ ,  $err$  – половина длины 68% интервала. В случае, если ОМП хорошо определено на  $pull \sim \mathcal{N}(0; 1)$ . Если среднее нормального распределения отличается от 0, говорят, что есть смещение ОМП; если дисперсия отлична от 1, есть смещение оценки дисперсии. Для оценки используется несколько искусственных наборов со значением параметра  $x_{true}$ .

- (1 балл) для ОМП постройте график качества оценки, для нескольких значений  $\alpha \in [0.1; 0.7]$  с шагом 0.1 и  $\beta \in [2, 7]$  с шагом 1, сделайте вывод о качестве ОМП. Для каждой точки необходимо использовать не менее 100 экспериментов.
- (1 балл) сделайте то же исследование для МАР оценки с плоским априорным знанием. Для получения интервалов используйте байесовский подход.

## Бонусные задачи

Бонусная задача находится здесь: [https://github.com/SchattenGenie/hse-stats-course-2019/blob/master/homeworks/hw\\_1/bonus\\_problem\\_task\\_01.ipynb](https://github.com/SchattenGenie/hse-stats-course-2019/blob/master/homeworks/hw_1/bonus_problem_task_01.ipynb)