Berechnung von Nash-Gleichgewichten in dynamischen Flüssen

Bachelorkolloquium

Michael Markl
23. Januar 2020

Gliederung

Dynamische Flüsse

Grundlegende Definitionen

Definition 1.1 (Netzwerk)

Ein *Netzwerk* (G, s, t, u, τ) ist ein gerichteter Graph mit

- einer Quelle $s \in V$, sodass alle Knoten von s aus erreichbar sind,
- einer Senke $t \in V$,
- Kantenkapazitäten $u \in \mathbb{R}^E_{>0}$,
- Verzögerungszeiten $\tau \in \mathbb{R}^E_{\geqslant 0}$, sodass Zyklen eine positive Gesamtverzögerung haben.

Grundlegende Definitionen

Definition 1.1 (Netzwerk)

Ein *Netzwerk* (G, s, t, u, τ) ist ein gerichteter Graph mit

- einer Quelle $s \in V$, sodass alle Knoten von s aus erreichbar sind,
- einer Senke $t \in V$,
- Kantenkapazitäten $u \in \mathbb{R}^E_{>0}$,
- Verzögerungszeiten $\tau \in \mathbb{R}^E_{\geqslant 0}$, sodass Zyklen eine positive Gesamtverzögerung haben.

Definition 1.2 (Funktionenraum $\mathfrak{F}_0$)

Der Funktionenraum $\mathfrak{F}_0$ sei die Menge

$$\{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid g \text{ lokal Lebesgue-integrierbar, } g(t) = 0 \text{ für } t < 0\}$$

Grundlegende Definitionen

Definition 1.3 (Dynamischer Fluss)

Ein dynamischer Fluss ist ein Paar $f = (f^+, f^-)$ mit $f^+, f^- \in \mathfrak{F}_0^E$.
Für eine Kante $e \in E$ und einen Zeitpunkt $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet

Grundlegende Definitionen

Definition 1.3 (Dynamischer Fluss)

Ein dynamischer Fluss ist ein Paar $f = (f^+, f^-)$ mit $f^+, f^- \in \mathfrak{F}_0^E$.
Für eine Kante $e \in E$ und einen Zeitpunkt $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet

- $f_e^+(\theta)$ bzw. $f_e^-(\theta)$ die *Zu- bzw. Abflussrate an e zur Zeit θ*,

Grundlegende Definitionen

Definition 1.3 (Dynamischer Fluss)

Ein dynamischer Fluss ist ein Paar $f = (f^+, f^-)$ mit $f^+, f^- \in \mathfrak{F}_0^E$.
Für eine Kante $e \in E$ und einen Zeitpunkt $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet

- $f_e^+(\theta)$ bzw. $f_e^-(\theta)$ die *Zu- bzw. Abflussrate an e zur Zeit* θ,
- $F_e^+(\theta) \coloneqq \int_0^\theta f_e^+(t)\,\mathrm{d}t$ bzw. $F_e^-(\theta) \coloneqq \int_0^\theta f_e^-(t)\,\mathrm{d}t$ den Zu- bzw. Abfluss an e bis zur Zeit θ,

Grundlegende Definitionen

Definition 1.3 (Dynamischer Fluss)

Ein dynamischer Fluss ist ein Paar $f = (f^+, f^-)$ mit $f^+, f^- \in \mathfrak{F}_0^E$.
Für eine Kante $e \in E$ und einen Zeitpunkt $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet

- $f_e^+(\theta)$ bzw. $f_e^-(\theta)$ die *Zu- bzw. Abflussrate an e zur Zeit θ*,
- $F_e^+(\theta) \coloneqq \int_0^\theta f_e^+(t)\,\mathrm{d}t$ bzw. $F_e^-(\theta) \coloneqq \int_0^\theta f_e^-(t)\,\mathrm{d}t$ den Zu- bzw. Abfluss an e bis zur Zeit θ,
- $z_e(\theta) \coloneqq F_e^+(\theta) - F_e^-(\theta + \tau_e)$ bzw. $q_e(\theta) \coloneqq z_e(\theta)/u_e$ die Warteschlange bzw. Wartezeit an e zur Zeit θ,

Grundlegende Definitionen

Definition 1.3 (Dynamischer Fluss)

Ein dynamischer Fluss ist ein Paar $f = (f^+, f^-)$ mit $f^+, f^- \in \mathfrak{F}_0^E$.
Für eine Kante $e \in E$ und einen Zeitpunkt $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet

- $f_e^+(\theta)$ bzw. $f_e^-(\theta)$ die *Zu- bzw. Abflussrate an e zur Zeit* θ,
- $F_e^+(\theta) \coloneqq \int_0^\theta f_e^+(t)\,\mathrm{d}t$ bzw. $F_e^-(\theta) \coloneqq \int_0^\theta f_e^-(t)\,\mathrm{d}t$ den Zu- bzw. Abfluss an e bis zur Zeit θ,
- $z_e(\theta) \coloneqq F_e^+(\theta) - F_e^-(\theta + \tau_e)$ bzw. $q_e(\theta) \coloneqq z_e(\theta)/u_e$ die Warteschlange bzw. Wartezeit an e zur Zeit θ,
- $T_e(\theta) \coloneqq \theta + q_e(\theta) + \tau_e$ die Austrittszeit aus e bei Eintrittszeit θ.

Grundlegende Definitionen

Definition 1.4 (Zulässiger Dynamischer Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss erfüllt folgende Voraussetzungen:

Grundlegende Definitionen

Definition 1.4 (Zulässiger Dynamischer Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss erfüllt folgende Voraussetzungen:

(F1) Kapazitätsbedingung: $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : f_e^-(\theta) \leqslant u_e$.

Grundlegende Definitionen

Definition 1.4 (Zulässiger Dynamischer Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss erfüllt folgende Voraussetzungen:

(F1) Kapazitätsbedingung: $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : f_e^-(\theta) \leqslant u_e$.

(F2) Keine Flussentstehung in Kanten:
$\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : F_e^-(\theta + \tau_e) \leqslant F_e^+(\theta)$.

Grundlegende Definitionen

Definition 1.4 (Zulässiger Dynamischer Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss erfüllt folgende Voraussetzungen:

(F1) Kapazitätsbedingung: $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : f_e^-(\theta) \leqslant u_e$.

(F2) Keine Flussentstehung in Kanten:
$\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : F_e^-(\theta + \tau_e) \leqslant F_e^+(\theta)$.

(F3) Flusserhaltung in Knoten: $\forall v \in V, \theta \in \mathbb{R} :$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e^+(\theta) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e^-(\theta) \begin{cases} =: d(\theta) \geqslant 0, & \text{falls } v = s, \\ \leqslant 0, & \text{falls } v = t, \\ = 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Grundlegende Definitionen

Definition 1.4 (Zulässiger Dynamischer Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss erfüllt folgende Voraussetzungen:

(F1) Kapazitätsbedingung: $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : f_e^-(\theta) \leqslant u_e$.

(F2) Keine Flussentstehung in Kanten:
$\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : F_e^-(\theta + \tau_e) \leqslant F_e^+(\theta)$.

(F3) Flusserhaltung in Knoten: $\forall v \in V, \theta \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e^+(\theta) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e^-(\theta) \begin{cases} =: d(\theta) \geqslant 0, & \text{falls } v = s, \\ \leqslant 0, & \text{falls } v = t, \\ = 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(F4) Warteschlangenabbau:
$\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : z_e(\theta) > 0 \implies f_e^-(\theta + \tau_e) = u_e$.

Kürzeste Wege

Definition 1.5 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

Kürzeste Wege

Definition 1.5 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

- $l^P(\theta)$ die Ankunftszeit am Endknoten eines Pfades P zur Startzeit θ am Startknoten, definiert durch

$$l^P(\theta) := \begin{cases} \theta, & \text{falls } P \text{ der leere Pfad ist,} \\ T_e(l^{\tilde{P}}(\theta)), & \text{falls } P = (\tilde{P}, e), \end{cases}$$

Kürzeste Wege

Definition 1.5 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

- $l^P(\theta)$ die Ankunftszeit am Endknoten eines Pfades P zur Startzeit θ am Startknoten, definiert durch

$$l^P(\theta) := \begin{cases} \theta, & \text{falls } P \text{ der leere Pfad ist,} \\ T_e(l^{\tilde{P}}(\theta)), & \text{falls } P = (\tilde{P}, e), \end{cases}$$

- $\mathcal{P}_w$ die Menge aller s-w-Pfade,

Kürzeste Wege

Definition 1.5 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

- $l^P(\theta)$ die Ankunftszeit am Endknoten eines Pfades P zur Startzeit θ am Startknoten, definiert durch
$$l^P(\theta) := \begin{cases} \theta, & \text{falls } P \text{ der leere Pfad ist,} \\ T_e(l^{\tilde{P}}(\theta)), & \text{falls } P = (\tilde{P}, e), \end{cases}$$
- $\mathcal{P}_w$ die Menge aller s-w-Pfade,
- $l_w(\theta) := \min_{P \in \mathcal{P}_w} l^P(\theta)$ die früheste Ankunftszeit bei w zur Startzeit θ.

Kürzeste Wege

Definition 1.5 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

- $l^P(\theta)$ die Ankunftszeit am Endknoten eines Pfades P zur Startzeit θ am Startknoten, definiert durch
$$l^P(\theta) := \begin{cases} \theta, & \text{falls } P \text{ der leere Pfad ist,} \\ T_e(l^{\tilde{P}}(\theta)), & \text{falls } P = (\tilde{P}, e), \end{cases}$$
- $\mathcal{P}_w$ die Menge aller s-w-Pfade,
- $l_w(\theta) := \min_{P \in \mathcal{P}_w} l^P(\theta)$ die früheste Ankunftszeit bei w zur Startzeit θ.

Ein Pfad $P \in \mathcal{P}_w$ heißt *kürzester s-w-Pfad zur Zeit θ*, falls $l^P(\theta) = l_w(\theta)$ gilt.

Kürzeste Wege

Lemma 1.6 (Dreiecksungleichung)

Für alle Kanten $vw \in E$ gilt in einem zulässigen Fluss $T_{vw}(l_v(\theta)) \geqslant l_w(\theta)$.

Kürzeste Wege

Lemma 1.6 (Dreiecksungleichung)

Für alle Kanten $vw \in E$ gilt in einem zulässigen Fluss
$T_{vw}(l_v(\theta)) \geqslant l_w(\theta)$.

Definition 1.7 (Aktivität einer Kante)

Eine Kante $vw \in E$ ist *aktiv zum Zeitpunkt* θ, falls
$T_{vw}(l_v(\theta)) = l_w(\theta)$ gilt; sonst ist sie *inaktiv zum Zeitpunkt* θ.

Kürzeste Wege

Lemma 1.6 (Dreiecksungleichung)

Für alle Kanten $vw \in E$ gilt in einem zulässigen Fluss $T_{vw}(l_v(\theta)) \geqslant l_w(\theta)$.

Definition 1.7 (Aktivität einer Kante)

Eine Kante $vw \in E$ ist *aktiv zum Zeitpunkt θ*, falls $T_{vw}(l_v(\theta)) = l_w(\theta)$ gilt; sonst ist sie *inaktiv zum Zeitpunkt θ*. Es sei Θ_e die Menge der Zeitpunkte, zu denen e aktiv ist. Für $\theta \in \mathbb{R}$ sei $G_\theta := (V, E_\theta)$ der Teilgraph der zur Zeit θ aktiven Kanten.

Dynamische Nash-Flüsse

Definition 1.8 (Nash-Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss f heißt *Nash-Fluss*, falls er nur entlang aktiver Kanten fließt, d. h. falls $f^+_{vw}(\theta) > 0$ für fast alle $\theta \in \mathbb{R}$ bereits $\theta \in l_v(\Theta_{vw})$ impliziert.

Dynamische Nash-Flüsse

Definition 1.8 (Nash-Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss f heißt *Nash-Fluss*, falls er nur entlang aktiver Kanten fließt, d. h. falls $f^+_{vw}(\theta) > 0$ für fast alle $\theta \in \mathbb{R}$ bereits $\theta \in l_v(\Theta_{vw})$ impliziert.

Definition 1.9

Für einen zulässigen Fluss f und einen Zeitpunkt θ bezeichne $x^+_{vw}(\theta) \coloneqq F^+_{vw}(l_v(\theta))$ bzw. $x^-_{vw}(\theta) \coloneqq F^-_{vw}(l_w(\theta))$ für $vw \in E$.

Dynamische Nash-Flüsse

Definition 1.8 (Nash-Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss f heißt *Nash-Fluss*, falls er nur entlang aktiver Kanten fließt, d. h. falls $f^+_{vw}(\theta) > 0$ für fast alle $\theta \in \mathbb{R}$ bereits $\theta \in l_v(\Theta_{vw})$ impliziert.

Definition 1.9

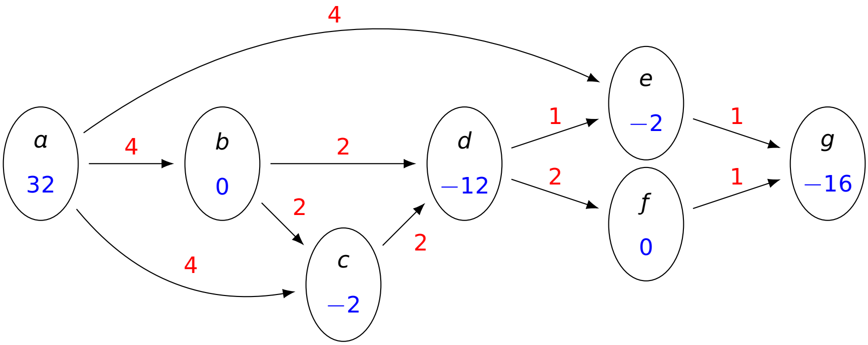
Für einen zulässigen Fluss f und einen Zeitpunkt θ bezeichne $x^+_{vw}(\theta) \coloneqq F^+_{vw}(l_v(\theta))$ bzw. $x^-_{vw}(\theta) \coloneqq F^-_{vw}(l_w(\theta))$ für $vw \in E$.

Theorem 1.10

Ein zulässiger dynamischer Fluss f ist genau dann ein Nash-Fluss, wenn $x^+_e(\theta) = x^-_e(\theta)$ für alle $e \in E$ und $\theta \in \mathbb{R}$ gilt. Ist dies der Fall, so definiere man $x_e(\theta) \coloneqq x^+_e(\theta) = x^-_e(\theta)$ für $e \in E$.

Berechnung dynamischer Nash-Flüsse

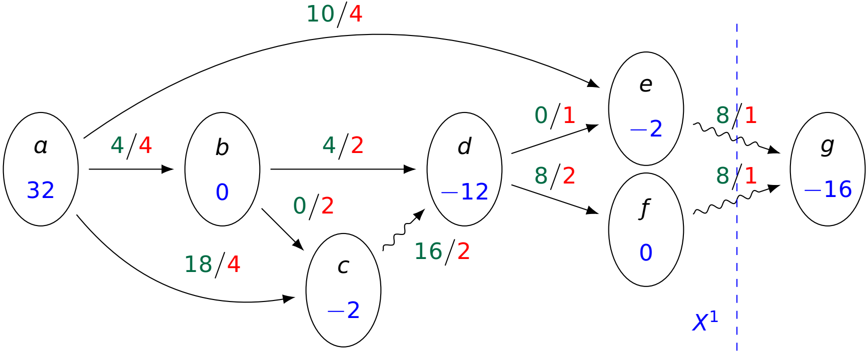
Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen (1)



Kapazität *u*

Balance *b*

Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen (2)



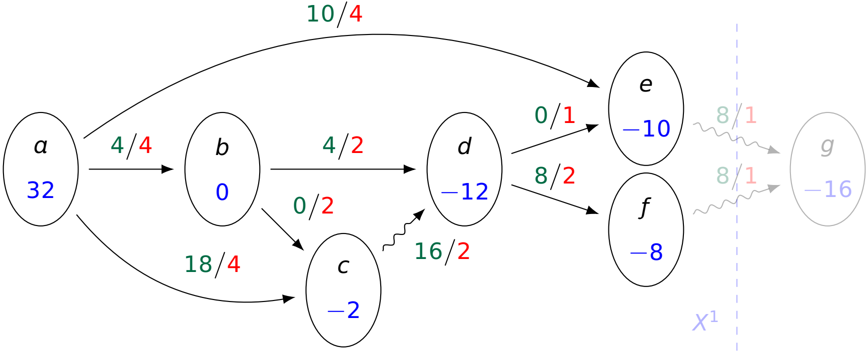
Berechne auslastungsminimalen Fluss x' und dünnsten Schnitt.

Kapazität u

Balance b

Fluss x'

Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen (3)



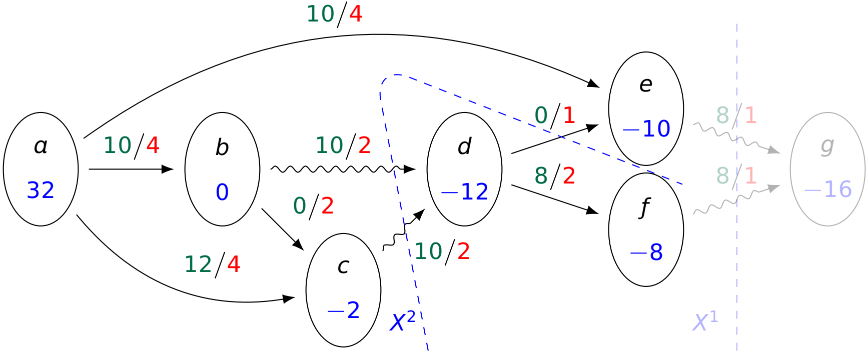
Berechne induzierte kleinere Probleminstanz.

Kapazität u

Balance b

Fluss x'

Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen (4)



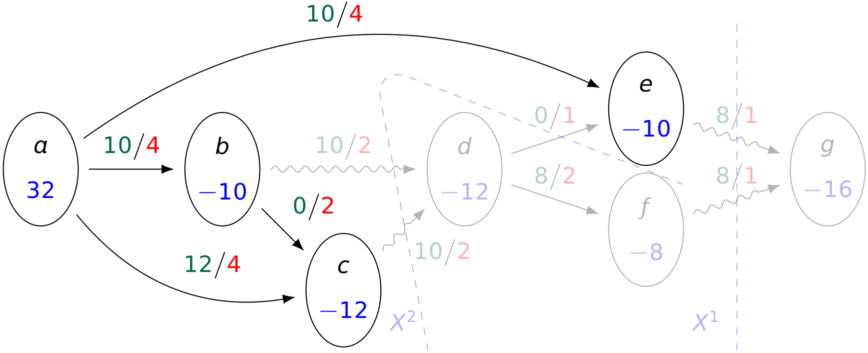
Berechne auslastungsminimalen Fluss x' und dünnsten Schnitt.

Kapazität u

Balance b

Fluss x'

Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen (5)



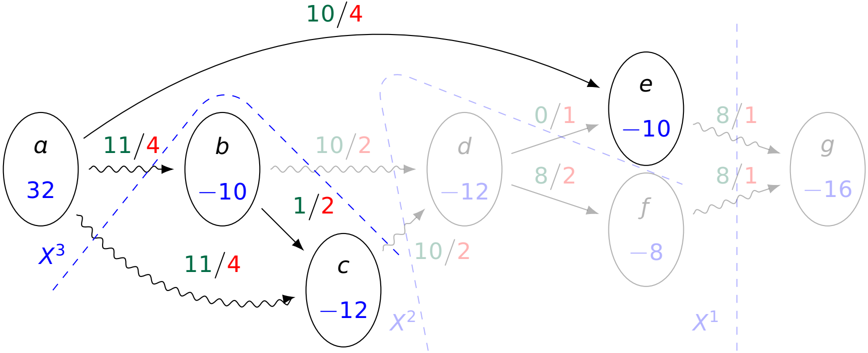
Berechne induzierte kleinere Probleminstanz.

Kapazität u

Balance b

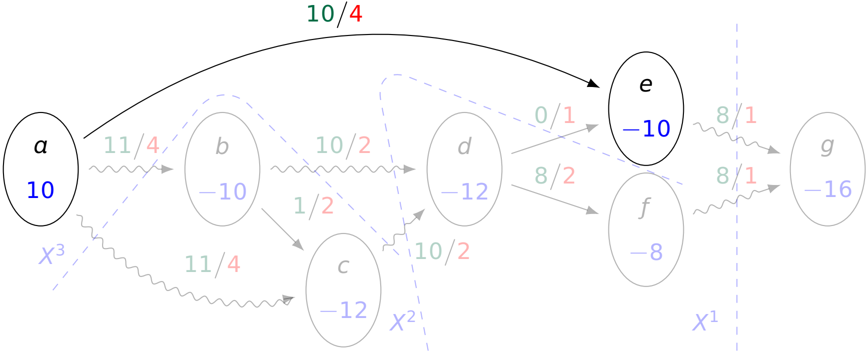
Fluss x'

Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen (6)



Berechne auslastungsminimalen Fluss x' und dünnsten Schnitt.
Kapazität u
Balance b
Fluss x'

Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen (7)



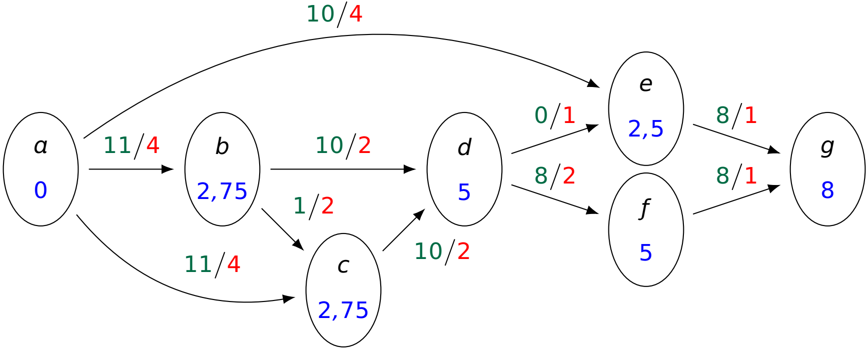
Berechne induzierte kleinere Probleminstanz.

Kapazität u

Balance b

Fluss x'

Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen (8)



Erhalte schmalen Fluss x' ohne Zurücksetzen.

Kapazität u

Knotenauslastung l'

Fluss x'

Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen (9)

Theorem 2.9

Auf rationalen Instanzen können schmale Flüsse ohne Zurücksetzen mit $\mathcal{O}((\langle b \rangle + \langle u \rangle) n^2 m L)$ arithmetischen Operationen berechnet werden, wobei $L \coloneqq |\{l_v \mid v \in V\}|$ die Anzahl der verschiedenen Knotenauslastungen eines schmalen Flusses ohne Zurücksetzen ist.

Berechnung schmaler Flüsse mit Zurücksetzen

Berechnung schmaler Flüsse mit Zurücksetzen

BROUWER

Input: Polynomiell ber. Funktion $F : [0,1]^m \to [0,1]^m$, eine Konstante K mit $\left\|F(x) - F(y)\right\|_\infty \leqslant K \|x - y\|_\infty$ für alle $x, y \in [0,1]^m$ sowie die Genauigkeit $\varepsilon > 0$.

Output: Ein Punkt $x \in [0,1]^m$ mit $\left\|F(x) - x\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Berechnung schmaler Flüsse mit Zurücksetzen

BROUWER

Input: Polynomiell ber. Funktion $F : [0,1]^m \to [0,1]^m$, eine Konstante K mit $\left\|F(x) - F(y)\right\|_\infty \leqslant K \|x - y\|_\infty$ für alle $x, y \in [0,1]^m$ sowie die Genauigkeit $\varepsilon > 0$.

Output: Ein Punkt $x \in [0,1]^m$ mit $\left\|F(x) - x\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Approximate Thin Flow with Resetting: ε-TFWR

Input: Azykl. Netzwerk $(V, E, u \in \mathbb{Q}^E_{>0})$ mit Zurücksetzen auf $E_1 \subseteq E$, Balancen $b \in \mathbb{Q}^V$ und $\varepsilon > 0$.

Output: Ein schmaler b'-Fluss mit Zurücksetzen auf E_1 und $\left\|b' - b\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Berechnung schmaler Flüsse mit Zurücksetzen

Lemma 2.10

Liegt das Problem BROUWER *sogar bei Eingabe von Funktionen, die auf einem Polytop in Normalform definiert sind, in* **PPAD**, *so ist auch das Problem* ε-TFWR *in* **PPAD** *enthalten.*

Literatur

[CCL15] Cominetti, Roberto ; Correa, José ; Larré, Omar:
Dynamic Equilibria in Fluid Queueing Networks.
In: *Operations Research* 63 (2015), Nr. 1, S. 21–34.
http://dx.doi.org/10.1287/opre.2015.1348. –
DOI 10.1287/opre.2015.1348

[Koc12] Koch, Ronald:
Routing Games over Time, Technische Universität Berlin, Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften, Diss., 2012.
http://dx.doi.org/10.14279/depositonce-3347. –
DOI 10.14279/depositonce–3347

[KS11] Koch, Ronald ; Skutella, Martin:
Nash Equilibria and the Price of Anarchy for Flows over Time.
In: *Theory of Computing Systems* 49 (2011), Jul, Nr. 1, 71–97.
http://dx.doi.org/10.1007/s00224-010-9299-y. –
DOI 10.1007/s00224–010–9299–y. –
ISSN 1433–0490