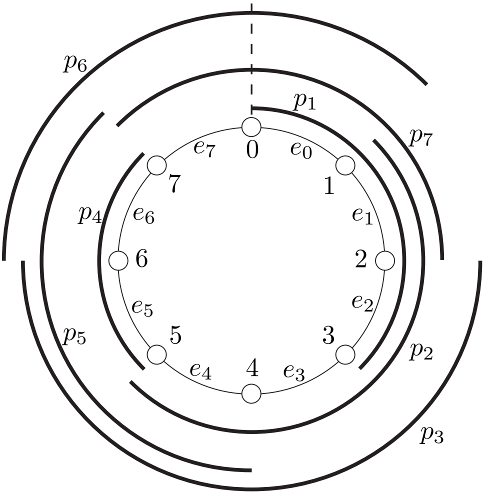
Call-Control in Ringnetzwerken

Seminar „Algorithmen und Datenstrukturen“
Universität Augsburg

Michael Markl


p_6
p_1
p_7
p_4
p_5
p_2
p_3
e_0
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
0
1
2
3
4
5
6
7

Gliederung

Problemdefinition

Problem in allgemeinen Graphen

Definition (Netzwerk)

Sei (V, E) ein ungerichteter Graph mit Knoten V und Kanten E, und $c : E \to \mathbb{N}$ eine Kapazitätsfunktion. Das Tupel (V, E, c) heißt (ungerichtetes) Netzwerk.

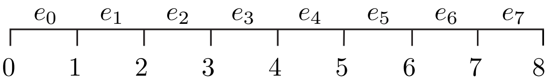
Definition (Call-Control)

Seien (V, E, c) ein ungerichtetes Netzwerk und P eine (Multi-)Menge von $m \in \mathbb{N}$ Pfaden in (V, E, c).
$Q \subseteq P$ heißt *zulässig*, falls für alle $e \in E$ die Anzahl aller Pfade in Q, die e enthalten, höchstens $c(e)$ ist.
Call-Control besteht darin, eine zulässige Menge Q maximaler Mächtigkeit zu finden.

Call-Control in Ketten

Definition (Kette)

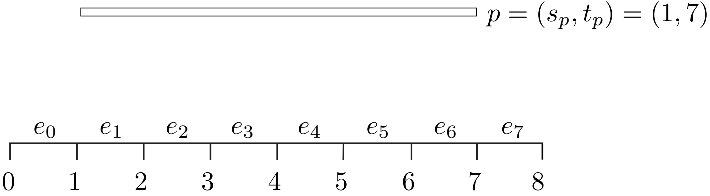
Eine *Kette* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten
$E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-2}, v_{n-1})\}$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.



Call-Control in Ketten

Definition (Kette)

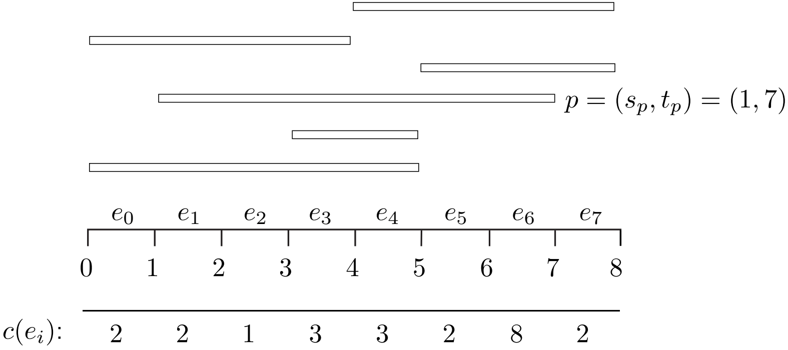
Eine *Kette* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten $E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-2}, v_{n-1})\}$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.



Call-Control in Ketten

Definition (Kette)

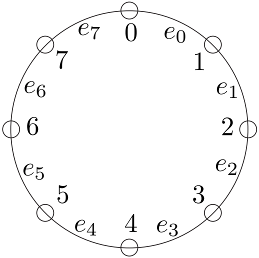
Eine *Kette* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten $E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-2}, v_{n-1})\}$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.



Call-Control in Ringen

Definition (Ring)

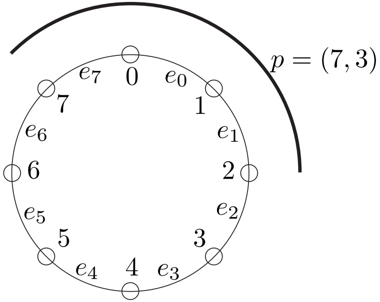
Ein *Ring* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten $E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$ mit $v_0 = v_n$ und $v_i \neq v_j$ für alle anderen $i \neq j$.



Call-Control in Ringen

Definition (Ring)

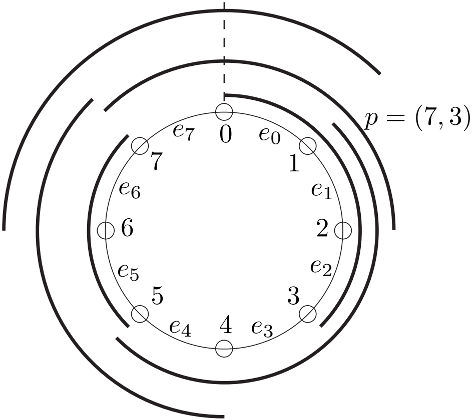
Ein *Ring* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten $E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$ mit $v_0 = v_n$ und $v_i \neq v_j$ für alle anderen $i \neq j$.



Call-Control in Ringen

Definition (Ring)

Ein *Ring* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten $E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$ mit $v_0 = v_n$ und $v_i \neq v_j$ für alle anderen $i \neq j$.

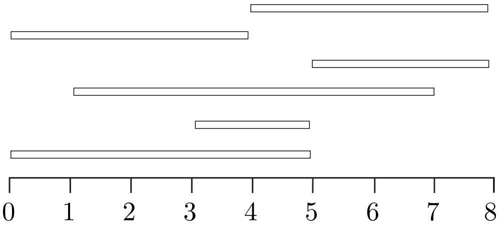


Call-Control in Ketten

Gierige Ordnung

Definition (Gierige Ordnung)

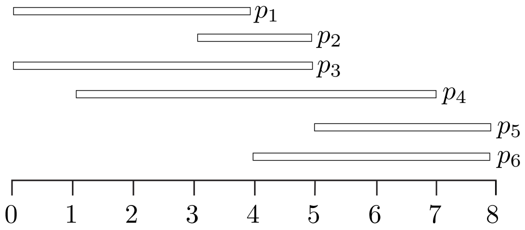
Auf einer Menge P von Pfaden in einer Kette nennen wir eine Totalordnung $\leq_G$ mit zugehöriger strenger Totalordnung $<_G$ *gierig*, falls $\forall p, q \in P\colon t_p < t_q \Rightarrow p <_G q$.



Gierige Ordnung

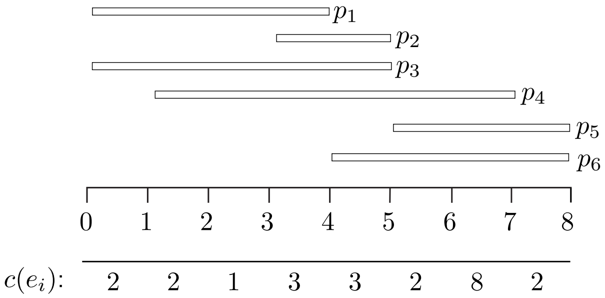
Definition (Gierige Ordnung)

Auf einer Menge P von Pfaden in einer Kette nennen wir eine Totalordnung $\leq_G$ mit zugehöriger strenger Totalordnung $<_G$ *gierig*, falls $\forall p, q \in P \colon t_p < t_q \Rightarrow p <_G q$.



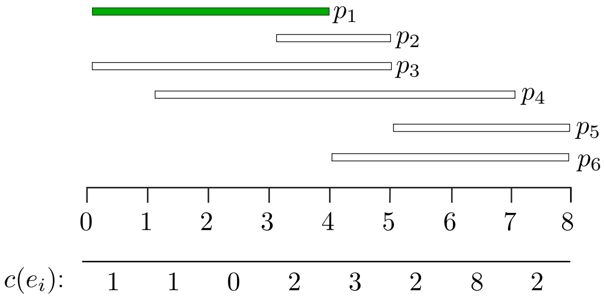
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



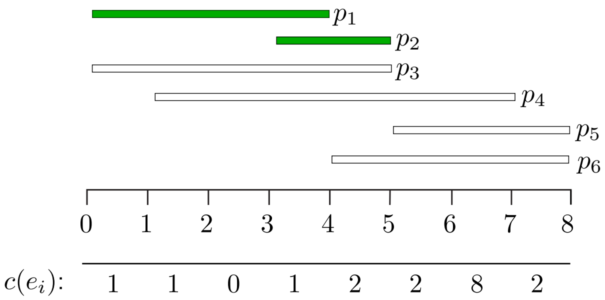
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



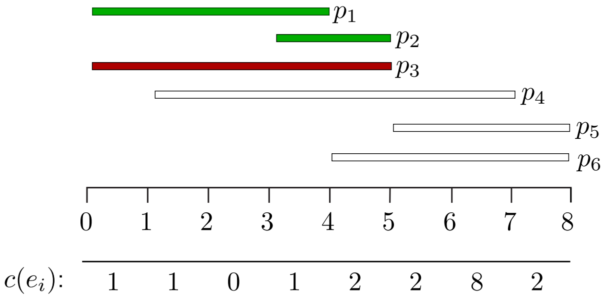
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



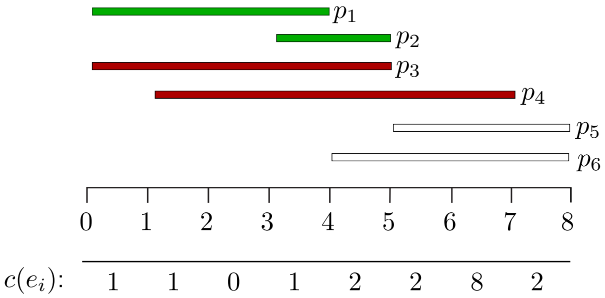
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



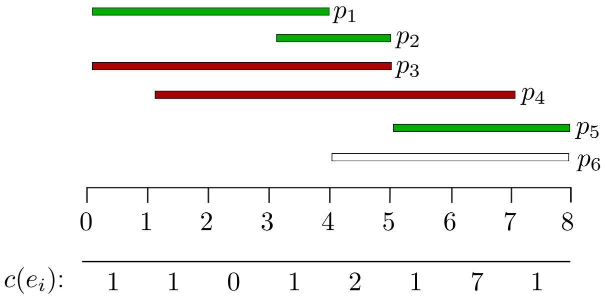
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



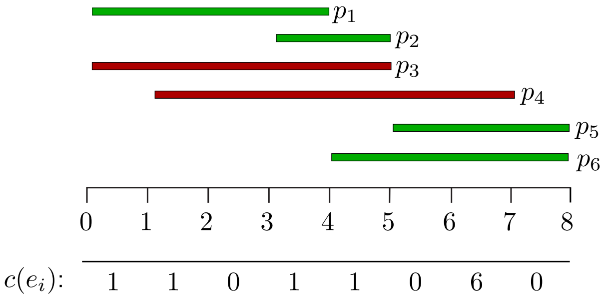
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



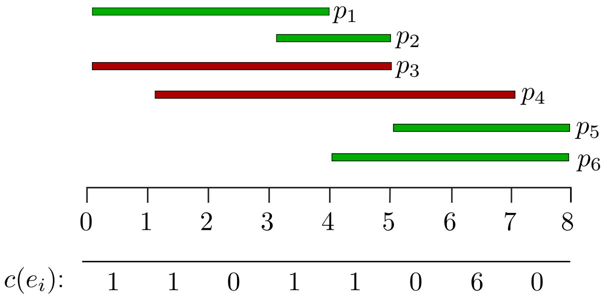
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



Das gierige Verfahren

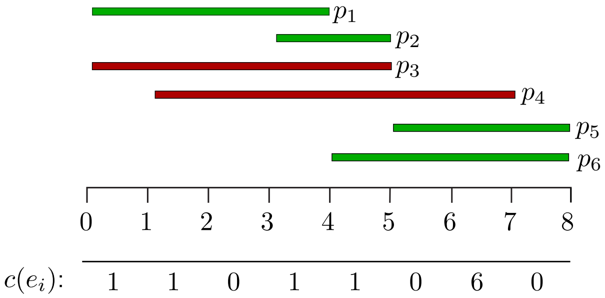
Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



- Menge der akzeptierten Pfade ist optimale Lösung.

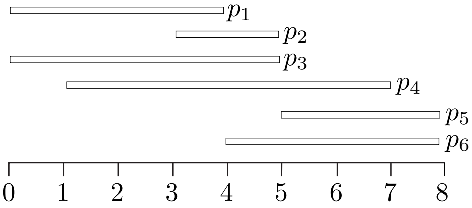
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



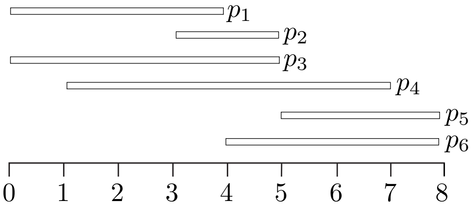
- Menge der akzeptierten Pfade ist optimale Lösung.
- Einfache Implementierung in $\mathcal{O}(m \cdot n)$ Zeit möglich (m Anzahl Pfade, n Anzahl Knoten).

Korrektheit des gierigen Verfahrens – I



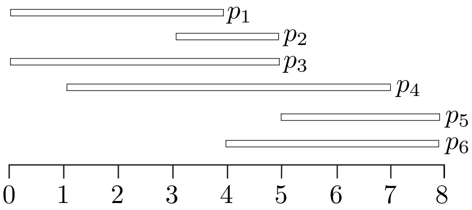
- Seien $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ Teilmengen der Pfade P mit $a_1 \leq_G \cdots \leq_G a_k$ und $b_1 \leq_G \cdots \leq_G b_k$. Wir schreiben $A \leq_G B$, falls $\forall i \leq k \colon a_k \leq_G b_k$.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – I



- Seien $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ Teilmengen der Pfade P mit $a_1 \leq_G \cdots \leq_G a_k$ und $b_1 \leq_G \cdots \leq_G b_k$. Wir schreiben $A \leq_G B$, falls $\forall i \leq k\colon a_k \leq_G b_k$.
- Bsp.: $\{p_1, p_3, p_6\} \leq_G \{p_1, p_4, p_6\}$.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – I



- Seien $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ Teilmengen der Pfade P mit $a_1 \leq_G \cdots \leq_G a_k$ und $b_1 \leq_G \cdots \leq_G b_k$. Wir schreiben $A \leq_G B$, falls $\forall i \leq k\colon a_k \leq_G b_k$.
- Bsp.: $\{p_1, p_3, p_6\} \leq_G \{p_1, p_4, p_6\}$.
- Eine zulässige Menge A heißt minimal, falls $A \leq_G B$ für alle zulässigen Mengen B mit $|A| = |B|$.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte: Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte: Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte: Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G mit $p \notin Q_{i-1}$.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte:
  Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G mit $p \notin Q_{i-1}$.
  q sei Pfad aus Q_{i-1} mit $q >_G p$ und kleinstem Startknoten.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte:
  Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G mit $p \notin Q_{i-1}$.
  q sei Pfad aus Q_{i-1} mit $q >_G p$ und kleinstem Startknoten.
  Erhalte Q_i durch Ersetzen von q durch p in Q_{i-1}.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte:
  Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G mit $p \notin Q_{i-1}$.
  q sei Pfad aus Q_{i-1} mit $q >_G p$ und kleinstem Startknoten.
  Erhalte Q_i durch Ersetzen von q durch p in Q_{i-1}.
  Dann $Q_i \leq_G Q_{i-1}$.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

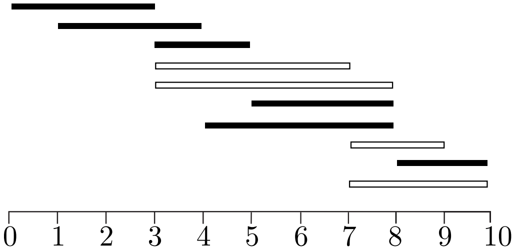
- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte:
  Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G mit $p \notin Q_{i-1}$.
  q sei Pfad aus Q_{i-1} mit $q >_G p$ und kleinstem Startknoten.
  Erhalte Q_i durch Ersetzen von q durch p in Q_{i-1}.
  Dann $Q_i \leq_G Q_{i-1}$. Mit I.V.: Q_i zulässig, da keine Kantenkapazität verletzt wird.

Algorithmus für identische Kapazitäten

- Feste Kapazität $C \in \mathbb{N}$ für alle Kanten.

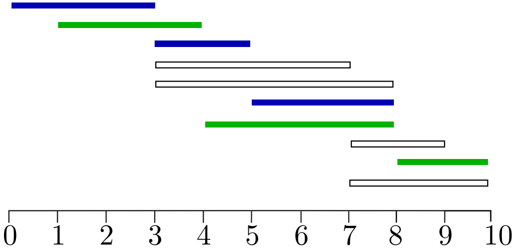
Algorithmus für identische Kapazitäten

- Feste Kapazität $C \in \mathbb{N}$ für alle Kanten.
- Beispiel mit $C = 2$:



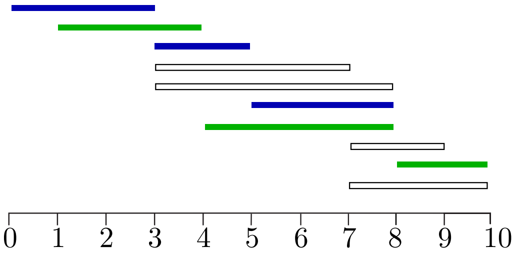
Algorithmus für identische Kapazitäten

- Feste Kapazität $C \in \mathbb{N}$ für alle Kanten.
- Beispiel mit $C = 2$:



Algorithmus für identische Kapazitäten

- Feste Kapazität $C \in \mathbb{N}$ für alle Kanten.
- Beispiel mit $C = 2$:



- Call-Control-Problem entspricht maximaler C-Färbung.

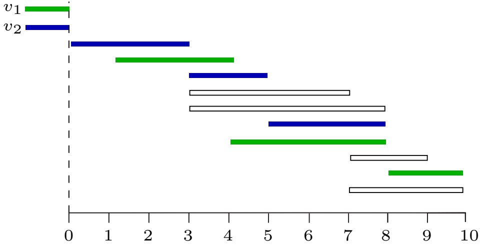
Algorithmus für C-Färbung

Algorithmus für C-Färbung

- Füge virtuelle Pfade $v_1, \ldots, v_C$, je unterschiedlich gefärbt in einer der C Farben, vor allen Pfaden ein.

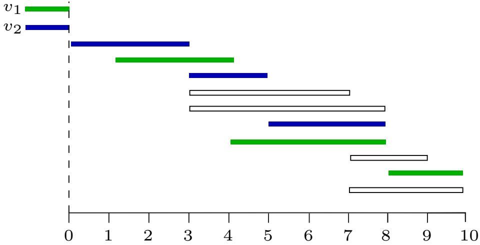
Algorithmus für C-Färbung

- Füge virtuelle Pfade $v_1, \ldots, v_C$, je unterschiedlich gefärbt in einer der C Farben, vor allen Pfaden ein.
- Speichere zu jeder Farbe c den *aktuellen Anführer von* c (den in $\leq_G$ größten c-gefärbten Pfad). Zu Beginn: Der zugehörige virtuelle Pfad.



Algorithmus für C-Färbung

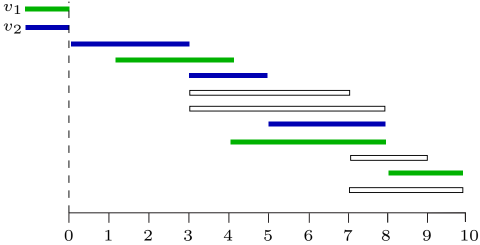
- Füge virtuelle Pfade $v_1, \ldots, v_C$, je unterschiedlich gefärbt in einer der C Farben, vor allen Pfaden ein.
- Speichere zu jeder Farbe c den *aktuellen Anführer von* c (den in $\leq_G$ größten c-gefärbten Pfad). Zu Beginn: Der zugehörige virtuelle Pfad.



- Suche bei Bearbeitung von Pfad p den *optimalen Anführer von* p, d.h. den aktuell größten Anführer, der sich nicht mit p überschneidet.

Algorithmus für C-Färbung

- Füge virtuelle Pfade $v_1, \ldots, v_C$, je unterschiedlich gefärbt in einer der C Farben, vor allen Pfaden ein.
- Speichere zu jeder Farbe c den *aktuellen Anführer von* c (den in $\leq_G$ größten c-gefärbten Pfad). Zu Beginn: Der zugehörige virtuelle Pfad.



- Suche bei Bearbeitung von Pfad p den *optimalen Anführer von* p, d.h. den aktuell größten Anführer, der sich nicht mit p überschneidet.
- Ist das möglich in gesamt-linearer Zeit?

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

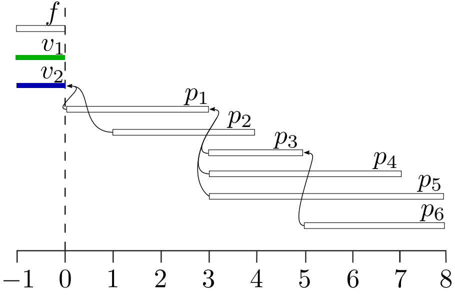
- Füge weiteren Pfad f, den fiktiven Anführer, als ersten Pfad ein.

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Füge weiteren Pfad f, den fiktiven Anführer, als ersten Pfad ein.
- Ermittle für jeden Pfad p seinen *bevorzugten Anführer*, d.h. den in $\leq_G$ größten Pfad, dessen Zielknoten nicht nach dem Anfangsknoten s_p kommt.

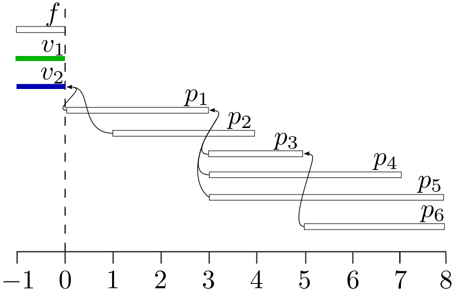
C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Füge weiteren Pfad f, den fiktiven Anführer, als ersten Pfad ein.
- Ermittle für jeden Pfad p seinen *bevorzugten Anführer*, d.h. den in $\leq_G$ größten Pfad, dessen Zielknoten nicht nach dem Anfangsknoten s_p kommt.



C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Füge weiteren Pfad f, den fiktiven Anführer, als ersten Pfad ein.
- Ermittle für jeden Pfad p seinen *bevorzugten Anführer*, d.h. den in $\leq_G$ größten Pfad, dessen Zielknoten nicht nach dem Anfangsknoten s_p kommt.



- Erstelle Union-Find-Instanz mit jedem Pfad in eigener Gruppe.

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Invarianten:

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Invarianten:
  - Repräsent einer Gruppe ist in $\leq_G$ kleinster Pfad der Gruppe.

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Invarianten:
  - Repräsent einer Gruppe ist in $\leq_G$ kleinster Pfad der Gruppe.
  - Gruppen enthalten nur in $\leq_G$ aufeinanderfolgende Pfade

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Invarianten:
  - Repräsent einer Gruppe ist in $\leq_G$ kleinster Pfad der Gruppe.
  - Gruppen enthalten nur in $\leq_G$ aufeinanderfolgende Pfade
  - Nicht verarbeitete Pfade sind in Einzelgruppen; Repräsentant einer verarbeiteten Gruppe ist Anführer einer Farbe oder der fiktive Anführer.

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Invarianten:
  - Repräsent einer Gruppe ist in $\leq_G$ kleinster Pfad der Gruppe.
  - Gruppen enthalten nur in $\leq_G$ aufeinanderfolgende Pfade
  - Nicht verarbeitete Pfade sind in Einzelgruppen; Repräsentant einer verarbeiteten Gruppe ist Anführer einer Farbe oder der fiktive Anführer.
- Bei Bearbeitung von Pfad p mit bevorzugtem Anführer q:

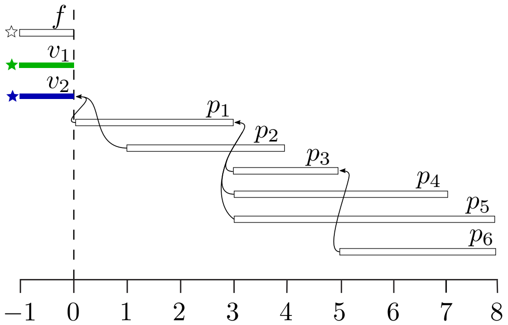
C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Invarianten:
  - Repräsent einer Gruppe ist in $\leq_G$ kleinster Pfad der Gruppe.
  - Gruppen enthalten nur in $\leq_G$ aufeinanderfolgende Pfade
  - Nicht verarbeitete Pfade sind in Einzelgruppen; Repräsentant einer verarbeiteten Gruppe ist Anführer einer Farbe oder der fiktive Anführer.
- Bei Bearbeitung von Pfad p mit bevorzugtem Anführer q:
  - *find*$(q) = f$: Verwerfe p und vereinige die Gruppe von p mit der des Vorgängers von p.

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

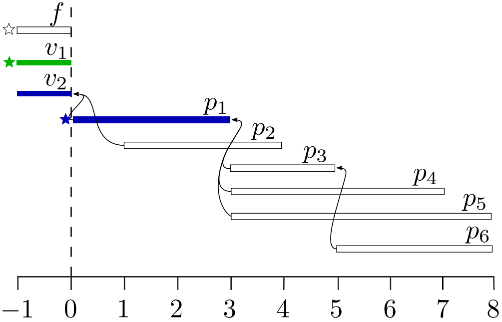
- Invarianten:
  - Repräsent einer Gruppe ist in $\leq_G$ kleinster Pfad der Gruppe.
  - Gruppen enthalten nur in $\leq_G$ aufeinanderfolgende Pfade
  - Nicht verarbeitete Pfade sind in Einzelgruppen; Repräsentant einer verarbeiteten Gruppe ist Anführer einer Farbe oder der fiktive Anführer.
- Bei Bearbeitung von Pfad p mit bevorzugtem Anführer q:
  - *find*$(q) = f$: Verwerfe p und vereinige die Gruppe von p mit der des Vorgängers von p.
  - *find*(q) ist c-gefärbter Anführer: Akzeptiere p, färbe p in c und vereinige die Gruppe von *find*(q) mit der des Vorgängers von *find*(q).

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus am Beispiel



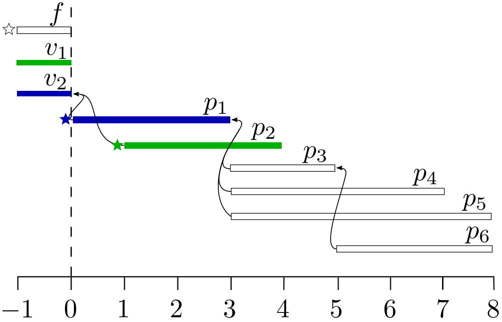
initial: ☆f ★v_1 ★v_2 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus am Beispiel



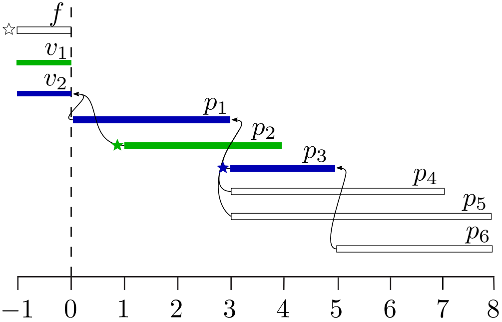
nach p_1: f | v_1 v_2 | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | p_6

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus am Beispiel



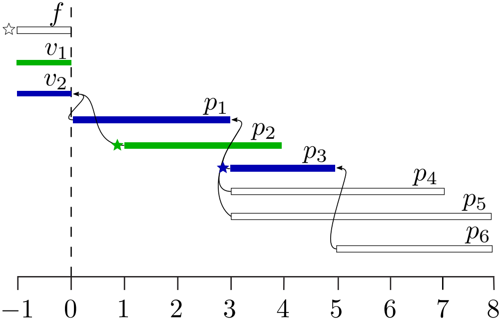
nach p_2: 

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus am Beispiel



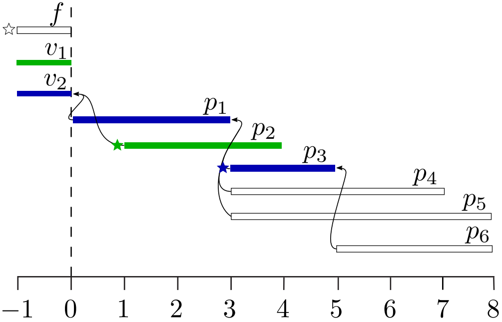
nach p_3: $[f\ v_1\ v_2\ p_1]\ [p_2]\ [p_3]\ [p_4]\ [p_5]\ [p_6]$

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus am Beispiel



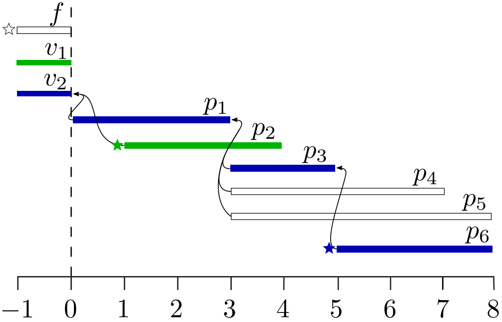
nach p_4: $\boxed{f \quad v_1 \quad v_2 \quad p_1}$ $\boxed{p_2}$ $\boxed{p_3 \quad p_4}$ $\boxed{p_5}$ $\boxed{p_6}$

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus am Beispiel



nach p_5: $\boxed{f \quad v_1 \quad v_2 \quad p_1}$ $\boxed{p_2}$ $\boxed{p_3 \quad p_4 \quad p_5}$ $\boxed{p_6}$

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus am Beispiel



nach p_6: $\boxed{f \quad v_1 \quad v_2 \quad p_1}$ $\boxed{p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5}$ $\boxed{p_6}$

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Wir benötigen m find- und union-Aufrufe.

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Wir benötigen m find- und union-Aufrufe.
- Alle Vereinigungen geschehen entlang einer Kette.

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Wir benötigen m find- und union-Aufrufe.
- Alle Vereinigungen geschehen entlang einer Kette.
- Mit Static-Tree-Set-Union benötigen wir $\mathcal{O}(m)$ Zeit dafür (Gabow und Tarjan in [3]).

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Wir benötigen m find- und union-Aufrufe.
- Alle Vereinigungen geschehen entlang einer Kette.
- Mit Static-Tree-Set-Union benötigen wir $\mathcal{O}(m)$ Zeit dafür (Gabow und Tarjan in [3]).
- Das Call-Control-Problem mit identischen Kapazitäten ist in $\mathcal{O}(m)$ Zeit optimal lösbar, wenn die Menge der Pfade bereits in gieriger Ordnung sortiert ist.

C-Färbung – Union-Find-Algorithmus

- Wir benötigen m find- und union-Aufrufe.
- Alle Vereinigungen geschehen entlang einer Kette.
- Mit Static-Tree-Set-Union benötigen wir $\mathcal{O}(m)$ Zeit dafür (Gabow und Tarjan in [3]).
- Das Call-Control-Problem mit identischen Kapazitäten ist in $\mathcal{O}(m)$ Zeit optimal lösbar, wenn die Menge der Pfade bereits in gieriger Ordnung sortiert ist.
- Genauere Analyse des Verfahrens durch Carlisle und Lloyd in [2].

Anpassen für willkürliche Kapazitäten

Anpassen für willkürliche Kapazitäten

- Betrachten willkürliche Kapazitäten $c : E \to \mathbb{N}$.

Anpassen für willkürliche Kapazitäten

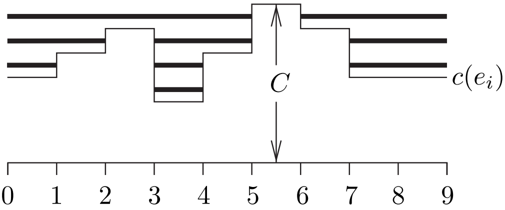
- Betrachten willkürliche Kapazitäten $c : E \to \mathbb{N}$.
- Anpassung der Idee für identische Kapazitäten:

Anpassen für willkürliche Kapazitäten

- Betrachten willkürliche Kapazitäten $c : E \to \mathbb{N}$.
- Anpassung der Idee für identische Kapazitäten:
  - Setze $C := \max_{e \in E} c(e)$ als neue Kapazität jeder Kante.

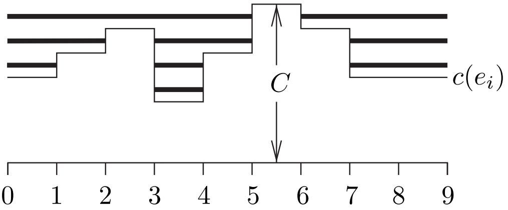
Anpassen für willkürliche Kapazitäten

- Betrachten willkürliche Kapazitäten $c : E \to \mathbb{N}$.
- Anpassung der Idee für identische Kapazitäten:
  - Setze $C := \max_{e \in E} c(e)$ als neue Kapazität jeder Kante.
  - Füge an Kanten mit überflüssigen Kapazitäten Platzhalterpfade ein:



Anpassen für willkürliche Kapazitäten

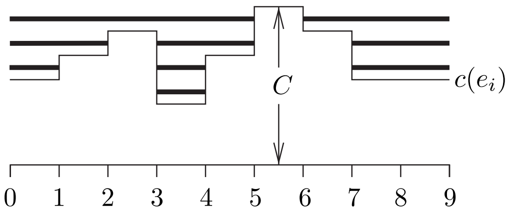
- Betrachten willkürliche Kapazitäten $c : E \to \mathbb{N}$.
- Anpassung der Idee für identische Kapazitäten:
  - Setze $C := \max_{e \in E} c(e)$ als neue Kapazität jeder Kante.
  - Füge an Kanten mit überflüssigen Kapazitäten Platzhalterpfade ein:



  - Sorge dafür, dass alle Platzhalterpfade akzeptiert werden.

Anpassen für willkürliche Kapazitäten

- Betrachten willkürliche Kapazitäten $c : E \to \mathbb{N}$.
- Anpassung der Idee für identische Kapazitäten:
  - Setze $C := \max_{e \in E} c(e)$ als neue Kapazität jeder Kante.
  - Füge an Kanten mit überflüssigen Kapazitäten Platzhalterpfade ein:

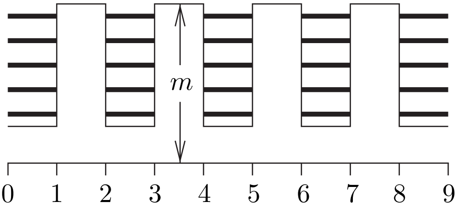


  - Sorge dafür, dass alle Platzhalterpfade akzeptiert werden.
- Probleme: Anzahl Platzhalter? Wie akzeptieren wir alle Platzhalter?

Anzahl der Platzhalterpfade

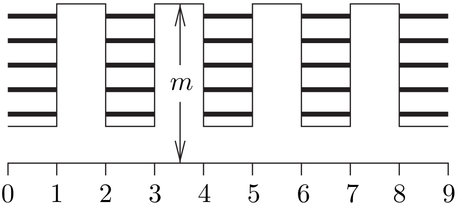
Anzahl der Platzhalterpfade

- Für bestimmte Kettennetzwerke kann es passieren, dass wir $\Omega(n \cdot m)$ Platzhalter einfügen:



Anzahl der Platzhalterpfade

- Für bestimmte Kettennetzwerke kann es passieren, dass wir $\Omega(n \cdot m)$ Platzhalter einfügen:



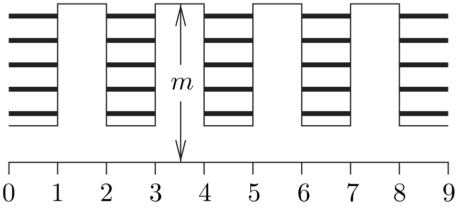
- Flache die Kapazitäten ab mit

$$c'(e_i) = \begin{cases} \min(c(e_0), n_0) & \text{für } i = 0 \\ \min(c(e_i), c'(e_{i-1}) + n_i) & \text{für } i \geq 1 \end{cases}$$

wobei n_i die Anzahl der Pfade in P mit Anfangsknoten i ist.

Anzahl der Platzhalterpfade

- Für bestimmte Kettennetzwerke kann es passieren, dass wir $\Omega(n \cdot m)$ Platzhalter einfügen:



- Flache die Kapazitäten ab mit

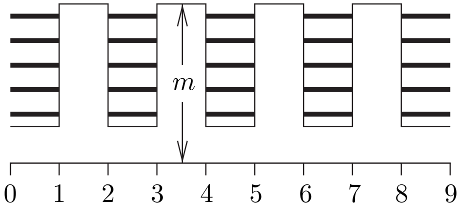
$$c'(e_i) = \begin{cases} \min(c(e_0), n_0) & \text{für } i = 0 \\ \min(c(e_i), c'(e_{i-1}) + n_i) & \text{für } i \geq 1 \end{cases}$$

wobei n_i die Anzahl der Pfade in P mit Anfangsknoten i ist.

- Damit werden nur $\mathcal{O}(m)$ Platzhalter generiert.

Anzahl der Platzhalterpfade

- Für bestimmte Kettennetzwerke kann es passieren, dass wir $\Omega(n \cdot m)$ Platzhalter einfügen:



- Flache die Kapazitäten ab mit

$$c'(e_i) = \begin{cases} \min(c(e_0), n_0) & \text{für } i = 0 \\ \min(c(e_i), c'(e_{i-1}) + n_i) & \text{für } i \geq 1 \end{cases}$$

  wobei n_i die Anzahl der Pfade in P mit Anfangsknoten i ist.
- Damit werden nur $\mathcal{O}(m)$ Platzhalter generiert.
- Anpassen der Kapazitäten und Auffüllen mit Platzhaltern in $\mathcal{O}(n + m)$ Zeit möglich.

Akzeptieren der Platzhalter

Akzeptieren der Platzhalter

Ähnliches Vorgehen wie zuvor, versuche nun aber Platzhalterpfade möglichst früh zu bearbeiten:

Akzeptieren der Platzhalter

Ähnliches Vorgehen wie zuvor, versuche nun aber Platzhalterpfade möglichst früh zu bearbeiten:

- Erstelle eine Liste L der Endknoten aller Pfade (zu jedem Eintrag der Liste speichere eine Referenz auf zug. Pfad):

Akzeptieren der Platzhalter

Ähnliches Vorgehen wie zuvor, versuche nun aber Platzhalterpfade möglichst früh zu bearbeiten:

- Erstelle eine Liste L der Endknoten aller Pfade (zu jedem Eintrag der Liste speichere eine Referenz auf zug. Pfad):
  - Nach Endknoten aufsteigend sortiert
  - Bei gleichem Endknoten sollen Anfangsknoten vor Zielknoten geordnet werden

Akzeptieren der Platzhalter

Ähnliches Vorgehen wie zuvor, versuche nun aber Platzhalterpfade möglichst früh zu bearbeiten:

- Erstelle eine Liste L der Endknoten aller Pfade (zu jedem Eintrag der Liste speichere eine Referenz auf zug. Pfad):
  - Nach Endknoten aufsteigend sortiert
  - Bei gleichem Endknoten sollen Anfangsknoten vor Zielknoten geordnet werden
- Erhalte $\leq_G$ durch Ersetzen von Zielknoten der Liste durch die zug. Pfade.

Akzeptieren der Platzhalter

Ähnliches Vorgehen wie zuvor, versuche nun aber Platzhalterpfade möglichst früh zu bearbeiten:

- Erstelle eine Liste L der Endknoten aller Pfade (zu jedem Eintrag der Liste speichere eine Referenz auf zug. Pfad):
  - Nach Endknoten aufsteigend sortiert
  - Bei gleichem Endknoten sollen Anfangsknoten vor Zielknoten geordnet werden
- Erhalte $\leq_G$ durch Ersetzen von Zielknoten der Liste durch die zug. Pfade.
- Füge wieder C virtuelle Pfade sowie den fiktiven Anführer vor den anderen Pfaden ein und ordne bevorzugte Anführer zu.

Akzeptieren der Platzhalter

Ähnliches Vorgehen wie zuvor, versuche nun aber Platzhalterpfade möglichst früh zu bearbeiten:

- Erstelle eine Liste L der Endknoten aller Pfade (zu jedem Eintrag der Liste speichere eine Referenz auf zug. Pfad):
  - Nach Endknoten aufsteigend sortiert
  - Bei gleichem Endknoten sollen Anfangsknoten vor Zielknoten geordnet werden
- Erhalte $\leq_G$ durch Ersetzen von Zielknoten der Liste durch die zug. Pfade.
- Füge wieder C virtuelle Pfade sowie den fiktiven Anführer vor den anderen Pfaden ein und ordne bevorzugte Anführer zu.
- Statt die Pfade in der Reihenfolge von $\leq_G$ zu bearbeiten wird nun die Liste L durchlaufen und
  - Platzhalterpfade bei Auftreffen ihres Anfangsknotens
  - Originalpfade bei Auftreffen ihres Zielknotens

  wie im vorherigen Algorithmus verarbeitet.

Korrektheit des Algorithmus I

Lemma (Korrektheit des Algorithmus)

Der beschriebene Algorithmus U ist eine korrekte Implementierung des gierigen Verfahrens G für willkürliche Kapazitäten.

Beweisskizze:

Korrektheit des Algorithmus I

Lemma (Korrektheit des Algorithmus)

Der beschriebene Algorithmus U ist eine korrekte Implementierung des gierigen Verfahrens G für willkürliche Kapazitäten.

Beweisskizze:

- U berechnet wieder C-Färbung der Pfade mit Platzhalter.

Korrektheit des Algorithmus I

Lemma (Korrektheit des Algorithmus)

Der beschriebene Algorithmus U ist eine korrekte Implementierung des gierigen Verfahrens G für willkürliche Kapazitäten.

Beweisskizze:

- U berechnet wieder C-Färbung der Pfade mit Platzhalter.
- U akzeptiert alle Platzhalterpfade (U berechnet insb. eine zulässige Menge).

Korrektheit des Algorithmus I

Lemma (Korrektheit des Algorithmus)

Der beschriebene Algorithmus U ist eine korrekte Implementierung des gierigen Verfahrens G für willkürliche Kapazitäten.

Beweisskizze:

- U berechnet wieder C-Färbung der Pfade mit Platzhalter.
- U akzeptiert alle Platzhalterpfade (U berechnet insb. eine zulässige Menge).
- U akzeptiert alle Pfade, die das gierige Verfahren akzeptiert.

Korrektheit des Algorithmus II

U akzeptiert alle Pfade, die das gierige Verfahren G akzeptiert.
Über Widerspruch:

Korrektheit des Algorithmus II

U akzeptiert alle Pfade, die das gierige Verfahren G akzeptiert.
Über Widerspruch:

- p erster Originalpfad mit unterschiedlicher Entscheidung.

Korrektheit des Algorithmus II

U akzeptiert alle Pfade, die das gierige Verfahren G akzeptiert.
Über Widerspruch:

- p erster Originalpfad mit unterschiedlicher Entscheidung.
  - A sei die Menge der (gemeinsam) akzeptierten Pfade vor p.

Korrektheit des Algorithmus II

U akzeptiert alle Pfade, die das gierige Verfahren G akzeptiert.
Über Widerspruch:

- p erster Originalpfad mit unterschiedlicher Entscheidung.
  - A sei die Menge der (gemeinsam) akzeptierten Pfade vor p.
  - Dann: U verwirft p, G akzeptiert p. Insb. $A \cup \{p\}$ zulässig.

Korrektheit des Algorithmus II

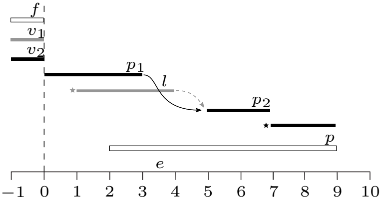
U akzeptiert alle Pfade, die das gierige Verfahren G akzeptiert.
Über Widerspruch:

- p erster Originalpfad mit unterschiedlicher Entscheidung.
  - A sei die Menge der (gemeinsam) akzeptierten Pfade vor p.
  - Dann: U verwirft p, G akzeptiert p. Insb. $A \cup \{p\}$ zulässig.
- Sei l kleinster Anführer einer Farbe zur Zeit der Bearbeitung von p, e die letzte Kante von l.

Korrektheit des Algorithmus II

U akzeptiert alle Pfade, die das gierige Verfahren G akzeptiert.
Über Widerspruch:

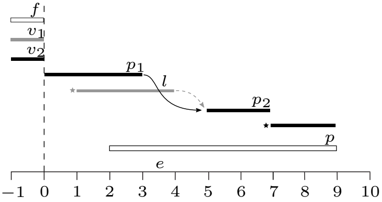
- p erster Originalpfad mit unterschiedlicher Entscheidung.
  - A sei die Menge der (gemeinsam) akzeptierten Pfade vor p.
  - Dann: U verwirft p, G akzeptiert p. Insb. $A \cup \{p\}$ zulässig.
- Sei l kleinster Anführer einer Farbe zur Zeit der Bearbeitung von p, e die letzte Kante von l.
- $\mathbb{A}$: $\exists c$ Farbe, sodass kein c-gefärbter Pfad e enthält.
  - Es ex. c-gefärbte Pfade links und rechts von e.
  - p_1, p_2 seien solche möglichst nah an e.
  - Widerspruch: l besserer Anführer von p_2 als p_1.



Korrektheit des Algorithmus II

U akzeptiert alle Pfade, die das gierige Verfahren G akzeptiert.
Über Widerspruch:

- p erster Originalpfad mit unterschiedlicher Entscheidung.
  - A sei die Menge der (gemeinsam) akzeptierten Pfade vor p.
  - Dann: U verwirft p, G akzeptiert p. Insb. $A \cup \{p\}$ zulässig.
- Sei l kleinster Anführer einer Farbe zur Zeit der Bearbeitung von p, e die letzte Kante von l.
- $\mathbb{A}$: $\exists c$ Farbe, sodass kein c-gefärbter Pfad e enthält.
  - Es ex. c-gefärbte Pfade links und rechts von e.
  - p_1, p_2 seien solche möglichst nah an e.
  - Widerspruch: l besserer Anführer von p_2 als p_1.



- Also gibt es (zusätzlich zu p) C weitere von G akzeptierte Pfade, die e beinhalten.

Rekapitulation

Was haben wir erreicht?

Rekapitulation

Was haben wir erreicht?

- Das gierige Verfahren löst das Call-Control-Problem für willkürliche Kapazitäten optimal.

Rekapitulation

Was haben wir erreicht?

- Das gierige Verfahren löst das Call-Control-Problem für willkürliche Kapazitäten optimal.
- Mit einer speziellen Union-Find-Struktur finden wir eine Implementierung für identische Kapazitäten mit Laufzeit $\mathcal{O}(m)$.

Rekapitulation

Was haben wir erreicht?

- Das gierige Verfahren löst das Call-Control-Problem für willkürliche Kapazitäten optimal.
- Mit einer speziellen Union-Find-Struktur finden wir eine Implementierung für identische Kapazitäten mit Laufzeit $\mathcal{O}(m)$.
- Wir verwenden dann eine angepasste Version mit Platzhalterpfaden, um willkürliche Kapazitäten zu erlauben, und erhalten:

Rekapitulation

Was haben wir erreicht?

- Das gierige Verfahren löst das Call-Control-Problem für willkürliche Kapazitäten optimal.
- Mit einer speziellen Union-Find-Struktur finden wir eine Implementierung für identische Kapazitäten mit Laufzeit $\mathcal{O}(m)$.
- Wir verwenden dann eine angepasste Version mit Platzhalterpfaden, um willkürliche Kapazitäten zu erlauben, und erhalten:

Theorem

Das gierige Verfahren berechnet eine optimale Lösung für Call-Control in Ketten mit willkürlichen Kapazitäten und kann in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n+m)$ implementiert werden.

Call-Control in Ringen

Literatur I

[1] Udo Adamy, Christoph Ambühl, R. Sai Anand, and Thomas Erlebach.
Call control in rings.
Algorithmica, 47:217–238, 2007.

[2] Martin C. Carlisle and Errol. L. Lloyd.
On the k-coloring of intervals.
Discrete Applied Mathematics, 59:225–235, 1995.

[3] Harold N. Gabow and Robert Endre Tarjan.
A linear-time algorithm for a special case of disjoint set union.
Journal of Computer and System Sciences, 30:209–221, 1985.

Literatur II

[4] Michael R. Garey, David S. Johnson, Gary L. Miller, and Christos H. Papadimitriou.
The complexity of coloring circular arcs and chords.
SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, 1:216–227, 1980.

[5] Dorit S. Hochbaum and Asaf Levin.
Cyclical scheduling and multi-shift scheduling: Complexity and approximation algorithms.
Discrete Optimization, 3(4):327–340, 2006.