Markl, Michael 14.05.2020
Seminar zur Optimierung und Spieltheorie
Institut für Mathematik der Universität Augsburg
Diskrete Mathematik, Optimierung und Operations Research
Wintersemester 2020/21 Matrikelnummer: 1474802

Berechnung von Walras-Gleichgewichten

Zusammenfassung

Diese Arbeit gibt einen Einblick in die Berechnung von Walras-Gleichgewichten bei unteilbaren Gütern mit mehrfachem Angebot einzelner Güter. Es wird nach einer formalen Definition von Walras-Gleichgewichten zunächst beleuchtet, welche Eigenschaften Walras-Gleichgewichte im Allgemeinen haben und wann solche existieren. Unter Benutzung eines makroskopischen Markt-Orakels wird anschließend die Methodik der Subgradientenverfahren genutzt, um Walras-Preise exakt zu berechnen, falls das Polytop dieser Preise volldimensional ist. Haben die Käufer sogenannte Brutto-Substituts-Bewertungen, lässt sich das Berechnungsverfahren beschleunigen, da in diesem Fall die Walras-Preise ein ganzzahliges Polytop bilden. Dabei spielen die verschiedenen Charakterisierungen von Brutto-Substituts-Bewertungen als $M^\natural$-konkave und als matroidale Funktionen eine zentrale Rolle.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

2 Walras-Gleichgewichte **1**

3 Berechnung von Walras-Preisen **2**

3.1 Informationszugang zum Markt . . . 3

3.2 Darstellung als Lineares Optimierungsproblem . . . 3

3.3 Konvexe Darstellung und Subgradienten . . . 5

4 Brutto-Substituts-Bewertungen **8**

4.1 $M^\natural$-Konkave und Matroidale Funktionen . . . 9

4.2 Auswirkung auf Walras-Preise . . . 11

4.3 Existence of equilibria in single-unit markets with gross substitutability . . . 12

5 Fazit und Ausblick **13**

1 Einführung

Bei der Untersuchung von Markt-Modellen spielen Markt-Gleichgewichte eine zentrale Rolle. In der Arbeit „Computing Walrasian equilibria: fast algorithms and structural properties“ ([LW18]), welche die Grundlage dieser Seminararbeit bildet, untersuchen Leme und Wong verschiedene Ansätze zur Berechnung solcher Gleichgewichte. Dabei werden Märkte mit unteilbaren Gütern untersucht, bei denen Güter mehrfach angeboten werden können. Dabei ist jeder Käufer durch eine eigene Bewertungsfunktion modelliert, die den Wert eines Bündels für einen Käufer bestimmt. Ein Walras-Gleichgewicht besteht hier aus Preisen für jedes Gut sowie einer Allokation der Güter an die Käufer, bei der jeder Käufer ein für ihn bei diesen Preise bestmögliches Bündel erhält und jedes Vorkommen eines Guts an einen Käufer verteilt wird; es bleiben also keine Güter unverkauft übrig.
In Abschnitt 2 werden Walras-Gleichgewichte formal eingeführt und das erste- und zweite Wohlfahrtstheorem gezeigt. Daraufhin wird in Abschnitt 3 ein Vorgehen besprochen, mit dem Walras-Preise exakt berechnet werden können. Abschließend werden in Abschnitt 4 die Bewertungsfunktionen der Käufer auf Brutto-Substituts-Bewertungen eingeschränkt und Auswirkungen davon auf die Berechnung von Gleichgewichten erarbeitet.

2 Walras-Gleichgewichte

Um Walras-Gleichgewichte formal einführen zu können, werden zunächst einige grundlegende Begriffe und Notationen erklärt.

Notation 2.1. Für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sei $[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$ die Menge der ersten k natürlichen Zahlen; soll die 0 aufgenommen werden, schreibt man $[\![k]\!] := \{0, 1, \ldots, k\}$. Für einen Vektor $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ definiert man $[\![\mathbf{s}]\!] := \Pi_{j\in[n]} [\![s_j]\!]$.
Des Weiteren bezeichne e_i den i-ten Einheitsvektoren für $i \in \mathbb{N}$ und $e_0 := \mathbf{0}$ den Nullvektor.

Das Modell des Marktes besteht hier aus einer Menge $[m]$ von $m \geq 2$ *Käufern*, einer Menge $[n]$ von *Gütern* sowie aus einem *Angebot* $s_j \in \mathbb{Z}_{>0}$ für jedes Gut $j \in [n]$.
Jedem Käufer $i \in [m]$ ist eine Bewertungsfunktion $v_i : \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ zugeordnet, die einem *Bündel*, also einer Multimenge an Gütern aus $[n]$, einen ganzzahligen Wert zuschreibt, wobei $v_i(\mathbf{0}) = 0$ gilt.
Sind ein *Preisvektor* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ und ein Bündel $x \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ gegeben, bezeichnet $u_i(x; \mathbf{p}) := v_i(x) - \mathbf{p} \cdot x$ den Nutzen von Bündel x bei Preisen $\mathbf{p}$ für Käufer i. Hierbei ist $\mathbf{p} \cdot x$ das Standardskalarprodukt von $\mathbf{p}$ und x.

Definition 2.2 (Allokation)**.** Eine *Allokation* $\mathbf{x} := (x^{(i)})_{i\in[m]}$ weist jedem Käufer $i \in [m]$ ein Bündel $x^{(i)} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ zu. Ist ein Angebotsvektor $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ gegeben, nennt man eine Allokation *gültig*, falls sie genau das Angebot verteilt, das heißt, falls $\sum_{i\in[m]} x^{(i)} = \mathbf{s}$ gilt. Das *soziale Wohl* einer gültigen Allokation $\mathbf{x}$ ist definiert als $\mathrm{SW}(\mathbf{x}) := \sum_{i\in[m]} v_i(x^{(i)})$. Eine gültige Allokation mit maximalem sozialen Wohl wird *optimale Allokation* genannt.

Definition 2.3 (Nachfragebereich)**.** Man nennt die Menge $\mathrm{D}(v, \mathbf{p})$ der Bündel, die den Nutzen unter einer Bewertungsfunktion $v : \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ bei Preisen $\mathbf{p}$ maximiert, den Nachfragebereich von v bei Preisen $\mathbf{p}$. Es ist also $\mathrm{D}(v, \mathbf{p}) := \arg\max_{x\in[\![\mathbf{s}]\!]} v(x) - \mathbf{p} \cdot x$. Für den Nachfragebereich eines Käufers $i \in [m]$ wird abkürzend $\mathrm{D}(i, p) := \mathrm{D}(v_i, p)$ geschrieben.

Definition 2.4 (Walras-Gleichgewicht)**.** Ein Paar $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ bestehend aus einer gültigen Allokation $\mathbf{x}$ und einem Preisvektor $\mathbf{p}$ heißt *(Walras-)Gleichgewicht*, falls jedem Käufer ein Bündel aus seinem Nachfragebereich zugewiesen wird, falls also $x^{(i)} \in \mathrm{D}(i, \mathbf{p})$ für alle

$i \in [m]$ gilt. Dabei nennt man $\mathbf{p}$ einen *Walras-Preisvektor* und $\mathbf{x}$ eine von $\mathbf{p}$ induzierte *Walras-Allokation.*

Bemerkung 2.5. Im Vergleich zu [LW18] wird hier das Angebot s_j positiv statt nicht-negativ gewählt und es werden mindestens zwei Käufer vorausgesetzt, um den Beweis von Lemma 3.7 bzw. von [LW18, Lemma 4] zu ermöglichen. Die ausgeschlossenen Fälle sind jedoch uninteressant.

In einem Walras-Gleichgewicht gibt es also für keinen der Käufer eine für ihn bessere Allokation: Das Bündel, das dem Käufer zugeteilt wird, hat bei den gegebenen Preisen einen für ihn maximalen Nutzen. Des Weiteren wird durch die Gültigkeit der Allokation in einem solchen Gleichgewicht sichergestellt, dass das Angebot und die Nachfrage des gesamten Marktes übereinstimmen: Es bleiben also weder Güter übrig, noch wird die Nachfrage irgendeines Käufers nicht gedeckt.
Darüber hinaus gelten hier die sogenannten Wohlfahrtstheoreme aus der Ökonomik: Das erste Wohlfahrtstheorem besagt, dass jedes Gleichgewicht bei vollkommenem Wettbewerb, wie er hier unter den Käufern möglich ist, das soziale Wohl maximiert. Das zweite Wohlfahrtstheorem sagt aus, dass jede optimale Allokation mit beliebigen Walras-Preisen ein Gleichgewicht erzeugt.

Lemma 2.6 (Erstes und zweites Wohlfahrtstheorem)**.** *Ist* $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ *ein Gleichgewicht, so ist* $\mathbf{x}$ *eine optimale Allokation. Ist* $\mathbf{y}$ *eine beliebige optimale Allokation, so bildet auch* $(\mathbf{y}, \mathbf{p})$ *ein Gleichgewicht.*

Beweis. Seien $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ ein Gleichgewicht und $\mathbf{y}$ eine gültige Allokation. Für alle $i \in [m]$ gilt wegen $x^{(i)} \in \mathrm{D}(i, \mathbf{p})$ dann $v_i(x^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet x^{(i)} \geq v_i(y^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet y^{(i)}$. Mit der Gültigkeit der Allokationen $\sum_{i \in [m]} x^{(i)} = \sum_{i \in [m]} y^{(i)} = \mathbf{s}$ folgere man

$$\sum_{i \in [m]} v_i(x^{(i)}) \geq \sum_{i \in [m]} \left(v_i(y^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet (y^{(i)} - x^{(i)}) \right) = \sum_{i \in [m]} v_i(y^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet (\mathbf{s} - \mathbf{s}) = \sum_{i \in [m]} v_i(y^{(i)}).$$

Insbesondere ist $\mathbf{x}$ also eine optimale Allokation.
Ist nun $\mathbf{y}$ ebenfalls optimal, gilt $\sum_{i \in [m]} v_i(x^i) = \sum_{i \in [m]} v_i(y^{(i)})$ und mit der Gültigkeit der Allokationen lässt sich

$$\sum_{i \in [m]} \left(v_i(x^i) - \mathbf{p} \bullet x^{(i)} \right) = \sum_{i \in [m]} \left(v_i(y^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet y^{(i)} \right)$$

folgern. Da $x^{(i)} \in \mathrm{D}(i, \mathbf{p})$ für die Summanden bereits $v_i(x^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet x^{(i)} \geq v_i(y^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet y^{(i)}$ impliziert, müssen diese bereits exakt übereinstimmen. Dadurch folgt auch $y^{(i)} \in \mathrm{D}(i, \mathbf{p})$ für alle $i \in [m]$, sodass $\mathbf{y}$ ebenfalls eine Walras-Allokation zu Preisen $\mathbf{p}$ ist. □

3 Berechnung von Walras-Preisen

Zunächst werden die verschiedenen Informationszugänge, die für die Bestimmung der Nachfrage eines Marktes zur Verfügung stehen können, beleuchtet. Anschließend wird darauf aufbauend ein Vorgehen und die dafür nötige Theorie eingeführt, mit dem Gleichgewichts-Preise berechnet werden können.

3.1 Informationszugang zum Markt

Bei der Berechnung eines Marktgleichgewichts müssen auf irgendeine Weise Informationen vom Markt erhoben werden. Dieser Informationszugang wird dann von Algorithmen als Schnittstelle zur Berechnung eines Gleichgewichts verwendet werden.
Da der Detailgrad der erfassbaren Informationen bei vielen Marktsituationen unterschiedlich ist, unterscheiden Leme und Wong in [LW18] drei verschiedene Modelle:

- *Die Mikroskopische Sicht:* Hier kann der Wert einzelner Bündel für jeden Käufer abgefragt werden. Das sogenannte *Wert-Orakel* bestimmt also anhand eines Käufers $i \in [m]$ und eines Bündels $x \in [\![\mathbf{s}]\!]$ den Wert $v_i(x)$.
- *Die Agenten-Sicht:* In diesem Modell besteht der Zugang zum Markt daraus, von jedem Käufer ein von ihm nachgefragtes Bündel bei gegebenen Preisen abfragen zu können. Sollten mehrere Bündel für den Käufer gleichwertig sein, so wird ein beliebiges dieser Bündel ausgegeben. Das *Nachfrage-Orakel* berechnet also anhand eines Preisvektors $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ und eines Käufers $i \in [m]$ ein Bündel $\mathrm{d}_i(\mathbf{p}) \in \mathrm{D}(i, \mathbf{p})$.
- *Die Makroskopische Sicht:* Hier können keine Informationen einzelner Käufer abgefragt werden, sondern nur noch auf die aggregierte Nachfrage bei gegebenen Preisen. Das heißt, das sogenannte *Aggregierte-Nachfrage-Orakel* liefert bei Eingabe eines Preisvektors $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ einen Nachfrage-Vektor $\mathrm{d}(\mathbf{p}) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, für den nachgefragte Bündel $x^{(i)} \in \mathrm{D}(i, \mathbf{p})$ mit $\mathrm{d}(\mathbf{p}) = \sum_{i \in [m]} x^{(i)}$ existieren.

Es sei erwähnt, dass man anhand eines Wert-Orakels ein Nachfrage-Orakel konstruieren kann: Sind Preise $\mathbf{p}$ sowie ein Käufer i gegeben, kann für jedes Bündel x der Nutzen $u_i(x; \mathbf{p})$ durch je eine Abfrage des Wert-Orakels berechnet werden und ein Bündel ausgegeben werden, welches diesen Wert maximiert. Für eine Abfrage des Nachfrage-Orakels entstehen dann $|[\![\mathbf{s}]\!]| = \prod_{i \in [n]} (s_i + 1)$ Abfragen des Wert-Orakels.
Genauso lässt sich aus einem Nachfrage-Orakel auch ein Aggregierte-Nachfrage-Orakel gewinnen: So kann man mit m Abfragen des Nachfrage-Orakels für alle $i \in [m]$ ein nachgefragtes Bündel erhalten, welche summiert den aggregierten Nachfrage-Vektor ergeben.
Im Folgenden wird ein Verfahren diskutiert, der das Aggregierte-Nachfrage-Orakel verwendet, um Walras-Preise für allgemeine Bewertungsfunktionen zu berechnen.

3.2 Darstellung als Lineares Optimierungsproblem

Man betrachte die Relaxation der Bestimmung von optimalen Allokationen als lineares Programm:

$$\begin{aligned}
&\max_z \sum_{i \in [m], x \in [\![\mathbf{s}]\!]} v_i(x) \cdot z_{i,x} && && \text{(P)} \\
\text{udN.} \quad & \sum_{x \in [\![\mathbf{s}]\!]} z_{i,x} = 1 && \text{für alle } i \in [m] \\
& \sum_{i \in [m], x \in [\![\mathbf{s}]\!]} x_j \cdot z_{i,x} = s_j && \text{für alle } j \in [n] \\
& z_{i,x} \geq 0 && \text{für alle } i \in [m], x \in [\![\mathbf{s}]\!]
\end{aligned}$$

Führt man für die ersten m Bedingungen die Variablen $(u_i)_{i\in[m]}$ und für die nächsten n Bedingungen die Variablen $(p_j)_{j\in[n]}$ ein, erhält man folgendes duale Programm:

$$\min_{\mathbf{p},\mathbf{u}} \sum_{i\in[m]} u_i + \mathbf{p} \bullet \mathbf{s} \tag{D}$$

$$\text{udN.} \quad u_i \geq v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x \qquad \text{für alle } i \in [m]\,, x \in [\![\mathbf{s}]\!]$$

Lemma 3.1. *Ein Walras-Gleichgewicht existert genau dann, wenn* (P) *eine ganzzahlige Optimallösung hat. Ist dies der Fall, so ist die Menge der Walras-Preise gerade die Menge der Optimallösungen von* (D) *projiziert auf die* $\mathbf{p}$*-Koordinaten.*

Beweis. Zunächst bemerke man, dass die zulässigen ganzzahligen Lösungen von (P) gerade den gültigen Allokationen entsprechen: Ist z ganzzahlig und zulässig, so gibt es für alle $i \in [m]$ wegen den ersten m Bedingungen und der Nichtnegativität von z genau ein Bündel $x^{(i)} \in [\![\mathbf{s}]\!]$ mit $z_{i,x^{(i)}} = 1$. Aus den weiteren n Bedingungen folgt dann die Gültigkeit der Allokation $(x^{(i)})_{i\in[m]}$. Ausgehend von einer Allokation $\mathbf{x}$ setzt man $z_{i,y} = 1$, falls $y = x^{(i)}$ gilt, und $z_{i,y} = 0$ sonst, um zu einer ganzzahligen Lösung von (P) zu gelangen.
Angenommen, es existiere ein Walras-Gleichgewicht $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Transformiert man die Allokation wie oben zu $(z_{i,x})_{i,x}$ und setzt man zusätzlich $u_i = \max_{x\in[\![s]\!]} v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x$, erhält man eine primal und eine dual zulässige Lösung mit gleichem Zielfunktionswert: Es gilt mit $x^{(i)} \in \mathrm{D}(i, \mathbf{p})$ und der Gültigkeit von $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in[m]} u_i + \mathbf{p} \bullet \mathbf{s} &= \sum_{i\in[m]} \left(\max_{x\in[\![\mathbf{s}]\!]} v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x\right) + \mathbf{p} \bullet s = \sum_{i\in[m]} \left(v_i(x^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet x^{(i)}\right) + \mathbf{p} \bullet \mathbf{s} \\ &= \sum_{i\in[m]} v_i(x^{(i)}) = \sum_{i\in[m], x\in[\![\mathbf{s}]\!]} v_i(x) \cdot z_{i,x}.\end{aligned}$$

Aufgrund schwacher Dualität ist $(z_{i,x})_{i,x}$ eine Optimallösung von (P).
Gibt es umgekehrt eine ganzzahlige Optimallösung, so kann diese wie oben zu einer gültigen Allokation $\mathbf{x}$ transformiert werden. Aufgrund starker Dualität gibt es auch eine Optimallösung $(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ von (D) mit Zielfunktionswert $\sum_{i\in[m]} v_i(x^{(i)})$. Die Optimalität von $(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ impliziert bereits $u_i = \max_{x\in[\![\mathbf{s}]\!]} v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x$ für alle $i \in [m]$. Subtrahiert man $\mathbf{p} \bullet \mathbf{s}$ vom Zielfunktionswert erhält man

$$\sum_{i\in[m]} \left(v_i(x^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet x^{(i)}\right) = \sum_{i\in[m]} \max_{x\in[\![\mathbf{s}]\!]} \left(v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x\right),$$

wodurch $x^{(i)} \in \mathrm{D}(i, \mathbf{p})$ für alle $i \in [m]$ folgt. Daher ist $\mathbf{x}$ eine Walras-Allokation induziert durch die Preise $\mathbf{p}$.
Der zweite Teil der Aussage folgt aus dem Beweis des ersten Teils. □

Lemma 3.2. *Das folgende transformierte Programm ist äquivalent zu* (D)*:*

$$\min_{\mathbf{p},u} u + \mathbf{p} \bullet \mathbf{s} \tag{TD}$$

$$\text{udN.} \quad u \geq \sum_{i\in[m]} \left(v_i(x^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet x^{(i)}\right) \qquad \text{für alle } \mathbf{x} = (x^{(i)})_{i\in[m]} \in [\![\mathbf{s}]\!]^m$$

Beweis. Für eine zulässige Lösung $(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ von (D) ist $(\mathbf{p}, u)$ mit $u := \sum_{i\in[m]} u_i$ eine zulässige Lösung von (TD) mit gleichem Zielfunktionswert. Umgekehrt ist für eine zulässige

Lösung $(\mathbf{p}, u)$ von (TD) mit $u_i := \max_{x \in [\![\mathbf{s}]\!]} v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x$ auch $(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ zulässig für (D) mit einem Wert von höchstens $u + \mathbf{p} \bullet \mathbf{s}$, da die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\sum_{i \in [m]} u_i = \sum_{i \in [m]} \max_{x \in [\![\mathbf{s}]\!]} (v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x) = \max_{\mathbf{x} \in [\![\mathbf{s}]\!]^m} \sum_{i \in [m]} \left(v_i(x^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet x^{(i)} \right) \leq u.$$

□

Bemerkung 3.3. In [LW18] wird statt der Nebenbedingung in (TD) die Nebenbedingung $u \geq \sum_{i \in [m]} v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x$ für alle $x \in [\![\mathbf{s}]\!]$ betrachtet. Das entsprechende Problem ist jedoch nicht äquivalent zu (D): Betrachtet man einen Markt mit nur einem Gut mit Angebot $s = 1$ und zwei Käufern, deren Bewertungsfunktionen durch $v_1(0) = v_2(0) = 0$ und $v_1(1) = 1$ sowie $v_2(1) = -1$ gegeben sind, haben die Probleme unterschiedliche Optimalwerte.

3.3 Konvexe Darstellung und Subgradienten

Für die Berechnung von Walras-Preisen genügt es also – im Falle ihrer Existenz – einen Minimierer von (D) zu ermitteln. Dabei können die Variablen $(u_i)_{i \in [m]}$ vermieden werden, indem man zu einem konvexen Minimierungsproblem wechselt:

Definition 3.4. Seien ein Angebot $\mathbf{s}$ sowie Käufer mit Bewertungen $(v_i)_{i \in [m]}$ gegeben. Die *Marktpotenzialfunktion* ist definiert als

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{p} \mapsto \sum_{i \in [m]} \left(\max_{x \in [\![\mathbf{s}]\!]} v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x \right) + \mathbf{p} \bullet \mathbf{s}.$$

Die Minimierer dieser Marktpotenzialfunktion sind gerade alle Optimallösungen von (D) projiziert auf die $\mathbf{p}$-Koordinaten. Da das Maximum und die Summe konvexer Funktionen wieder konvex sind, ist f ebenfalls konvex.
Eine Möglichkeit, konvexe Funktionen zu optimieren, bildet die sogenannte Subgradienten-Methode. Daher wird zunächst der Begriff eines Subgradients eingeführt:

Definition 3.5 (Subgradient)**.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Man nennt $g \in \mathbb{R}^n$ einen *Subgradient von f an* $p \in \mathbb{R}^n$, falls $f(x) \geq f(p) + g \bullet (x - p)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Man bemerke, dass $\mathbf{p}$ eine konvexe Funktion f genau dann minimiert, wenn der Nullvektor ein Subgradient von f an $\mathbf{p}$ ist.
Zwar ist es schwierig mit dem Aggregierte-Nachfrage-Orakel Auswertungen von f selbst zu machen, jedoch lassen sich sehr wohl Subgradienten von f damit ermitteln:

Lemma 3.6. *Für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ist $\mathbf{s} - \mathrm{d}(\mathbf{p})$ ein Subgradient von der Marktpotenzialfunktion f an $\mathbf{p}$.*

Beweis. Sei $\mathrm{d}(\mathbf{p}) = \sum_{i \in [m]} x^{(i)}$ die aggregierte Nachfrage zum Preis $\mathbf{p}$. Da f eine Summe konvexer Funktionen ist, ist nach [Sho85, Theorem 1.12] jede Summe von Subgradienten der einzelnen Summanden an $\mathbf{p}$ ein Subgradient von f an $\mathbf{p}$. Weiter ist nach [Sho85, Theorem 1.13] für das Maximum konvexer Funktionen jeder Subgradient einer Funktion, die in $\mathbf{p}$ das Maximum annimmt, ein Subgradient der Maximumsfunktion an $\mathbf{p}$. Des Weiteren ist für eine differenzierbare Funktion der einzige Subgradient der Gradient der Funktion. Da $x^{(i)} \in \arg\max_{x \in [\![\mathbf{s}]\!]} v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x$ für alle $i \in [m]$ gilt, sind $-x^{(i)}$ ein Subgradient von $\mathbf{p} \mapsto \max_{x \in [\![\mathbf{s}]\!]} v_i(x) - \mathbf{p} \bullet x$ für alle $i \in [m]$ und $\mathbf{s} - \mathrm{d}(\mathbf{p})$ ein Subgradient von f an $\mathbf{p}$. □

Lemma 3.7. *Für $M := \max_{i \in [m], x \in [\![\mathbf{s}]\!]} |v_i(x)|$ sind alle Walras-Preise in $[-2M, 2M]^n$ enthalten.*

Beweis. Seien ein Walras-Gleichgewicht $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ und $j \in [n]$ gegeben. Der Preis p_j übersteigt $2M$ nicht, denn sonst würde kein Käufer j nachfragen: Da s_j positiv ist, gibt es einen Käufer i mit $x_j^{(i)} > 0$, für den $x^{(i)} \in \mathrm{D}(i, \mathbf{p})$ folgende Ungleichung impliziert:

$$v_i(x^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet x^{(i)} \geq v_i(x^{(i)} - e_j) - \mathbf{p} \bullet (x^{(i)} - e_j).$$

Es folgt also $2M \geq v_i(x^{(i)}) - v_i(x^{(i)} - e_j) \geq p_j$. Umgekehrt ist p_j mindestens $-2M$, denn sonst würden alle Käufer jeweils das gesamte Angebot von j nachfragen: Angenommen, es gilt $p_j < -2M$, so folgt $x_j^{(i)} = s_j$ für alle $i \in [m]$, denn für $x_j^{(i)} < s_j$ folgt der Widerspruch

$$v_i(x^i) - \mathbf{p} \bullet x^{(i)} < v_i(x^{(i)}) - \mathbf{p} \bullet (x^{(i)} + e_j) - 2M \leq v_i(x^{(i)} + e_j) - \mathbf{p} \bullet (x^{(i)} + e_j).$$

Da es mindestens zwei Käufer gibt, folgt schließlich $p_j \geq -2M$. □

Lemma 3.8. *Die Menge der Walras-Preise ist ein Polytop, dessen Ecken* $\mathbf{p}$ *von der Form* $p_j = a_j/b$ *mit* $a_j, b \in \mathbb{Z}$ *und* $|b| \leq (n+1)!\,(mS)^n$ *für* $S = \max_{j \in [n]} s_j$ *sind.*

Beweis. Ergänzt man (TD) um Schlupfvariablen $\mathbf{y} = (y_\mathbf{x})_{\mathbf{x} \in [\![\mathbf{s}]\!]^m}$, so erhält man Bedingungen der Form $u + \mathbf{p} \bullet \sum_{i \in [m]} x^{(i)} + y_\mathbf{x} = \sum_{i \in [m]} v_i(x^{(i)})$ für alle $i \in [m], \mathbf{x} \in [\![\mathbf{s}]\!]^m$. Seien A die Matrix und b der Vektor, die diese Nebenbedingungen in $A \cdot (\mathbf{p}, u, \mathbf{y})^T = b$ zusammenfasst.
Aus den Grundlagen linearer Optimierung ist bekannt, dass beschränkte Optimierungsprobleme bei nichtleerem Zulässigkeitsbereich immer optimale Ecklösungen, also optimale Basislösungen, besitzen. Die Regel von Cramer besagt, dass optimale Basislösungen $(\mathbf{p}, u, \mathbf{y})$ die Darstellung $p_j = \det(A_B^j)/\det(A_B)$ für $j \in [n] \cap B$ haben, wobei A_B die Basisspalten von A sind und A_B^j aus A_B durch Ersetzen der j-ten Spalte mit b_B entsteht. Der Zähler ist also eine ganze Zahl. Sind Schlupfvariablen in der Basis B, so kann man $\det(A_B)$ jeweils nach diesen Spalten entwickeln, da A_B hier nur aus Einheitsvektoren besteht. Es genügt also die Determinante einer $(n+1) \times (n+1)$-Submatrix mit den Spalten von $\mathbf{p}$ und u zu beschränken: Die Einträge dieser Spalten sind hier zwischen 0 und $m \cdot S$, sodass mit der Leibniz-Formel $|\det(A_B)| \leq (n+1)!\,(mS)^n$ folgt. □

Bemerkung 3.9. Im Vergleich zu [LW18, Lemma 5] ist in der Abschätzung hier die Anzahl der Käufer m enthalten. Die Begründung der Schranke $n!\,S^n$ im Beweis von [LW18, Lemma 5] nutzt ebenfalls die Cramersche Regel von Basislösungen des LPs mit dem Hinweis, die zugehörige Matrix enthalte nur Koeffizienten in $\{0, 1, \ldots, S\}$. Tatsächlich enthält sie aber Koeffizienten in $\{0, 1, \ldots, mS\}$. Es kann $\det(A_B)$ sogar den Wert mS annehmen: Dazu betrachte man den Markt mit einem Gut mit $s = 1$ und zwei Käufern. Besteht B aus den durch $\mathbf{x}_1 = (0,0)$ und $\mathbf{x}_2 = (1,1)$ induzierten Zeilen, gilt $\det(A_B) = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 2$. Dies ist zwar kein Gegenbeispiel, da dies nur für Bewertungen mit $v_1(1) = v_2(1)$ eine zulässige Basislösung ist und in diesem Fall $p = \det(A_B^p)/2 = (v_1(1) + v_2(2))/2$ ganzzahlig wäre. Jedoch lässt es Zweifel ob der Korrektheit von [LW18, Lemma 5] zu.

Für einen Spezialfall hilft nun die Ellipsoid-Methode bei der Berechnung von Walras-Preisen. Diese wird beispielsweise in [BGT81, Abschnitt 2] diskutiert und es lässt sich folgendes Theorem daraus ableiten:

Theorem 3.10 (Ellipsoid-Methode). *Seien eine konvexe Menge* $K \subseteq B_r(\mathbf{0}) \subseteq \mathbb{R}^n$ *und ein Trennorakel gegeben, also ein Orakel, das für einen Punkt* $\mathbf{p} \in B_r(\mathbf{0})$ *entweder die Meldung „*$\mathbf{p} \in K$*" oder eine Halbebene, die* $\mathbf{p}$ *und* K *trennt, also einen Vektor* $g \in \mathbb{R}^n$ *mit* $g \bullet \mathbf{p} \leq g \bullet \mathbf{p}^*$ *für alle* $\mathbf{p}^* \in K$ *ausgibt.*
Dann lässt sich mit t *Abfragen des Orakels entweder ein Punkt* $\mathbf{p} \in K$ *oder eine Ellipse mit Maximalvolumen* $\exp(-t/(2n+1)) \cdot \mathrm{vol}(B_r(\mathbf{0}))$*, welche die Menge* K *enthält, ermitteln.*

Bei der Suche nach einem Trennorakel hilft hier natürlich das Aggregierte-Nachfrage-Orakel, mit dem sich Subgradienten der Marktpotenzialfunktion berechnen lassen.

Theorem 3.11. *Gilt* $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$ *für die Menge* K *der Walras-Preise im* $\mathbb{R}^n$*, so kann man mit* $\mathcal{O}(n^3 \log(nmS) + n^2 \log(M))$ *Abfragen des Aggregierte-Nachfrage-Orakels und Iterationen der Ellipsoidmethode einen Walras-Preisvektor bestimmen.*

Beweis. Nach Lemma 3.7 sind alle Walras-Preise in der Menge $[-2M, 2M]^n \subseteq B_r(\mathbf{0})$ mit $r = 2M\sqrt{n}$ enthalten. Außerdem gilt $K = \arg\min_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p})$ wobei f die Marktpotenzialfunktion ist. Als Trennorakel dient hier das Aggregierte-Nachfrage-Orakel, welches mit $g \coloneqq \mathbf{s} - \mathrm{d}(\mathbf{p}_0)$ für $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^n$ nach Lemma 3.6 einen Subgradienten von f an $\mathbf{p}_0$ ermitteln kann. Ist $g = \mathbf{0}$, so kann „$\mathbf{p}_0 \in K$“ gemeldet werden. Sonst gilt für die Halbebene $H \coloneqq \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid g \bullet \mathbf{p} \leq g \bullet \mathbf{p}_0\}$ dann $g \bullet \mathbf{p}^* \leq f(\mathbf{p}^*) - f(\mathbf{p}_0) + g \bullet \mathbf{p}_0 \leq g \bullet \mathbf{p}_0$ für alle $\mathbf{p}^* \in K$. Da $\operatorname{int}(K)$ nichtleer ist, existieren Ecken $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$ von K, sodass der Simplex S, welcher durch diese Ecken aufgespannt wird, positives Volumen hat. Dieses Volumen kann mit

$$\operatorname{vol}(S) = \left| \frac{1}{n!} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix} \right| \eqqcolon \left| \frac{1}{n!} \det(A) \right|$$

berechnet werden. Nach Lemma 3.8 kann der Nenner der Einträge eines jeden Walras-Preisvektors durch $R \coloneqq (n+1)!\,(mS)^n$ abgeschätzt werden. Multipliziert man jede Spalte mit seinem Nenner, erhält man eine ganzzahlige Matrix $\tilde{A}$ mit $|\det(\tilde{A})| > 0$, welche die Ungleichung $|\det(A)| \geq R^{-(n+1)} |\det(\tilde{A})| \geq R^{-(n+1)}$ erfüllt. Entsprechend kann man also $\operatorname{vol}(K) \geq \operatorname{vol}(S) \geq R^{-(n+1)}/n! \geq (nR)^{-(n+1)}$ folgern.
Die n-dimensionale euklidische Einheitskugel ist in der n-dimensionalen Kugel mit Radius $\sqrt{n}$ bzgl. der $\|\bullet\|_1$-Norm enthalten. Diese ist die disjunkte Vereinigung von 2^n Simplizes, welche je ein Volumen von $n^{n/2}/n!$ haben. Die Stirling-Formel impliziert die Konvergenz $(2^n n^{n/2}/n!\,)/(2e/\sqrt{n})^n = n^n/(n!\,e^n) \to_{n\to 0} 0$. Daher wird $\operatorname{vol}(B_1(\mathbf{0}))$ durch $\mathcal{O}(n^{-n/2})$ beschränkt und es folgt $\operatorname{vol}(B_r(\mathbf{0})) \in \mathcal{O}(M^n)$.
Gibt die Ellipsoidmethode nach t Iterationen eine Ellipse E aus, welche die Bedingungen $\operatorname{vol}(E) \leq \exp(-t/(2n+1)) \cdot \operatorname{vol}(B_r(\mathbf{0}))$ und $K \subseteq E$ erfüllt, gilt mit $\operatorname{vol}(E) \geq \operatorname{vol}(K)$:

$$\exp(-t/(2n+1)) \cdot \operatorname{vol}(B_r(\mathbf{0})) \geq (nR)^{-(n+1)} \;\Leftrightarrow\; \exp(t) \leq \left(\operatorname{vol}(B_r(\mathbf{0}))(nR)^{n+1}\right)^{(2n+1)}$$

Insbesondere gilt also $t \in \mathcal{O}(n^2 \log(M) + n^2 \log(nR)) = \mathcal{O}(n^2 \log(M) + n^3 \log(nmS))$. Daher ist die Ellipsoidmethode dazu gezwungen nach so vielen Iterationen einen Punkt $\mathbf{p} \in K$ auszugeben. □

Leme und Wong zeigen in [LW18, Theorem 7], dass man im Falle der Existenz von Walras-Preisen auch im allgemeinen Fall in $\mathcal{O}(n^2 T \log(SMn) + n^5 \log^{\mathcal{O}(1)}(SMn))$ Zeit einen exakten Walras-Preisvektor bestimmen kann. Dabei ist T die Laufzeit einer Abfrage des Aggregierte-Nachfrage-Orakels.
Um dieses Ergebnis zu erzielen, wird eine neue Variante der Schnittebenenverfahren von Lee u.a. aus [LSW15, Theorem 31] genutzt, womit L-Lipschitz-stetig konvexe Funktionen effizient approximativ minimiert werden können. Um exakte Walras-Preise zu berechnen, wird die Darstellung als lineares Optimierungsproblem genutzt. Es werden kleine Störungen an der Zielfunktion zugelassen, anschließend eine angenäherte Lösung des gestörten Problems berechnet und durch geschicktes Runden auf eine exakte Optimallösung des Ursprungsproblems geschlossen.
Leider konnten einige Beweise auf dem Weg zu diesem Ziel im Rahmen der Seminararbeit nicht nachvollzogen werden. Im Folgenden werden einige Hindernisse aufgezeigt:

In [LW18, Theorem 5] wird die neue Methode der Schnittebenenverfahren aus [LSW15, Theorem 31] sinngemäß zitiert. Hier ist unklar, wie das Zitat aus dem ursprünglichen Theorem folgt. Jedoch haben sich wohl zumindest kleinere Fehler eingeschlichen: So ist einerseits nicht klar, wie Leme und Wong auf die Abschätzung $\mathcal{O}(n\delta \log(Mn/\delta))$ für die Breite von P kommen, da man nach Lee u.a. die Abschätzung $\mathcal{O}(n\delta \log(M/\delta))$ erwarten würde. Weiterhin sind die Folgerungen über die Konvexkombination jeweils unterschiedlich formuliert: So betrifft diese bei Lee u.a. nur die Vektoren $a_2, \ldots, a_{\mathcal{O}(n)}$ und a_1 spielt eine gesonderte Rolle. Bei Leme und Wong ist diese gesonderte Rolle nicht vorhanden und es wird über eine Konvexkombination $\sum_{i \in [\mathcal{O}(1)]} t_i$ geredet. Außerdem fehlen in den Abschätzungen der Terme $\left\| \sum_{i \in [k]} t_i \mathbf{a}_i \right\|_2$ und $\left| \sum_{i \in [k]} t_i b_i \right|$ bei Leme und Wong wohl jeweils die Vorfaktoren t_i.
Des Weiteren nutzen Leme und Wong in [LW18, Theorem 6] das obige Ergebnis, um konvexe Funktionen mit einem Subgradienten-Orakel zu minimieren. Im einfacheren Fall des Beweises, in dem alle Restriktionen des Polytops dem Orakel entspringen, wählt man δ so klein, dass bereits $\varepsilon = \mathcal{O}(n\delta L \log(M'/\delta))$ gilt. Wegen $\lim_{\delta \to 0} \delta \cdot \log(\delta) = 0$ ist dies möglich, jedoch gehen Leme und Wong nicht darauf ein, wieso dadurch keine negativen Auswirkungen auf die Laufzeit entstehen: Je kleiner δ gewählt wird, desto länger ist auch die Laufzeit nach [LW18, Theorem 5]. Da auch im allgemeinen Fall des Beweises einige Ungleichungen sowie die Laufzeit unklar sind, wurde hier darauf verzichtet, genauer auf die restlichen Ergebnisse, die zu [LW18, Theorem 7] führen, einzugehen.

4 Brutto-Substituts-Bewertungen

In diesem Abschnitt werden die Bewertungsfunktionen der Käufer eingeschränkt. In vielen Marktmodellen werden nur „ähnliche“ Güter betrachtet. Diesen unterstellt man, dass bei steigenden Preisen des einen Guts ein anderes Gut dieses substituieren kann. Insbesondere geht man davon aus, dass, sollten die Preise anderer Güter steigen, die Nachfrage der Güter mit gleichbleibendem Preis nicht sinkt.

Definition 4.1 (Brutto-Substituts-Bewertung)**.** Eine Bewertungsfunktion $v : [\![s]\!] \to \mathbb{Z}$ heißt *Brutto-Substituts-Bewertung* (engl. gross substitutes valuation), falls es für Preise $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{p}' \geq \mathbf{p}$ und für ein nachgefragtes Bündel $x \in \mathrm{D}(v, \mathbf{p})$ zu Preisen $\mathbf{p}$ ein nachgefragtes Bündel $y \in \mathrm{D}(v, \mathbf{p}')$ zu Preisen $\mathbf{p}'$ existiert, welches $y_j \geq x_j$ für alle $j \in [n]$ mit $p_j = p'_j$ erfüllt.

Einige wichtige Resultate über Brutto-Substituts-Bewertungen wurden nur für den Fall gezeigt, dass jedes jedes Gut genau einmal angeboten wird, also für $s_j = 1$ für alle $j \in [n]$. Die Theorie von Brutto-Substituts-Bewertungen wurde für diesen Fall maßgeblich von Kelso und Crawford in [KC82] entwickelt. Man kann den Fall mehrfachen Angebots einzelner Güter darauf herunterbrechen, indem man jedes Vorkommen eines Guts unabhängig bepreisen lässt:

Definition 4.2 (Unabhängige Brutto-Substituts-Bewertung)**.** Eine Bewertungsfunktion $v : [\![s]\!] \to \mathbb{Z}$ heißt *unabhängige Brutto-Substituts-Bewertung*, falls

$$\widetilde{v} : [\![1]\!]^{N_\mathbf{s}} \to \mathbb{Z}, \quad (x_{i,j})_{(i,j) \in N_\mathbf{s}} \mapsto v\left(\left(\sum_{j \in [s_i]} x_{i,j}\right)_{i \in [n]}\right)$$

eine Brutto-Substituts-Bewertung ist, wobei $N_\mathbf{s} \coloneqq \{(i,j) \mid i \in [n], j \in [s_i]\}$ gilt.

Proposition 4.3. *Jede unabhängige Brutto-Substituts-Funktion ist eine Brutto-Substituts-Funktion. Es gibt aber Brutto-Substituts-Funktionen, die nicht unabhängig sind.*

Beweis. Für Preise $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{p}' \geq \mathbf{p}$ definiere man $\widetilde{\mathbf{p}} := (p_i)_{i\in[n], j\in[s_i]}$ und analog $\widetilde{\mathbf{p}'} := (p'_i)_{i\in[n], j\in[s_i]}$. Für ein Bündel $x \in \mathrm{D}(v, \mathbf{p})$ ist $\widetilde{x}$ mit $\widetilde{x}_{i,j} = 1$ für $j \in [x_i]$ und $\widetilde{x}_{i,j} = 0$ für $j > x_i$ in $\mathrm{D}(\widetilde{v}, \widetilde{\mathbf{p}})$ enthalten. Da $\widetilde{v}$ eine Brutto-Substituts-Bewertung ist, existiert ein Bündel $\widetilde{y}$ in $\mathrm{D}(\widetilde{v}, \widetilde{\mathbf{p}'})$ mit $\widetilde{y}_{i,j} \geq \widetilde{x}_{i,j}$ für alle $(i,j) \in N_{\mathbf{s}}$ mit $p_i = p'_i$. Dementsprechend ist $y := (\sum_{j\in[s_i]} \widetilde{y}_{i,j})_{i\in[n]}$ in $\mathrm{D}(v, \mathbf{p}')$ und es gilt $y_i \geq x_i$ für alle $i \in [n]$, sodass v die Brutto-Substituts-Eigenschaft erfüllt.
Nun ein Beispiel einer nicht unabhängigen Brutto-Substituts-Funktion: Wir betrachten einen Markt mit nur einem Gut mit $s = 2$ und der Bewertungsfunktion $v(k) := k^2$, welche automatisch eine Brutto-Substituts-Funktion ist. Setzt man Preise $\widetilde{p}_j := 2$ für $j \in [2]$ fest, so ist der Nutzen beim Kauf beider Einheiten maximal; es gilt $(1,1) \in \mathrm{D}(\widetilde{v}, \widetilde{\mathbf{p}})$. Erhöht man den Preis der ersten Einheit auf $\widetilde{p}'_1 := 3$ und behält den Preis der zweiten Einheit bei, so ist $(0,0)$ das einzige nachgefragte Bündel. Daher ist $\widetilde{v}$ keine Brutto-Substituts-Funktion. □

Bemerkung 4.4. In [LW18] wurden Brutto-Substituts-Bewertungen für allgemeine Angebote $[\![\mathbf{s}]\!]$ direkt als unabhängige Brutto-Substituts-Bewertungen definiert. In [ST15] wird diese stärkere Version als „strong gross-substitute-condition (SS)“ bezeichnet.

4.1 M$^\natural$-Konkave und Matroidale Funktionen

Eine elementare Charakterisierung von Brutto-Substituts-Bewertungen findet sich in der diskreten Analysis. So entspricht das Konzept der M$^\natural$-Konkavität, also einer diskreten Version von Konkavität, in gewisser Weise der Brutto-Substituts-Eigenschaft.
Dazu wird hier die Beschreibung der Eigenschaft von Murota aus [Mur03, Theorem 6.2 bzw. Abschnitt 11.3] eingeführt.

Definition 4.5. Es bezeichne $\mathrm{dom}(v) := \{z \mid v(z) \in \mathbb{R}\}$ die *Domäne*, also den reellwertigen Bereich, einer Funktion $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

In dieser Arbeit werden meist Funktionen $v : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{Z}^n$ betrachtet. Um die folgende Definition anwenden zu können, werden solche Funktionen v hier als Funktionen $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ interpretiert, wobei $v(x) = -\infty$ für $x \notin D$ gilt. Hier gilt $D = \mathrm{dom}(v)$.

Definition 4.6 (M$^\natural$-Konkavität)**.** Eine Funktion $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mit $\mathrm{dom}(v) \neq \emptyset$ heißt M$^\natural$-*konkav* („M-natürlich konkav“), falls

$$v(x) + v(y) \leq \max\left\{ v(x - e_i) + v(y + e_i), \max_{j: x_j < y_j} v(x - e_i + e_j) + v(y + e_i - e_j) \right\}$$

für alle $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ und $i \in [n]$ mit $x_i > y_i$ gilt. Hier gelte $\max(\emptyset) = -\infty$.

Murota gibt in [Mur03, Theorem 6.24 bzw. Abschnitt 11.3] eine äquivalente Beschreibung von M$^\natural$-konkaven Funktionen, die für die Anwendung hier sehr nützlich erscheint:

Theorem 4.7. *Eine Funktion $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist genau dann* M$^\natural$*-konkav, wenn für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ und $x, y \in \mathrm{dom}(v) \neq \emptyset$ die Ungleichung $v(x) - \mathbf{p} \cdot x < v(y) - \mathbf{p} \cdot y$ bereits*

$$v(x) - \mathbf{p} \cdot x < \max_{i:\, x_i > y_i \,\vee\, i=0} \; \max_{j:\, x_j < y_j \,\vee\, j=0} v(x - e_i + e_j) - \mathbf{p} \cdot (x - e_i + e_j)$$

impliziert.

Ein wichtiges Resultat, das die Brutto-Substituts-Eigenschaft mit M$^\natural$-Konkavität in Beziehung stellt, liefert [FY03, Theorem 2.1]:

Theorem 4.8. *Eine Bewertungsfunktion $\widetilde{v} : [\![1]\!]^n \to \mathbb{Z}$ erfüllt genau dann die Brutto-Substituts-Eigenschaft, wenn sie* M$^\natural$*-konkav ist.*

Dies impliziert eine wichtige Eigenschaft unabhängiger Brutto-Substituts-Bewertungen:

Korollar 4.9. *Ist v eine unabhängige Brutto-Substituts-Funktion $v : [\![\mathbf{s}]\!] \to \mathbb{Z}$, so sind für alle Preise $\mathbf{p}$ lokale Maxima von $x \mapsto v(x) - \mathbf{p} \bullet x$ bereits global maximal. Dabei heißt ein Bündel x lokales Maximum von f, falls $f(x) \geq \max_{i,j \in [\![n]\!]} f(x - e_i + e_j)$ gilt.*

Beweis. Nach Theorem 4.8 ist $\widetilde{v}$ M$^\natural$-konkav. Seien Bündel $x, y \in [\![\mathbf{s}]\!]$ und Preise $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ mit $v(x) \geq \max_{i,j \in [\![n]\!]} v(x - e_i + e_j) + \mathbf{p} \bullet (-e_i + e_j)$ gegeben und man nehme an, es gelte $v(x) - \mathbf{p} \bullet x < v(y) - \mathbf{p} \bullet y$. Man definiere das Bündel $\widetilde{x} \in [\![1]\!]^{N_\mathbf{s}}$ mit $\widetilde{x}_{i,j} := 1$ für $j \in [x_i]$ und $\widetilde{x}_{i,j} := 0$ für $x_i < j \leq s_i$ sowie analog das Bündel $\widetilde{y}$ und die Preise $\widetilde{p}_{i,j} := p_i$ für alle $i \in [n]$ und $j \in [s_i]$. Nach Theorem 4.7 existieren $i, j \in N_\mathbf{s} \cup \{0\}$ mit

$$v(\widetilde{x}) - \widetilde{\mathbf{p}} \bullet \widetilde{x} < \widetilde{v}(\widetilde{x} - e_i + e_j) - \widetilde{\mathbf{p}} \bullet (\widetilde{x} - e_i + e_j).$$

Entsprechend existieren $k, l \in [n] \cup \{0\}$ mit $v(x) - \mathbf{p} \bullet x < v(x - e_k + e_l) - \mathbf{p} \bullet (x - e_k + e_l)$, was der lokalen Maximalität von x widerspricht. □

Bemerkung 4.10. Nach [Mur03, Theorem 11.5] erfüllt jede M$^\natural$-konkave Funktion die Brutto-Substituts-Eigenschaft. Die umgekehrte Aussage gilt nur, falls die Funktion konkav-erweiterbar ist. Ist die Domäne $\mathrm{dom}(v) \subseteq \mathbb{Z}_+^n$ einer konkav-erweiterbaren Funktion v beschränkt, so ist v nach [ST15, Theorem 4.1] sogar genau dann unabhängige Brutto-Substituts-Bewertung, wenn sie M$^\natural$-konkav ist. Falls unabhängige Brutto-Substituts-Bewertungen mit Domäne $[\![\mathbf{s}]\!]$ bereits automatisch konkav-erweiterbar wären, so würde im Szenario dieser Arbeit bereits Äquivalenz gelten. Dies bleibt an dieser Stelle jedoch offen.

Wie sich zeigt, ist M$^\natural$-Konkavität nicht die einzige interessante Charakterisierung von Brutto-Substituts-Funktionen. So lässt sich auch das Konzept von sogeannten matroidalen Funktionen wiederfinden:

Definition 4.11 (Matroidale Funktion)**.** Eine Funktion $v : [\![\mathbf{s}]\!]^n \to \mathbb{Z}$ heißt *matroidal*, falls der Greedy-Algorithmus für alle Preise $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ein Bündel aus $\mathrm{D}(v, \mathbf{p})$ berechnet.

Greedy-Algorithmus: Initialisiere das Bündel x mit $x \leftarrow \mathbf{0}$. Solange ein $i \in [n]$ existiert, das $x_i < s_i$ und $v(x + e_i) - p_i > v(x)$ erfüllt, aktualisiere x mit $x \leftarrow x + e_{i^*}$, wobei i^* ein Index mit $x_{i^*} < s_{i^*}$ sei, der $v(x + e_{i^*}) - p_{i^*}$ maximiert.

In [Lem17, Theorem 3.2] wird nun folgende Äquivalenz bewiesen:

Theorem 4.12. *Eine Funktion $\widetilde{v} : [\![1]\!]^n \to \mathbb{Z}$ ist genau dann matroidal, wenn sie eine Brutto-Substituts-Bewertung ist.*

Dieses Ergebnis lässt sich auf unabhängige Brutto-Substituts-Bewertungen erweitern. Außerdem kann man in diesem Fall die Simulation eines Aggregierte-Nachfrage-Orakels durch ein Wert-Orakel deutlich beschleunigen: Allgemein benötigt man für eine Abfrage des Aggregierte-Nachfrage-Orakels nach Abschnitt 3.1 $m \cdot |[\![\mathbf{s}]\!]|$ Abfragen des Wert-Orakels.

Korollar 4.13. *Eine unabhängige Brutto-Substituts-Bewertung ist matroidal. Insbesondere kann man mit mn^2S Abfragen eines Wert-Orakels einen aggregierten Nachfrage-Vektor berechnen, falls alle Käufer eine unabhängige Brutto-Substituts-Bewertung haben.*

Beweis. Für eine unabhängige Brutto-Substituts-Funktion $v : [\![\mathbf{s}]\!] \to \mathbb{Z}$ ist $\widetilde{v}$ nach Theorem 4.12 matroidal. Zu Preisen $\mathbf{p}$ kann also mit dem Greedy-Algorithmus ein Vektor $\widetilde{x} \in \mathrm{D}(\widetilde{v}, \widetilde{\mathbf{p}})$ mit $\widetilde{\mathbf{p}} := (p_i)_{(i,j)\in N_\mathbf{s}}$ berechnet werden. Dieser kann mit $x = (\sum_{j\in[s_i]} x_j)_{i\in[n]}$ in ein Nachfragebündel aus $\mathrm{D}(v, \mathbf{p})$ transformiert werden. Es ist leicht zu sehen, dass der Greedy-Algorithmus – führt man ihn auf der Eingabe $(v, \mathbf{p})$ aus – diese Aggregation bereits während der Berechnung durchführt und das gleiche Ergebnis ausgibt.
Um also ein nachgefragtes Bündel $\mathrm{d}_i(\mathbf{p})$ zu berechnen, benötigt der Greedy-Algorithmus auf der Eingabe $(v, \mathbf{p})$ bis zu $\sum_{i\in[n]} s_i \leq nS$ Durchläufe der Schleife, welche selbst jeweils bis zu n Auswertungen von v, also bis zu n Abfragen des Wert-Orakels, tätigt. Für einen aggregierten Nachfrage-Vektor $d(\mathbf{p}) = \sum_{i\in[m]} d_i(\mathbf{p})$ werden also maximal mn^2S Abfragen benötigt. □

4.2 Auswirkung auf Walras-Preise

Mit den Resultaten aus Abschnitt 4.1 lässt sich nun folgende Eigenschaft über die Menge der Walras-Preise zeigen, falls alle Käufer eine unabhängige Brutto-Substituts-Bewertung haben:

Theorem 4.14. *Haben alle Käufer unabhängige Brutto-Substituts-Bewertungen, so sind alle Ecken des Zulässigkeitsbereichs von* (TD) *ganzzahlig. Insbesondere ist in dem Fall die Menge der Walras-Preise ein ganzzahliges Polytop.*

Der Beweis dieses Theorems stellt eine zulässige Lösung durch Rundung als Konvexkombination ganzzahliger Lösungen dar. Dafür sind folgende Notation und Proposition hilfreich:

Notation 4.15. Der Nachkommaanteil einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ sei notiert als $\mathrm{frac}(a) := a - \lfloor a \rfloor$.

Proposition 4.16. *Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ gegeben und sei θ zufällig aus dem Intervall $[0, 1]$ gewählt. Setzt man $\hat{p_i} := \lceil p_i \rceil$ für $\mathrm{frac}(p_i) > \theta$ und $\hat{p_i} := \lfloor p_i \rfloor$ für $\mathrm{frac}(p_i) \leq \theta$, so erfüllt der Erwartungswert $\mathbb{E}[\hat{p_i}] = p_i$ für $i \in [2]$. Außerdem gilt $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \in \{\lfloor p_1 - p_2 \rfloor, \lceil p_1 - p_2 \rceil\}$.*

Beweis. Ist p_i ganzzahlig, so gilt $\hat{p_i} = p_i$. Für $p_i \notin \mathbb{Z}$ gilt $\lceil p_i \rceil = \lfloor p_i \rfloor + 1$. Die Wahrscheinlichkeit für $\hat{p_i} = \lceil p_i \rceil$ ist $\mathrm{frac}(p_i)$ und die Wahrscheinlichkeit für $\hat{p_i} = \lfloor p_i \rfloor$ ist $(1 - \mathrm{frac}(p_i))$. Dementsprechend gilt für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{p_i}) &= \mathrm{frac}(p_i) \cdot \lceil p_i \rceil + (1 - \mathrm{frac}(p_i)) \cdot \lfloor p_i \rfloor = \mathrm{frac}(p_i) \cdot (\lfloor p_i \rfloor + 1) + (1 - \mathrm{frac}(p_i)) \lfloor p_i \rfloor \\ &= \mathrm{frac}(p_i) + \lfloor p_i \rfloor = p_i.\end{aligned}$$

Die zweite Aussage lässt sich in drei Fälle aufgeteilt zeigen:

1. Fall: Die Zahlen p_1 und p_2 werden beide auf- oder beide abgerundet. Bei Aufrundung gilt $\hat{p_1} - \hat{p_2} = \lceil p_1 - p_2 \rceil$ für $\mathrm{frac}(p_1) \geq \mathrm{frac}(p_2)$ und $\hat{p_1} - \hat{p_2} = \lfloor p_1 - p_2 \rfloor$ sonst. Bei Abrundung ist dies umgekehrt.

2. Fall: Es gilt $\mathrm{frac}(p_1) \leq \theta < \mathrm{frac}(p_2)$. Dann ist p_2 nicht ganzzahlig und es gilt die Gleichung $\hat{p_1} - \hat{p_2} = \lfloor p_1 \rfloor - \lceil p_2 \rceil = \lfloor p_1 \rfloor - \lfloor p_2 \rfloor - 1 = \lfloor p_1 - p_2 \rfloor$.

3. Fall: Es gilt $\mathrm{frac}(p_2) \leq \theta < \mathrm{frac}(p_1)$. Analog gilt $\hat{p_1} - \hat{p_2} = \lfloor p_1 \rfloor + 1 - \lfloor p_2 \rfloor = \lceil p_1 - p_2 \rceil$. □

Beweis von Theorem 4.14. Sei $(u, \mathbf{p})$ ein zulässiger Punkt von (TD). Das heißt es gilt $u \geq \sum_{i\in[m]}(v(x^{(i)}) - \mathbf{p} \cdot x^{(i)})$ für alle $\mathbf{x} = (x^{(i)})_{i\in[m]} \in [\![\mathbf{s}]\!]^m$. Sei nun $\mathbf{x} = (x^{(i)})_{i\in[m]}$ eine Allokation aus $\arg\max_{\mathbf{x}\in[\![\mathbf{s}]\!]^m} \sum_{i\in[m]}(v(x^{(i)}) - \mathbf{p} \cdot x^{(i)})$ und man definiere die Differenz $w := u - \sum_{i\in[m]}(v_i(x^{(i)}) - \mathbf{p} \cdot x^{(i)})$. Man beachte, dass w nicht negativ ist.

Nun wird die folgende Zufallsverteilung definiert: Es wird ein Wert θ zufällig aus dem Intervall $[0,1]$ entnommen. Wie in Proposition 4.16 wird $\hat{p}_i$ auf $\lceil p_i \rceil$ gesetzt, falls $\mathrm{frac}(p_i)$ größer als θ ist, und sonst auf $\lfloor p_i \rfloor$ für alle $i \in [m]$. Analog wird $\hat{w}$ definiert. Schließlich wird $\hat{u} := \hat{w} + \sum_{i \in [m]} (v_i(x^{(i)}) - \hat{\mathbf{p}} \cdot x^{(i)})$ gesetzt. Nach Proposition 4.16 gilt mit der Linearität des Erwartungswerts auch $\mathbb{E}[(\hat{u}, \hat{\mathbf{p}})] = (u, \mathbf{p})$. Dabei ist der Erwartungswert tatsächlich eine Konvexkombination endlich vieler, genauer maximal $|\{\mathrm{frac}(w)\} \cup \{\mathrm{frac}(p_i) \mid i \in [n]\}| + 1$ vieler ganzzahliger Vektoren. Es genügt also zu zeigen, dass jeder dieser Vektoren für (TD) zulässig ist.

Seien also ein $\theta \in [0,1]$ fest und $\hat{\mathbf{p}}$ sowie $\hat{w}$ die entsprechend θ gerundeten Werte von $\mathbf{p}$ und w. Es wird gezeigt, dass $x^{(i)}$ für alle $i \in [m]$ ein nachgefragtes Bündel von Käufer i zu Preisen $\hat{\mathbf{p}}$ ist. Mit $\hat{u} \geq \sum_{i \in [m]} (v_i(x^{(i)}) - \hat{\mathbf{p}} \cdot x^{(i)})$ wegen $\hat{w} \geq 0$ folgt dann die Behauptung.

Sei ein $i \in [m]$ gegeben. Wegen $x^{(i)} \in \mathrm{D}(v_i, \mathbf{p})$ gilt $v_i(x^{(i)}) \geq v_i(x^{(i)} + e_j - e_k) - \mathbf{p} \cdot (e_j - e_k)$ für alle $j, k \in [\![n]\!]$. Diese Ungleichung bleibt bei Rundung von $\mathbf{p}$ zu $\hat{\mathbf{p}}$ erhalten, weil $\hat{\mathbf{p}} \cdot (e_j - e_k)$ nach Proposition 4.16 in $\{\lfloor \mathbf{p} \cdot (e_j - e_k) \rfloor, \lceil \mathbf{p} \cdot (e_j - e_k) \rceil\}$ liegt und die restlichen Terme der Ungleichung ganzzahlig sind. Daher ist $x^{(i)}$ ein lokales Maximum und nach Korollar 4.9 aufgrund der unabhängigen Brutto-Substituts-Eigenschaft von v_i auch globales Maximum von $x \mapsto v(x) - \hat{\mathbf{p}} \cdot x$. Somit gilt $x^{(i)} \in \mathrm{D}(v_i, \hat{\mathbf{p}})$. □

Theorem 4.17. *Sei ein Markt mit unabhängigen Brutto-Substituts-Bewertungen und* $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$ *für die Menge* K *der Walras-Preise gegeben. Dann kann man entweder mit* $\mathcal{O}(n^2 \log(M))$ *Abfragen des Aggregierte-Nachfrage-Orakels einen Walras-Preisvektor oder mit* $\mathcal{O}(n^4 m S \log(M))$ *Abfragen des Wert-Orakels ein Walras-Gleichgewicht bestimmen.*

Beweis. Hier kann man den gleichen Beweis wie in Theorem 3.11 führen; jedoch kann hier statt der Abschätzung der Nenner durch Lemma 3.8 die Ganzzahligkeit der Ecken von K nach Theorem 4.14 genutzt werden. Daher kann $R = 1$ gewählt werden.

Nutzt man statt des Aggregierte-Nachfrage-Orakels ein Wert-Orakel, so kann man nach Korollar 4.13 das gleiche bei mn^2S so vielen Abfragen erreichen. Allerdings hat dies den Vorteil, dass aus folgendem Grund sogar eine Walras-Allokation berechnet wird: Das Trennorakel liefert bei der Ellipsoid-Methode schließlich die Meldung „$\mathbf{p} \in K$“ für Preise $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, was nach dem Beweis von Theorem 3.11 nur erfolgt, wenn $\mathrm{d}(\mathbf{p}) - \mathbf{s} = 0$ gilt. Da der Nachfrage-Vektor als Summe $\sum_{i \in [m]} \mathrm{d}_i(\mathbf{p})$ berechnet wurde, bildet $(\mathrm{d}_i(\mathbf{p}))_{i \in [m]}$ eine Walras-Allokation. □

5 Fazit und Ausblick

Die Autoren Leme und Wong haben in ihrer Arbeit einen Einblick in die Berechnung von Walras-Gleichgewichten gegeben. So haben sie gezeigt, dass man Walras-Preise mit Hilfe eines Subgradientenverfahrens exakt und effizient mit einem Aggregierte-Nachfrage-Orakel berechnen kann. Außerdem haben sie gezeigt, dass die Walras-Preise bei Brutto-Substituts-Bewertungen ein ganzzahliges Polytop darstellen, was wiederum ermöglicht, die Berechnung zu beschleunigen.

Die Autoren beschränken sich nicht nur auf die hier erwähnte Subgradientenmethode, sondern geben in [LW18, Abschnitt 7] auch einen kombinatorischen Algorithmus zur Bestimmung von Walras-Gleichgewichten bei monotonen Brutto-Substituts-Bewertungen. Auch hier spielen die Zusammenhänge zur $\mathrm{M}^\natural$-Konkavität von Brutto-Substituts-Funktionen eine wichtige Rolle: So basiert dieser Algorithmus auf denen von Murota aus [Mur03, Abschnitt 10.4], die wiederum selbst auf Algorithmen zu Flüssen in Netzwerken aufbauen.

Literatur

[BGT81] Bland, Robert G. ; Goldfarb, Donald ; Todd, Michael J.: Feature Article—The Ellipsoid Method: A Survey. In: *Operations Research* 29 (1981), Dezember, Nr. 6, 1039–1091. http://dx.doi.org/10.1287/opre.29.6.1039. – DOI 10.1287/opre.29.6.1039 (Zitiert auf Seite 6.)

[FY03] Fujishige, Satoru ; Yang, Zaifu: A Note on Kelso and Crawford's Gross Substitutes Condition. In: *Mathematics of Operations Research* 28 (2003), August, Nr. 3, 463–469. http://dx.doi.org/10.1287/moor.28.3.463.16393. – DOI 10.1287/moor.28.3.463.16393 (Zitiert auf Seite 10.)

[KC82] Kelso, Alexander S. ; Crawford, Vincent P.: Job Matching, Coalition Formation, and Gross Substitutes. In: *Econometrica* 50 (1982), Nr. 6, 1483–1504. http://www.jstor.org/stable/1913392. – ISSN 00129682, 14680262 (Zitiert auf Seite 8.)

[Lem17] Leme, Renato P.: Gross substitutability: An algorithmic survey. In: *Games and Economic Behavior* 106 (2017), November, 294–316. http://dx.doi.org/10.1016/j.geb.2017.10.016. – DOI 10.1016/j.geb.2017.10.016 (Zitiert auf Seite 10.)

[LSW15] Lee, Y. T. ; Sidford, A. ; Wong, S. C.: A Faster Cutting Plane Method and its Implications for Combinatorial and Convex Optimization. In: *2015 IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 2015. – ISSN 0272–5428, S. 1049–1065 (Zitiert auf den Seiten 7 und 8.)

[LW18] Leme, Renato P. ; Wong, Sam C.: Computing Walrasian equilibria: fast algorithms and structural properties. In: *Mathematical Programming* 179 (2018), September, Nr. 1-2, 343–384. http://dx.doi.org/10.1007/s10107-018-1334-9. – DOI 10.1007/s10107–018–1334–9 (Zitiert auf den Seiten 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 und 13.)

[Mur03] Murota, Kazuo: *Discrete Convex Analysis: Monographs on Discrete Mathematics and Applications 10*. USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. – ISBN 0898715407 (Zitiert auf den Seiten 9, 10 und 13.)

[Sho85] Shor, Naum Z.: *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*. Springer Berlin Heidelberg, 1985. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-82118-9. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-82118-9 (Zitiert auf Seite 5.)

[ST15] Shioura, Akiyoshi ; Tamura, Akihisa: Gross Substitutes Condition and Discrete Concavity for Multi-Unit Valuations: A Survey. In: *Journal of the Operations Research Society of Japan* 58 (2015), Nr. 1, S. 61–103. http://dx.doi.org/10.15807/jorsj.58.61. – DOI 10.15807/jorsj.58.61 (Zitiert auf den Seiten 9 und 10.)