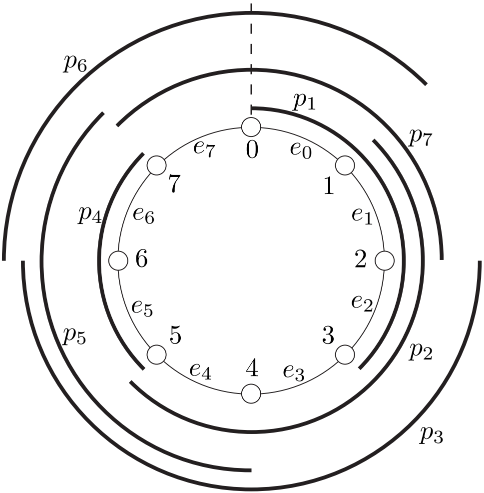
Call-Control in Ringnetzwerken

Seminar „Algorithmen und Datenstrukturen“

Universität Augsburg

Michael Markl



p_6
p_1
p_7
0
e_7
e_0
7
1
p_4
e_6
e_1
6
2
e_5
e_2
p_5
5
3
p_2
e_4
4
e_3
p_3

Gliederung

Problemdefinition

Problem in allgemeinen Graphen

Definition (Netzwerk)

Sei (V, E) ein ungerichteter Graph mit Knoten V und Kanten E, und $c : E \to \mathbb{N}$ eine Kapazitätsfunktion. Das Tupel (V, E, c) heißt (ungerichtetes) Netzwerk.

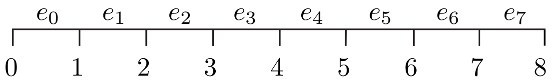
Definition (Call-Control)

Seien (V, E, c) ein ungerichtetes Netzwerk und P eine (Multi-)Menge von $m \in \mathbb{N}$ Pfaden in (V, E, c).
$Q \subseteq P$ heißt *zulässig*, falls für alle $e \in E$ die Anzahl aller Pfade in Q, die e enthalten, höchstens $c(e)$ ist.
Call-Control besteht darin, eine zulässige Menge Q maximaler Mächtigkeit zu finden.

Call-Control in Ketten

Definition (Kette)

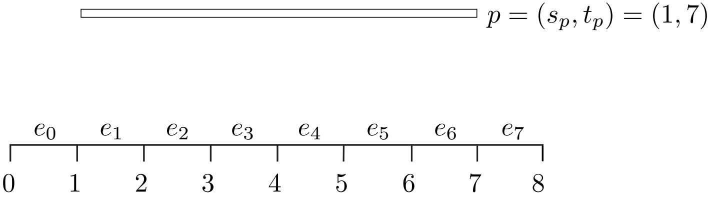
Eine *Kette* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten $E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-2}, v_{n-1})\}$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.



Call-Control in Ketten

Definition (Kette)

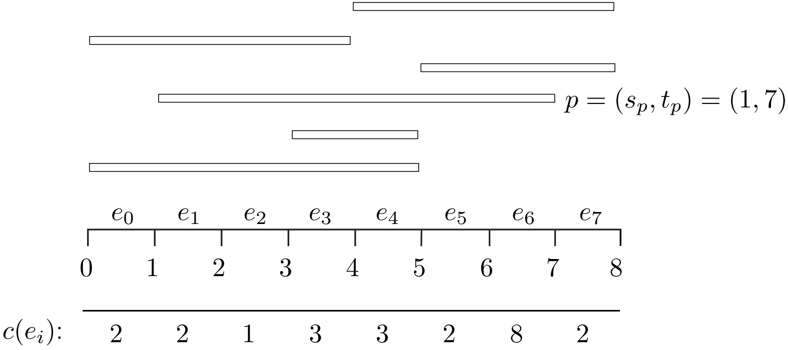
Eine *Kette* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten
$E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-2}, v_{n-1})\}$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.



Call-Control in Ketten

Definition (Kette)

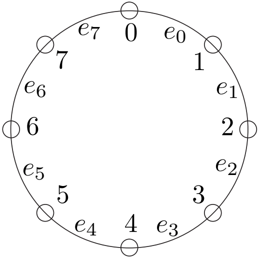
Eine *Kette* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten
$E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-2}, v_{n-1})\}$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.



Call-Control in Ringen

Definition (Ring)

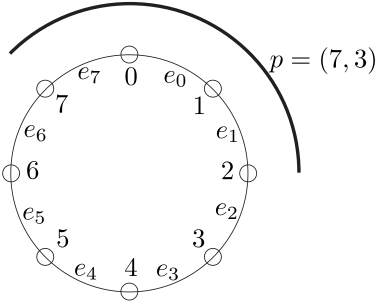
Ein *Ring* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten $E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$ mit $v_0 = v_n$ und $v_i \neq v_j$ für alle anderen $i \neq j$.



Call-Control in Ringen

Definition (Ring)

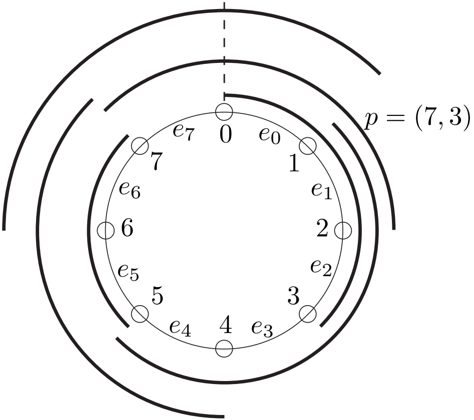
Ein *Ring* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten $E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$ mit $v_0 = v_n$ und $v_i \neq v_j$ für alle anderen $i \neq j$.



Call-Control in Ringen

Definition (Ring)

Ein *Ring* (V, E) ist ein Weg mit den Kanten $E = \{(v_0, v_1), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$ mit $v_0 = v_n$ und $v_i \neq v_j$ für alle anderen $i \neq j$.

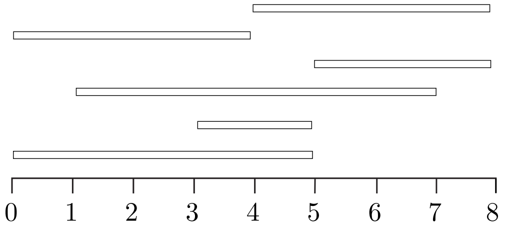


Call-Control in Ketten

Gierige Ordnung

Definition (Gierige Ordnung)

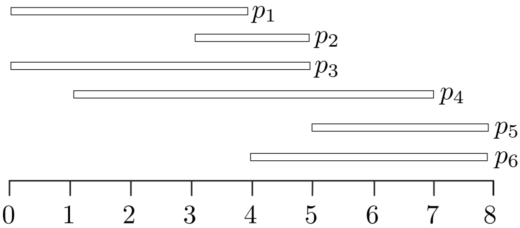
Auf einer Menge P von Pfaden in einer Kette nennen wir eine Totalordnung $\leq_G$ mit zugehöriger strenger Totalordnung $<_G$ *gierig*, falls $\forall p, q \in P\colon t_p < t_q \Rightarrow p <_G q$.



Gierige Ordnung

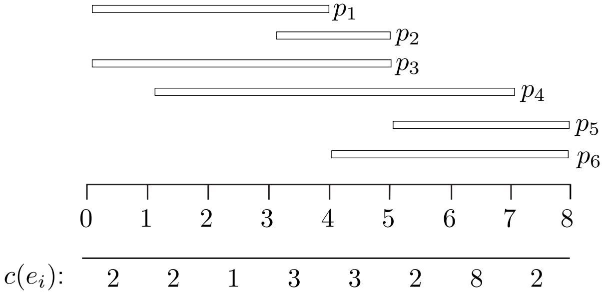
Definition (Gierige Ordnung)

Auf einer Menge P von Pfaden in einer Kette nennen wir eine Totalordnung $\leq_G$ mit zugehöriger strenger Totalordnung $<_G$ *gierig*, falls $\forall p, q \in P \colon t_p < t_q \Rightarrow p <_G q$.



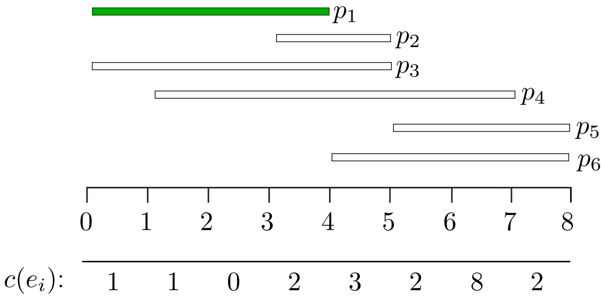
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



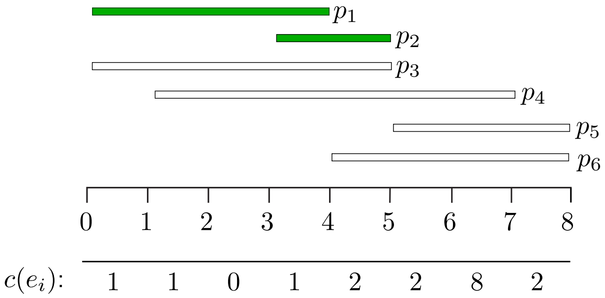
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



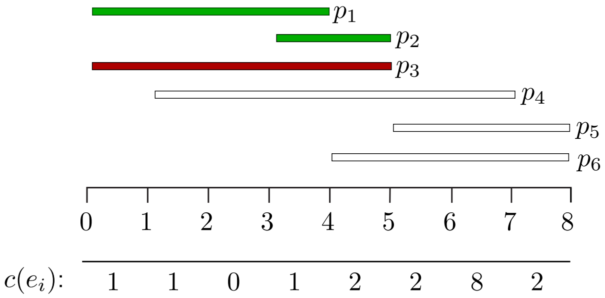
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



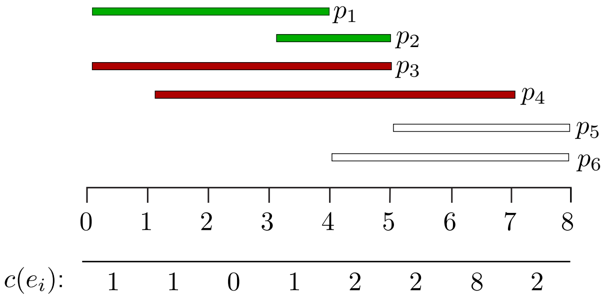
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



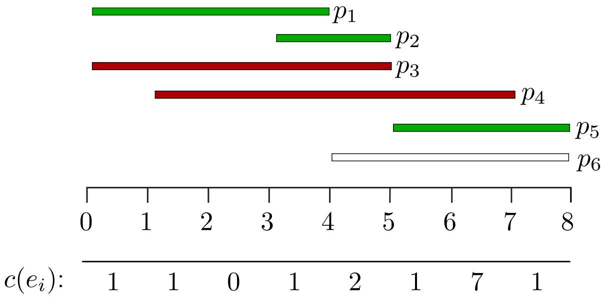
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



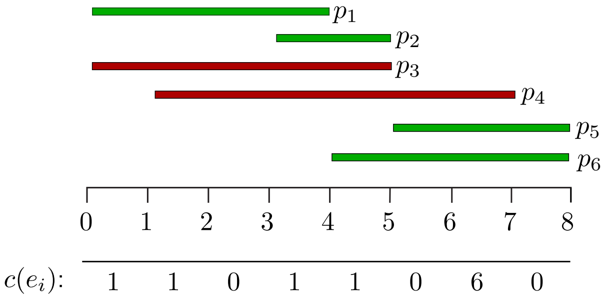
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



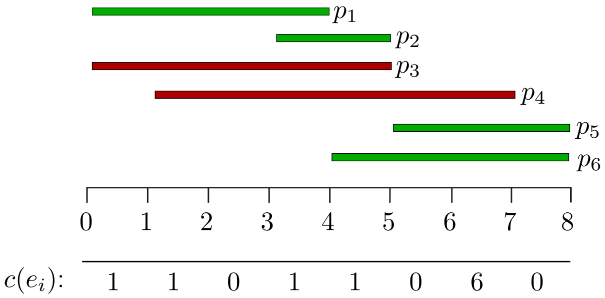
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



Das gierige Verfahren

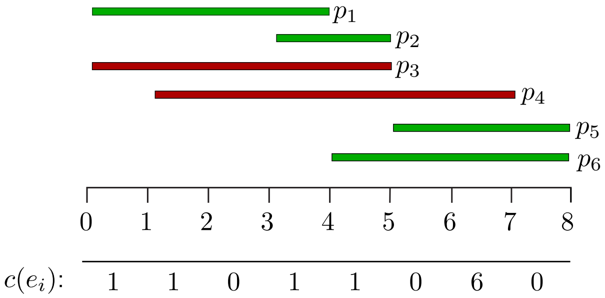
Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



- Menge der akzeptierten Pfade ist optimale Lösung.

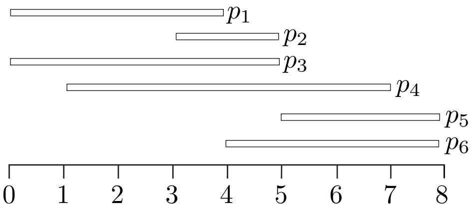
Das gierige Verfahren

Eine gierige Ordnung $\leq_G$ ist bereits gegeben.



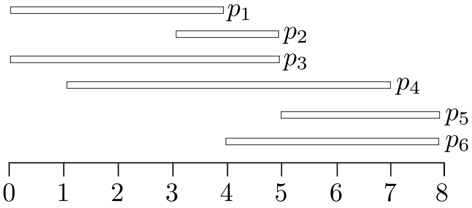
- Menge der akzeptierten Pfade ist optimale Lösung.
- Einfache Implementierung in $\mathcal{O}(m \cdot n)$ Zeit möglich (m Anzahl Pfade, n Anzahl Knoten).

Korrektheit des gierigen Verfahrens – I



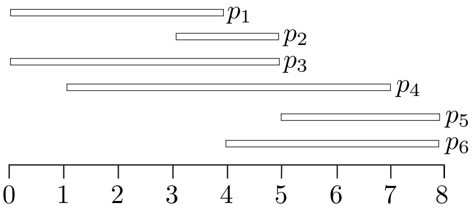
- Seien $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ Teilmengen der Pfade P mit $a_1 \leq_G \cdots \leq_G a_k$ und $b_1 \leq_G \cdots \leq_G b_k$. Wir schreiben $A \leq_G B$, falls $\forall i \leq k\colon a_k \leq_G b_k$.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – I



- Seien $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ Teilmengen der Pfade P mit $a_1 \leq_G \cdots \leq_G a_k$ und $b_1 \leq_G \cdots \leq_G b_k$. Wir schreiben $A \leq_G B$, falls $\forall i \leq k \colon a_k \leq_G b_k$.
- Bsp.: $\{p_1, p_3, p_6\} \leq_G \{p_1, p_4, p_6\}$.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – I



- Seien $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ Teilmengen der Pfade P mit $a_1 \leq_G \cdots \leq_G a_k$ und $b_1 \leq_G \cdots \leq_G b_k$. Wir schreiben $A \leq_G B$, falls $\forall i \leq k\colon a_k \leq_G b_k$.
- Bsp.: $\{p_1, p_3, p_6\} \leq_G \{p_1, p_4, p_6\}$.
- Eine zulässige Menge A heißt minimal, falls $A \leq_G B$ für alle zulässigen Mengen B mit $|A| = |B|$.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte: Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte: Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte: Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G mit $p \notin Q_{i-1}$.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte:
  Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G mit $p \notin Q_{i-1}$.
  q sei Pfad aus Q_{i-1} mit $q >_G p$ und kleinstem Startknoten.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte:
  Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G mit $p \notin Q_{i-1}$.
  q sei Pfad aus Q_{i-1} mit $q >_G p$ und kleinstem Startknoten.
  Erhalte Q_i durch Ersetzen von q durch p in Q_{i-1}.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte:
  Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G mit $p \notin Q_{i-1}$.
  q sei Pfad aus Q_{i-1} mit $q >_G p$ und kleinstem Startknoten.
  Erhalte Q_i durch Ersetzen von q durch p in Q_{i-1}.
  Dann $Q_i \leq_G Q_{i-1}$.

Korrektheit des gierigen Verfahrens – II

Lemma (Optimalität des gierigen Verfahrens)

Existiert eine zulässige Teilmenge Q_0 mit $k \in \mathbb{N}$ Pfaden, so ist die Menge G der in gieriger Ordnung $\leq_G$ kleinsten k Pfade, die das gierige Verfahren berechnet, eine minimale Menge.

Beweisskizze:

- Transformiere Q_0 in k Schritten in G und erhalte:
  Q_i zulässig, $Q_{i+1} \leq_G Q_i$ und Q_i stimmt auf ersten i Pfaden mit G überein.
- I.S.: p sei i-ter Pfad von G mit $p \notin Q_{i-1}$.
  q sei Pfad aus Q_{i-1} mit $q >_G p$ und kleinstem Startknoten.
  Erhalte Q_i durch Ersetzen von q durch p in Q_{i-1}.
  Dann $Q_i \leq_G Q_{i-1}$. Mit I.V.: Q_i zulässig, da keine Kantenkapazität verletzt wird.

Call-Control in Ringen