Nash Gleichgewichte in Dynamischen Flüssen

Seminar zur Optimierung und Spieltheorie

Michael Markl

27. Juni 2019

Gliederung

Dynamische Flüsse

Grundlegende Definitionen

Definition 1.1 (Netzwerk)

Ein *Netzwerk* (G, u, s, t, τ) ist ein gerichteter Graph mit

- einer Quelle $s \in V$, sodass alle Knoten von s aus erreichbar sind,
- einer Senke $t \in V$,
- Kantenkapazitäten $u \in \mathbb{R}_{+}^{E}$,
- Verzögerungszeiten $\tau \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}^{E}$, sodass Zyklen eine positive Gesamtverzögerung haben.

Grundlegende Definitionen

Definition 1.1 (Netzwerk)

Ein *Netzwerk* (G, u, s, t, τ) ist ein gerichteter Graph mit

- einer Quelle $s \in V$, sodass alle Knoten von s aus erreichbar sind,
- einer Senke $t \in V$,
- Kantenkapazitäten $u \in \mathbb{R}_{+}^{E}$,
- Verzögerungszeiten $\tau \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}^{E}$, sodass Zyklen eine positive Gesamtverzögerung haben.

Definition 1.2 (Funktionenraum $\mathfrak{F}_0$)

Der Funktionenraum $\mathfrak{F}_0$ sei die Menge

$$\{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid g \text{ lokal Lebesgue-integrierbar, } g(t) = 0 \text{ für } t < 0\}$$

Grundlegende Definitionen

Definition 1.3 (Dynamischer Fluss)

Ein dynamischer Fluss ist ein Paar $f = (f^+, f^-)$ mit $f^+, f^- \in \mathfrak{F}_0^E$.

Für eine Kante $e \in E$ und einen Zeitpunkt $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet

Grundlegende Definitionen

Definition 1.3 (Dynamischer Fluss)

Ein dynamischer Fluss ist ein Paar $f = (f^+, f^-)$ mit $f^+, f^- \in \mathfrak{F}_0^E$.
Für eine Kante $e \in E$ und einen Zeitpunkt $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet

- $f_e^+(\theta)$ bzw. $f_e^-(\theta)$ die *Zu- bzw. Abflussrate an e zur Zeit* θ,

Grundlegende Definitionen

Definition 1.3 (Dynamischer Fluss)

Ein dynamischer Fluss ist ein Paar $f = (f^+, f^-)$ mit $f^+, f^- \in \mathfrak{F}_0^E$.
Für eine Kante $e \in E$ und einen Zeitpunkt $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet

- $f_e^+(\theta)$ bzw. $f_e^-(\theta)$ die *Zu- bzw. Abflussrate an e zur Zeit* θ,
- $F_e^+(\theta) := \int_0^\theta f_e^+(t)\,\mathrm{d}t$ bzw. $F_e^-(\theta) := \int_0^\theta f_e^-(t)\,\mathrm{d}t$ den Zu- bzw. Abfluss an e bis zur Zeit θ,

Grundlegende Definitionen

Definition 1.3 (Dynamischer Fluss)

Ein dynamischer Fluss ist ein Paar $f = (f^+, f^-)$ mit $f^+, f^- \in \mathfrak{F}_0^E$.
Für eine Kante $e \in E$ und einen Zeitpunkt $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet

- $f_e^+(\theta)$ bzw. $f_e^-(\theta)$ die *Zu- bzw. Abflussrate an e zur Zeit* θ,
- $F_e^+(\theta) := \int_0^\theta f_e^+(t)\,\mathrm{d}t$ bzw. $F_e^-(\theta) := \int_0^\theta f_e^-(t)\,\mathrm{d}t$ den Zu- bzw. Abfluss an e bis zur Zeit θ,
- $z_e(\theta) := F_e^+(\theta) - F_e^-(\theta + \tau_e)$ bzw. $q_e(\theta) := z_e(\theta)/u_e$ die Warteschlange bzw. Wartezeit an e zur Zeit θ,

Grundlegende Definitionen

Definition 1.3 (Dynamischer Fluss)

Ein dynamischer Fluss ist ein Paar $f = (f^+, f^-)$ mit $f^+, f^- \in \mathfrak{F}_0^E$.
Für eine Kante $e \in E$ und einen Zeitpunkt $\theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet

- $f_e^+(\theta)$ bzw. $f_e^-(\theta)$ die *Zu- bzw. Abflussrate an e zur Zeit* θ,
- $F_e^+(\theta) := \int_0^\theta f_e^+(t)\,\mathrm{d}t$ bzw. $F_e^-(\theta) := \int_0^\theta f_e^-(t)\,\mathrm{d}t$ den Zu- bzw. Abfluss an e bis zur Zeit θ,
- $z_e(\theta) := F_e^+(\theta) - F_e^-(\theta + \tau_e)$ bzw. $q_e(\theta) := z_e(\theta)/u_e$ die Warteschlange bzw. Wartezeit an e zur Zeit θ,
- $T_e(\theta) := \theta + q_e(\theta) + \tau_e$ die Austrittszeit aus e bei Eintrittszeit θ.

Grundlegende Definitionen

Definition 1.4 (Zulässiger Dynamischer Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss erfüllt folgende Voraussetzungen:

Grundlegende Definitionen

Definition 1.4 (Zulässiger Dynamischer Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss erfüllt folgende Voraussetzungen:

(F1) Kapazitätsbedingung: $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : f_e^-(\theta) \leqslant u_e$.

Grundlegende Definitionen

Definition 1.4 (Zulässiger Dynamischer Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss erfüllt folgende Voraussetzungen:

(F1) Kapazitätsbedingung: $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : f_e^-(\theta) \leqslant u_e$.

(F2) Keine Flussentstehung in Kanten:
$\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : F_e^-(\theta + \tau_e) \leqslant F_e^+(\theta)$.

Grundlegende Definitionen

Definition 1.4 (Zulässiger Dynamischer Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss erfüllt folgende Voraussetzungen:

(F1) Kapazitätsbedingung: $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : f_e^-(\theta) \leqslant u_e$.

(F2) Keine Flussentstehung in Kanten:
$\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : F_e^-(\theta + \tau_e) \leqslant F_e^+(\theta)$.

(F3) Flusserhaltung in Knoten:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e^-(\theta) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e^+(\theta) \begin{cases} \geqslant 0, & \text{falls } v = s, \\ \leqslant 0, & \text{falls } v = t, \\ = 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Grundlegende Definitionen

Definition 1.4 (Zulässiger Dynamischer Fluss)

Ein zulässiger dynamischer Fluss erfüllt folgende Voraussetzungen:

(F1) Kapazitätsbedingung: $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : f_e^-(\theta) \leqslant u_e$.

(F2) Keine Flussentstehung in Kanten:
$\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : F_e^-(\theta + \tau_e) \leqslant F_e^+(\theta)$.

(F3) Flusserhaltung in Knoten:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e^-(\theta) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e^+(\theta) \begin{cases} \geqslant 0, & \text{falls } v = s, \\ \leqslant 0, & \text{falls } v = t, \\ = 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(F4) Warteschlangenabbau:
$\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : z_e(\theta) > 0 \implies f_e^-(\theta + \tau_e) = u_e$.

Eigenschaften zulässiger Flüsse

Proposition 1.5

Für eine Kante $e \in E$ gilt in einen zulässigen dynamischen Fluss f:

(i) *Die Funktion $\theta \mapsto \theta + q_e(\theta)$ ist monoton wachsend und stetig.*

(ii) *Für alle $\theta \in \mathbb{R}$ ist die Warteschlange z_e auf $(\theta, \theta + q_e(\theta))$ positiv.*

(iii) *Zu jeder Zeit $\theta \in \mathbb{R}$ gilt $F_e^+(\theta) = F_e^-(T_e(\theta))$.*

(iv) *Für alle $\theta_1 \leqslant \theta_2$ mit $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f_e^+(t)\,\mathrm{d}t = 0$ und $q_e(\theta_2) > 0$ gilt $\theta_1 + q_e(\theta_1) = \theta_2 + q_e(\theta_2)$.*

Kürzeste Wege

Definition 2.1 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

Definition 2.1 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

- $l^P(\theta) := T_{e_k} \circ \cdots \circ T_{e_1}(\theta)$ die Ankunftszeit am Endknoten eines Pfades $P = (e_1, \ldots, e_k)$ zur Startzeit θ am Startknoten,

Definition 2.1 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

- $l^P(\theta) := T_{e_k} \circ \cdots \circ T_{e_1}(\theta)$ die Ankunftszeit am Endknoten eines Pfades $P = (e_1, \ldots, e_k)$ zur Startzeit θ am Startknoten,
- $\mathscr{P}_w$ die Menge aller s-w-Pfade,

Definition 2.1 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

- $l^P(\theta) := T_{e_k} \circ \cdots \circ T_{e_1}(\theta)$ die Ankunftszeit am Endknoten eines Pfades $P = (e_1, \ldots, e_k)$ zur Startzeit θ am Startknoten,
- $\mathscr{P}_w$ die Menge aller s-w-Pfade,
- $l_w(\theta) := \min_{P \in \mathscr{P}_w} l^P(\theta)$ die früheste Ankunftszeit bei w zur Startzeit θ.

Definition 2.1 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

- $l^P(\theta) := T_{e_k} \circ \cdots \circ T_{e_1}(\theta)$ die Ankunftszeit am Endknoten eines Pfades $P = (e_1, \ldots, e_k)$ zur Startzeit θ am Startknoten,
- $\mathscr{P}_w$ die Menge aller s-w-Pfade,
- $l_w(\theta) := \min_{P \in \mathscr{P}_w} l^P(\theta)$ die früheste Ankunftszeit bei w zur Startzeit θ.

Ein Pfad $P \in \mathscr{P}_w$ heißt *kürzester s-w-Pfad zur Zeit θ*, falls $l^P(\theta) = l_w(\theta)$.

Definition 2.1 (Kürzeste Wege)

Für einen Fluss f bezeichne:

- $l^P(\theta) := T_{e_k} \circ \cdots \circ T_{e_1}(\theta)$ die Ankunftszeit am Endknoten eines Pfades $P = (e_1, \ldots, e_k)$ zur Startzeit θ am Startknoten,
- $\mathscr{P}_w$ die Menge aller s-w-Pfade,
- $l_w(\theta) := \min_{P \in \mathscr{P}_w} l^P(\theta)$ die früheste Ankunftszeit bei w zur Startzeit θ.

Ein Pfad $P \in \mathscr{P}_w$ heißt *kürzester s-w-Pfad zur Zeit θ*, falls $l^P(\theta) = l_w(\theta)$.

Lemma 2.2 (Dreiecksungleichung)

Für alle Kanten $vw \in E$ gilt in einem zulässigen Fluss $T_{vw}(l_v(\theta)) \geqslant l_w(\theta)$.

Definition 2.3 (Aktivität einer Kante)

Eine Kante $vw \in E$ ist *aktiv zum Zeitpunkt* θ, falls $T_{vw}(l_v(\theta)) = l_w(\theta)$ gilt; sonst ist sie *inaktiv zum Zeitpunkt* θ.
Die Menge Θ_e sei die abgeschlossene Menge aller Zeitpunkte, zu denen e aktiv ist.

Definition 2.3 (Aktivität einer Kante)

Eine Kante $vw \in E$ ist *aktiv zum Zeitpunkt* θ, falls $T_{vw}(l_v(\theta)) = l_w(\theta)$ gilt; sonst ist sie *inaktiv zum Zeitpunkt* θ.
Die Menge Θ_e sei die abgeschlossene Menge aller Zeitpunkte, zu denen e aktiv ist.

Lemma 2.4

Für einen zulässigen Fluss und einem $\theta \in \mathbb{R}$ *ist der Teilgraph der zur Zeit* θ *aktiven Kanten* $G_\theta := (V, E_\theta)$ *ein Spannbaum mit Wurzel* s.

Definition 2.3 (Aktivität einer Kante)

Eine Kante $vw \in E$ ist *aktiv zum Zeitpunkt* θ, falls $T_{vw}(l_v(\theta)) = l_w(\theta)$ gilt; sonst ist sie *inaktiv zum Zeitpunkt* θ.
Die Menge Θ_e sei die abgeschlossene Menge aller Zeitpunkte, zu denen e aktiv ist.

Lemma 2.4

Für einen zulässigen Fluss und einem $\theta \in \mathbb{R}$ ist der Teilgraph der zur Zeit θ aktiven Kanten $G_\theta := (V, E_\theta)$ ein Spannbaum mit Wurzel s.

Proposition 2.5

Für einen zulässigen Fluss f ist $(l_v(\theta))_{v \in V}$ die eindeutige Lösung von

$$\tilde{l}_w = \begin{cases} \theta, & \text{falls } w = s, \\ \min\limits_{vw \in \delta^-(w)} T_{vw}(\tilde{l}_v), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dynamische Nash-Flüsse

Definition 3.1

Für einen zulässigen Fluss f und einen Zeitpunkt θ bezeichne

- $x^+_{vw}(\theta) := F^+_{vw}(l_v(\theta))$ bzw. $x^-_{vw}(\theta) := F^-_{vw}(l_w(\theta))$ für $vw \in E$,

Definition 3.1

Für einen zulässigen Fluss f und einen Zeitpunkt θ bezeichne

- $x^+_{vw}(\theta) := F^+_{vw}(l_v(\theta))$ bzw. $x^-_{vw}(\theta) := F^-_{vw}(l_w(\theta))$ für $vw \in E$,
- $b_v(\theta) := \sum_{e \in \delta^+(v)} x^+_e(\theta) - \sum_{e \in \delta^-(v)} x^-_e(\theta)$ für $v \in V$.

Definition 3.1

Für einen zulässigen Fluss f und einen Zeitpunkt θ bezeichne

- $x^+_{vw}(\theta) := F^+_{vw}(l_v(\theta))$ bzw. $x^-_{vw}(\theta) := F^-_{vw}(l_w(\theta))$ für $vw \in E$,
- $b_v(\theta) := \sum_{e \in \delta^+(v)} x^+_e(\theta) - \sum_{e \in \delta^-(v)} x^-_e(\theta)$ für $v \in V$.

Definition 3.2

Man sage, der Fluss f *fließe nur entlang aktiver Kanten*, falls f^+_{vw} fast überall auf $l_v(\Theta^c_{vw})$ verschwindet für alle Kanten $vw \in E$.

Definition 3.1

Für einen zulässigen Fluss f und einen Zeitpunkt θ bezeichne

- $x^+_{vw}(\theta) := F^+_{vw}(l_v(\theta))$ bzw. $x^-_{vw}(\theta) := F^-_{vw}(l_w(\theta))$ für $vw \in E$,
- $b_v(\theta) := \sum_{e \in \delta^+(v)} x^+_e(\theta) - \sum_{e \in \delta^-(v)} x^-_e(\theta)$ für $v \in V$.

Definition 3.2

Man sage, der Fluss f *fließe nur entlang aktiver Kanten*, falls f^+_{vw} fast überall auf $l_v(\Theta^c_{vw})$ verschwindet für alle Kanten $vw \in E$.

Definition 3.3

Man sage, der Fluss f *fließe ohne Überholungen*, falls $b_s(\theta) = -b_t(\theta)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$.

Theorem 3.4 (Charakterisierung dynamischer Nash-Flüsse)

Für einen zulässigen dynamischen Fluss f sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) *Der Fluss f fließt nur entlang aktiver Kanten*

(ii) *Für alle Kanten $e \in E$ und zu jeder Zeit $\theta \in \mathbb{R}$ gilt $x_e^+(\theta) = x_e^-(\theta)$.*

(iii) *Der Fluss f fließt ohne Überholungen.*

Gilt eine dieser Aussagen, so nennt man f einen dynamischen Nash-Fluss.

Theorem 3.4 (Charakterisierung dynamischer Nash-Flüsse)

Für einen zulässigen dynamischen Fluss f sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) *Der Fluss f fließt nur entlang aktiver Kanten*

(ii) *Für alle Kanten $e \in E$ und zu jeder Zeit $\theta \in \mathbb{R}$ gilt $x_e^+(\theta) = x_e^-(\theta)$.*

(iii) *Der Fluss f fließt ohne Überholungen.*

Gilt eine dieser Aussagen, so nennt man f einen dynamischen Nash-Fluss.

Lemma 3.5

Seien $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ eine lokal Lebesgue-integrierbare Funktion und $((a_i, b_i))_{i \in I}$ eine Familie offener Intervalle. Dann verschwindet g fast überall auf $\Theta := \bigcup_{i \in I}(a_i, b_i)$ genau dann, wenn es für alle $i \in I$ fast überall auf (a_i, b_i) verschwindet.

Erweiterung dynamischer Nash-Flüsse

Definition 4.1 (Schmaler Fluss mit Zurücksetzen)

Seien ein statischer s-t-Fluss x' von Wert F in einem Netzwerk mit Versorgungsrate d sowie $E_1 \subseteq E$ gegeben.
Der Fluss x' ist ein *schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf* E_1, falls $l' \in \mathbb{R}^V$ existiert mit:

(T1) $l'_s = F/d$,

(T2) $l'_w \leqslant l'_v$, für $vw \in E \setminus E_1$ mit $x'_{vw} = 0$,

(T3) $l'_w = \max(l'_v, x'_{vw}/u_{vw})$, für $vw \in E \setminus E_1$ mit $x'_{vw} > 0$,

(T4) $l'_w = x'_{vw}/u_{vw}$, für $vw \in E_1$,

(T5) $l'_w \geqslant \min_{vw \in \delta^-(w)} l'_v$, falls $\delta^-(w) \cap E_1 = \emptyset$.

Definition 4.2 (Dynamischer Fluss mit Zeithorizont)

Ein *dynamischer Fluss f mit Zeithorizont $T \geqslant 0$* ist ein Fluss, für dessen Zufluss $d(\theta) = 0$ für $\theta \geqslant T$ gilt.

Definition 4.3 (α-Erweiterung)

Seien ein dynamischer Nash-Fluss f mit Horizont T und ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf $E_1 := \{vw \in E \mid q_{vw}(l_v(\theta)) > 0\}$ im Graphen G_T und ein $\alpha > 0$ gegeben.

Ergänzt man f, sodass für zur Zeit T aktive Kanten $vw \in E_T$
$\tilde{f}^+_{vw}(\theta) := x'_{vw}/l'_v$ für $\theta \in [l_v(T), l_v(T) + \alpha l'_v)$ und
$\tilde{f}^-_{vw}(\theta) := x'_{vw}/l'_w$ für $\theta \in [l_w(T), l_w(T) + \alpha l'_w)$ gelten, erhält man eine *α-Erweiterung $\tilde{f}$ von f*.

Theorem 4.4 (Erweiterung eines Nash-Flusses)

Jede α-Erweiterung $\tilde{f}$ eines dynamischen Nash-Flusses f mit Zeithorizont T und

$$
\begin{aligned}
l_w(T) - l_v(T) + \alpha(l'_w - l'_v) &\geqslant \tau_{vw} \quad \textit{falls } q_{vw}(l_v(T)) > 0,\\
l_w(T) - l_v(T) + \alpha(l'_w - l'_v) &\leqslant \tau_{vw} \quad \textit{falls } T \in \Theta^c_{vw}
\end{aligned}
$$

ist ein dynamischer Nash-Fluss.

Literatur I

[CCL11] Cominetti, Roberto ; Correa, José R. ; Larré, Omar:
Existence and Uniqueness of Equilibria for Flows over Time.
In: Aceto, Luca (Hrsg.) ; Henzinger, Monika (Hrsg.) ; Sgall, Jiří (Hrsg.): *Automata, Languages and Programming*.
Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011. –
ISBN 978–3–642–22012–8, S. 552–563

[CCL15] Cominetti, Roberto ; Correa, José ; Larré, Omar:
Dynamic Equilibria in Fluid Queueing Networks.
In: *Operations Research* 63 (2015), Nr. 1, 21-34.
`http://dx.doi.org/10.1287/opre.2015.1348`. –
DOI 10.1287/opre.2015.1348

[Els11a] *Kapitel* Absolute Stetigkeit.
In: Elstrodt, Jürgen:
Maß- und Integrationstheorie.
Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011. –
ISBN 978–3–642–17905–1, 312–409

Literatur II

[Els11b] *Kapitel* Maße auf topologischen Räumen.
In: Elstrodt, Jürgen:
Maß- und Integrationstheorie.
Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011. –
ISBN 978–3–642–17905–1, 312–409

[KS11] Koch, Ronald ; Skutella, Martin:
Nash Equilibria and the Price of Anarchy for Flows over Time.
In: *Theory of Computing Systems* 49 (2011), Jul, Nr. 1, 71–97.
`http://dx.doi.org/10.1007/s00224-010-9299-y`. –
DOI 10.1007/s00224–010–9299–y. –
ISSN 1433–0490