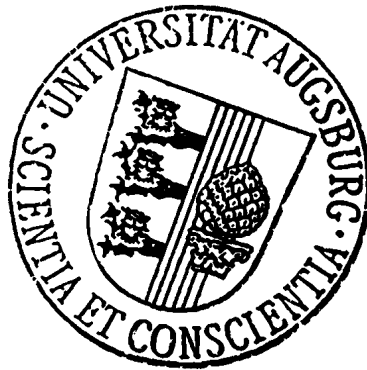


**Universität Augsburg**  
Institut für Mathematik  
Diskrete Mathematik, Optimierung und Operations Research



## BACHELORARBEIT

---

# Berechnung von Nash-Gleichgewichten in dynamischen Flüssen

---

Betreuer:	Prof. Dr. Tobias Harks
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Mirjam Dür
Vorgelegt von:	Michael Markl
Matrikelnummer:	1474802
Abgegeben am:	08.01.2020



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Dynamische Flüsse</b>	<b>3</b>
2.1	Grundlegende Definitionen . . . . .	3
2.2	Kürzeste Wege . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Dynamische Nash-Flüsse</b>	<b>9</b>
3.1	Charakterisierung dynamischer Nash-Flüsse . . . . .	9
3.2	Eigenschaften dynamischer Nash-Flüsse . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Auslastungsminimale Flüsse</b>	<b>14</b>
4.1	Optimalitätskriterium auslastungsminimaler Flüsse . . . . .	14
4.2	Berechnung auslastungsminimaler Flüsse . . . . .	21
4.2.1	Berechnungsmodell und Kodierungslängen . . . . .	22
4.2.2	Effiziente Suche rationaler Zahlen . . . . .	24
4.2.3	Berechnung mittels LP-Formulierung . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Schmale Flüsse mit Zurücksetzen</b>	<b>34</b>
5.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	34
5.2	Berechnung schmaler Flüsse . . . . .	40
5.2.1	Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen . . . . .	42
5.2.2	Berechnung schmaler Flüsse mit Zurücksetzen . . . . .	47
5.3	Berechnung dynamischer Nash-Flüsse mit schmalen Flüssen . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Fazit</b>	<b>60</b>



# 1 Einführung

Routenplanungsspiele haben in der Analyse und Optimierung von Verkehrs- und Kommunikationsnetzwerken eine große Bedeutung. Bei der Modellierung solcher Netzwerke werden dabei häufig statische Flüsse zu Rate gezogen, welche jedoch nicht abbilden können, wie sich Veränderungen des Flusses im Laufe der Zeit innerhalb des Netzwerks, wie sie beispielsweise in Straßennetzen auftreten, auf das System auswirken. Daher geht man zu dynamischen Flüssen (engl. flows over time) über, die den zeitlichen Verlauf der Kantenbelegung erfassen.

In dieser Arbeit unterwirft man dynamische Flüsse dem Modell der deterministischen Warteschlangen (engl. deterministic queuing model): Sobald Partikel eine Kante durchlaufen möchten, reihen sich diese zunächst in eine Warteschlange der Kante ein, die mit einer gewissen Kapazität abgearbeitet wird, um dann nach einer zusätzlichen Verzögerung am Zielknoten anzukommen. Dabei kann man sich die Kanten eines Netzwerks als Transportbänder vorstellen, die eine bestimmte Kapazität und eine bestimmte Verzögerung haben. Die Kapazität entspricht der Breite des Bands, welche die Gütermenge, die das Band pro Zeiteinheit transportieren kann, beschränkt. Die Verzögerung entspricht der Transportzeit, die das Band benötigt, um Güter vom Startknoten zum Zielknoten zu tragen. Des Weiteren gibt es im Netzwerk eine Quelle, also einen Knoten, an dem kontinuierlich Partikel entstehen, und eine Senke, in die Partikel aus dem Netzwerk abfließen.

Diesen Flüssen unterstellt man nun die folgende spieltheoretische Interpretation: Jedes infinitesimal kleine Partikel, das in einem Fluss an der Quelle zu einem bestimmten Zeitpunkt entsteht, wird als Spieler in einem nicht-atomaren Auslastungsspiel aufgefasst: Dabei verfolgt jeder Spieler das Ziel, in möglichst kurzer Zeit nach Erscheinen an der Quelle zur Senke des Netzwerks zu gelangen. Jeder Spieler besitzt dabei bereits zur Zeit seines Entstehens über alle nötigen Informationen, die seine tatsächliche Ankunftszeit an der Senke beeinflussen – das heißt, er weiß über den künftigen Verlauf der Warteschlangen an den Kanten Bescheid –, und kann diese nutzen, um einen zur aktuellen Zeit kürzesten Quelle-Senke-Pfad zu ermitteln. Da es sich bei den Spielern um infinitesimal kleine Partikel handelt, verändert sich der dynamische Fluss durch die Entscheidung eines einzelnen Partikels nicht.

Ein Nash-Gleichgewicht wird für eine endliche Anzahl an Spielern für gewöhnlich als eine Strategiewahl charakterisiert, in der kein Spieler seine Strategie bei Beibehalten der Wahl der anderen Spieler ändern kann, um seine eigenen Kosten echt zu verringern. Im Fall dynamischer Flüsse wird dieser Begriff etwas aufgeweicht: So wird ein dynamischer Fluss ein Nash-Gleichgewicht genannt, falls eine Kante von  $v$  nach  $w$  fast nur zu Zeitpunkten genutzt wird, zu denen die Kante auf einem kürzesten Pfad von der Quelle zu  $w$  liegt.

Diese Arbeit gibt zunächst eine formale Definition von dynamischen Flüssen in Kapitel 2 sowie eine Charakterisierung von Nash-Gleichgewichten in Kapitel 3. Danach

widmet sie sich der Berechnung ebensolcher Gleichgewichte für den Fall, dass der Netzwerkzufluss an der Quelle konstant ist. Dazu werden jedoch einige Kenntnisse über zwei Klassen von statischen Flüssen benötigt: So werden in Kapitel 4 zunächst Resultate der Analyse von auslastungsminimalen Flüssen dargestellt: Dies sind  $b$ -Flüsse, die die maximale Auslastung aller Kanten, d.h. das Verhältnis von Fluss und Kapazität einer Kante, minimieren. Es wird gezeigt, dass das dazu duale Problem darin besteht, einen sogenannten dünnsten Schnitt zu finden, der das Verhältnis von Nettoangebot zur Kapazität der ausgehenden Kanten des Schnittes maximiert. Außerdem wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem man auslastungsminimale Flüsse in polynomieller Zeit exakt bestimmen kann. Des Weiteren führt die Analyse der Ableitung dynamischer Nash-Flüsse zum Konzept sogenannter schmaler Flüsse, die in Kapitel 5 behandelt werden. Dies sind  $b$ -Flüsse in einem Netzwerk mit einer einzigen Quelle  $s$  und sogenannten zurücksetzenden Kanten, in denen alle  $s$ - $v$ -Pfade mit positivem Fluss minimale Auslastung besitzen. Nach einer Charakterisierung dieser Flüsse wird ein polynomieller Algorithmus erarbeitet, der schmale Flüsse in Netzwerken ohne zurücksetzende Kanten berechnet. Außerdem wird diskutiert, ob das allgemeine Problem mit zurücksetzenden Kanten in der Komplexitätsklasse **PPAD** liegt. Schließlich lässt sich mithilfe der Existenz solcher schmaler Flüsse ein mögliches Verfahren ableiten, mit dem Nash-Flüsse bei konstantem Netzwerkzufluss berechnet werden sollen.

## 2 Dynamische Flüsse

### 2.1 Grundlegende Definitionen

Zunächst werden einige grundlegende Begriffe eingeführt. In der gesamten Arbeit werden grundsätzlich nur gerichtete Graphen mit endlicher Knoten- und Kantenmenge betrachtet. Dabei bezeichne  $\text{tail}(e)$  den Start- und  $\text{head}(e)$  den Zielknoten einer Kante  $e$ . Außerdem sind parallele Kanten zwischen Knoten stets erlaubt, obwohl häufig die vereinfachte Schreibweise  $vw := (v, w) := e$  mit  $v = \text{tail}(e)$  und  $w = \text{head}(e)$  benutzt wird.

Für eine Menge  $X$  an Knoten bezeichne  $\delta^+(X) := \{e \in E \mid \text{tail}(e) \in X \nmid \text{head}(e)\}$  die Menge der ausgehenden Kanten von  $X$  und analog bezeichne  $\delta^-(X)$  die Menge der eingehenden Kanten in  $X$ . Ist der zugehörige Graph unklar, so schreibt man  $\delta_M^+(X)$  bzw.  $\delta_M^-(X)$  für ein Netzwerk, einen Graphen oder eine Kantenmenge  $M$ . Für die ausgehenden oder eingehenden Kanten eines einzelnen Knotens schreibt man verkürzend  $\delta^+(v)$  bzw.  $\delta^-(v)$ .

Ist weiter  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine Kantenbewertung und  $b : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Knotenbewertung, so schreibt man meist  $f_e$  statt  $f(e)$  und  $b_v$  statt  $b(v)$  und für Teilmengen  $E' \subseteq E$  und  $X \subseteq V$  abkürzend

$$f(E') := \sum_{e \in E'} f_e \quad \text{und} \quad b(X) := \sum_{v \in X} b_v.$$

Ein *Pfad*  $P = (e_1, \dots, e_k)$  ist eine Aneinanderreihung von Kanten, das heißt, es gilt  $\text{head}(e_i) = \text{tail}(e_{i+1})$  für alle  $i \in [k-1]$ . Dabei bezeichnet  $[n]$  die Menge der ersten  $n$  natürlichen Zahlen, also  $\{1, \dots, n\}$ . Die Kanten eines Pfades werden in der Menge  $E(P)$ , die Knoten in der Menge  $V(P)$  gesammelt. Ein Pfad heißt *Weg*, falls kein Knoten mehrmals besucht wird. Ein Pfad heißt *Kreis*, falls  $\text{tail}(e_1) = \text{head}(e_k)$  gilt, und *Zyklus* oder *elementarer Kreis*, falls zusätzlich  $\text{tail}(e_1)$  genau zweimal und sonst kein Knoten mehrmals besucht werden. Ein Weg oder Zyklus  $P$  wird oft als Vektor in  $\mathbb{R}^E$  aufgefasst, der als Einträge 1-en auf Kanten in  $P$  und sonst 0-en enthält.

**Definition 2.1.1.** Ein *Netzwerk*  $(V, E, u)$  ist ein gerichteter, endlicher Graph  $(V, E)$  mit *Kapazitäten*  $u : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ . Im Falle statischer Flüsse ist ein Netzwerk häufig mit *Balancen*  $b : V \rightarrow \mathbb{R}$  ausgestattet.

Ein *dynamisches Netzwerk*  $(V, E, u, s, t, \tau)$  ist ein Netzwerk  $(V, E, u)$ , in dem  $s$  alle Knoten in  $V$  erreicht. Dabei heißen  $s \in V$  die *Quelle* und  $t \in V$  die *Senke* des Netzwerks. Jeder Kante  $e \in E$  wird zusätzlich eine *Verzögerungszeit*  $\tau_e \geq 0$  zugeordnet, wobei alle Zyklen  $C$  eine positive Gesamtverzögerung  $\tau(E(C))$  haben.

**Definition 2.1.2** (Statischer Fluss). Eine Kantenbewertung  $f \in \mathbb{R}_{\geq 0}^E$  in einem gerichteten Graphen  $(V, E)$  heißt *statischer Fluss*. Sein *Balancevektor*  $b \in \mathbb{R}^V$  ist gege-

ben durch

$$b_v := f(\delta^+(v)) - f(\delta^-(v)) \quad \text{für } v \in V.$$

Man nennt  $f$  auch einen  $b$ -Fluss oder sagt,  $f$  gewähre Flusserhaltung bzgl.  $b$ . Gibt es zwei Knoten  $s$  und  $t$ , sodass  $b_v$  für alle Knoten  $v \in V \setminus \{s, t\}$  verschwindet, für  $s$  nicht-negativ und für  $t$  nicht-positiv ist, so ist  $f$  ein statischer  $s$ - $t$ -Fluss mit Wert  $b_s$ . Ist  $b$  der Nullvektor, so nennt man  $f$  auch eine Strömung.

Man bemerke, dass ein statischer Fluss keine Kapazitätsbedingung erfüllen muss. Außerdem sind für eine Strömung nur nichtnegative Werte zugelassen. Eine wichtige Aussage bei der Analyse von statischen Flüssen liefert der Dekompositionssatz (siehe [KV12, Satz 8.8]):

**Theorem 2.1.3** (Dekompositionssatz). *Ein statischer  $s$ - $t$ -Fluss  $f$  besitzt eine Dekomposition in elementare  $s$ - $t$ -Wege und Zyklen, das heißt es existieren  $s$ - $t$ -Wege  $P_1, \dots, P_k$  und Zyklen  $C_1, \dots, C_l$  sowie  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_l > 0$  mit*

$$f = \sum_{i \in [k]} \lambda_i P_i + \sum_{i \in [l]} \mu_i C_i.$$

Ist  $f$  eine Strömung, so gibt es eine Dekomposition in Zyklen.

Die Einführung dynamischer Flüsse und kürzester Wege folgt im Wesentlichen der Darstellung von Cominetti, Correa und Larré aus [CCL15] mit Ergänzungen von Ronald Koch und Martin Skutella aus [KS11]. So haben Cominetti u. a. dynamische Flüsse beispielsweise statt mit Lebesgue-integrierbarer Funktionen mit lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen ausgestattet, die den Vorteil bieten, über den gesamten Zeitraum  $[0, \infty)$  unendlich viel Fluss schicken zu können. Dazu wird der folgende Funktionenraum eingeführt:

**Definition 2.1.4.** Der Raum  $\mathfrak{F}_0$  sei die Menge der Funktionen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , die lokal integrierbar bzgl. des Lebesgue-Maßes sind und auf der negativen Achse verschwinden, die also  $\int_a^b |g(t)| dt < \infty$  für beliebige beschränkte Intervalle  $(a, b)$  und  $g(t) = 0$  für  $t < 0$  erfüllen.

**Definition 2.1.5** (Dynamischer Fluss). Ein dynamischer Fluss  $f = (f^+, f^-)$  ist ein Paar zweier über die Kanten  $E$  eines dynamischen Netzwerks indizierter Familien mit  $f_e^+, f_e^- \in \mathfrak{F}_0$  für alle  $e \in E$ . Dabei bezeichnen  $f_e^+(\theta)$  und  $f_e^-(\theta)$  die Zu- bzw. Abflussrate an Kante  $e \in E$  zum Zeitpunkt  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Der (kumulative) Zu- bzw. Abfluss an einer Kante  $e$  bis zum Zeitpunkt  $\theta$  sei definiert durch  $F_e^+(\theta) := \int_0^\theta f_e^+(t) dt < \infty$  bzw.  $F_e^-(\theta) := \int_0^\theta f_e^-(t) dt < \infty$ .

Die (Länge der) Warteschlange  $z_e(\theta)$  und die Wartezeit  $q_e(\theta)$  an einer Kante  $e \in E$  zum Zeitpunkt  $\theta \in \mathbb{R}$  seien gegeben durch  $z_e(\theta) := F_e^+(\theta) - F_e^-(\theta + \tau_e)$  und  $q_e(\theta) := z_e(\theta)/u_e$ .

Man bezeichne die Austrittszeit  $T_e(\theta)$  aus einer Kante  $e \in E$  bei Eintrittszeit  $\theta$ , zu der ein Partikel eine Kante verlässt, die es zum Zeitpunkt  $\theta$  betreten hat, als  $T_e(\theta) := \theta + q_e(\theta) + \tau_e$ .

Der Definition der Austrittszeit kann man bereits entnehmen, wie sich Partikel, die an einer Kante  $e$  ankommen, verhalten sollen: Nachdem sie zur Zeit  $\theta$  die Kante



betreten haben, müssen sie sich zunächst in eine Warteschlange einreihen, welche mit der Kapazität  $u_e$  nach dem FIFO-Prinzip (First-In-First-Out-Prinzip) abgebaut wird. Nachdem diese Wartezeit  $q_e(\theta)$  vorüber ist, vergeht eine weitere konstante Verzögerungszeit  $\tau_e$ , bevor sie wieder aus der Kante austreten. Des Weiteren müssen sich die Partikel bereits sofort bei der Ankunft an einem Knoten entscheiden, in welche Kante sie eintreten wollen, und können nicht an einem Knoten verweilen. Um das beschriebene Verhalten zu gewährleisten, führt man im Folgenden die Zulässigkeit dynamischer Flüsse ein:

**Definition 2.1.6** (Zulässiger dynamischer Fluss). Ein dynamischer Fluss  $f$  heißt *zulässig*, falls er die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (F1) Keine Abflussrate übersteigt die Kapazität, d.h.  $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : f_e^-(\theta) \leq u_e$ .
- (F2) Fluss verlässt eine Kante nur, falls er sie zuvor betreten hat,  
d.h.  $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : F_e^+(\theta) \geq F_e^-(\theta + \tau_e)$ .
- (F3) Bis auf Quelle und Senke erfüllt jeder Knoten  $v$  Flusserhaltung,  
d.h.  $\forall \theta \in \mathbb{R} : \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e^+(\theta) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e^-(\theta) = 0$ .  
Für die Senke  $t$  muss dieser Wert nicht-positiv und für die Quelle  $s$  nicht-negativ sein. Für  $s$  bezeichnet er den *Zufluss*  $d(\theta)$  in das Netzwerk.
- (F4) Warteschlangen werden mit der Kapazität der Kante abgebaut,  
d.h.  $\forall e \in E, \theta \in \mathbb{R} : z_e(\theta) > 0 \implies f_e^-(\theta + \tau_e) = u_e$ .

Die folgende Proposition beschreibt wichtige Folgerungen über zulässige dynamische Flüsse:

**Proposition 2.1.7.** Für eine Kante  $e \in E$  und einen zulässigen dynamischen Fluss  $f$  gilt:

- (i) Die Funktion  $\theta \mapsto \theta + q_e(\theta)$  ist monoton wachsend und stetig.
- (ii) Für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  ist die Warteschlange  $z_e$  auf dem Intervall  $(\theta, \theta + q_e(\theta))$  positiv.
- (iii) Zu jeder Zeit  $\theta \in \mathbb{R}$  gilt  $F_e^+(\theta) = F_e^-(T_e(\theta))$ .
- (iv) Für alle  $\theta_1 \leq \theta_2$  mit  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f_e^+(t) dt = 0$  und  $q_e(\theta_2) > 0$  gilt  $\theta_1 + q_e(\theta_1) = \theta_2 + q_e(\theta_2)$ .

*Beweis.* In (i) folgt die Stetigkeit bereits aus der Stetigkeit von  $F_e^+$  und  $F_e^-$ . Um zu zeigen, dass die Funktion monoton wachsend ist, seien  $\theta_1 \leq \theta_2$  gegeben. Mit  $F_e^-(\theta_2 + \tau_e) = F_e^-(\theta_1 + \tau_e) + \int_{\theta_1 + \tau_e}^{\theta_2 + \tau_e} f_e^-(t) dt \leq F_e^-(\theta_1 + \tau_e) + (\theta_2 - \theta_1)u_e$  und mit der Monotonie von  $F_e^+$  folgt:

$$\theta_1 + q_e(\theta_1) = \theta_1 + \frac{F_e^+(\theta_1) - F_e^-(\theta_1 + \tau_e)}{u_e} \leq \theta_1 + \frac{F_e^+(\theta_2) - F_e^-(\theta_1 + \tau_e)}{u_e} \leq \theta_2 + q_e(\theta_2).$$

Für  $\theta' \in (\theta, \theta + q_e(\theta))$  gilt also  $\theta' + q_e(\theta') \geq \theta + q_e(\theta)$ , womit  $q_e(\theta') \geq \theta + q_e(\theta) - \theta' > 0$  gerade Aussage (ii) beweist.

Aussage (iii) folgt dann mit (F4) und Aussage (ii), weil daraus

$$\int_{\theta}^{\theta + q_e(\theta)} f_e^-(t + \tau_e) dt = q_e(\theta)u_e = z_e(\theta)$$

folgt, weshalb  $F_e^-(T_e(\theta)) = F_e^-(\theta + \tau_e) + \int_{\theta + \tau_e}^{\theta + \tau_e + q_e(\theta)} f_e^-(t) dt = F_e^+(\theta)$  gilt.

Zu Aussage (iv): Für alle  $\theta' \in [\theta_1, \theta_2]$  gilt  $F_e^+(\theta') = F_e^+(\theta_2)$ . Also ist die Warteschlange  $z_e(\theta') = F_e^+(\theta_2) - F_e^-(\theta' + \tau_e) \geq z_e(\theta_2)$  positiv und nach (F4) gilt  $f_e^-(\theta' + \tau_e) = u_e$ . Die Differenz der Warteschlangen erfüllt

$$z_e(\theta_1) - z_e(\theta_2) = -F_e^-(\theta_1 + \tau_e) + F_e^-(\theta_2 + \tau_e) = (\theta_2 - \theta_1)u_e,$$

was  $q_e(\theta_1) - q_e(\theta_2) = \theta_2 - \theta_1$  impliziert.  $\square$

## 2.2 Kürzeste Wege

In diesem Abschnitt wird der Begriff der frühesten Ankunftszeit an einem Knoten eingeführt und erörtert, wann eine Kante  $vw$  in einem kürzesten  $s$ - $w$ -Pfad liegt.

**Definition 2.2.1.** Für einen dynamischen Fluss  $f$  und einen Pfad  $P = (e_1, \dots, e_k)$  definiere  $l^P(\theta) := T_{e_k} \circ \dots \circ T_{e_1}(\theta)$  den Zeitpunkt, an dem ein Partikel den Endknoten des Pfades erreicht, falls es den Pfad zum Zeitpunkt  $\theta$  betritt.

Für einen Knoten  $w \in V$  beschreibe  $\mathcal{P}_w$  die Menge aller  $s$ - $w$ -Pfade. Dann ist die früheste Ankunft eines Partikels, das zur Zeit  $\theta$  bei  $s$  startet, gegeben durch  $l_w(\theta) := \min_{P \in \mathcal{P}_w} l^P(\theta)$ . Ein Pfad  $P \in \mathcal{P}_w$  heißt *kürzester  $s$ - $w$ -Pfad zur Zeit  $\theta$* , falls er  $l_w(\theta) = l^P(\theta)$  erfüllt.

**Proposition 2.2.2.** Für einen zulässigen Fluss  $f$  sind die Funktionen  $F_e^+$  und  $F_e^-$  für alle  $e \in E$  lokal absolut stetig. Die Funktionen  $T_e$ ,  $l^P$  sowie  $l_v$  sind dabei für alle Kanten  $e \in E$ , Pfade  $P$  in  $G$  und Knoten  $v \in V$  monoton wachsend, lokal absolut stetig und surjektiv.

*Beweis.* Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral (siehe [Els11, Kap. VII, Satz 4.14]) ist  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x g(t) dt$  für eine Lebesgue-integrierbare Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absolut stetig. Insbesondere sind also  $F_e^+$  sowie  $F_e^-$  und damit auch  $q_e$  und  $T_e$  lokal absolut stetig. Als Komposition bzw. punktweises Minimum endlich vieler lokal absolut stetiger Funktionen sind auch  $l^P$  und  $l_v$  für alle Pfade  $P$  und Knoten  $v$  lokal absolut stetig. Nach Proposition 2.1.7 (i) ist die Monotonie von  $T_e$  bereits gegeben, welche auch die Monotonie von  $l^P$  und  $l_v$  impliziert. Wegen  $f_e^+, f_e^- \in \mathfrak{F}_0$  gilt  $q_e(\theta) = 0$  für  $\theta \leq 0$ , wodurch auch  $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} T_e(\theta) = -\infty$  folgt. Mit  $T_e(\theta) \geq \theta$  ergibt sich die Surjektivität von  $T_e$ . Daher sind auch  $l^P$  und  $l_v$  surjektiv.  $\square$

Die Monotonie lässt sich spieltheoretisch interpretieren: Partikel, die zur Zeit  $\theta$  in  $s$  starten und sich auf einem kürzesten Pfad zu  $t$  begeben, kommen zur Zeit  $l_t(\theta)$  in  $t$  an. Partikel, die später starten, können also nicht früher in  $t$  ankommen. Wie im statischen Szenario von kürzesten Pfaden, gilt auch hier die Dreiecksungleichung:

**Lemma 2.2.3.** Für einen zulässigen dynamischen Fluss gilt  $T_{vw}(l_v(\theta)) \geq l_w(\theta)$  für alle Kanten  $vw \in E$ .

*Beweis.* Sei ein kürzester  $s$ - $v$ -Pfad  $P$  zum Zeitpunkt  $\theta$  gegeben. Hängt man an  $P$  die Kante  $vw$  an, erhält man einen  $s$ - $w$ -Pfad, der zur Eintrittszeit  $\theta$  die Ankunftszeit  $T_{vw}(l_v(\theta))$  liefert. Da  $l_w(\theta)$  das Minimum über die Ankunftszeit aller  $s$ - $w$ -Pfade ist, gilt die Behauptung.  $\square$

**Definition 2.2.4.** Man bezeichne eine Kante  $vw \in E$  als *aktiv zum Zeitpunkt  $\theta$* , falls sie auf einem zur Zeit  $\theta$  kürzesten  $s$ - $w$ -Pfad liegt; sonst nennt man sie *inaktiv zum Zeitpunkt  $\theta$* . Es bezeichne  $\Theta_e$  die Menge aller Zeitpunkte, zu denen die Kante  $e$  aktiv ist, und  $G_\theta := (V, E_\theta)$  den durch die zur Zeit  $\theta$  aktiven Kanten induzierten Teilgraphen.

**Proposition 2.2.5.** *Für einen zulässigen Fluss ist eine Kante  $vw$  genau dann aktiv zum Zeitpunkt  $\theta$ , falls  $T_{vw}(l_v(\theta)) = l_w(\theta)$  gilt. Außerdem ist die Menge  $\Theta_{vw}$  abgeschlossen.*

*Beweis.* Ist  $vw$  aktiv zum Zeitpunkt  $\theta$ , existiert ein zur Zeit  $\theta$  kürzester  $s$ - $w$ -Pfad  $P$ , der die Kante  $vw$  benutzt. Da Zyklen nach Voraussetzung eine positive Gesamtverzögerung haben, ist  $P$  ein  $s$ - $w$ -Weg, dessen letzte Kante gerade  $vw$  ist. Sei also  $Q$  das Anfangsstück von  $P$  bis zum Knoten  $v$ . Dann gilt aufgrund der Monotonie  $T_{vw}(l_v(\theta)) \leq T_{vw}(l^Q(\theta)) = l_w(\theta)$ , sodass mit Lemma 2.2.3 sogar Gleichheit gilt.

Gilt umgekehrt  $T_{vw}(l_v(\theta)) = l_w(\theta)$  und sei  $Q$  ein kürzester  $s$ - $v$ -Pfad, so ist der Pfad  $P$ , der an  $Q$  noch die Kante  $vw$  anhängt, ein kürzester  $s$ - $w$ -Pfad zur Zeit  $\theta$ , der die Kante  $vw$  benutzt.

Aufgrund der Stetigkeit von  $T_{vw}$  und  $l_v$  ist die Menge  $\Theta_{vw}$  abgeschlossen.  $\square$

Man beachte, dass Teilpfade kürzester Pfade im statischen Sinne wieder kürzeste Pfade sind; im dynamischen Sinne gilt dies nicht unbedingt, jedoch aber in folgendem Teilgraph:

**Lemma 2.2.6.** *Für einen zulässigen Fluss ist  $G_\theta$  zu jeder Zeit  $\theta$  ein azyklischer Graph, in dem  $s$  jeden Knoten  $v \in V$  erreichen kann.*

*Beweis.* Angenommen, es existiere ein Zyklus  $C = (e_1, \dots, e_n)$  mit ausschließlich aktiven Kanten. Es ist  $l^C(\theta) > \theta$ , da für Zyklen eine positive Gesamtverzögerung vorausgesetzt ist. Setzt man  $v := \text{tail}(e_1)$ , so erzeugt  $l_v(\theta) = l^C(l_v(\theta)) > l_v(\theta)$  einen Widerspruch aufgrund der Aktivität aller Kanten.

Für jeden Knoten  $w \neq s$  existiert mindestens eine eingehende aktive Kante – zum Beispiel die letzte Kante eines kürzesten  $s$ - $w$ -Pfades, welcher wiederum existiert, weil  $w$  von  $s$  aus in  $G$  erreichbar ist. Daher ist  $w$  von  $s$  aus auch in  $G_\theta$  erreichbar.  $\square$

**Proposition 2.2.7.** *Für einen zulässigen dynamischen Fluss  $f$  ist  $(l_v(\theta))_{v \in V}$  die eindeutige Lösung des Gleichungssystems*

$$\tilde{l}_w = \begin{cases} \theta, & \text{falls } w = s, \\ \min_{vw \in \delta^-(w)} T_{vw}(\tilde{l}_v), & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Offenbar löst  $(l_v(\theta))_{v \in V}$  dieses System, da jeder Knoten  $w \neq s$  eine eingehende Kante hat, welche  $T_{vw}(l_v) = l_w$  erfüllt. Für eine Lösung  $(\tilde{l}_v)_{v \in V}$  des Gleichungssystems zeige man  $l_w(\theta) = \tilde{l}_w$  für jeden Knoten  $w \in V$ . Dabei ist der Teilgraph  $G' = (V, E')$  mit

$$E' := \{vw \in E \mid T_{vw}(\tilde{l}_v) = \tilde{l}_w\}$$

ein azyklischer Graph, in dem  $s$  jeden Knoten  $w \in V$  erreichen kann: Zyklen können wegen der positiven Gesamtverzögerung nicht entstehen und jeder Knoten  $w \neq s$  hat

mindestens eine eingehende Kante  $vw$  mit  $T_{vw}(\tilde{l}_v) = \tilde{l}_w$ . Daher ist  $\tilde{l}_w$  bereits durch einen  $s$ - $w$ -Pfad  $P$  in  $G'$  festgelegt auf  $l^P(\theta) \geq l_w(\theta)$ . Für einen zur Zeit  $\theta$  kürzesten  $s$ - $w$ -Pfad  $Q$  gilt außerdem  $\tilde{l}_w \leq T^Q(\tilde{l}_s) = T^Q(\theta) = l_w(\theta)$ .  $\square$

Um den Vektor  $(l_v(\theta))_{v \in V}$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  gleichzeitig zu berechnen, kann der Bellman-Ford-Algorithmus auf den Distanzvektor-Funktionen  $(l_v)_{v \in V}$  genutzt werden: Dazu wird in jeder der  $n-1$  Iterationen für jede Kante das punktweise Minimum  $l_w := \min\{l_w, T_{vw} \circ l_v\}$  gebildet. Sind Operationen auf Funktionen nicht möglich oder zu teuer, so kann  $(l_v(\theta))_{v \in V}$  für ein spezielles  $\theta \in \mathbb{R}$  mit dem Dijkstra-Algorithmus ermittelt werden, wobei man die Kosten einer Kante  $vw$  erst bei Scanning von  $v$  in der Form  $q_{vw}(l_v(\theta)) + \tau_{vw}$  berechnet.

## 3 Dynamische Nash-Flüsse

Dieser Abschnitt dient dazu, Nash-Gleichgewichte im Kontext dynamischer Flüsse formal einzuführen. Dabei hilft die Anschauung, dass Partikel, die zur Zeit  $\theta$  an der Quelle erscheinen, in einem Nash-Gleichgewicht möglichst früh – also zum Zeitpunkt  $l_t(\theta)$  – an der Senke ankommen.

### 3.1 Charakterisierung dynamischer Nash-Flüsse

Für die Einführung dynamischer Nash-Flüsse benötigt man weitere Definitionen:

**Definition 3.1.1.** Für eine Kante  $vw \in E$  bezeichne  $x_{vw}^+(\theta) := F_{vw}^+(l_v(\theta))$  den Zufluss bis zur frühestmöglichen Ankunftszeit von Partikeln in  $v$ , die zur Zeit  $\theta$  in  $s$  starten.

Dagegen bezeichne  $x_{vw}^-(\theta) := F_{vw}^-(l_w(\theta))$  den Abfluss bis zur frühestmöglichen Ankunftszeit von Partikeln in  $w$ , die zur Zeit  $\theta$  in  $s$  starten.

Für einen Knoten  $v \in V$  sei  $b_v(\theta) := \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e^+(\theta) - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e^-(\theta)$  die Balance des Knotens  $v$  zum Zeitpunkt  $\theta$ .

*Bemerkung 3.1.2.* In einem zulässigen Fluss gilt nach Proposition 2.1.7 (iii) und mit der Monotonie von  $F_{vw}^-$  bereits

$$x_{vw}^-(\theta) = F_{vw}^-(l_w(\theta)) \leq F_{vw}^-(T_{vw}(l_v(\theta))) = F_{vw}^+(l_v(\theta)) = x_{vw}^+(\theta).$$

**Lemma 3.1.3.** Für einen zulässigen dynamischen Fluss  $f$  gilt  $b_v(\theta) = 0$  für alle Knoten  $v \in V \setminus \{s, t\}$  und alle  $\theta \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Unter Benutzung von (F3) folgere man für alle  $v \in V \setminus \{s, t\}$  und  $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{e \in \delta^-(v)} x_e^-(\theta) = \int_0^{l_v(\theta)} \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e^-(t) dt = \int_0^{l_v(\theta)} \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e^+(t) dt = \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e^+(\theta).$$

□

*Notation 3.1.4.*  $M^c := \mathbb{R} \setminus M$  bezeichne das Komplement einer Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $\overline{M}$  bezeichne den Abschluss von  $M$ .

**Definition 3.1.5.** Man sage, der Fluss  $f$  fließe nur entlang aktiver Kanten, falls  $f_{vw}^+$  fast überall auf  $l_v(\Theta_{vw}^c)$  für alle Kanten  $vw \in E$  verschwindet.

*Bemerkung 3.1.6.* Diese Definition weicht von der Definition von Koch und Skutella ab und entspricht derjenigen aus [CCL15, Definition 1]: Nach [KS11, Definition 2] sagt man,  $f$  sende Fluss nur entlang aktuell kürzester Pfade, falls  $f_{vw}^+ \circ l_v$  fast überall auf  $\Theta_{vw}^c$  verschwindet für alle Kanten  $vw$ .

Entspricht  $f$  dieser Definition, so auch Definition 3.1.5: Da  $l_v$  nach Proposition 2.2.2 absolut stetig ist, bildet es nach [Els11, Kap. VII, Aufgabe 4.9] Nullmengen wieder auf Nullmengen ab, weshalb folgende Menge eine Nullmenge ist:

$$l_v(\{\theta \in \Theta_{vw}^c \mid f_{vw}^+(l_v(\theta)) > 0\}) = \{\xi \in l_v(\Theta_{vw}^c) \mid f_{vw}^+(\xi) > 0\}.$$

Koch und Skutella zeigen im Beweis von [KS11, Lemma 1] die entsprechende Äquivalenz von Lemma 3.1.8 (i) und (iii) – jedoch in (i) unter Verwendung ihrer Definition – und verwenden bei der Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) das Argument, dass für jede Kante  $vw \in E$  und alle  $\theta \in \Theta_{vw}^c$  eine Umgebung  $U$  von  $\theta$  existiert, sodass  $f_{vw}^+$  fast überall in  $l_v(U)$  verschwindet. Dies reicht aber nicht aus, um zu zeigen, dass  $f_{vw}^+(l_v(\theta)) = 0$  für fast alle  $\theta \in \Theta_{vw}^c$  gilt: So kann  $f_{vw}^+(l_v(\theta))$  für ein  $\theta \in \Theta_{vw}^c$  positiv sein und  $l_v$  konstant in einer Umgebung um  $\theta$ . Dann ist  $f_{vw}^+ \circ l_v$  in einer Umgebung um  $\theta$  positiv, was im Widerspruch zur Forderung steht.

Dies wurde in [CCL15, Example 2] dazu genutzt, einen Beispielfluss anzugeben, der beweist, dass die Forderung von Koch und Skutella sogar echt stärker ist.

Für eine äquivalente Umschreibung dieser Definition benötigen wir folgendes Lemma der Maßtheorie:

**Lemma 3.1.7.** *Seien  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine lokal Lebesgue-integrierbare Funktion und  $((a_i, b_i))_{i \in I}$  eine Familie offener Intervalle. Dann verschwindet  $g$  fast überall auf der Vereinigung  $\Theta := \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$  genau dann, wenn es für alle  $i \in I$  fast überall auf  $(a_i, b_i)$  verschwindet.*

*Beweis.* Verschwindet  $g$  fast überall auf  $\Theta$ , so erst recht auf jedem Intervall  $(a_i, b_i)$ . Es verschwinde  $g$  also auf allen Intervallen  $(a_i, b_i)$ . Die Funktion  $\mu(A) := \int_A g \, d\lambda$  definiert ein Maß auf den Borelmengen  $\mathfrak{B}$ . Da jede offene Menge  $O \subseteq \mathbb{R}$  bereits  $\sigma$ -kompakt ist, also eine Darstellung als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen – hier  $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{x \in \mathbb{R} \mid d(x, O^c) \geq 1/n\} \cap [-n, n])$  – besitzt, ist jede offene Menge nach [Els11, Kap. VIII, 1.2 Folgerungen (e)] innen regulär. Das heißt, es gilt

$$\mu(O) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq O \text{ kompakt}\}$$

für offene Mengen  $O \subseteq \mathbb{R}$ . Für ein kompaktes  $K \subseteq \Theta$  existiert eine endliche Teilüberdeckung  $\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i) \supseteq K$ , für die  $\mu(K) \leq \sum_{i=1}^n \mu((a_i, b_i)) = \sum_{k=1}^n \int_{a_i}^{b_i} g(t) \, dt = 0$  gilt. Also ist auch  $\mu(\Theta) = 0$ .  $\square$

**Lemma 3.1.8.** *Für einen zulässigen Fluss  $f$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Der Fluss  $f$  fließt nur entlang aktiver Kanten.*
- (ii) *Für jede Kante  $vw \in E$  und für fast alle  $\xi \in \mathbb{R}$  mit  $f_{vw}^+(\xi) > 0$  gilt  $\xi \in l_v(\Theta_{vw})$ .*
- (iii) *Für jede Kante  $e \in E$  und für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  gilt  $x_e^+(\theta) = x_e^-(\theta)$ .*

*Beweis.* (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Bedingung (ii) gilt genau dann, wenn  $f_{vw}^+$  fast überall auf  $l_v(\Theta_{vw})^c$  verschwindet. Daher genügt es, zu zeigen, dass sich  $l_v(\Theta_{vw})^c$  und  $l_v(\Theta_{vw}^c)$  nur um eine Nullmenge voneinander unterscheiden. Mit der Surjektivität von  $l_v$  gilt  $l_v(\Theta_{vw})^c \subseteq l_v(\Theta_{vw}^c)$ .

Des Weiteren ist  $S := l_v(\Theta_{vw}^c) \setminus l_v(\Theta_{vw})^c = l_v(\Theta_{vw}^c) \cap l_v(\Theta_{vw})$  eine Teilmenge von  $l_v(\mathbb{Q})$ : Für ein  $\xi \in S$  gibt es  $\theta \in \Theta_{vw}^c$  und  $\theta' \in \Theta_{vw}$  mit  $l_v(\theta) = \xi = l_v(\theta')$ . Da  $\theta \neq \theta'$  ist, existiert ein  $\theta_q \in \mathbb{Q} \cap (\theta, \theta')$ . Wegen der Monotonie von  $l_v$  gilt  $l_v(\theta_q) = \xi$ , womit  $\xi \in l_v(\mathbb{Q})$  folgt. Also unterscheiden sich die beiden Mengen nur um eine abzählbare Menge.

(i)  $\Leftrightarrow$  (iii): Sei eine Kante  $vw \in E$  gegeben. Für ein  $\theta \in \mathbb{R}$  bezeichne  $\omega_\theta \leq \theta$  den spätesten Startzeitpunkt, sodass man unter Benutzung von  $vw$  zum Zeitpunkt  $l_w(\theta)$  zu  $w$  gelangt:

$$\omega_\theta := \max\{\omega \leq \theta \mid l_w(\theta) = T_{vw}(l_v(\omega))\}.$$

Es gilt  $\Theta_{vw}^c = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} (\omega_\theta, \theta)$ : Für  $\theta \in \Theta_{vw}^c$  gilt  $T_{vw}(l_v(\theta)) > l_w(\theta)$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $T_{vw} \circ l_v$  und  $l_w$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , das  $T_{vw}(l_v(\theta')) > l_w(\theta + \varepsilon)$  für alle  $\theta' \in [\theta, \theta + \varepsilon]$  erfüllt. Also liegt  $\theta$  in  $(\omega_{\theta+\varepsilon}, \theta + \varepsilon)$ . Ist umgekehrt  $\theta' \in (\omega_\theta, \theta)$ , so gilt aufgrund der Monotonie  $T_{vw}(l_v(\theta')) \geq T_{vw}(l_v(\omega_\theta)) = l_w(\theta) \geq l_w(\theta')$ . Die erste Ungleichung kann nicht mit Gleichheit erfüllt sein, da  $\omega_\theta$  maximal mit der Eigenschaft  $T_{vw}(l_v(\omega)) = l_w(\theta)$  ist, wodurch  $\theta' \in \Theta_{vw}^c$  folgt.

Mit  $l_v(\Theta_{vw}^c) = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} (l_v(\omega_\theta), l_v(\theta))$  verschwindet  $f_{vw}^+$  nach Lemma 3.1.7 genau dann fast überall auf  $l_v(\Theta_{vw}^c)$ , wenn es für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  fast überall auf  $(l_v(\omega_\theta), l_v(\theta))$  verschwindet. Nach Proposition 2.1.7 (iii) gilt dies wiederum genau dann, wenn  $F_{vw}^+(l_v(\theta)) - F_{vw}^-(l_v(\theta))$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  verschwindet.  $\square$

**Definition 3.1.9.** Man sage, ein zulässiger dynamischer Fluss  $f$  fließe ohne Überholungsmöglichkeiten, falls  $b_s(\theta) = -b_t(\theta)$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  gilt.

Dabei betrachte man folgende Intuition: Partikel, die zur Zeit  $\theta \in \mathbb{R}$  bei  $s$  starten und sich auf einem kürzesten Weg zu  $t$  bewegen, also zur Zeit  $l_t(\theta)$  in  $t$  ankommen, überholen andere Partikel, falls  $b_s(\theta) > -b_t(\theta)$  gilt. Falls jedoch  $b_s(\theta) < -b_t(\theta)$  gilt, wurde das Partikel bereits von anderen überholt. Ein Nash-Gleichgewicht sollte diese Eigenschaft daher erfüllen.

**Lemma 3.1.10.** Seien ein dynamischer Fluss  $f$  in einem Graphen  $G = (V, E)$  und ein Zeitpunkt  $\theta \in \mathbb{R}$  gegeben. Der Graph  $H$  entstehe aus  $G$ , indem man jede Kante  $vw \in E$  aus  $G$  durch einen neuen Knoten  $\mathbf{v}_{vw}$  und zwei Kanten  $\mathbf{v}\mathbf{v}_{vw}$  und  $\mathbf{v}_{vw}w$  ersetze. Der statische Fluss  $g$  auf  $H$  sei definiert durch

$$g_{\mathbf{v}\mathbf{v}_{vw}} := x_{vw}^+(\theta) \text{ und } g_{\mathbf{v}_{vw}w} := x_{vw}^-(\theta) \text{ für alle } vw \in E$$

und der Balancevektor  $b$  auf  $H$  sei gegeben durch  $b_v := b_v(\theta)$  für alle  $v \in V$  und  $b_{\mathbf{v}_e} := x_e^-(\theta) - x_e^+(\theta)$  für alle  $e \in E$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Der Fluss  $g$  ist ein statischer  $b$ -Fluss.
- (ii) Ist  $f$  zulässig, so gilt  $\forall e \in E : x_e^+(\theta) = x_e^-(\theta) \iff b_s(\theta) + b_t(\theta) = 0$ .

*Beweis.* Zu (i): Um zu zeigen, dass die Summe über die Balanceeinträge verschwindet, erkenne man, dass der Anteil einer Kante  $e \in E$  in  $b(V)$  gerade  $x_e^+(\theta) - x_e^-(\theta)$  ist. Damit gilt:

$$\sum_{v \in V} b_v + \sum_{e \in E} b_{\mathbf{v}_e} = \sum_{e \in E} (x_e^+(\theta) - x_e^-(\theta) + x_e^-(\theta) - x_e^+(\theta)) = 0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $g$  bezüglich  $b$  Flusserhaltung gewährt. Für die Knoten der Form  $\mathbf{v}_{vw}$  gilt dies, da  $g_{\mathbf{v}_{vw}w} - g_{v\mathbf{v}_{vw}} = x_{vw}^-(\theta) - x_{vw}^+(\theta) = b_{\mathbf{v}_{vw}}$ . Für  $v \in V$  gilt nach Konstruktion

$$b_v = \sum_{e \in \delta_G^+(v)} x_e^+(\theta) - \sum_{e \in \delta_G^-(v)} x_e^-(\theta) = \sum_{e \in \delta_H^+(v)} g_e - \sum_{e \in \delta_H^-(v)} g_e.$$

Zu (ii): Tatsächlich benötigt man aus (i) nur die Eigenschaft, dass die Summe über die Einträge des Balancevektors verschwindet. Mit Lemma 3.1.3 gilt wegen der Zulässigkeit von  $f$  sogar  $b_s(\theta) + b_t(\theta) + \sum_{e \in E} b_{\mathbf{v}_e} = 0$ .

Angenommen, es gelte  $x_e^+(\theta) = x_e^-(\theta)$  für alle  $e \in E$ . Dann sind auch alle  $b_{\mathbf{v}_e} = 0$  und es gilt  $b_s(\theta) + b_t(\theta) = 0$ . Setzt man  $b_s(\theta) + b_t(\theta) = 0$  voraus, so ist  $\sum_{e \in E} b_{\mathbf{v}_e} = 0$  und, da  $f$  zulässig ist, gilt  $x_e^-(\theta) \leq x_e^+(\theta)$  nach Bemerkung 3.1.2. Daher gilt  $b_{\mathbf{v}_e} \leq 0$  für alle  $e \in E$ , weshalb  $b_{\mathbf{v}_e}$  für alle  $e \in E$  verschwinden muss.  $\square$

Die Ergebnisse aus Lemma 3.1.8 und Lemma 3.1.10 werden im folgenden Theorem gesammelt, welches Nash-Gleichgewichte in dynamischen Flüssen charakterisiert:

**Theorem 3.1.11** (Charakterisierung dynamischer Nash-Flüsse). *Ist  $f$  ein zulässiger dynamischer Fluss, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Der Fluss  $f$  fließt nur entlang aktiver Kanten.*
- (ii) *Für alle Kanten  $e \in E$  und zu jeder Zeit  $\theta \in \mathbb{R}$  gilt  $x_e^+(\theta) = x_e^-(\theta)$ .*
- (iii) *Der Fluss  $f$  fließt ohne Überholungsmöglichkeiten.*

*Gilt eine dieser Aussagen, so nennt man  $f$  einen dynamischen Nash-Fluss.*

## 3.2 Eigenschaften dynamischer Nash-Flüsse

In diesem Abschnitt werden einige Ergebnisse über Nash-Flüsse gesammelt, die in Abschnitt 5.3 benötigt werden.

**Bemerkung 3.2.1.** Nach Lemma 3.1.3 ist der statische Fluss  $x(\theta)$  für einen Nash-Fluss  $f$  mit  $x_e(\theta) := x_e^+(\theta) = x_e^-(\theta)$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  ein statischer  $s$ - $t$ -Fluss. Wegen der Monotonie von  $x_e$  ist auch  $x(\theta_2) - x(\theta_1)$  für  $\theta_1 \leq \theta_2$  ein statischer  $s$ - $t$ -Fluss genauso wie  $x'(\theta)$ , falls  $x_e$  für alle  $e \in E$  differenzierbar in  $\theta$  ist, da Differenzieren die Flusserhaltung erhält und  $x_e$  monoton wachsend für alle  $e \in E$  ist.

**Lemma 3.2.2.** *In einem dynamischen Nash-Fluss ist  $x_e$  eingeschränkt auf  $\overline{\Theta_e^c}$ , also auf den Abschluss der Menge der inaktiven Zeitpunkte von  $e$ , für jede Kante  $e \in E$  lokal konstant.*

**Beweis.** Da  $\Theta_{vw}^c$  eine in  $\mathbb{R}$  offene Menge ist, hat sie eine Darstellung als abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter offener Intervalle. Innerhalb eines solchen Intervalls  $(\theta_1, \theta_2)$  gilt  $x_{vw}(\theta_2) - x_{vw}(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_{vw}^+(t) dt = 0$ , da  $f$  nur entlang aktiver Kanten fließt. Der Rest folgt mit der Monotonie und Stetigkeit von  $x_{vw}$ .  $\square$



**Lemma 3.2.3.** *Seien ein dynamischer Nash-Fluss  $f$ , eine Kante  $vw \in E$  und ein Zeitpunkt  $\theta \in \mathbb{R}$  gegeben. Gilt eine der folgenden Aussagen, so ist  $vw$  zum Zeitpunkt  $\theta$  aktiv:*

- (i) *Die Ableitung  $x'_{vw}(\theta)$  existiert und ist positiv.*
- (ii) *Die Wartezeit  $q_{vw}$  an der Kante  $vw$  ist zur Zeit  $l_v(\theta)$  positiv.*

*Insbesondere verschwindet die Wartezeit  $q_{vw}(l_v(\theta))$  für alle  $\theta \in \overline{\Theta_{vw}^c}$ .*

*Beweis.* Zu Aussage (i): Angenommen,  $vw$  wäre zum Zeitpunkt  $\theta$  nicht aktiv, so würde wegen der Offenheit von  $\Theta_{vw}^c$  und Lemma 3.2.2 die Ableitung  $x'_{vw}(\theta)$  verschwinden.

Für Aussage (ii) zeige man  $T_{vw}(l_v(\theta)) \leq l_w(\theta)$ . Sei  $\theta_1$  der früheste Zeitpunkt mit  $x_{vw}^+(\theta_1) = x_{vw}^+(\theta)$ . Dieser existiert, da  $l_v$  nach Proposition 2.2.2 surjektiv ist. Dann ist  $\theta_1 \in \Theta_{vw}$  nach Lemma 3.2.2. Außerdem ist  $\theta_1 \leq \theta$  wegen der Monotonie von  $F_{vw}^+ \circ l_v$ . Nach Aussage (i) gilt nun  $T_{vw}(l_v(\theta_1)) = l_w(\theta_1)$ . Nach Proposition 2.1.7 (iv) ist  $T_{vw}(l_v(\theta_1)) = T_{vw}(l_v(\theta))$  und mit der Monotonie von  $l_w$  folgt  $T_{vw}(l_v(\theta)) \leq l_w(\theta)$ .  $\square$

**Proposition 3.2.4.** *Für einen dynamischen Nash-Fluss  $f$  und zwei Zeitpunkte  $\theta_1, \theta_2$  mit  $\theta_1 \leq \theta_2$  ist der statische  $s$ - $t$ -Fluss  $x(\theta_2) - x(\theta_1)$  eine Komposition von  $s$ - $t$ -Wegen.*

*Beweis.* Sei  $\theta$  das Infimum aller Zeitpunkte  $\xi \geq \theta_1$ , zu denen  $x(\xi) - x(\theta_1)$  nicht in  $s$ - $t$ -Wege zerlegbar ist. Man nehme  $\theta \leq \theta_2$  an. Da inaktive Kanten zum Zeitpunkt  $\theta$  bereits kurz vor und noch kurz nach  $\theta$  inaktiv sind, existiert ein Intervall  $[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ , in dem keine inaktive Kante aktiv wird. Außerdem existiert für  $\xi_0 := \max\{\theta_1, \theta - \varepsilon\}$  eine  $s$ - $t$ -Wegezerlegung von  $x(\xi_0) - x(\theta_1)$ .

Für einen Pfad  $P$  und einen statischen Fluss  $g$  sei  $g^P := \min_{e \in P} g_e$  der Fluss, der auf dem Pfad  $P$  fließt. Für einen Zyklus  $C$  ist  $(x(\xi) - x(\xi_0))^C = 0$  für  $\xi \in [\xi_0, \theta + \varepsilon]$ , da aufgrund der Azyklizität von  $G_{\xi_0}$  eine Kante  $e \in C$  des Zyklus existiert, die zur Zeit  $\xi_0$  und damit in ganz  $[\xi_0, \theta + \varepsilon]$  inaktiv ist, wodurch  $x_e(\xi_0) = x_e(\xi)$  nach Lemma 3.2.2 folgt.

Also hat der  $s$ - $t$ -Fluss  $x(\xi) - x(\xi_0)$  für  $\xi \in [\xi_0, \theta + \varepsilon]$  keinen Zyklus mit positivem Fluss und besitzt daher eine  $s$ - $t$ -Wegezerlegung. Addiert man diese zur  $s$ - $t$ -Wegezerlegung von  $x(\xi_0) - x(\theta_1)$ , so erhält man eine  $s$ - $t$ -Wegezerlegung von  $x(\xi) - x(\theta_1)$ , was für  $\xi > \theta$  einen Widerspruch zur Definition von  $\theta$  darstellt.  $\square$

**Korollar 3.2.5.** *Für einen dynamischen Nash-Fluss  $f$  ist der statische  $s$ - $t$ -Fluss  $x(\theta)$  zu jeder Zeit  $\theta$  eine Komposition von  $s$ - $t$ -Wegen.*

*Beweis.* Nach Proposition 2.2.2 existiert ein Zeitpunkt  $\xi_0$  mit  $l_v(\xi_0) \leq 0$  für alle Knoten  $v \in V$ . Für  $\theta \leq \xi_0$  ist  $x(\theta)$  der Nullfluss und offenbar in  $s$ - $t$ -Wege zerlegbar, da die Funktionen  $f_e^+$  und  $f_e^-$  links der  $y$ -Achse verschwinden. Ist  $\theta > \xi_0$ , so ist  $x(\theta) = x(\theta) - x(\xi_0)$  nach Proposition 3.2.4 in  $s$ - $t$ -Wege zerlegbar.  $\square$

## 4 Auslastungsminimale Flüsse

Die Berechnung von Nash-Gleichgewichten erfordert zunächst das Verständnis spezieller Klassen statischer Flüsse. Eine wichtige Klasse stellen die sogenannten auslastungsminimalen  $b$ -Flüsse dar.

**Definition 4.0.1** (Auslastungsminimaler  $b$ -Fluss). Sei ein  $b$ -Fluss  $f$  auf einem Netzwerk gegeben. Dann heißt  $f_e/u_e$  die *Auslastung der Kante  $e$  durch  $f$*  und die maximale Kantenauslastung  $c(f) := \max_{e \in E} f_e/u_e$  wird die *Auslastung des Flusses  $f$*  genannt. Eine Kante mit Auslastung  $c(f)$  wird auch als *Flaschenhalskante* (engl. bottleneck edge), eine Kante ohne Fluss als *Nullkante* bezeichnet. Ein  $b$ -Fluss mit minimaler Auslastung wird dann *auslastungsminimaler  $b$ -Fluss* genannt.

In diesem Kapitel wird zunächst ein Optimalitätskriterium und ein effizienter Algorithmus zur Berechnung solcher auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse vorgestellt. Dabei wird angenommen, dass der Graph keine Schleifen besitzt, da diese bei der Berechnung auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse ignoriert werden können.

### 4.1 Optimalitätskriterium auslastungsminimaler Flüsse

In diesem Abschnitt wird ein hinreichendes sowie notwendiges Kriterium auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse erarbeitet. Das Resultat in Theorem 4.1.13 wurde in [Koc12, Theorem 6.11] zwar verwendet, jedoch nicht bewiesen. Der Beweis und die zugehörige Analyse auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse wurden hier eigenständig erarbeitet.

Ähnlich zum wohlbekannten Max-Flow-Min-Cut-Theorem von Ford und Fulkerson betrachtet man dabei ein duales Problem, welches Schnitte involviert.

**Definition 4.1.1** (Dünnster Schnitt). In einem Netzwerk  $(V, E, u)$  wird eine Knotenteilmenge  $X \subseteq V$  auch *Schnitt* genannt. Sind Knotenbalancen  $b$  gegeben und ist  $\delta^+(X)$  nichtleer, so bezeichne  $b(X)/u(\delta^+(X))$  die *Auslastung des Schnittes  $X$* . Existiert ein Schnitt, dessen Auslastung maximal ist, so nennt man ihn einen *dünnsten Schnitt*.

Man bemerke, dass ein dünnster Schnitt existiert, wenn die Kantenmenge  $E$  nichtleer ist. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Auslastung eines Schnittes höchstens so groß ist wie die eines  $b$ -Flusses. Dies ist auch anschaulich klar, da das Angebot  $b(X)$  eines Schnittes  $X$  im besten Fall gleichmäßig auf die Kapazitäten aller ausgehenden Kanten des Schnittes verteilt wird.

**Theorem 4.1.2** (Schwache Dualität). In einem Netzwerk  $(V, E, u)$  mit Balancen  $b$  ist die Auslastung eines  $b$ -Flusses  $f$  mindestens so groß wie die Auslastung eines Schnittes  $X$  mit ausgehenden Kanten; das heißt

$$\max_{e \in E} \frac{f_e}{u_e} \geq \frac{b(X)}{u(\delta^+(X))}.$$

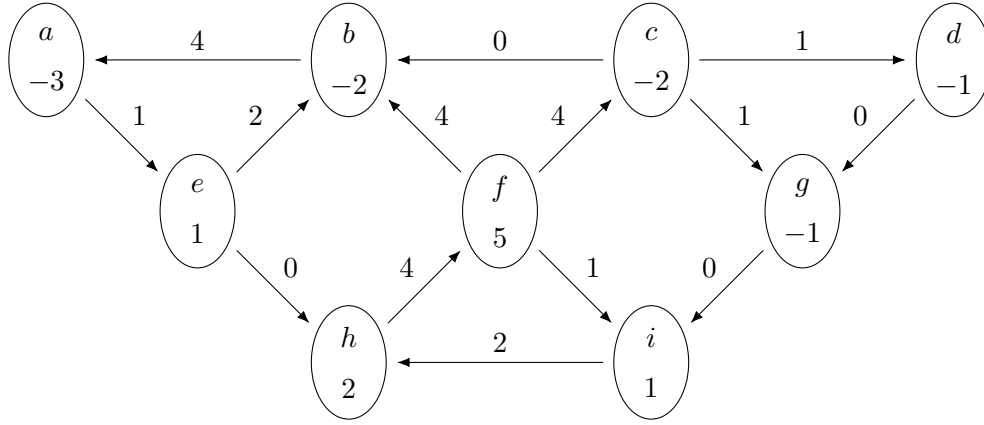


Abbildung 4.1.1: Ein auslastungsminimaler  $b$ -Fluss. Die Balancen stehen mit einem Bezeichner in den Knoten, der Flusswert auf den Kanten. Alle Kanten haben Kapazität 1.

*Beweis.* Sei  $e^*$  eine Flaschenhalskante bzgl.  $f$ . Für diese gilt  $0 \geq f_e u_{e^*} - f_{e^*} u_e$  für alle Kanten  $e \in E$  und man folgere

$$0 \geq \frac{\sum_{e \in \delta^+(X)} (f_e u_{e^*} - f_{e^*} u_e)}{u(\delta^+(X)) u_{e^*}} = \frac{f(\delta^+(X))}{u(\delta^+(X))} - \frac{f_{e^*}}{u_{e^*}} \geq \frac{b(X)}{u(\delta^+(X))} - \frac{f_{e^*}}{u_{e^*}},$$

wobei in die letzte Ungleichung  $b(X) = f(\delta^+(X)) - f(\delta^-(X))$  eingeht.  $\square$

Im restlichen Abschnitt soll nun auch die starke Dualität gezeigt werden. Zunächst wird die schwache Dualität an einem Beispiel illustriert.

**Beispiel 4.1.3.** Man betrachte den  $b$ -Fluss  $x$  in Abbildung 4.1.1. Die maximale Kantenauslastung durch  $x$  ist 4, welche auf den Kanten  $(b, a)$ ,  $(f, b)$ ,  $(f, c)$  und  $(h, f)$  angenommen wird. Bei der Frage, ob  $x$  schon ein auslastungsminimaler  $b$ -Fluss ist, kann man nun die schwache Dualität ausnutzen:

Der Schnitt  $Y := \{c, d, g\}$  hat nur eine einzige eingehende Kante, nämlich  $(f, c)$ . Außerdem hat  $Y$  eine Balance von  $-4$ . Entsprechend muss auf der Kante  $(f, c)$  mindestens Fluss im Wert von 4 fließen. In der Form von Theorem 4.1.2 würde man mit dem Schnitt  $X := V \setminus Y$  argumentieren, für den  $b(X) = 4$  und  $u(\delta^+(X)) = 1$  gelten. Dann muss die Auslastung eines  $b$ -Flusses mindestens  $4/1 = 4$  sein. Da die Auslastung von  $x$  ebenfalls 4 beträgt, sind  $x$  bereits ein auslastungsminimaler  $b$ -Fluss und  $X$  ein dünnster Schnitt.

Ähnlich wie bei der Analyse von maximalen  $s$ - $t$ -Flüssen wird auch hier ein sogenannter Residualgraph eines Flusses eingeführt.

**Definition 4.1.4** (Doppelgraph). Der Doppelgraph  $G^{\leftrightarrow}$  eines Graphen  $G = (V, E)$  entstehe durch Hinzunahme aller Kanten in umgekehrter Richtung. Man notiere  $G^{\leftrightarrow}$  als das Paar  $(V, E^{\leftrightarrow}) := (V, \vec{E} \cup \overleftarrow{E})$ , wobei  $\vec{E} := \{\vec{e} \mid e \in E\}$  die Menge der Vorwärtskanten, welche die Richtung der jeweiligen Ursprungskante beibehalten, und  $\overleftarrow{E} := \{\overleftarrow{e} \mid e \in E\}$  die Menge der Rückwärtskanten, die die Richtung der jeweiligen

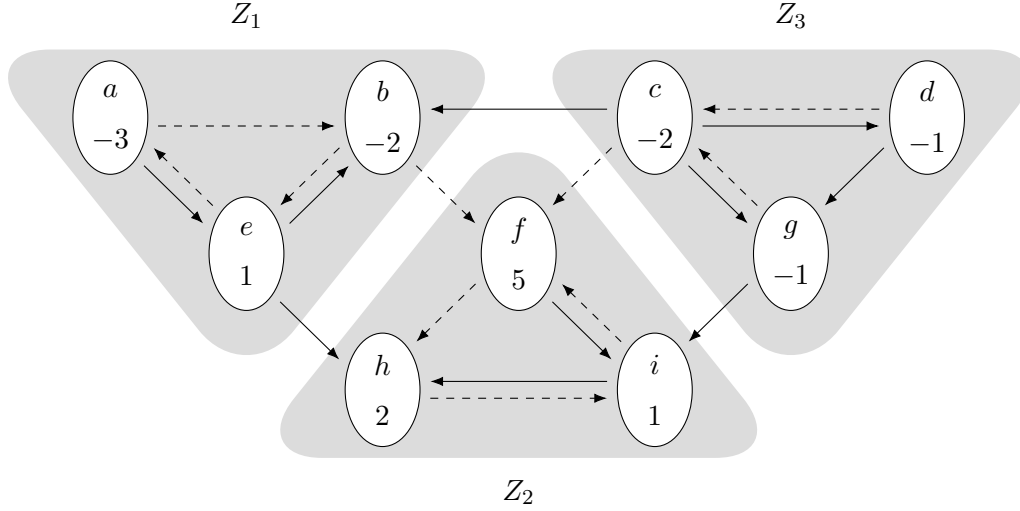


Abbildung 4.1.2: Der Residualgraph des Flusses aus Abbildung 4.1.1. Vorwärtskanten sind durchgezogen, Rückwärtskanten gestrichelt. Zusammenhangskomponenten sind grau hinterlegt.

Ursprungskante umkehren, sind. Es gilt also für alle Kanten  $e \in E$ :

$$\text{head}(\vec{e}) = \text{head}(e) = \text{tail}(\overleftarrow{e}) \quad \text{und} \quad \text{tail}(\vec{e}) = \text{tail}(e) = \text{head}(\overleftarrow{e}).$$

**Definition 4.1.5** (Residualgraph eines  $b$ -Flusses). Sei ein  $b$ -Fluss  $f$  auf einem Netzwerk  $(V, E, u)$  gegeben. Der *Residualgraph* von  $f$  sei definiert durch  $G_f := (V, E_f)$  mit

$$E_f := \{\vec{e} \in \vec{E} \mid f_e/u_e < c(f)\} \cup \{\overleftarrow{e} \in \overleftarrow{E} \mid f_e/u_e > 0\}.$$

Im Residualgraph eines  $b$ -Flusses  $f$  wird eine Kante nur in beide Richtungen erstellt, falls die Auslastung echt zwischen 0 und  $c(f)$  liegt. Fließt kein Fluss auf der Kante, so gibt es nur die Vorwärtskante, und handelt es sich um eine Flaschenhalskante, so existiert nur die Rückwärtskante. Abbildung 4.1.2 zeigt den Residualgraphen für Beispiel 4.1.3.

**Definition 4.1.6** (Augmentieren eines Flusses). Seien  $f$  ein  $b$ -Fluss und  $C$  ein gerichteter Kreis in seinem Residualgraphen  $G_f$ . Ist  $k_d$  die Anzahl der Vorkommen einer Kante  $d$  in  $C$  und ist  $\gamma \geq 0$  mit  $\gamma \leq f_e/(k_{\vec{e}} - k_{\overleftarrow{e}})$  für alle  $e \in E$  mit  $k_{\vec{e}} > k_{\overleftarrow{e}}$ , so bezeichne  $g$ , gegeben durch

$$g_e := f_e + (k_{\vec{e}} - k_{\overleftarrow{e}})\gamma \geq 0 \quad \text{für alle } e \in E,$$

den  $b$ -Fluss, der durch  $\gamma$ -Augmentieren von  $f$  entlang  $C$  entsteht.

Zunächst wird ein hinreichendes Optimalitätskriterium für  $b$ -Flüsse vorgestellt:

**Lemma 4.1.7.** Ist  $f$  ein  $b$ -Fluss in  $(V, E, u)$ , dessen Residualgraph  $G_f$  keine gerichteten Kreise besitzt, die eine Flaschenhalskante als Rückwärtskante benutzen, so ist  $f$  auslastungsminimal. Ist  $f'$  ein weiterer auslastungsminimaler Fluss, so sind die Flaschenhalskanten  $E^*$  von  $f$  auch Flaschenhalskanten von  $f'$ .

Hat  $G_f$  außerdem keine Kreise, die Nullkanten von  $f$  als Vorwärtskanten benutzen, so sind die Nullkanten  $E^0$  von  $f$  auch Nullkanten von  $f'$ .

Man nennt  $E^*$  die minimale Menge der Flaschenhalskanten und  $E^0$  die minimale Menge der Nullkanten bzgl.  $(V, E, u, b)$ .

Um diese Aussage zu zeigen, benötigt man folgende Hilfsproposition:

**Proposition 4.1.8.** Für zwei  $b$ -Flüsse  $f, f'$  mit  $c(f) \geq c(f')$  ist  $f' \Delta f := g \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{E^{\leftrightarrow}}$ , definiert durch

$$g_{\vec{e}} := \max\{0, f'_e - f_e\} \quad \text{und} \quad g_{\overleftarrow{e}} := \max\{0, f_e - f'_e\} \quad \text{für } e \in E,$$

eine Strömung auf  $G^{\leftrightarrow}$ , die auf  $E^{\leftrightarrow} \setminus E_f$  verschwindet.

*Beweis.* Um zu zeigen, dass  $g$  eine Strömung ist, muss  $g(\delta_{G^{\leftrightarrow}}^+(v)) - g(\delta_{G^{\leftrightarrow}}^-(v))$  für alle Knoten  $v \in V$  verschwinden. Durch Fallunterscheidung erkenne man  $g_{\vec{e}} - g_{\overleftarrow{e}} = f'_e - f_e$  für alle  $e \in E$  und man folgere:

$$\begin{aligned} g(\delta_{G^{\leftrightarrow}}^+(v)) - g(\delta_{G^{\leftrightarrow}}^-(v)) &= \left( \sum_{e \in \delta_G^+(v)} g_{\vec{e}} + \sum_{e \in \delta_G^-(v)} g_{\overleftarrow{e}} \right) - \left( \sum_{e \in \delta_G^-(v)} g_{\vec{e}} + \sum_{e \in \delta_G^+(v)} g_{\overleftarrow{e}} \right) \\ &= \sum_{e \in \delta_G^+(v)} (g_{\vec{e}} - g_{\overleftarrow{e}}) - \sum_{e \in \delta_G^-(v)} (g_{\vec{e}} - g_{\overleftarrow{e}}) \\ &= \sum_{e \in \delta_G^+(v)} (f'_e - f_e) - \sum_{e \in \delta_G^-(v)} (f'_e - f_e) = b_v - b_v = 0. \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass  $g$  auf  $E^{\leftrightarrow} \setminus E_f$  verschwindet. Sei zunächst eine Vorwärtskante  $\vec{e}$  mit  $f_e/u_e = c(f)$  gegeben. Dann gilt  $f_e/u_e = c(f) \geq c(f') \geq f'_e/u_e$  nach Voraussetzung, wodurch  $g_{\vec{e}} = 0$  folgt. Für eine Rückwärtskante  $\overleftarrow{e}$  mit  $f_e = 0$  folgt  $g_{\overleftarrow{e}} = 0$  direkt.  $\square$

Insbesondere existiert für solche Strömungen  $f' \Delta f$  nach Theorem 2.1.3 eine Dekomposition in Zyklen. Diese Eigenschaft wird im folgenden Beweis ausgenutzt:

*Beweis von Lemma 4.1.7.* Seien  $f$  ein  $b$ -Fluss, dessen Residualgraph keine gerichteten Kreise mit einer Flaschenhalskante besitzt, und  $f'$  ein  $b$ -Fluss minimaler Auslastung. Angenommen, es gebe eine Flaschenhalskante  $e$  von  $f$  mit  $f'_e/u_e < f_e/u_e$ . Die Strömung  $g := f' \Delta f$  besitzt nach Proposition 4.1.8 und Theorem 2.1.3 eine Dekomposition in Zyklen  $g = \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_k C_k$  mit  $\lambda_i > 0$  für  $i \in [k]$ . Weil  $g_{\overleftarrow{e}}$  positiv ist, gibt es einen Zyklus  $C_i$ , der  $\overleftarrow{e}$  enthält. Da  $g$  außerdem nur auf  $E_f$  verläuft, enthält  $E_f$  also den Zyklus  $C_i$ , der die Flaschenhalskante  $e$  benutzt, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Also muss bereits  $f'_e/u_e \geq f_e/u_e$  gelten, wodurch die Behauptung folgt.

Man nehme nun weiter an,  $G_f$  habe keine Zyklen, die Nullkanten von  $f$  als Vorwärtskanten verwendet. Angenommen, für eine Kante  $e \in E^0$  gelte  $f'_e/u_e > 0$ . Dann ist  $g_{\vec{e}}$  positiv und es gibt wieder einen Zyklus  $C_i$ , der  $\vec{e}$  enthält. Dies führt wieder zu dem Widerspruch, dass  $G_f$  den Zyklus  $C_i$  enthalten müsste, der aber eine Nullkante als Vorwärtskante verwendet.  $\square$

**Definition 4.1.9** (Zusammenhangsgraph). Für einen Graphen  $G = (V, E)$  sei  $\sim$  die Äquivalenzrelation auf  $V$  gegeben durch

$$v \sim w \iff v \text{ ist von } w \text{ und } w \text{ ist von } v \text{ in } G \text{ erreichbar.}$$

Man nennt den azyklischen Graphen  $G^\sim := (V^\sim, E^\sim)$  den *Zusammenhangsgraphen* von  $G$ , wobei  $V^\sim$  die Menge der Äquivalenzklassen, also die Menge der (*starken*) *Zusammenhangskomponenten* von  $G$ , sind und eine Kante  $xy$  genau dann in  $E^\sim$  existiert, wenn  $x \neq y$  gilt und es eine Kante  $vw$  in  $E$  gibt, sodass  $v$  in der Zusammenhangskomponente  $x$  und  $w$  in der Zusammenhangskomponente  $y$  liegen.

Man sieht schnell, dass ein Knoten  $w$  genau dann von einem anderen Knoten  $v$  erreicht werden kann, wenn die Äquivalenzklasse von  $w$  im Zusammenhangsgraph von der Äquivalenzklasse von  $v$  erreicht werden kann. Außerdem ist der Zusammenhangsgraph stets azyklisch.

**Proposition 4.1.10.** *Es seien  $f$  ein  $b$ -Fluss minimaler Auslastung  $q^* > 0$  und  $C$  ein Kreis im Residualgraph  $G_f$ . Weiter sei  $E_C \subseteq E$  die Menge der Kanten, die als Rückwärts- oder Vorwärtskanten in  $C$  verwendet werden.*

*Dann kann man durch Augmentieren von  $f$  entlang  $C$  einen auslastungsminimalen  $b$ -Fluss  $\tilde{f}$  erhalten, der jede Kante  $e$  in  $E_C$  mit  $\tilde{f}_e/u_e \in (0, q^*)$  auslastet.*

*Insbesondere hat  $G_{\tilde{f}}$  den gleichen Zusammenhangsgraphen wie  $G_f$ .*

*Beweis.* Es sei  $q^* > 0$  die Auslastung von  $f$ ,  $C_{VK}$  die Menge der Vorwärtskanten und  $C_{RK}$  die Menge der Rückwärtskanten in  $C$ .

Man setze  $\gamma_{VK} := \inf_{\vec{e} \in C_{VK}} q^* u_e - f_e > 0$  als die minimale Flussmenge, die man jeder Kante in  $C_{VK}$  zufügen müsste, sodass wenigstens eine Kante darin mindestens Auslastung  $q^*$  erhält. Weiter sei  $\gamma_{RK} := \inf_{\vec{e} \in C_{RK}} f_e > 0$  die minimale Flussmenge der Rückwärtskanten in  $C$ . Wählt man nun ein  $\gamma \in (0, \min\{\gamma_{VK}, \gamma_{RK}\})$ , so erhält man durch  $(\gamma/k)$ -wertige Augmentierung von  $f$  entlang  $C$  einen  $b$ -Fluss  $\tilde{f}$ , wobei  $k$  das maximale Vorkommen einer Kante in  $C$  ist.

Bezüglich  $\tilde{f}$  haben dann alle Kanten in  $E_C$  eine positive und geringere Auslastung als  $q^*$ . Demnach ist auch  $\tilde{f}$  ein auslastungsminimaler  $b$ -Fluss.

Da nach der Augmentierung der Kreis  $C$  auch in  $G_{\tilde{f}}$  liegt, ändert sich am Zusammenhangsgraphen nichts: Es entstehen durch die Augmentierung höchstens Kanten, die zwischen den Knoten des Kreises verlaufen.  $\square$

**Lemma 4.1.11.** *Für jeden  $b$ -Fluss  $f$  minimaler Auslastung  $q^* > 0$  gibt es einen auslastungsminimalen  $b$ -Fluss  $\tilde{f}$ , dessen Residualgraph den gleichen Zusammenhangsgraphen hat wie der von  $f$  und dessen Flaschenhals- und Nullkanten minimal sind.*

*Dabei besteht die Menge der Vorwärtskanten bzw. die Menge der Rückwärtskanten zwischen Zusammenhangskomponenten von  $G_f$  gerade aus den Vorwärtskanten der minimalen Nullkanten bzw. den Rückwärtskanten der minimalen Flaschenhalskanten.*

*Insbesondere haben alle Residualgraphen auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse den gleichen Zusammenhangsgraphen.*

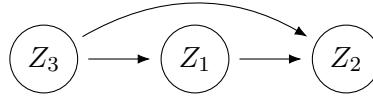
*Beweis.* Es seien  $Z_1, \dots, Z_k$  die Zusammenhangskomponenten des Residualgraphen  $G_f$ . Für alle  $i \in [k]$  sei  $C_i$  ein Kreis, der alle Kanten, die innerhalb  $Z_i$  verlaufen,

abläuft. Dann existiert nach Proposition 4.1.10 ein auslastungsminimaler  $b$ -Fluss  $\tilde{f}$ , dessen Residualgraph den gleichen Zusammenhangsgraph hat wie der von  $f$ , für den aber innerhalb der Zusammenhangskomponenten keine Flaschenhalskanten als Rückwärtskanten und keine Nullkanten als Vorwärtskanten vorkommen. Zwischen den Zusammenhangskomponenten haben  $f$  und  $\tilde{f}$  jedoch die gleichen Flaschenhals- und Nullkanten. Zwischen Zusammenhangskomponenten können keine weiteren Kanten mit Auslastung in  $(0, q^*)$  liegen, da diese in beide Richtungen generiert würden und somit die Zusammenhangskomponenten verschmelzen ließen.

Dementsprechend ist im Residualgraph  $G_{\tilde{f}}$  kein Kreis, der eine Flaschenhalskante von  $\tilde{f}$  als Rückwärtskante oder eine Nullkante von  $\tilde{f}$  als Vorwärtskante verwendet, sodass die Flaschenhals- und Nullkanten von  $\tilde{f}$  nach Lemma 4.1.7 minimal sind.

Sei nun ein beliebiger weiterer auslastungsminimaler  $b$ -Fluss  $g$  gegeben. Es bleibt zu zeigen, dass  $g$  den gleichen Zusammenhangsgraphen wie  $\tilde{f}$  besitzt. Aus  $g$  erhalte man wie oben den auslastungsminimalen  $b$ -Fluss  $\tilde{g}$ , für den  $G_{\tilde{g}}$  den gleichen Zusammenhangsgraphen wie  $G_g$  hat, und dessen Flaschenhals- bzw. Nullkanten minimal sind. Dann sind aber bereits die Residualgraphen  $G_{\tilde{f}}$  und  $G_{\tilde{g}}$  identisch, sodass diese auch den gleichen Zusammenhangsgraphen besitzen.  $\square$

Dieses Lemma zeigt, dass jeder auslastungsminimale  $b$ -Fluss auf Kanten zwischen den Zusammenhangskomponenten identisch ist. In Abbildung 4.1.2 sieht man den Residualgraphen des Flusses aus Beispiel 4.1.3. Der entsprechende Zusammenhangsgraph hat die Form



und die Kanten  $(f, c)$  und  $(f, b)$  sind die minimalen Flaschenhalskanten – hingegen sind die Kanten  $(a, b)$  und  $(h, f)$ , deren Auslastung ebenfalls 4 ist, nicht notwendigerweise Flaschenhalskanten: So kann man die Zyklen  $(a, b, e, a)$  und  $(f, h, i, f)$  augmentieren, um die Auslastung auf den beiden Kanten zu verringern.

Mit dem letzten Lemma kann nun ein hinreichendes und notwendiges Optimalitätskriterium formuliert werden:

**Theorem 4.1.12.** *Ein  $b$ -Fluss  $f$  ist genau dann auslastungsminimal, wenn  $f$  der Nullfluss ist oder eine Rückwärtskante  $\overleftarrow{vw}$  zwischen zwei Zusammenhangskomponenten seines Residualgraphen  $G_f$  verläuft. Gilt Letzteres, so ist die Menge  $X$  der Knoten, die von  $v$  aus in  $G_f$  erreichbar sind, ein dünnster Schnitt mit Auslastung  $c(f)$ .*

*Beweis.* Sei  $f$  ein auslastungsminimaler  $b$ -Fluss. Ist  $q^* = 0$ , so ist  $f$  der Nullfluss. Für positive  $q^*$  verlaufen die minimalen Flaschenhalskanten nach Lemma 4.1.11 als Rückwärtskanten zwischen Zusammenhangskomponenten des Residualgraphen  $G_f$ .

Sei umgekehrt  $\overleftarrow{vw}$  eine Rückwärtskante zwischen zwei Zusammenhangskomponenten von  $G_f$  und sei  $X$  die Menge der von  $v$  erreichbaren Knoten in  $G_f$ . Eine ausgehende Kante  $xy \in \delta_G^+(X)$  muss dann bzgl.  $f$  Auslastung  $c(f)$  haben, da  $x$  von  $v$  in  $G_f$  erreichbar ist und daher  $xy$  nicht als Vorwärtskante in  $G_f$  erscheinen kann; sonst wäre  $y$  auch in  $X$ . Die Auslastung einer eingehenden Kante  $xy \in \delta_G^-(X)$  bzgl.  $f$  muss jedoch verschwinden, da  $xy$  nicht als Rückwärtskante in  $G_f$  auftaucht.

Weiter ist  $vw$  eine ausgehende Kante von  $X$  in  $G$ , da  $w$  von  $v$  aus in  $G_f$  nicht erreichbar ist, weil  $v$  und  $w$  in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten von  $G_f$  liegen und bereits die Kante  $\overline{vw}$  in  $G_f$  existiert. Also ist  $\delta_G^+(X)$  nichtleer und es gilt:

$$\frac{b(X)}{u(\delta_G^+(X))} = \frac{f(\delta_G^+(X))}{u(\delta^+(X))} = \sum_{e \in \delta^+(X)} \frac{u_e}{u(\delta^+(X))} c(f) = c(f).$$

Aufgrund der schwachen Dualität ist  $X$  nach Theorem 4.1.2 ein dünnster Schnitt.  $\square$

Nun lässt sich das folgende wichtige Theorem zeigen, das die starke Dualität der Auslastung von  $b$ -Flüssen und der von Schnitten darlegt:

**Theorem 4.1.13.** *Existiert in einem Netzwerk ein  $b$ -Fluss und ist  $E$  nichtleer, so ist die Auslastung eines auslastungsminimalen  $b$ -Flusses gerade die eines dünnsten Schnittes; das bedeutet*

$$\min_f \max_{e \in E} \frac{f_e}{u_e} = \max_{\substack{X \subseteq V \\ \delta^+(X) \neq \emptyset}} \frac{b(X)}{u(\delta^+(X))}.$$

*Beweis.* Die Existenz eines auslastungsminimalen Flusses und eines dünnsten Schnittes folgt aus den Voraussetzungen. Schwache Dualität nach Theorem 4.1.2 impliziert, dass jeder Schnitt höchstens die Auslastung eines auslastungsminimalen  $b$ -Flusses hat. Lemma 4.1.12 zeigt, dass diese untere Schranke im Fall  $b \neq 0$  auch tatsächlich durch einen Schnitt angenommen wird. Ist  $b$  der Nullvektor, so ist jede Knotenmenge mit einer ausgehenden Kante ein dünnster Schnitt mit Auslastung 0.  $\square$

**Korollar 4.1.14.** *Seien  $f$  ein  $b$ -Fluss mit Auslastung  $q^*$  und  $X$  ein Schnitt mit  $\delta^+(X) \neq \emptyset$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Es sind  $X$  ein dünnster Schnitt und  $f$  ein  $b$ -Fluss minimaler Auslastung.*
- (ii) *Die Auslastung bezüglich  $f$  beträgt  $q^*$  auf allen ausgehenden Kanten von  $X$  und verschwindet auf allen eingehenden Kanten von  $X$ .*
- (iii) *Der Schnitt  $X$  hat in  $G_f$  keine ausgehenden Kanten.*

*Beweis.* Aufgrund der Flusserhaltung gilt  $b(X) = f(\delta^+(X)) - f(\delta^-(X))$ . In

$$\frac{b(X)}{u(\delta^+(X))} \leq \frac{f(\delta^+(X))}{u(\delta^+(X))} \leq \frac{u(\delta^+(X))q^*}{u(\delta^+(X))} = q^*$$

gilt Gleichheit genau dann, wenn  $f(\delta^-(X)) = 0$  und  $f_e/u_e = q^*$  für alle  $e \in \delta^+(X)$  gelten. Theorem 4.1.13 liefert nun die Behauptung (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Die Aussage (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) folgt aus der Definition des Residualgraphen.  $\square$

Insbesondere folgt also, dass jeder dünnste Schnitt eines auslastungsminimalen Flusses alle Knoten enthält, die er im Residualgraphen erreichen kann.



**Lemma 4.1.15.** *Sei  $f$  ein  $b$ -Fluss minimaler Auslastung  $q^*$  im Netzwerk  $(V, E, u, b)$  mit nichtleerer Kantenmenge  $E$ . Dann kann mit  $\mathcal{O}(n + m)$  Operationen ein inklusionsminimaler, dünnster Schnitt mit Auslastung  $q^*$  berechnet werden. Dabei sind  $n$  die Anzahl der Knoten und  $m$  die Anzahl der Kanten.*

*Beweis.* Ist  $q^* = 0$ , so ist  $b$  bereits der Nullvektor und es kann jede einelementige Knotenmenge mit mindestens einer ausgehenden Kante verwendet werden. Sonst berechne man in  $\mathcal{O}(n + m)$  Operationen (siehe [KV12, Satz 2.19]) die starken Zusammenhangskomponenten und damit den Zusammenhangsgraph des Residualgraphen  $G_f$ . Man speichere sich dabei für jede Zusammenhangskomponente  $Z$ , ob eine eingehende Rückwärtskante in  $G_f$  existiert, das heißt, ob  $\delta_{G_f}^-(Z) \cap \bar{E}$  leer ist. Nach Theorem 4.1.12 existiert eine Flaschenhalskante als Rückwärtskante zwischen zwei Zusammenhangskomponenten von  $G_f$ , sodass mindestens für eine Zusammenhangskomponente diese Menge nichtleer ist.

Eine topologische Sortierung auf dem azyklischen Zusammenhangsgraphen kann ebenfalls mit  $\mathcal{O}(n + m)$  Operationen berechnet werden (siehe [KV12, Satz 2.20]). Man erhält also eine Nummerierung  $Z_1, \dots, Z_k$  der Zusammenhangskomponenten mit der folgenden Eigenschaft: Existiert eine Kante von  $Z_i$  nach  $Z_j$ , so folgt bereits  $i < j$ . Wählt man nun  $X \subseteq V$  als die in  $G_f$  erreichbaren Knoten von einer Zusammenhangskomponente  $Z_i$  mit einer eingehenden Rückwärtskante in  $G_f$  und maximaler Nummer, so ist  $X$  nach Theorem 4.1.12 ein dünnster Schnitt. Außerdem ist er sogar inklusionsminimal: Angenommen, es gäbe einen dünnsten Schnitt  $Y$  mit  $Y \subsetneq X$ . Nach Korollar 4.1.14 ist  $Y$  eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten  $Z_j$  mit  $j > i$ . Insbesondere hat keine dieser Zusammenhangskomponenten eine eingehende Rückwärtskante in  $G_f$  und dadurch keine ausgehenden Kanten in  $G$ , was ihn als dünnsten Schnitt bereits disqualifiziert.  $\square$

## 4.2 Berechnung auslastungsminimaler Flüsse

In diesem Abschnitt soll die Berechnung auslastungsminimaler Flüsse beleuchtet werden. Man konnte bereits im vorherigen Abschnitt einige Analogien auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse zu *kostenminimalen  $b$ -Flüssen* erkennen. Bei der Suche nach kostenminimalen  $b$ -Flüssen werden die Kanten mit Kosten  $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}^E$  bewertet und man ist daran interessiert einen  $b$ -Fluss  $f$  zu finden, der den Ausdruck  $\sum_{e \in E} c_e f_e$  minimiert und dabei die Kapazitäten der Kanten nicht übersteigt, der also  $f_e \leq u_e$  für jede Kante  $e$  erfüllt. Dazu betrachtet man ebenfalls den Residualgraphen, allerdings mit einem kleinen Unterschied: Vorwärtskanten werden aufgenommen, wenn deren Auslastung geringer als 1 statt geringer als die Auslastung des Flusses ist. Ein  $b$ -Fluss ist genau dann kostenminimal, wenn der zugehörige, so definierte Residualgraph keine negativen Zyklen hat, also Zyklen  $C$  mit  $c(E(C)) < 0$  (siehe [KV12, Satz 9.7]).

Eine Herangehensweise für das Finden eines kostenminimalen Flusses ist es, ausgehend von einem beliebigen  $b$ -Fluss iterativ Zyklen im Residualgraphen durch Augmentieren zu entfernen. Verwendet man dabei als Auswahlregel, einen Zyklus mit minimalen mittleren Kantenkosten zu entfernen, so terminiert der sogenannte *Minimum-Mean-Cycle-Cancelling-Algorithmus* nach  $\mathcal{O}(nm^2 \log n)$  Iterationen mit

einem kostenminimalen  $b$ -Fluss bei einer Gesamtlaufzeit von  $\mathcal{O}(n^2 m^3 \log n)$  (siehe [KV12, Abschnitt 9.3]). Verfolgt man den gleichen Ansatz für die Berechnung eines auslastungsminimalen Flusses, erhält man den Algorithmus 4.1.

---

**Algorithmus 4.1** Cycle-Cancelling-Algorithmus

---

```

1: procedure CYCLECANCELLING( $V, E, u, b, s$ )
2:   Berechne beliebigen  $b$ -Fluss  $f$ 
3:   while  $\exists$  Zyklus  $C$  mit Flaschenhalskante in  $G_f$  do
4:     Augmentiere  $f$  entlang  $C$  um einen Wert  $\gamma$ 
5:   end while
6: end procedure

```

---

Sofort ersichtlich ist, dass der Algorithmus im Falle der Terminierung nach Lemma 4.1.7 einen auslastungsminimalen  $b$ -Fluss liefert. Unklar bleibt, ob der Algorithmus durch eine passende Wahl der Zyklen und der Augmentierungswerte zum Stehen kommt. Versucht man beispielsweise  $\gamma$  so zu wählen, dass die Auslastung des Zyklus  $C$ , also  $\max_{e \in C} f_e/u_e$ , nach der Augmentierung möglichst gering ist, kann die Hoffnung auf Terminierung bereits durch das folgende Beispiel aufgegeben werden:

**Beispiel 4.2.1.** Man betrachte einen Graphen bestehend aus den zwei Knoten  $v$  und  $w$  sowie den drei parallelen Kanten  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$  von  $v$  nach  $w$ . Dabei haben alle Kanten die Kapazität 1 und man suche einen auslastungsminimalen  $v$ - $w$ -Fluss vom Wert 1. Der eindeutige optimale Fluss weist allen drei Kanten den Wert  $1/3$  zu.

Startet man beispielsweise mit dem Fluss, der zunächst den gesamten Fluss über Kante  $e_1$  schickt, enthält der Residualgraph die Zyklen  $\vec{e_2 e_1}$  und  $\vec{e_3 e_1}$ . Wird entlang einer der beiden Zyklen augmentiert, o.B.d.A. entlang  $\vec{e_2 e_1}$ , so sind  $e_1$  und  $e_2$  mit Auslastung  $1/2$  die Flaschenhalskanten. Im nächsten Schritt können die Zyklen  $\vec{e_3 e_1}$  und  $\vec{e_3 e_2}$  augmentiert werden. Auch hier spielt die Wahl aufgrund der Symmetrie keine Rolle. Augmentiert man entlang  $\vec{e_3 e_2}$ , so fließt auf der Flaschenhalskante  $e_1$  Fluss von Wert  $1/2$  und auf  $e_2$  und  $e_3$  jeweils Fluss von Wert  $1/4$ .

Tatsächlich kann man durch beliebige Wahl der Zyklen den auslastungsminimalen Fluss nicht erreichen, da der Fluss zu jeder Zeit auf zwei Kanten den gleichen Wert und auf der übrigen Kante einen unterschiedlichen Wert besitzt; insbesondere beträgt er nie  $1/3$  auf allen drei Kanten gleichzeitig: Sei die Kante  $e_k$  Flaschenhalskante und der Fluss auf Kante  $e_j$  stimme entweder mit dem auf  $e_i$  oder mit dem auf  $e_k$  überein. Wird der Fluss entlang  $\vec{e_i e_k}$  augmentiert, so werden die Flusswerte von  $e_i$  und  $e_k$  angeglichen, sodass der Wert von  $e_j$  in jedem Fall davon abweicht.

#### 4.2.1 Berechnungsmodell und Kodierungslängen

Um den nachfolgenden Algorithmus präzise analysieren zu können, wird zunächst das zugrundeliegende Berechnungsmodell vorgestellt. Dabei wird wie in [Gri13] eine Variante der Random-Access-Machine (RAM) verwendet. Diese besteht aus einer Recheneinheit und einem unendlich großen Speicher, dessen Speicherzellen anhand der natürlichen Zahlen adressiert werden und jeweils eine ganze Zahl speichern. Eine RAM kann ein Programm, also eine endliche Folge von elementaren Instruktionen,

ausführen. Eine solche elementare Instruktion ist entweder eine arithmetische Operation, also eine Addition (+), Subtraktion (−), Multiplikation (·) oder ganzzahlige Division (÷), oder ein bedingter Sprung, welcher zunächst zwei Operanden mithilfe eines Vergleichers aus  $\{<, \leq, >, \geq, =, \neq\}$  vergleicht und im Wahrheitsfall zu einer bestimmten Instruktion wechselt. Dabei erlaubt die RAM die Angabe der Operanden durch indirekte Adressierung. Eine solche RAM erlaubt also unter anderem das Formulieren üblicher Schleifen. Für eine formale Definition wird auf [Gri13] verwiesen.

Dabei wird für eine ganze Zahl  $z$  die binäre Kodierung verwendet, deren Länge  $\langle z \rangle := 1 + \lceil \log_2(|z| + 1) \rceil$  ist. Rationale Zahlen  $r$  werden als Paar ganzer Zahlen  $(p, q)$  mit  $r = p/q$  kodiert. Dabei wird die Kodierungslänge von  $r$  als  $\langle r \rangle := \langle p \rangle + \langle q \rangle$  definiert, wobei  $p/q$  bereits die Darstellung von  $r$  als vollständig gekürzter Bruch ist. Entsprechend haben rationale Vektoren  $v \in \mathbb{Q}^n$  und Matrizen  $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$  die Kodierungslängen  $\langle v \rangle := \sum_{i=1}^n \langle v_i \rangle$  und  $\langle A \rangle := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle a_{i,j} \rangle$ .

Für die Bestimmung der Laufzeit eines Programms gibt es nun im Wesentlichen zwei Möglichkeiten: Das logarithmische und das konstante Kostenmaß: Beim logarithmischen Kostenmaß wird der Zeitaufwand einer elementaren Instruktion auf die Summe der Kodierungslängen der darin genutzten Zahlen (d.h. Speicheradressen und -werte) gesetzt, um beispielsweise den zeitlichen Mehraufwand von der Multiplikation großer Zahlen zu modellieren. Das konstante Kostenmaß hingegen weist jeder elementaren Instruktion unbeachtet der Größe der darin vorkommenden Zahlen einen konstanten Zeitaufwand zu.

Es werden nun weitere elementare Aussagen über die Kodierungslänge gezeigt:

**Proposition 4.2.2.** *Es seien  $a, b \in \mathbb{Q}$  zwei rationale Zahlen,  $v \in \mathbb{Q}^n$  ein rationaler Vektor und  $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  eine rationale Matrix. Dann gelten:*

- (i)  $\langle ab \rangle \leq \langle a \rangle + \langle b \rangle$ ,
- (ii)  $\|v\|_2 \leq 2^{\langle v \rangle - n} - 1$ ,
- (iii)  $|\det(A)| \leq 2^{\langle A \rangle - n^2}$ .

*Beweis.* Zunächst zeigt man Aussage (i) für ganze Zahlen  $a$  und  $b$ :

$$\begin{aligned} \langle ab \rangle &= 1 + \lceil \log_2(|ab| + 1) \rceil \leq 2 + \log_2(|a||b| + 1) \leq 2 + \log_2((|a| + 1)(|b| + 1)) \\ &= 2 + \log_2(|a| + 1) + \log_2(|b| + 1) = \langle a \rangle + \langle b \rangle. \end{aligned}$$

Es seien nun  $a$  und  $b$  rationale Zahlen und  $p_a/q_a$  und  $p_b/q_b$  die vollständig gekürzten Bruchdarstellungen von  $a$  und  $b$ . Diesen Fall führt man auf den ganzzahligen zurück:

$$\langle ab \rangle \leq \langle p_a p_b \rangle + \langle q_a q_b \rangle \leq \langle p_a \rangle + \langle p_b \rangle + \langle q_a \rangle + \langle q_b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle.$$

Für jede ganze Zahl  $z$  gilt außerdem

$$|z| = 2^{\log_2(|z|+1)} - 1 \leq 2^{\lceil \log_2(|z|+1) \rceil} - 1 = 2^{\langle z \rangle - 1} - 1$$

und daher gilt auch für jede rationale Zahl  $r = p/q$  in teilerfremder Darstellung

$$|r| \leq |p| \leq 2^{\langle p \rangle - 1} - 1 \leq 2^{\langle r \rangle - 1} - 1.$$

Des Weiteren folgt mit  $\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \leq (\sum_{i=1}^n |v_i|)^2$  die Ungleichung  $\|v\|_2 \leq \|v\|_1$ . Eine verallgemeinerte Version der Bernoulli-Ungleichung besagt, dass für nichtnegative Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  die Ungleichung  $\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i$  gilt. Dies ist leicht per Induktion über  $n \in \mathbb{N}$  einzusehen: Der Induktionsanfang ist klar. Der Induktionsschritt folgt ebenfalls sehr schnell:

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1 + x_i) \geq (1 + \sum_{i=1}^n x_i) x_{n+1} = 1 + x_{n+1} + \sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1} \sum_{i=1}^n x_i \geq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i.$$

Damit lässt sich Aussage (ii) beweisen:

$$\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq \prod_{i=1}^n (1 + |v_i|) - 1 \leq \prod_{i=1}^n 2^{\langle v_i \rangle - 1} - 1 = 2^{\langle v \rangle - n} - 1.$$

Für Aussage (iii) benötigt man die Hadamard-Ungleichung: Sind  $a^1, \dots, a^n$  die Spaltenvektoren von  $A$ , so gilt  $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a^i\|_2$ . Damit folgere man:

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n (2^{\langle a^i \rangle - n} - 1) \leq 2^{\sum_{i=1}^n \langle a^i \rangle - n^2} = 2^{\langle A \rangle - n^2}.$$

□

## 4.2.2 Effiziente Suche rationaler Zahlen

Dieser Abschnitt bildet einen Exkurs, der eine effiziente Suche von rationalen Zahlen einführt. Dabei werden die Ergebnisse von Christos Papadimitriou aus [Pap79] erarbeitet. Die Zielsetzung lautet wie folgt: Eine nichtnegative, rationale Zahl  $x$ , deren Zähler und Nenner durch eine Konstante  $M$  beschränkt ist, soll durch möglichst wenige Vergleiche der Form „Ist  $x \leq p/q$ ?“ bestimmt werden. Hierfür werden mindestens  $\Theta(\log M)$  Vergleiche benötigt, da bereits das Suchen von  $x$  in der Menge  $\{0/M, 1/M, \dots, M/M\}$  unter der Annahme, dass  $x$  durch einen Bruch mit Nenner  $M$  dargestellt werden kann,  $\Omega(\log M)$  Vergleiche bedarf. Der Wunsch ist also ein Verfahren zu finden, das nur  $\mathcal{O}(\log M)$  viele solcher Vergleiche verwendet.

Dazu wird zunächst die sogenannte Farey-Folge eingeführt.

**Definition 4.2.3** (Farey-Folge). Für ein  $n \geq 1$  sei  $F_n$  die aufsteigend sortierte Folge aller irreduziblen, d.h. vollständig gekürzten, Brüche in  $[0, 1]$ , deren Zähler und Nenner ganze Zahlen in  $\{0, \dots, n\}$  sind. Man nennt  $F_n$  die *Farey-Folge der Ordnung  $n$* .

**Beispiel 4.2.4.** Die Farey-Folge der Ordnung 5 ist definiert als:

$$F_5 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right).$$

Es wird das bekannte Lemma von Bézout (siehe [SP08, Satz 3.5]) wiederholt:

**Lemma 4.2.5** (Lemma von Bézout). Für zwei ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  existieren zwei weitere ganze Zahlen  $s, t \in \mathbb{Z}$ , sodass  $\text{ggT}(a, b) = sa + tb$  gilt.

**Korollar 4.2.6.** Für zwei ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  gilt genau dann  $\text{ggT}(a, b) = 1$ , wenn es zwei ganze Zahlen  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $1 = sa + tb$  gibt.

*Beweis.* Das Lemma von Bézout impliziert bereits die Hinrichtung. Seien also  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $1 = sa + tb$  gegeben und sei  $d$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ . Dann existieren  $a', b' \in \mathbb{Z}$  mit  $a = da'$  und  $b = db'$ . Insbesondere folgt  $1 = sa'd + tb'd = (sa' + tb')d$ , wodurch  $d$  bereits 1 oder  $-1$  sein muss. Daher gilt  $\text{ggT}(a, b) = 1$ .  $\square$

Damit lässt sich eine wichtige Eigenschaft der Farey-Folgen zeigen:

**Lemma 4.2.7.** Ist  $h'/k'$  der Nachfolger von  $h/k$  in  $F_n$ , so gilt

$$h'k - hk' = 1 \quad \text{oder äquivalent} \quad \frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} = \frac{1}{kk'}.$$

*Beweis.* Der Beweis gibt ausgehend von  $h/k$  den Nachfolger in  $F_n$  an. Weil ein Nachfolger existieren muss, kann man  $h < k$  voraussetzen. Da  $h/k$  irreduzibel ist, gilt  $\text{ggT}(h, k) = 1$  und nach Lemma 4.2.5 existieren  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ , sodass  $kx_0 - hy_0 = 1$  gilt. Für alle  $r \in \mathbb{Z}$  ist dann auch  $k(x_0 + rh) - h(y_0 + rk) = kx_0 + hy_0 = 1$ . Ist  $r$  so gewählt, dass die Ungleichungen  $n - k < y_0 + rk \leq n$  erfüllt sind, so erhält man eine Lösung  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  von  $kx - hy = 1$  mit  $n - k < y \leq n$ , die nach Korollar 4.2.6 auch  $\text{ggT}(x, y) = 1$  erfüllt. Aus  $kx - hy = 1$  lässt sich außerdem  $x/y - h/k = 1/(ky)$  sowie  $x = (1 + hy)/k$  und damit  $x \leq y(1 + h)/k \leq y$  folgern. Somit erscheint  $x/y$  nach  $h/k$  in  $F_n$ . Angenommen,  $x/y$  sei nicht der direkte Nachfolger  $h'/k'$  von  $h/k$  in  $F_n$ . Dann implizieren die Ungleichungen  $h/k < h'/k' < x/y$  gerade

$$\frac{x}{y} - \frac{h'}{k'} = \frac{k'x - h'y}{yk'} \geq \frac{1}{yk'} \quad \text{sowie} \quad \frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} = \frac{h'k - hk'}{kk'} \geq \frac{1}{kk'}.$$

Benutzt man dies mit  $y + k > n$ , erzielt man den folgenden Widerspruch:

$$\frac{1}{ky} = \frac{x}{y} - \frac{h}{k} \geq \frac{h'}{k'} + \frac{1}{yk'} - \frac{h}{k} \geq \frac{1}{kk'} + \frac{1}{yk'} = \frac{y + k}{kk'y} > \frac{n}{kk'y} \geq \frac{1}{ky}.$$

$\square$

**Lemma 4.2.8.** Seien drei verschiedene Brüche  $x_i/y_i < x_j/y_j < x_k/y_k$  in  $F_n$  mit  $y_i x_k - y_k x_i = 1$  gegeben. Dann existieren zwei natürliche Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ , die  $x_j = \alpha x_i + \beta x_k$ ,  $y_j = \alpha y_i + \beta y_k$  sowie  $\text{ggT}(\alpha, \beta) = 1$  erfüllen.

*Beweis.* Man definiere  $\alpha := y_j x_k - y_k x_j$  und  $\beta := y_i x_j - y_j x_i$ . Dann gelten

$$\alpha = \left( \frac{x_k}{y_k} - \frac{x_j}{y_j} \right) y_k y_j > 0 \quad \text{und} \quad \beta = \left( \frac{x_j}{y_j} - \frac{x_i}{y_i} \right) y_i y_j > 0.$$

Außerdem folgen die beiden Gleichungen:

$$\alpha x_i + \beta x_k = x_j(x_k y_i - y_k x_i) + y_j(x_k x_i - x_i x_k) = x_j,$$

$$\alpha y_i + \beta y_k = x_j(y_i y_k - y_k y_i) + y_j(x_k y_i - x_i y_k) = y_j.$$

Nach Lemma 4.2.5 existieren wegen der Irreduzibilität von  $x_j/y_j$  außerdem  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $sx_j + ty_j = 1$ . Betrachtet man  $(sx_i + ty_i)\alpha + (sx_k + ty_k)\beta = sx_j + tx_j = 1$ , folgt  $\text{ggT}(\alpha, \beta) = 1$  mit Korollar 4.2.6.  $\square$

**Lemma 4.2.9.** *Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $a/b < c/d$  gegeben. Für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt*

$$\frac{a}{b} < \frac{\alpha a + \beta c}{\alpha b + \beta d} < \frac{c}{d}.$$

*Außerdem ist der Bruch  $(\alpha a + \beta c)/(\alpha b + \beta d)$  als Funktion in  $\alpha$  streng monoton fallend und als Funktion in  $\beta$  streng monoton wachsend.*

*Beweis.* Zunächst folgt aus  $a/b < c/d$  sofort  $ad < cb$ . Der erste Teil der Aussage ist Resultat der folgenden Ungleichungen:

$$a(\alpha b + \beta d) - (\alpha a + \beta c)b = \beta(ad - cb) < 0,$$

$$(\alpha a + \beta c)d - c(\alpha b + \beta d) = \alpha(ad - cb) < 0.$$

Zudem kann man mit  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$  sowie  $0 \leq \beta_1 < \beta_2$  die Monotonien des erweiterten Bruches zeigen:

$$(\alpha_1 a + \beta c)(\alpha_2 b + \beta d) - (\alpha_2 a + \beta c)(\alpha_1 b + \beta d) = \beta ad(\alpha_1 - \alpha_2) + \beta cb(\alpha_2 - \alpha_1) > 0,$$

$$(\alpha a + \beta_1 c)(\alpha b + \beta_2 d) - (\alpha a + \beta_2 c)(\alpha b + \beta_1 d) = \alpha ad(\beta_2 - \beta_1) + \alpha cb(\beta_1 - \beta_2) < 0.$$

$\square$

Nun wird der Algorithmus erarbeitet. Dazu betrachtet man zunächst den Fall, dass  $x$  ein Bruch in  $(0, 1]$  ist, dessen Zähler und Nenner durch  $M$  beschränkt sind. Dann existiert in jeder Farey-Folge der Ordnung mindestens  $M$  eine Darstellung von  $x$ . Die Grundidee ist der binären Suche entnommen: Beginnend bei  $(0, 1]$  wird ein Suchintervall verwaltet, in dem sich die gesuchte Zahl  $x$  befindet. Dazu wird in jeder Runde eine beste obere Schranke  $x_r/y_r$  an  $x$  in einer Farey-Folge steigender Ordnung ermittelt und der Suchraum durch das Intervall  $(x_l/y_l, x_r/y_r]$  beschränkt, wobei  $x_l/y_l$  der Vorgänger von  $x_r/y_r$  in der Farey-Folge ist, bis man aufgrund der Endlichkeit des Suchraums die gesuchte Zahl erreicht.

Für die Bestimmung der Schranken werden einige Eigenschaften der Farey-Folgen diskutiert. Zunächst wird der Suchraum, aus dem die Schranken bestimmt werden können, analysiert:

**Lemma 4.2.10.** *Seien  $x_l/y_l < x_r/y_r$  zwei aufeinanderfolgende Brüche in  $F_n$ . Dann sind alle Brüche der Farey-Folge von Ordnung  $2n$  in  $[x_l/y_l, x_r/y_r]$  gegeben durch*

$$M := \{x_l/y_l\} \dot{\cup} \left\{ \frac{\alpha x_l + \beta x_r}{\alpha y_l + \beta y_r} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \alpha y_l + \beta y_r \leq 2n \right\} \dot{\cup} \{x_r/y_r\}.$$

*Außerdem gilt  $\alpha y_l + \beta y_r > n$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Sei zunächst ein Bruch  $x/y$  der Farey-Folge von Ordnung  $2n$  in  $[x_l/y_l, x_r/y_r]$  gegeben. Ist  $x/y$  bereits  $x_l/y_l$  bzw.  $x_r/y_r$ , ist nichts zu zeigen. Sei also  $x/y$  echt

zwischen  $x_l/y_l$  und  $x_r/y_r$ . Nach Lemma 4.2.7 gilt  $x_l y_r - x_r y_l = 1$ . Fasst man  $x_l/y_l$  und  $x_r/y_r$  nun als Folgenglieder der Farey-Folge von Ordnung  $2n$  auf, existieren nach Lemma 4.2.8 für das Zwischenglied  $x/y$  die Darstellungen  $x = \alpha x_l + \beta x_r$  und  $y = \alpha y_l + \beta y_r$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ .

Sei umgekehrt  $x/y$  aus  $M$ . Ist der Bruch  $x/y$  bereits  $x_l/y_l$  oder  $x_r/y_r$ , so ist er in der Farey-Folge von Ordnung  $n$ , also erst recht in der von Ordnung  $2n$  enthalten. Sonst hat  $x/y$  die Darstellung  $x = \alpha x_l + \beta x_r$  und  $y = \alpha y_l + \beta y_r$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  und  $\alpha y_l + \beta y_r \leq 2n$ . Angenommen, der größte gemeinsame Teiler von  $x$  und  $y$  wäre  $d \geq 2$ . Dann gäbe es ganze Zahlen  $z_1, z_2 \leq n$  mit  $x = dz_1$  und  $y = dz_2$ . Insbesondere würde die irreduzible Darstellung von  $x/y$  bereits in  $F_n$  liegen. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $x_l/y_l$  und  $x_r/y_r$  aufeinanderfolgend in  $F_n$  sind. Also ist  $x/y$  irreduzibel und in  $F_{2n}$  enthalten.

Zuletzt ist zu zeigen, dass für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  der Ausdruck  $\alpha y_l + \beta y_r$  größer als  $n$  ist. Wäre dies nicht der Fall, so wäre  $(\alpha x_l + \beta x_r)/(\alpha y_l + \beta y_r)$  nach Lemma 4.2.9 ein Bruch in  $F_n$ , der echt zwischen  $x_l/y_l$  und  $x_r/y_r$  liegt. Jedoch ist  $x_l/y_l$  bereits der Vorgänger von  $x_r/y_r$  in  $F_n$ .  $\square$

**Theorem 4.2.11.** *Eine rationale Zahl  $x \in (0, 1]$ , deren Zähler und Nenner durch  $M$  beschränkt sind, kann mittels  $\mathcal{O}(\log M)$  vielen Vergleichen der Form „Ist  $x \leq p/q$ ?“ mit  $p, q \leq 2M$  und  $\mathcal{O}(\log M)$  vielen arithmetischen Operationen auf ganzen Zahlen von Betrag maximal  $2M$  bestimmt werden.*

*Beweis.* Man betrachte zunächst den Fall, dass man über die beste obere Schranke  $x_r/y_r$  an  $x$  in  $F_{2^{k-1}}$  sowie über dessen Vorgänger  $x_l/y_l$  in  $F_{2^{k-1}}$  verfügt und nun die beste obere Schranke  $x'_r/y'_r$  in  $F_{2^k}$  und dessen Vorgänger  $x'_l/y'_l$  ermitteln möchte. Nach Lemma 4.2.10 kommen dabei als Kandidaten für  $x'_l/y'_l$  und  $x'_r/y'_r$  genau die Brüche der Form  $(\alpha x_l + \beta x_r)/(\alpha y_l + \beta y_r)$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  und  $\alpha y_l + \beta y_r \leq 2^k$  in Frage; für  $x'_l/y'_l$  bzw.  $x'_r/y'_r$  ist außerdem  $x_l/y_l$  bzw.  $x_r/y_r$  möglich.

Unter diesen Brüchen ist für  $x_r/y_r$  der kleinstmögliche gesucht, der  $x \leq x_r/y_r$  erfüllt, und für  $x_l/y_l$  der größtmögliche, für den  $x_l/y_l < x_r/y_r$  gilt. Nach Lemma 4.2.8 ist  $y_l + y_r > 2^{k-1}$ . Daher ist  $y_l$  oder  $y_r$  größer als  $2^{k-2}$ . Man nehme zunächst an,  $y_l$  sei größer als  $2^{k-2}$ . Die Erklärung, dass man für  $y_r > 2^{k-2}$  die gleiche Argumentation verwenden kann, folgt später. Man unterscheidet drei Fälle:

1. *Fall:*  $y_r \geq 2^{k-3}$ .

In diesem Fall sind alle Möglichkeiten an  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$  mit  $\alpha y_l + \beta y_r \leq 2^k$  enthalten in der Menge  $\{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ . Hier kann man mit konstant vielen Vergleichen der Form „Ist  $x \leq p/q$ ?“ und arithmetischen Operationen die beste obere Schranke an  $x$  in  $F_{2^k}$  und den Vorgänger der Schranke finden.

2. *Fall:*  $x > \frac{x'_l}{y'_l} := \frac{\alpha x_l + \beta x_r}{\alpha y_l + \beta y_r}$  mit  $\alpha := 1$  und  $\beta := \left\lfloor \frac{2^k - y_l}{y_r} \right\rfloor$ .

Lemma 4.2.9 (ii) impliziert, dass  $x'_l/y'_l$  der direkte Vorgänger von  $x_r/y_r$  in  $F_{2^k}$  ist, denn für  $\alpha$  ist 1 der minimale Wert und für  $\beta$  ist der maximale Wert, der  $y_l + \beta y_r \leq 2^k$  noch erfüllt, gerade  $\lfloor (2^k - y_l)/y_r \rfloor$ . Des Weiteren ist  $\beta$  mindestens  $\lfloor y_r/y_l \rfloor = 1$ . Dementsprechend wird als neue obere Schranke die vorherige Schranke übernommen, d.h.  $x'_r/y'_r = x_r/y_r$ , mit Vorgänger  $x'_l/y'_l$  in  $F_{2^k}$ .

3. Fall: Weder Fall 1 noch Fall 2 treten ein.

In diesem Fall sind  $y_r$  kleiner als  $2^{k-3}$  und die gesuchte obere Schranke  $x'_r/y'_r$  kleiner als die aktuelle Schranke  $x_r/y_r$ . Also hat die gesuchte Schranke die Form  $(\alpha x_l + \beta x_r)/(\alpha y_l + \beta y_r)$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  und  $\alpha y_l + \beta y_r \leq 2^k$ . Wegen  $y_l > 2^{k-2}$  kann man die Suche dabei auf  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  beschränken. Für jedes  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  bestimmt man nun das  $\beta_\alpha$ , sodass der entsprechende Bruch  $x$  von oben möglichst gut beschränkt:

$$\frac{\alpha x_l + (\beta_\alpha - 1)x_r}{\alpha y_l + (\beta_\alpha - 1)y_r} < x \leq \frac{\alpha x_l + \beta_\alpha x_r}{\alpha y_l + \beta_\alpha y_r}.$$

Unter diesen Brüchen wird nun  $x'_l/y'_l$  und  $x'_r/y'_r$  bestimmt durch

$$\frac{x'_l}{y'_l} := \max_{\alpha \in [3]} \frac{\alpha x_l + (\beta_\alpha - 1)x_r}{\alpha y_l + (\beta_\alpha - 1)y_r} \quad \text{und} \quad \frac{x'_r}{y'_r} := \min_{\alpha \in [3]} \frac{\alpha x_l + \beta_\alpha x_r}{\alpha y_l + \beta_\alpha y_r}.$$

Die  $\beta_\alpha$  können wegen der Monotonie nach Lemma 4.2.9 mittels binärer Suche auf  $\beta \in \{1, \dots, \lfloor (2^k - \alpha y_l)/y_r \rfloor\}$  ermittelt werden. Dabei werden insgesamt maximal  $3 \cdot \lfloor \log_2(2^k/y_r) + 1 \rfloor = 3(k + 1 - \lfloor \log_2(y_r) \rfloor)$  Vergleiche mit  $x$  benötigt. Man bemerke für die spätere Analyse, dass sowohl  $y'_l$  als auch  $y'_r$  in diesem Fall größer als  $2^{k-2}$  sind.

Für den Fall  $y_r > 2^{k-2}$  fallen nur kleine Änderungen an: Fall 1 wird ausgeführt, falls  $y_l \geq 2^{k-3}$  gilt, und  $\alpha$  tauscht in der restlichen Argumentation dieses Falls mit  $\beta$  die Rollen. Fall 2 wird verwendet, falls  $x \leq x'_r/y'_r := (\alpha x_l + \beta x_r)/(\alpha y_l + \beta y_l)$  mit  $\alpha := \lfloor (2^k - y_r)/y_l \rfloor$  und  $\beta := 1$  gilt. Fall 3 tritt nur ein, wenn  $y_l < 2^{k-3}$  und  $x'_l/y'_l > x_l/y_l$  gelten, wobei man sich auf  $\beta \in \{1, 2, 3\}$  beschränkt. Es wird in der Menge  $\{1, \dots, \lfloor (2^k - \beta y_r)/y_l \rfloor\}$  mit  $3(k + 1 - \lfloor \log_2(y_l) \rfloor)$  Vergleichen ein  $\alpha_\beta$  mit

$$\frac{\alpha_\beta x_l + \beta x_r}{\alpha_\beta y_l + \beta y_r} < x \leq \frac{(\alpha_\beta - 1)x_l + \beta x_r}{(\alpha_\beta - 1)y_l + \beta y_r}$$

ermittelt. Dann kann  $x'_l/y'_l$  bzw.  $x'_r/y'_r$  analog bestimmt werden.

Der Algorithmus wird mit  $x_l/y_l = 0/1$  sowie  $x_r/y_r = 1/1$  initialisiert. Dann wird das Suchintervall wie oben beschrieben in  $n := \lfloor \log_2(M) \rfloor$  Runden verkleinert. In Runde  $k$  soll also ausgehend von einer besten Schranke (und ihrem Vorgänger) in  $F_{2^{k-1}}$  eine beste Schranke (und ihr Vorgänger) in  $F_{2^k}$  ermittelt werden. Schließlich erhält man eine niedrigste obere Schranke  $x_r/y_r$  an  $x$  in  $F_{2^n}$ . Da eine Darstellung von  $x$  in  $F_{2^n}$  existiert, muss  $x_r/y_r$  also bereits mit  $x$  übereinstimmen.

Es verbleibt die Analyse der Laufzeit. Wie bereits angegeben wurde, werden  $\mathcal{O}(\log M)$  Runden genutzt. Wird in einer Runde nur Fall 1 oder Fall 2 betrachtet, so werden nur konstant viele Vergleiche und Operationen benötigt. Jedoch braucht eine einzelne Ausführung von Fall 3 aufgrund der binären Suche unter Umständen  $\mathcal{O}(\log M)$  viele Vergleiche. Hier hilft eine genauere Analyse der akkumulierten Anzahl von Vergleichen, die durch Fall 3 ausgelöst werden.

Dazu zeigt man, dass nach der  $k$ -ten Runde des Algorithmus für den dritten Fall insgesamt nur maximal  $9k$  Vergleiche mit  $x$  unternommen wurden. Dies folgert man per Induktion über die Anzahl  $i$  der Ausführungen des dritten Falls, wobei



$k$  stets die Runde sei, in der zum  $i$ -ten Mal Fall 3 angewandt wurde. Ist  $i = 1$  – ist also Fall 3 das erste Mal eingetreten –, so wurden maximal  $3(k + 1) \leq 9k$  Vergleiche benötigt. Für  $i \geq 2$  sei  $k'$  die letzte Runde, zu der Fall 3 angewandt wurde. Bis inklusive Runde  $k'$  wurden also nach Induktionsvoraussetzung höchstens  $9k'$  Vergleiche für Fall 3 verwendet. Die Schranken  $x_l^{(k')}/y_l^{(k')}$  und  $x_r^{(k')}/y_r^{(k')}$ , die in Runde  $k'$  im Fall 3 ausgewählt wurde, sind außerdem größer als  $2^{k'-2}$ . Da der Nenner der Schranken im Laufe der Runden nur wachsen kann, sind auch die Nenner der Schranken, die in Runde  $k - 1$  ausgewählt wurden, größer als  $2^{k'-2}$ . Daher ist die Anzahl an Vergleichen, die im dritten Fall in Runde  $k$  gemacht werden, höchstens

$$3(k + 1 - (\lfloor \log_2(2^{k'-2}) \rfloor + 1)) = 3(k - k' + 2).$$

Insgesamt sind also bis Runde  $k$  zur Ausführung von Fall 3 höchstens

$$9k' + 3(k - k' + 2) = 3(2k' + k + 2) \leq 3(2k' + k + 2(k - k')) = 9k$$

Vergleiche mit  $x$  notwendig, womit die Induktionsbehauptung gezeigt ist. Damit werden von Fall 3 ebenfalls  $\mathcal{O}(\log M)$  Vergleiche mit  $x$  ausgelöst. Darüber hinaus wird  $x$  nur mit Brüchen verglichen, die im Zähler und Nenner durch  $2^{\lfloor \log_2(M) \rfloor} \leq 2M$  beschränkt sind, wodurch das Theorem folgt.  $\square$

Das Ergebnis kann nun mit geringem Aufwand auf allgemeine nichtnegative rationale Zahlen übertragen werden:

**Theorem 4.2.12.** *Eine rationale Zahl  $x \geq 0$ , deren Zähler und Nenner durch  $M$  beschränkt sind, kann mittels  $\mathcal{O}(\log M)$  vielen Vergleichen der Form „Ist  $x \leq p/q$ ?“ mit  $p, q \leq 4M$  und  $\mathcal{O}(\log M)$  vielen arithmetischen Operationen auf ganzen Zahlen von Betrag maximal  $4M$  bestimmt werden.*

*Beweis.* Zunächst wird mittels binärer Suche auf der Menge  $A := \{0, \dots, M\}$  und  $\mathcal{O}(\log M)$  Vergleichen  $z := \lfloor x \rfloor - 1$  ermittelt. Ist  $z = -1$ , so ist 0 die Lösung; bei  $z = 0$  wende man direkt Theorem 4.2.11 an. Sonst gibt es einen irreduziblen Bruch  $a/b \in (0, 1]$  mit  $x = z + a/b$  und  $(zb + a)/b$  die irreduzible Darstellung von  $x$ , für die  $b = (zb + a)/x \leq M/z$  gilt. Mit Theorem 4.2.11 kann nun die Zahl  $y := x - z \in (0, 1]$  gefunden werden, wobei Zähler und Nenner von  $y$  durch  $\lfloor M/z \rfloor$  beschränkt sind und ein Vergleich der Form „Ist  $y \leq p/q$ ?“ mit dem Resultat von „Ist  $x \leq (p + zq)/q$ ?“ beantwortet wird. Dabei ist der Zähler beschränkt durch

$$p + zq \leq 2 \left\lfloor \frac{M}{z} \right\rfloor (1 + z) \leq 2 \left( \frac{M}{z} + 1 \right) \leq 4M.$$

Schließlich gelangt man durch Addition von  $y$  und  $z$  zu  $x$ .  $\square$

Papadimitriou hat dieses Resultat verwendet, um zu zeigen, dass man lineare Optimierungsprobleme genau dann in polynomieller Zeit lösen kann, wenn man in polynomieller Zeit entscheiden kann, ob ein Polyeder zulässig, also nichtleer, ist. Schließlich wurde das letztere Problem durch Leonid Khachiyan in [Kha79] mit der Ellipsoidmethode gelöst. Ein ähnliches Ergebnis wie hier vorgestellt konnten Stephen Kwek und Kurt Mehlhorn 2003 in [KM03] erzielen: Diese haben ein Verfahren

vorgestellt, das sogar nur maximal  $2 \log_2(M) + \mathcal{O}(1)$  Vergleiche zur Bestimmung einer rationalen Zahl, deren Zähler und Nenner durch  $M$  beschränkt sind, benötigt.

### 4.2.3 Berechnung mittels LP-Formulierung

Um nun mithilfe dieser effizienten Suche auf den rationalen Zahlen das Problem auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse zu lösen, werden zunächst einige Grundlagen der Linearen Optimierung wiederholt:

**Definition 4.2.13** (Lineares Programm in Standardform). Ein Optimierungsproblem der Form  $\min\{c^T x \mid x \in P^=(A, b)\}$  mit  $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und Zulässigkeitsbereich  $P^=(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$  heißt *lineares Programm in Standardform*.

**Definition 4.2.14** (Ecke konvexer Menge). Für eine konvexe Menge  $P$  heißt ein Punkt  $x \in P$  eine *Ecke von  $P$* , falls  $x$  das einzige Element des Schnittes von  $P$  mit einer Stützhyperebene  $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x = \delta\}$  mit  $d \in \mathbb{R}^n$  und  $\delta \in \mathbb{R}$  ist.

*Notation 4.2.15.* Sind  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine Matrix und  $B \subseteq [n]$  eine Teilmenge der Spaltenindizes, bezeichnet  $A_B$  die Matrix, die aus  $A$  bei Löschen der Spalten entsteht, deren Index nicht in  $B$  vorkommen. Für einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $x_B$  entsprechend der Vektor, der aus  $x$  durch Löschen der Einträge aus  $[n] \setminus B$  entsteht.

**Definition 4.2.16** (Zulässige Basislösung). Für ein lineares Programm in Standardform mit  $P := P^=(A, b)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\text{rang}(A) = m$  heißt eine  $m$ -wertige Teilmenge  $B$  von  $[n]$  eine *Basis* und  $N := [n] \setminus B$  die *zugehörige Nichtbasis* zu  $B$ , falls  $A_B$  invertierbar ist. Ein Punkt  $x \in P$  ist eine *zulässige Basislösung* zur Basis  $B$ , falls  $x_N$  verschwindet. In diesem Fall gilt  $x_B = A_B^{-1}b$ .

**Satz 4.2.17** (siehe [Jun08, Satz 5.2.1. (2)]). Ein lineares Programm in Standardform mit nichtleerem Zulässigkeitsbereich  $P := P^=(A, b)$  und  $\text{rang}(A) = m$  hat eine optimale Ecklösung, falls die Zielfunktion  $x \mapsto c^T x$  auf  $P$  nach unten beschränkt ist.

**Satz 4.2.18** (siehe [Jun08, Satz 5.2.3.]). Für ein lineares Programm in Standardform mit nichtleerem Zulässigkeitsbereich  $P := P^=(A, b)$  und  $\text{rang}(A) = m$  ist  $x \in \mathbb{R}^n$  genau dann eine Ecke von  $P$ , wenn  $x$  eine zulässige Basislösung ist.

**Proposition 4.2.19.** Sei ein nichtleeres Polyeder  $P^=(A, b)$  mit  $k := \text{rang}(A)$  und linear unabhängigen Zeilen  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$  gegeben. Setzt man

$$\tilde{A} := (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})^T \quad \text{und} \quad \tilde{b} := (b_{i_1}, \dots, b_{i_k})^T,$$

so hat  $\tilde{A}$  Rang  $k$  und es gilt  $P^=(A, b) = P^=(\tilde{A}, \tilde{b})$ .

*Beweis.* Die Teilmenge  $P^=(A, b) \subseteq P^=(\tilde{A}, \tilde{b})$  ist klar: Gelten für ein  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  alle Ungleichungen in  $Ax \leq b$ , so gelten erst recht alle in  $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ .

Da der Zeilenrang von  $A$  gerade  $k$  ist, existiert für jede Zeile  $a_j$  eine Linearkombination  $a_j = \sum_{l=1}^k \lambda_l a_{i_l}$  aus den Zeilen in  $\tilde{A}$ . Da  $P^=(A, b)$  nichtleer ist, existiert ein  $y$  darin, welches die Gleichung  $b_j = a_j y = \sum_{l=1}^k \lambda_l a_{i_l} y = \sum_{l=1}^k \lambda_l b_{i_l}$  liefert. Für alle  $x \in P^=(\tilde{A}, \tilde{b})$  gilt also  $a_j x = \sum_{l=1}^k \lambda_l a_{i_l} x = \sum_{l=1}^k \lambda_l b_{i_l} = b_j$ .  $\square$

**Lemma 4.2.20.** *Es sei ein lineares Programm in Standardform mit nichtleerem Zulässigkeitsbereich  $P := P^=(A, b)$  und ganzzahligen Parametern  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  und  $c \in \mathbb{Z}^n$ , sodass  $x \mapsto c^T x$  auf  $P$  nach unten beschränkt ist. Es sei  $c_{\max}$  der betragsch größte Eintrag in  $c$ . Ist weiter  $k$  die Anzahl der Koordinaten, in denen  $c$  nicht verschwindet, so liegt der optimale Zielfunktionswert in der endlichen Menge*

$$\left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, |p| \leq k |c_{\max}| 2^{\langle A \rangle + \langle b \rangle - m(n+1)}, 1 \leq q \leq 2^{\langle A \rangle - mn} \right\}.$$

*Beweis.* Es sei  $\tilde{A}$  die Teilmatrix von  $A$ , die  $r := \text{rang } A$  linear unabhängige Zeilen von  $A$  enthält;  $\tilde{b}$  sei der entsprechende Teilvektor von  $b$ . Dann stimmen die Polyeder  $P^=(A, b)$  und  $P^=(\tilde{A}, \tilde{b})$  nach Proposition 4.2.19 überein. Mit den Sätzen 4.2.17 und 4.2.18 folgt, dass es eine optimale Basislösung  $x^*$  gibt. Ist  $B$  die Basis von  $x^*$ , so ist  $x^*$  auf den Koordinaten von  $B$  gerade  $\tilde{A}_B^{-1} \tilde{b}$ , sodass die Cramersche Regel die Darstellung  $x_i^* = \det(\tilde{A}_B^i) / \det(\tilde{A}_B)$  für jede Koordinate  $i \in B$  liefert. Dabei ist  $\tilde{A}_B^i$  die Matrix, die aus  $\tilde{A}_B$  durch Ersetzen der  $i$ -ten Spalte durch  $\tilde{b}$  entsteht. Für die Kodierungslänge von  $\tilde{A}_B$  ergibt sich die obere Schranke  $\langle A \rangle - (mn - r^2)$ , da für jeden Eintrag, der in  $A$  und nicht in  $\tilde{A}_B$  vorkommt, eine Kodierungslänge von mindestens 1 hinzukommt. Entsprechend ist  $\langle A \rangle + \langle b \rangle - (mn + m - r^2)$  eine obere Schranke an die Kodierung von  $\tilde{A}_B^i$  für alle  $i \in B$ .

Der optimale Zielfunktionswert hat die Form

$$c^T x^* = \frac{\sum_{i \in B} c_i \det(\tilde{A}_B^i)}{\det(\tilde{A}_B)}.$$

Der Zähler wird nun mit Proposition 4.2.2 wie folgt abgeschätzt:

$$\left| \sum_{i \in B} c_i \det(\tilde{A}_B^i) \right| \leq \sum_{i \in B} |c_{\max}| 2^{\langle \tilde{A}_B^i \rangle - r^2} \leq k |c_{\max}| 2^{\langle A \rangle + \langle b \rangle - m(n+1)}$$

Der Nenner ist betragsch durch  $2^{\langle \tilde{A}_B \rangle - r^2} \leq 2^{\langle A \rangle - mn}$  beschränkt, sodass die Aussage folgt.  $\square$

Da das Maschinenmodell nur auf Zahlen mit endlicher Kodierung arbeiten kann, wird die Eingabe des Problems zunächst auf rationale Zahlen beschränkt, sodass folgende Problemstellung (MCF) entsteht:

*Minimum Congestion Flow (MCF)*

**Input:** Netzwerk  $(V, E, u \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^E)$  mit Balancen  $b \in \mathbb{Q}^V$   
**Output:** Auslastungsminimaler  $b$ -Fluss  $f$

Ein Algorithmus, der (MCF) löst, soll zudem mit einer Fehlermeldung abbrechen, falls kein  $b$ -Fluss existiert. Zunächst wird (MCF) als lineares Optimierungsproblem formuliert. Dabei minimieren wir die Zahl  $q^*$ , sodass  $b$ -Flüsse existieren, deren Auslastung  $q^*$  nicht überschreitet:

$$\begin{aligned}
 & \min q^* \\
 \text{u.d.N.} \quad & \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = b_v \quad \text{für alle } v \in V, \\
 & 0 \leq \frac{f_e}{u_e} \leq q^* \quad \text{für alle } e \in E.
 \end{aligned} \tag{LP}$$

Schnell ist ersichtlich, dass die optimalen Lösungen von (LP) gerade die auslastungsminimalen  $b$ -Flüsse sind: Die erste Bedingung stellt mit der Nichtnegativität von  $f_e/u_e$  die  $b$ -Fluss-Eigenschaft dar. Die Auslastungsminimalität einer Optimallösung von (LP) wird durch das Minimieren der Schranke  $q^*$  von  $f_e/u_e$  sichergestellt.

**Korollar 4.2.21.** *Existiert für ein Netzwerk mit rationalen Kapazitäten  $u \in \mathbb{Q}_{>0}^E$  und Balancen  $b \in \mathbb{Q}^V$  ein  $b$ -Fluss, so ist die minimale Auslastung  $q^*$  eines  $b$ -Flusses enthalten in*

$$\left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}_1, p, q \leq 8^{\langle b \rangle + \langle u \rangle} \right\}.$$

*Beweis.* Formuliert man (LP) als lineares Programm in Standardform, so führt man für die Ungleichungen der Form  $f_e/u_e \leq q^*$  Schlupfvariablen  $y \in \mathbb{R}^E$  ein und erhält mit  $n = |V|$  und  $m = |E|$ :

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{n \times m} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{1}_{m \times m} & \mathbf{1}_{m \times m} & -u \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{(n+m) \times (2m+1)}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{0}_{m \times 1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{n+m}.$$

Dabei ist  $B$  die Inzidenzmatrix des schleifenfreien Graphen gegeben durch

$$b_{v,e} := \begin{cases} 1, & \text{falls } v = \text{head}(e), \\ -1, & \text{falls } v = \text{tail}(e), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörigen Entscheidungsvariablen sind  $(f, y, q^*)^T \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{2m+1}$ ; die Zielfunktion ist definiert durch  $x \mapsto c^T x$  mit  $c = (\mathbf{0}_{1 \times 2m}, 1)^T$ .

Multipliziert man nun für  $i \in [n]$  die  $i$ -te Zeile von  $A$  und  $\tilde{b}$  mit dem Nenner von  $b_i$  und für  $i \in [m]$  die  $(n+i)$ -te Zeile mit dem Nenner von  $u_i$ , so erhält man eine ganzzahlige Matrix  $\hat{A}$  und einen ganzzahligen Vektor  $\hat{b}$ . Die Kodierungslänge der ersten  $n$  Zeilen von  $\hat{A}$  beträgt höchstens

$$2\langle b \rangle + (n-2)m + nm + n = 2\langle b \rangle + 2nm - 2m + n.$$

Die restlichen  $m$  Zeilen haben eine Kodierungslänge von höchstens  $3\langle u \rangle + 2m^2 - 2m$ . Der Vektor  $\hat{b}$  hat eine Kodierungslänge von höchstens  $\langle b \rangle + m$ . Das Resultat folgt nun mit Lemma 4.2.20 und den folgenden beiden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{b} \rangle - (n+m)(2m+2) &= \langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{b} \rangle - 2mn - 2n - 2m^2 - 2m \\
 &\leq 2\langle b \rangle + 3\langle u \rangle + \langle \hat{b} \rangle - n - 6m \leq 3\langle b \rangle + 3\langle u \rangle - n - 5m, \\
 \langle \hat{A} \rangle - (m+n)(2m+1) &= \langle \hat{A} \rangle - 2m^2 - m - 2mn - n \leq 2\langle b \rangle + 3\langle u \rangle - 5m.
 \end{aligned}$$

□

**Theorem 4.2.22.** *Eine Instanz  $(V, E, b, u)$  von (MCF) kann mit  $\mathcal{O}(\langle b \rangle + \langle u \rangle)$  Berechnungen eines maximalen Flusses auf einem Graphen der Größe von  $(V, E)$  gelöst werden.*

*Beweis.* Es sei zunächst  $\mathbf{b}$  die Summe aller positiven  $b_v$  für  $v \in V$ . Dies ist gerade das Negative der Summe aller negativen  $b_v$  für  $v \in V$ , denn sonst gäbe es von vornherein keinen  $b$ -Fluss.

Angenommen, es existiere ein  $b$ -Fluss, so ist die minimale Auslastung  $q^*$  eines  $b$ -Flusses nach Korollar 4.2.21 eine nichtnegative, rationale Zahl, deren Zähler und Nenner durch  $8^{\langle b \rangle + \langle u \rangle}$  beschränkt sind. Dann folgt mit Theorem 4.2.12, dass  $q^*$  durch  $\mathcal{O}(\langle b \rangle + \langle u \rangle)$  Vergleiche der Form „Ist  $q^* \leq p/q$ ?“ ermittelt werden kann.

Ein solcher Vergleich kann wie folgt umgesetzt werden: Der Graph  $(V, E)$  wird um zwei Knoten, eine sog. Superquelle  $s$  und eine Supersenke  $t$ , augmentiert. Für jeden Knoten  $v \in V$  mit  $b_v > 0$  wird eine Kante  $(s, v)$  mit Kapazität  $\nu_{(s,v)} := b_v$  eingefügt; für einen Knoten  $v \in V$  mit  $b_v < 0$  wird eine Kante  $(v, t)$  mit Kapazität  $\nu_{(v,t)} := -b_v$  erstellt. Für bestehende Kanten  $e \in E$  wird die Kapazität auf  $\nu_e := u_e \cdot p/q$  gesetzt. Dann hat ein maximaler  $s$ - $t$ -Fluss  $f$ , der die Kantenkapazitäten  $\nu$  einhält, der also  $f_e \leq \nu_e$  für alle  $e \in E$  erfüllt, genau dann Wert  $\mathbf{b}$ , wenn  $q^* \leq p/q$  gilt:

Hat  $f$  den Wert  $\mathbf{b}$  und schränkt man  $f$  auf  $E$  ein, so erhält man einen  $b$ -Fluss, denn offenbar sind hier alle Kanten der Form  $(s, v)$  hinsichtlich  $\nu_{(s,v)}$  voll ausgelastet. Da diese Kanten und die Kanten der Form  $(v, t)$  durch Einschränkung auf  $E$  wegfallen und  $f$  für  $v \in V \setminus \{s, t\}$  Flusserhaltung gewährt, gilt  $f(\delta_E^+(v)) - f(\delta_E^-(v)) = b_v$ . Außerdem gilt  $f_e/u_e \leq p/q$  für alle Kanten  $e \in E$ , also insbesondere  $q^* \leq p/q$ .

Gelte umgekehrt  $q^* \leq p/q$  und sei  $f$  ein  $b$ -Fluss mit Auslastung  $q^*$ , so ist der Fluss  $\tilde{f}$ , der  $f$  um die Werte  $\tilde{f}_{(s,v)} := b_v$  für  $b_v > 0$  und  $\tilde{f}_{(v,t)} := -b_v$  für  $b_v < 0$  erweitert, ein maximaler  $s$ - $t$ -Fluss, der die Kapazitäten  $\nu$  einhält.

Außerdem kann man herausfinden, ob ein  $b$ -Fluss überhaupt existiert, indem man wie oben überprüft, ob ein maximaler  $s$ - $t$ -Fluss den Wert  $\mathbf{b}$  hat, wenn man  $\nu_e = \infty$  für  $e \in E$  setzt.  $\square$

Hier kann man nun aus den zahlreichen Algorithmen zur Berechnung von maximalen  $s$ - $t$ -Flüssen wählen. Verwendet man beispielsweise den wohlbekannten Push-Relabel-Algorithmus von Goldberg und Tarjan (siehe [KV12, Satz 8.30]), so kann ein maximaler  $s$ - $t$ -Fluss mit  $\mathcal{O}(n^2m)$  Operationen berechnet werden, wobei  $n$  die Anzahl der Knoten und  $m$  die Anzahl der Kanten des Graphen ist. Die Ergebnisse werden nun im folgenden Theorem gesammelt.

**Theorem 4.2.23.** *Ein auslastungsminimaler  $b$ -Fluss kann mit  $\mathcal{O}((\langle b \rangle + \langle u \rangle)n^2m)$  arithmetischen Operationen auf Zahlen mit Kodierungslänge  $\mathcal{O}(\langle b \rangle + \langle u \rangle)$  berechnet werden, wodurch sich eine Laufzeit von  $\mathcal{O}((\langle b \rangle + \langle u \rangle)^2n^2m)$  bei logarithmischen Kostenmaß ergibt. Dabei sind  $n$  die Anzahl der Knoten und  $m$  die Anzahl der Kanten im Graphen.*

# 5 Schmale Flüsse mit Zurücksetzen

## 5.1 Definition und Eigenschaften

Der Abschnitt beginnt mit der Einführung einer weiteren Klasse statischer Flüsse. Diese wurden von Ronald Koch in [Koc12] erstmals analysiert. Hier werden einige Ergebnisse von ihm erarbeitet. Weitere Ergänzungen stammen aus [CCL15].

**Definition 5.1.1** (*s*-Netzwerk). Ein *s*-Netzwerk  $(V, E, u, s)$  ist ein azyklisches Netzwerk  $(V, E, u)$ , in dem alle Knoten von  $s$  aus erreicht werden können.

Statt man ein *s*-Netzwerk mit einer Menge *zurücksetzender Kanten*  $E_1 \subseteq E$  aus, so heißt das Tupel  $(V, E, u, s, E_1)$  ein *s*-Netzwerk mit Zurücksetzen auf  $E_1$ .

Ist ein Balancevektor  $b \in \mathbb{R}^V$  in einem *s*-Netzwerk gegeben, so soll er in diesem Kapitel stets  $b(V) = 0$  und  $b_v \leq 0$  für alle  $v \in V \setminus \{s\}$  erfüllen; das heißt,  $s$  soll die einzige Quelle des Netzwerks sein. Insbesondere existiert in einem *s*-Netzwerk immer ein *b*-Fluss.

**Definition 5.1.2** (Pfad- / Knotenauslastung). Sei ein *b*-Fluss  $f$  in einem *s*-Netzwerk mit Zurücksetzen auf  $E_1$  gegeben. Die Funktion  $\rho_{vw} : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit

$$\rho_{vw}(l_v, f_{vw}) := \begin{cases} \max\{l_v, f_{vw}/u_{vw}\}, & \text{falls } vw \notin E_1, \\ f_{vw}/u_{vw}, & \text{falls } vw \in E_1. \end{cases}$$

wird als *Auslastungsübertragung einer Kante*  $vw$  bezeichnet. Die *Auslastung eines s-v-Pfades*  $P = (e_1, \dots, e_k)$  bezeichne die Verkettung  $\rho_{e_k}(\cdot, f_{e_k}) \circ \dots \circ \rho_{e_1}(\cdot, f_{e_1})(0)$ . Die zu  $f$  zugehörige *Knotenauslastung*  $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}^V$  sei für einen Knoten  $v$  die minimale Auslastung eines *s-v*-Pfades.

Betrachtet man einen *s-v*-Pfad  $P = (e_1, \dots, e_k)$ , der zurücksetzende Kanten enthält, so ist die Auslastung von  $P$  gerade  $\max_{j=i}^k f_{e_j}/u_{e_j}$ , wobei  $e_i$  die letzte zurücksetzende Kante des Pfades ist. In diesem Sinne setzen Kanten aus  $E_1$  die Auslastung eines vorangegangenen Pfades auf ihre eigene zurück.

**Proposition 5.1.3.** Die Knotenauslastungen eines *b*-Flusses  $f$  in einem *s*-Netzwerk mit Zurücksetzen auf  $E_1$  sind gegeben durch die eindeutige Lösung  $(\tilde{l}_v)_{v \in V}$  des Gleichungssystems

$$\tilde{l}_w = \begin{cases} 0, & \text{falls } w = s, \\ \min_{vw \in \delta^-(w)} \rho_{vw}(\tilde{l}_v, f_{vw}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Die Existenz einer Lösung folgt aus der Azyklizität des Netzwerks und wegen der Erreichbarkeit jedes Knotens von  $s$  aus.

Sei also  $\tilde{l} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^V$  die Lösung des Gleichungssystems. Der Teilgraph  $(V, E')$  mit

$$E' := \left\{ vw \in E \mid \rho_{vw}(\tilde{l}_v, f_{vw}) = \min_{uw \in \delta^-(w)} \rho_{uw}(\tilde{l}_u, f_{uw}) \right\}$$

ist ebenfalls azyklisch und jeder Knoten ist von  $s$  aus erreichbar. Man zeige  $l_w = \tilde{l}_w$  durch eine Induktion über die Distanz von  $s$  zu  $w$  bezüglich der Anzahl an Kanten. Für  $w = s$  gilt offenbar  $l_s = 0$ . Sei nun ein  $s$ - $w$ -Pfad  $P$  gegeben, seien  $vw$  die letzte Kante und  $Q$  das restliche Anfangsstück dieses Pfades. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Auslastung von  $Q$  mindestens  $\tilde{l}_v$ . Daher ist die Auslastung von  $P$  mindestens  $\rho_{vw}(\tilde{l}_v, f_{vw})$  aufgrund der Monotonie von  $\rho_{vw}(\cdot, f_{vw})$ , wodurch  $l_v \geq \tilde{l}_v$  folgt. Außerdem hat ein  $s$ - $v$ -Pfad  $P$ , der in  $(V, E')$  verläuft, Auslastung  $\tilde{l}_v$ . Da solch ein Pfad existiert, gilt also  $l_v \leq \tilde{l}_v$ .  $\square$

**Definition 5.1.4** (Schmaler Fluss). Seien ein  $b$ -Fluss  $f$  in einem  $s$ -Netzwerk mit Zurücksetzen auf  $E_1$  sowie die durch  $f$  induzierten Knotenauslastungen  $l$  gegeben. Der Fluss  $f$  heißt *schmaler Fluss*, falls die Auslastung jedes  $s$ - $v$ -Pfades mit positivem Fluss  $l_v$  beträgt. Ist  $E_1$  nichtleer, so nennt man  $f$  einen *schmalen Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$* , sonst nennt man ihn einen *schmalen Fluss ohne Zurücksetzen*.

Insbesondere beträgt bei einem schmalen Fluss die Knotenauslastung  $l_v$  eines Knotens  $v$  gerade die Auslastung eines jeden  $s$ - $v$ -Pfades mit positivem Fluss und 0, falls kein solcher existiert.

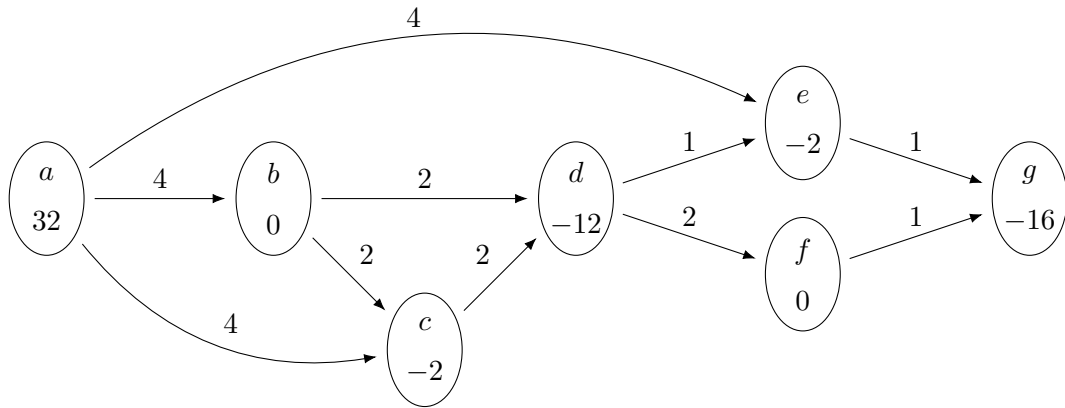
Da sich zurücksetzende Kanten, die in  $s$  starten, bezüglich schmaler Flüsse genauso verhalten, als wären sie nicht zurücksetzend, wird im Folgenden ohne Beschränkung angenommen, dass  $s$  keine ausgehenden, zurücksetzenden Kanten hat.

*Bemerkung 5.1.5.* Ronald Koch betrachtet in [Koc12] allgemeinere schmale Flüsse: Dort ist das zugrundeliegende Netzwerk nicht als azyklisch vorausgesetzt. Diese Einschränkung wird hier im Sinne von [CCL15] beibehalten.

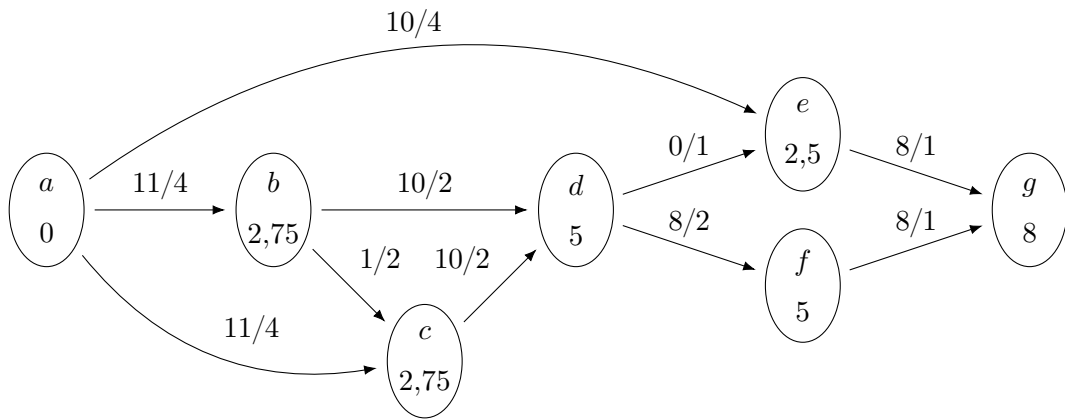
**Beispiel 5.1.6.** In Abbildung 5.1.1 ist ein Beispiel eines schmalen Flusses abgebildet. Die Kapazitäten der Kanten und die Balancen der Knoten des Ursprungnetzwerks sind dabei in Abbildung 5.1.1a zu erkennen. Hervorzuheben ist, dass die Knoten  $g$  mit Wert 16 die größte und  $d$  mit Wert 12 die zweitgrößte Nachfrage haben. Außerdem haben die beiden einzigen Kanten  $(e, g)$  und  $(f, g)$ , die zu  $g$  führen, nur eine Kapazität von 1.

Betrachtet man zunächst den Fall ohne zurücksetzende Kanten, so stellt man fest, dass ein zugehöriger schmaler Fluss  $x$  wie in Abbildung 5.1.1b diese beiden Kanten gleichmäßig auslasten muss: Die Auslastungen aller flusstragenden  $a$ - $g$ -Pfade, egal ob sie über  $e$  oder über  $f$  zu  $g$  gelangen, müssen in einem schmalen Fluss übereinstimmen. Aufgrund der hohen Nachfrage von  $g$  und der geringen Kapazität seiner eingehenden Kanten, bestimmen diese letzten beiden Kanten die Auslastung jedes  $a$ - $g$ -Pfades.

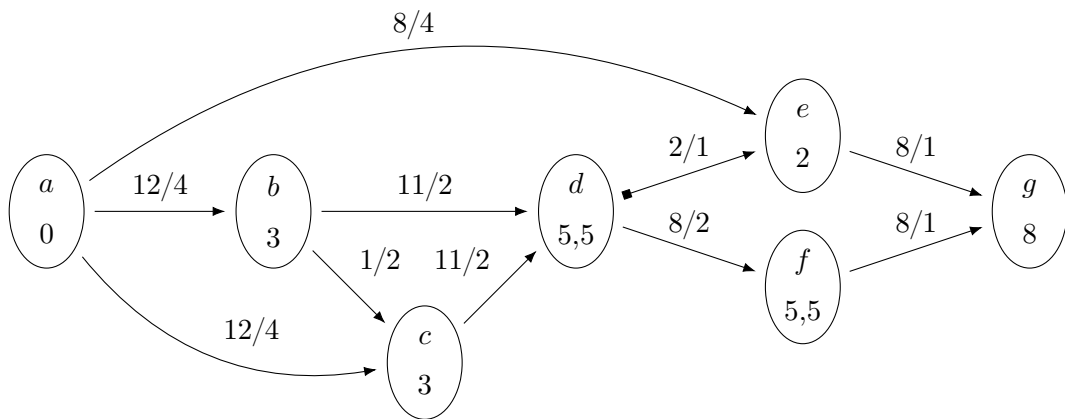
Außerdem fällt auf, dass die Kante  $(d, e)$  nicht genutzt wird. Auch das ist nicht besonders verwunderlich: Würde man Fluss von der Kante  $(a, e)$  entfernen und stattdessen entlang eines Pfades  $P$  über  $d$  zu  $e$  schicken, so hätte  $P$  eine Auslastung von mindestens 5, da jeder Pfad nach  $d$  bereits Auslastung 5 hatte. Weil aber  $e$  aufgrund der Kante  $(a, e)$  eine kleinere Auslastung als 2,5 hat, kann der entstehende



(a) Das Netzwerk. Die Kanten  $e$  sind mit Kapazitäten  $u_e$  und die Knoten  $v$  mit einem Bezeichner  $v$  und einer Balance  $b_v$  beschriftet.



(b) Ein schmaler Fluss  $f$  ohne Zurücksetzen.



(c) Ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $(d, e)$ .

Abbildung 5.1.1: Ein schmaler Fluss einmal ohne Zurücksetzen und einmal mit Zurücksetzen auf  $(d, e)$ . In den Abbildungen 5.1.1b und 5.1.1c sind die Kanten mit der Auslastung der Form  $x_e/u_e$  und die Knoten mit der Knotenauslastung beschriftet.



Fluss kein schmaler Fluss sein. Später in diesem Kapitel sehen wir, dass eine Kante, die zu einem Knoten niedrigerer Auslastung führt, in keinem schmalen Fluss ohne Zurücksetzen genutzt wird.

Setzt man jedoch die Kante  $(d, e)$  als zurücksetzende Kante voraus, so ist der Fluss aus Abbildung 5.1.1b kein schmaler Fluss auf dieser Instanz: Ein Pfad, der über  $d$  nach  $e$  verläuft, hat darin Auslastung 0, da die letzte Kante des Pfades die Auslastung auf die eigene, also auf 0, zurücksetzt. Insbesondere hat  $e$  eine Auslastung von 0, jedoch hat der  $a$ - $e$ -Pfad  $(a, e)$  Auslastung 2,5, sodass es sich nicht um einen schmalen Fluss handeln kann. Ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $(d, e)$  schickt dagegen – wie in Abbildung 5.1.1c zu sehen – 2 Flusseinheiten über  $d$  zu  $e$ , sodass  $e$  wie die Kante  $(a, e)$  Auslastung 2 hat.

**Lemma 5.1.7.** *Ein  $b$ -Fluss  $f$  in einem  $s$ -Netzwerk mit Zurücksetzen auf  $E_1$  ist genau dann ein schmaler Fluss, wenn eine Knotenbewertung  $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}^V$  existiert, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$(T1) \quad l_s = 0,$$

$$(T2) \quad l_w \leq l_v, \quad \text{für } vw \in E \setminus E_1 \text{ mit } f_{vw} = 0,$$

$$(T3) \quad l_w = \max \left\{ l_v, \frac{f_{vw}}{u_{vw}} \right\}, \quad \text{für } vw \in E \setminus E_1 \text{ mit } f_{vw} > 0,$$

$$(T4) \quad l_w = \frac{f_{vw}}{u_{vw}}, \quad \text{für } vw \in E_1,$$

$$(T5) \quad l_w \geq \min_{vw \in \delta^-(w)} l_v, \quad \text{für } w \in V \setminus \{s\} \text{ mit } \delta^-(w) \cap E_1 = \emptyset.$$

Diese Knotenbewertung stimmt mit der Knotenauslastung von  $f$  überein. Außerdem gelten die Bedingungen (T1), (T2) und (T5) bereits für die Knotenauslastungen von  $f$ , falls  $f$  ein beliebiger  $b$ -Fluss ist.

*Beweis.* Sei  $f$  ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$  und sei  $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}^V$  die Knotenauslastung von  $f$ . Man zeige, dass  $l$  die Bedingungen (T1)-(T5) erfüllt, und benutze dabei die Darstellung aus Proposition 5.1.3. Wegen  $l_s = 0$  gilt bereits (T1). Für eine Kante  $vw \in E \setminus E_1$  mit  $f_{vw} = 0$  gilt  $l_w \leq \rho_{vw}(l_v, f_{vw}) = l_v$ , wodurch auch (T2) folgt. Ist  $vw \in E$  mit  $f_{vw} > 0$ , so existiert ein  $s$ - $w$ -Pfad mit positivem Fluss, der die Kante  $vw$  benutzt, sodass die Auslastung dieses Pfades  $l_w = \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$  ist, da der  $s$ - $v$ -Teilpfad die Auslastung  $l_v$  besitzt.

Für  $vw \notin E_1$  bedeutet das jedoch gerade  $l_w = \max\{l_v, f_{vw}/u_{vw}\}$ , also (T3), und für  $vw \in E_1$  folgt  $l_w = f_{vw}/u_{vw}$ . Für (T4) bleibt der Fall  $f_{vw} = 0$  zu prüfen: Hier gilt  $l_w = \min_{uw \in \delta^-(w)} \rho_{uw}(l_u, f_{uw}) = f_{vw}/u_{vw} = 0$ . Zuletzt betrachte man den Fall, dass  $w \neq s$  keine eingehende zurücksetzende Kante hat. Da  $w$  von  $s$  aus erreichbar ist, hat  $w$  mindestens eine eingehende Kante und dadurch folgt bereits  $l_w = \min_{vw \in \delta^-(w)} \max\{l_v, f_{vw}/u_{vw}\} \geq \min_{vw \in \delta^-(w)} l_v$ , was auch (T5) impliziert.

Sei nun umgekehrt  $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}^V$  eine Knotenbewertung, die (T1)-(T5) erfüllt. Man verwende eine Induktion über die Distanz eines Knotens  $w$  zu  $s$  bezüglich der Kantenzahl, um zu zeigen, dass  $l_w$  die Knotenauslastung von  $f$  ist. Für  $w = s$  gilt  $l_s = 0$  bereits nach (T1). Für  $w \neq s$  ist  $l_w$  nach (T2), (T3) und (T4) eine untere Schranke

an  $\rho_{vw}(l_v, f_{vw})$  für  $vw \in \delta^-(w)$ . Es bleibt zu belegen, dass für eine eingehende Kante  $vw$  der Wert  $\rho_{vw}(l_v, f_{vw})$  auch  $l_w$  annimmt: Falls eine eingehende Kante  $vw \in E_1$  oder eine eingehende Kante  $vw$  mit  $f_{vw} > 0$  existiert, ist  $\rho_{vw}(l_v, f_{vw}) = l_w$  nach (T4) und (T3). Sonst ist  $l_w \geq \min_{vw \in \delta^-(w)} l_v = \min_{vw \in \delta^-(w)} \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$  nach (T5), was die Behauptung zeigt. Um zu sehen, dass  $f$  nun ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$  ist, genügen die Bedingungen (T1), (T3) und (T4), da dadurch jeder  $s$ - $v$ -Teilpfad eines Pfades mit positivem Fluss gerade Auslastung  $l_v$  hat.  $\square$

*Bemerkung 5.1.8.* Hier ist, wie in [CCL11, Definition 4], im Vergleich zu [KS11, Definition 6] die Bedingung (T5) zusätzlich eingeführt worden. Diese ist nötig für den Beweis von Theorem 5.3.8, der in [KS11] als Theorem 3 geführt wird. Dies wird in Bemerkung 5.3.9 weiter erörtert. Die Änderung von  $l_s = 1$  auf  $l_s = 0$  wird später mit der Einführung normierter schmaler Flüsse in Definition 5.3.1 gerechtfertigt.

**Lemma 5.1.9.** *In einem  $s$ -Netzwerk mit Zurücksetzen ist ein  $b$ -Fluss  $f$  mit Knotenauslastung  $l$  genau dann ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$ , wenn  $f_{vw} = 0$  für alle Kanten  $vw \in E$  mit  $l_w < \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$  gilt.*

*Beweis.* Angenommen,  $f$  sei ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$ . Für eine Kante  $vw \in E$  mit  $l_w < \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$  ist  $vw \notin E_1$  und  $f_{vw} = 0$  nach (T4) und (T3).

Nun nehme man an, es gelte  $f_{vw} = 0$  für alle  $vw \in E$  mit  $l_w < \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$ , und man zeige die Eigenschaften (T3) und (T4). Der Rest folgt dann mit Lemma 5.1.7. Ist  $vw \notin E_1$  mit  $f_{vw} > 0$ , so gilt  $l_w = \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$ , wodurch Bedingung (T3) folgt. Für (T4) betrachte man zunächst Kanten  $vw \in E_1$  mit  $f_{vw} > 0$ : Hier folgt wieder  $l_w = \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$ . Falls  $f_{vw} = 0$  gilt, ist  $l_w = \min_{uw \in \delta^-(w)} \rho_{uw}(l_u, f_{uw}) = 0$ .  $\square$

Mit anderen Worten: Eine Kante wird nur genutzt, falls die Auslastungsübertragung durch die Kante gerade die Auslastung des Zielknotens ist. Dies lässt sich folgern, da die Auslastungsübertragung nach Proposition 5.1.3 bereits eine untere Schranke an die Knotenauslastung ist.

**Lemma 5.1.10** (Eindeutigkeit der Knotenauslastung). *Seien ein  $s$ -Netzwerk mit Zurücksetzen auf  $E_1$  und Balancen  $b \in \mathbb{R}^V$  gegeben. Dann sind die Knotenauslastungen aller schmaler  $b$ -Flüsse identisch.*

*Beweis.* Angenommen, es existieren zwei schmale Flüsse  $f$  und  $g$  mit unterschiedlichen Knotenauslastungen  $l \neq h$ . Dann ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Menge  $S := \{v \in V \mid l_v > h_v\}$  nichtleer. Da  $f$  und  $g$  jeweils  $b$ -Flüsse sind, gilt

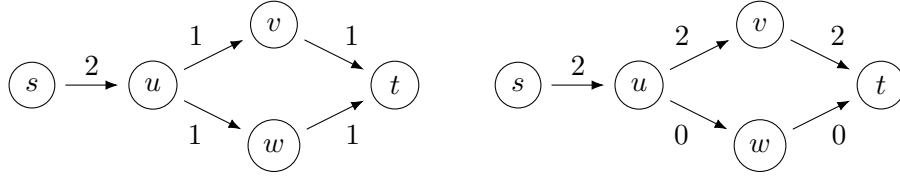
$$f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S)) = b(S) = g(\delta^+(S)) - g(\delta^-(S)). \quad (5.1)$$

Für aus  $S$  herausgehende Kanten  $vw \in \delta^+(S)$  gilt  $f_e \leq g_e$ , denn angenommen es gelte  $f_e > g_e$ , folgt mit Lemma 5.1.9 und  $v \in S$  die Ungleichung

$$l_w = \rho_{vw}(l_v, f_{vw}) > \rho_{vw}(h_v, g_{vw}) \geq h_w,$$

welche jedoch im Widerspruch zu  $w \notin S$  steht. Ebenso gilt für Kanten  $vw \in \delta^-(S)$  die Ungleichung  $f_e \geq g_e$ , weil sonst wegen  $v \notin S$  die Ungleichung

$$l_w \leq \rho_{vw}(l_v, f_{vw}) \leq \rho_{vw}(h_v, g_{vw}) = h_w$$



Abbildungung 5.1.2: Zwei verschiedene schmale Flüsse derselben Instanz ohne Zurücksetzen. Auf den Kanten steht der Flusswert; die Kapazitäten sind allesamt 1.

gelten würde, was  $w \in S$  widerspricht. Gleichung 5.1 impliziert dann sogar  $f_e = g_e$  für alle  $e \in \delta^-(S) \cup \delta^+(S)$ . Für  $vw \in \delta^-(S)$  verschwinden  $g_e$  und  $f_e$ , da sonst für  $g_e = f_e > 0$  mit  $v \notin S$  die Ungleichung  $l_w = \rho_{vw}(l_v, f_{vw}) \leq \rho_{vw}(h_v, g_{vw}) = h_w$  der Bedingung  $w \in S$  widerspricht.

Aufgrund der Azyklizität existiert ein Knoten  $w \in S$  mit  $\delta^-(w) \subseteq \delta^-(S)$ . Eingehende Kanten  $vw$  von  $w$  sind deshalb nicht zurücksetzend, weil für solch eine Kante  $\rho_{vw}(l_v, f_e) = 0 = \rho_{vw}(l_v, g_e)$  gelten würde, sodass  $l_w = 0 = h_w$  der Voraussetzung  $w \in S$  widerspricht. Daher ist  $l_w = \min_{vw \in \delta^-(w)} l_v$  und  $h_w = \min_{vw \in \delta^-(w)} h_v$ , was den Widerspruch  $l_w \leq h_w$  impliziert.  $\square$

Zwar sind schmale Flüsse im Allgemeinen nicht eindeutig – nichtmal ohne zurücksetzende Kanten, wie man leicht in Abbildung 5.1.2 erkennen kann –, jedoch ist der Fluss auf einigen Kanten eindeutig:

**Korollar 5.1.11** (Eindeutigkeit schmaler Flüsse). *Für ein  $s$ -Netzwerk mit Zurücksetzen auf  $E_1$  und Balancen  $b \in \mathbb{R}^V$  stimmen alle schmalen  $b$ -Flüsse auf  $E_1$  sowie auf Kanten  $vw$  mit  $l_v \neq l_w$  überein. Dabei ist  $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}^V$  die eindeutige Knotenauslastung.*

*Beweis.* Da nach Lemma 5.1.10 die Knotenauslastung  $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}^V$  für jeden schmalen  $b$ -Fluss  $f$  übereinstimmt, gilt  $f_{vw} = u_{vw}l_w$  für zurücksetzende Kanten  $vw$  nach (T4). Für eine nicht-zurücksetzende Kante  $vw \notin E_1$  betrachte man zunächst den Fall  $l_v < l_w$ . Nach Definition gilt  $l_w \leq \max\{l_v, f_{vw}/u_{vw}\}$ , sodass man  $f_{vw}/u_{vw} > l_v \geq 0$  folgern kann. Nach Lemma 5.1.9 gilt also  $f_{vw} = l_w u_{vw}$ . Im Fall  $l_v > l_w$  impliziert das Lemma bereits  $f_{vw} = 0$ .  $\square$

**Theorem 5.1.12.** *Für jedes  $s$ -Netzwerk mit Zurücksetzen und Balancen  $b$  existiert ein schmaler  $b$ -Fluss.*

Um die Existenz zu beweisen, benötigen wir zunächst den Fixpunktsatz von Kakutani. Dazu führen wir die folgenden Begriffe ein:

**Definition 5.1.13** (Korrespondenz, Fixpunkt). Eine *Korrespondenz* von einer Menge  $A$  in eine Menge  $B$  ist eine Abbildung  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset\}$  von  $A$  in die Potenzmenge von  $B$  ohne die leere Menge. Sind  $A$  und  $B$  topologische Räume, so nennt man  $f$  *abgeschlossen*, wenn die zugehörige Relation  $R_f := \{(a, b) \in A \times B \mid b \in f(a)\}$  in der Produkttopologie abgeschlossen ist.

Ein *Fixpunkt* einer Korrespondenz  $f : X \rightarrow \mathcal{P}$  ist ein Punkt  $x \in X$  mit  $x \in f(x)$ .

Nun lautet der Fixpunktsatz von Kakutani (siehe [Heu91]):

**Satz 5.1.14** (Fixpunktsatz von Kakutani). *Seien  $C \subseteq E$  eine nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge eines normierten Raumes  $E$  und  $f : C \rightarrow \mathcal{P}(C)$  eine abgeschlossene, konvexwertige Korrespondenz. Dann besitzt  $f$  einen Fixpunkt.*

*Beweis von Theorem 5.1.12.* Man betrachte die Menge  $C$  aller  $b$ -Flüsse als Teilmenge des metrischen Raums  $\mathbb{R}^E$ . Nach Voraussetzung ist diese nichtleer, konvex, da für  $f, g \in C, \lambda \in [0, 1]$  der Fluss  $\lambda f + (1 - \lambda)g$  wieder die Flusserhaltung bzgl.  $b$  erfüllt, und kompakt, da jeder Fluss in  $C$  aufgrund der Azyklizität in  $s$ - $v_i$ -Wege zerlegbar ist, wodurch jede Kante maximal Fluss  $b_s$  besitzen kann, sodass  $C$  eine beschränkte Teilmenge von  $\subseteq [0, b_s]^E$  ist. Außerdem ist  $C$  abgeschlossen, da es die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ist. Auf  $C$  definiere man die Korrespondenz

$$\Gamma : C \rightarrow \mathcal{P}(C) \setminus \{\emptyset\}, f \mapsto \{g \in C \mid \forall vw \in E : l_w < \rho_{vw}(l_v, f_{vw}) \implies g_{vw} = 0\}.$$

Dabei sei  $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}^V$  die zu  $f$  gehörige Knotenauslastung. Diese Korrespondenz ist wohldefiniert, da  $\Gamma(f)$  für jedes  $f \in C$  nichtleer ist: Der Knoten  $s$  kann im Graphen  $G' := (V, E')$  mit  $E' := \{vw \in E \mid \rho_{vw}(l_v, f_{vw}) = l_w\}$  jeden Knoten erreichen, da  $G'$  azyklisch ist und jeder Knoten  $w \neq s$  mindestens eine eingehende Kante mit  $l_w = \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$  besitzt. Daher existiert ein  $s$ - $v$ -Weg  $P_v$  in  $G'$  für alle  $v \in V$  und der Fluss  $\sum_{v \in V \setminus \{s\}} (-b_v) \cdot P_v$  ist in  $\Gamma(f)$  enthalten.

Für jedes  $f \in C$  ist  $\Gamma(f)$  konvex: Ist für  $g, h \in \Gamma(f), \lambda \in [0, 1]$  und eine Kante  $vw \in E$  die Bedingung  $l_w < \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$  erfüllt, so gilt auch  $\lambda g_{vw} + (1 - \lambda)h_{vw} = 0$ , womit  $\lambda g + (1 - \lambda)h$  im Bild  $\Gamma(f)$  liegt. Des Weiteren ist  $\Gamma$  abgeschlossen: Sei eine konvergente Folge  $((f^n, g^n))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $R_\Gamma$  mit Grenzwert  $(f, g)$  gegeben. Die zu  $f$  bzw.  $f^n$  gehörigen Knotenauslastungen seien gegeben durch  $l$  bzw.  $l^n$ . Angenommen, es gelte  $l_w < \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$ . Da die Zuordnung  $f \mapsto l$  eines  $b$ -Flusses auf seine Knotenauslastung nach Lemma 5.1.3 stetig ist, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $l_w^n < \rho_{vw}(l_v^n, f_{vw}^n)$  für alle  $n \geq N$ . Damit ist auch  $g_{vw} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{vw}^n = 0$ .

Daher existiert nach dem Fixpunktsatz von Kakutani 5.1.14 ein Fixpunkt von  $\Gamma$ , welcher nach Lemma 5.1.9 ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$  ist.  $\square$

## 5.2 Berechnung schmaler Flüsse

Dieser Abschnitt diskutiert die Komplexität der Berechnung schmaler Flüsse. Dazu beschränkt man sich wie bei der Berechnung auslastungsminimaler Flüsse zunächst wieder auf solche mit rationalen Koeffizienten ein und erhalten das folgende Problem:

### *Thin Flow with Resetting (TFWR)*

**Input:**  $s$ -Netzwerk mit Zurücksetzen  $(V, E, u \in \mathbb{Q}_{>0}^E, s \in V, E_1 \subseteq E)$  und Balancen  $b \in \mathbb{Q}^V$ .

**Output:** Schmaler  $b$ -Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$ .

Die Existenz schmaler Flüsse mit Zurücksetzen aus Theorem 5.1.12 suggeriert bereits einen exponentiellen Algorithmus, um einen solchen Fluss mit Wert  $d$  zu berechnen: Man rate die Menge  $E' \subseteq E$  aller Kanten  $vw$ , die  $l_w = \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$

erfüllen sollen, sowie für alle  $vw \in E' \setminus E_1$  eine Binärzahl  $\sigma_{vw} \in \{0, 1\}$ , die

$$\max \left\{ l_v, \frac{f_{vw}}{u_{vw}} \right\} = \sigma_{vw} l_v + (1 - \sigma_{vw}) \frac{f_{vw}}{u_{vw}}$$

erfüllen soll. Außerdem sollen in  $(V, E')$  alle Knoten von  $s$  aus erreichbar sein. Dann suche man einen zulässigen Punkt in folgendem Polyeder:

$$\begin{aligned} & (f, l) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{E+V} \\ \text{u.d.N. } & f(\delta^+(v)) - f(\delta^-(v)) = b_v \quad \text{für } v \in V, \\ & l_s = 0, \\ & \left. \begin{aligned} l_w &= \sigma_{vw} l_v + (1 - \sigma_{vw}) \frac{f_{vw}}{u_{vw}}, \\ \sigma_{vw} l_v + (1 - \sigma_{vw}) \frac{f_{vw}}{u_{vw}} &\geq \frac{f_{vw}}{u_{vw}}, \\ \sigma_{vw} l_v + (1 - \sigma_{vw}) \frac{f_{vw}}{u_{vw}} &\geq l_v, \end{aligned} \right\} \quad \text{für } vw \in E' \setminus E_1, \\ & l_w = \frac{f_{vw}}{u_{vw}}, \quad \text{für } vw \in E_1, \\ & \left. \begin{aligned} f_{vw} &= 0, \\ l_w &\leq l_v, \end{aligned} \right\} \quad \text{für } vw \in E \setminus E'. \end{aligned}$$

Existiert solch ein Punkt  $(f, l)$ , so ist  $f$  ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$  mit zugehöriger Knotenbewertung  $l$ : Die Bedingung für Kanten  $vw$  in  $E' \setminus E_1$  lässt sich zusammenfassen zu  $l_w = \max\{l_v, f_{vw}/u_{vw}\}$ . Man prüfe die Bedingung aus Lemma 5.1.7. Dabei folgt (T1) sofort. Für Kanten  $vw \in E \setminus E_1$  mit  $f_{vw} = 0$  gilt  $l_w \leq l_v$  mit Fallunterscheidung nach  $vw \in E'$ , also gilt (T2). Auch (T3) und (T4) folgen sofort. Für (T5) nehme man an, dass ein Knoten  $w \neq s$  keine eingehenden Kanten in  $E_1$  hat. Da  $w$  von  $s$  aus in  $(V, E')$  erreichbar ist, hat  $w$  mindestens eine eingehende Kante  $vw$  in  $E'$ , für die  $l_w = \max\{l_v, f_{vw}/u_{vw}\} \geq \min_{uw \in \delta^-(w)} l_u$  gilt. Also ist auch (T5) erfüllt und  $f$  ist ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$ .

Setzt man umgekehrt für einen schmalen Fluss  $f$  mit Knotenauslastung  $l$  die Menge  $E'$  als diejenigen Kanten, die  $l_w = \rho_{vw}(l_v, f_{vw})$  erfüllen, und  $\sigma_{vw}$  als 1, falls  $l_v \geq f_{vw}/u_{vw}$  gilt, und sonst als 0, so ist  $(f, l)$  eine zulässiger Punkt im oben definierten Polyeder. Dies kann leicht durch Heranziehen von Lemma 5.1.9 eingesehen werden.

Die Zulässigkeit eines solchen Polyeders kann in polynomieller Zeit beispielsweise durch die Ellipsoidmethode ermittelt werden. Da nach Theorem 5.1.12 ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen existiert, liegt das Problem (TFWR) in der Komplexitätsklasse **TFNP**:

**Definition 5.2.1** (Suchproblem). Ein *Suchproblem*  $\Pi$  ist eine Relation  $\Pi \subseteq X \times Y$  zusammen mit der Problemstellung zu einer *Instanz*  $x \in X$  eine *Lösung*  $y \in Y$  mit  $(x, y) \in \Pi$  zu ermitteln.

Ein Suchproblem  $\Pi \subseteq X \times Y$  heißt *polynomiell reduzierbar* auf ein Suchproblem  $\Pi' \subseteq X' \times Y'$ , falls es zwei polynomiell berechenbare Funktionen  $f : X \rightarrow X'$  und  $g : Y \rightarrow Y'$  gibt, sodass  $g(y)$  eine Lösung der Instanz  $f(x)$  von  $\Pi'$  für jede Lösung  $y$

einer Instanz  $x$  von  $\Pi$  ist, d.h.

$$(x, y) \in \Pi \implies (f(x), g(y)) \in \Pi'.$$

**Definition 5.2.2** (Komplexitätsklasse **TFNP**). Ein Suchproblem  $\Pi \subseteq X \times Y$  liegt genau dann in der Komplexitätsklasse **TFNP** (Total Function Nondeterministic Polynomial), wenn es einen deterministischen, polynomiellen Algorithmus gibt, der entscheidet, ob  $(x, y) \in \Pi$  für beliebige  $x \in X$  und  $y \in Y$  gilt, und wenn für alle  $x \in X$  ein  $y \in Y$  existiert, dessen Kodierung polynomielle Größe in der Kodierungslänge von  $x$  besitzt, sodass  $(x, y) \in \Pi$  gilt.

In den folgenden Unterkapiteln soll diskutiert werden, ob es bessere Abschätzungen für die Komplexität von (TFWR) gibt.

### 5.2.1 Berechnung schmaler Flüsse ohne Zurücksetzen

Man betrachte zunächst einen Spezialfall des Problems: Dabei soll es um die Bestimmung von schmalen Flüssen in Netzwerken ohne zurücksetzende Kanten gehen. Daraus entsteht die folgende Problemformulierung:

*Thin Flow without Resetting* (TFwOR)

**Input:**  $s$ -Netzwerk  $(V, E, u \in \mathbb{Q}_{>0}^E, s \in V)$  mit Balancen  $b \in \mathbb{Q}^V$   
**Output:** Schmalen  $b$ -Fluss ohne Zurücksetzen

In diesem Abschnitt wird ein polynomieller Algorithmus zur Berechnung von schmalen Flüssen ohne Zurücksetzen vorgestellt. Dieser wurde [Koc12] entnommen. Dazu wird zunächst der Zusammenhang dieser Flüsse mit auslastungsminimalen Flüssen erarbeitet:

**Lemma 5.2.3.** *Sei ein schmaler  $b$ -Fluss  $f$  ohne Zurücksetzen mit zugehöriger Knotenauslastung  $l$  gegeben. Dann ist  $f$  ein  $b$ -Fluss minimaler Auslastung  $q^*$  und für  $E \neq \emptyset$  ist  $X := \{v \in V \mid l_v < q^*\}$  ein dünnster Schnitt.*

*Beweis.* Ist  $b$  der Nullvektor, so ist  $f$  der Nullfluss, da das Netzwerk azyklisch ist. Sei also  $q^* > 0$  die Auslastung von  $f$  im Falle von  $b \neq 0$ . Nach Korollar 4.1.14 genügt es zu zeigen, dass die Auslastung jeder ausgehenden Kante von  $X$  bezüglich  $f$  gerade  $q^*$  beträgt und auf eingehenden Kanten von  $X$  kein Fluss fließt. Wegen  $l_s = 0$  ist  $s$  im Schnitt  $X$  enthalten. Sei  $vw \in \delta^+(X)$  eine ausgehende Kante. Dann gilt  $l_v < l_w = q^*$  und nach Proposition 5.1.3 auch  $q^* = l_w \leq \rho_{vw}(l_v, f_{vw}) = f_{vw}/u_{vw}$ . Da  $q^*$  eine obere Schranke an  $f_{vw}/u_{vw}$  ist, gilt also  $f_{vw}/u_{vw} = q^*$ . Für eine eingehende Kante  $vw \in \delta^-(X)$  gilt  $\rho_{vw}(l_v, f_{vw}) \geq l_v > l_w$  und somit muss nach Lemma 5.1.9 der Fluss  $f$  auf der Kante  $vw$  verschwinden.  $\square$

Daher sind schmale Flüsse bereits auslastungsminimal. Umgekehrt gilt dies natürlich nicht. Jedoch wird im Folgenden erarbeitet, dass die Kantenbewertung eines auslastungsminimalen Flusses außerhalb eines dünnsten Schnittes bereits mit der eines schmalen Flusses übereinstimmt.

**Definition 5.2.4.** Existiert in einem Graphen  $(V, E)$  ein  $b$ -Fluss, so heißt das Tupel  $(V, E, b)$  eine  $b$ -Fluss-Instanz. Für eine  $b$ -Fluss-Instanz  $(V, E, b)$  und einen dünnsten Schnitt  $X$  bezüglich  $b$  mit Auslastung  $q^*$  heißt  $\mathcal{I}[X] := (X, E[X], b[X])$  die durch  $X$  induzierte Teilinstanz von  $\mathcal{I}$ , wobei  $E[X] := \{vw \in E \mid v, w \in X\}$  die Menge der Kanten zwischen Knoten in  $X$  ist und  $b[X]$  durch

$$b[X]_v := b_v - u(\delta_E^+(v) \cap \delta_E^+(X))q^* \quad \text{für } v \in X$$

definiert ist.

Man bemerke, dass die Ungleichung  $b[X] \leq b$  komponentenweise erfüllt ist und ein  $b[X]$ -Fluss in  $(X, E[X])$  existiert: Ein auslastungsminimaler  $b$ -Fluss in  $(V, E)$  hat nach Korollar 4.1.14 auf ausgehenden Kanten von  $X$  Auslastung  $q^*$  und verschwindet auf eingehenden Kanten. Schränkt man einen solchen also auf  $E[X]$  ein, erhält man einen  $b[X]$ -Fluss. Daher ist eine durch einen dünnsten Schnitt induzierte Teilinstanz wieder eine  $b$ -Fluss-Instanz.

**Proposition 5.2.5.** Seien  $f$  ein  $b$ -Fluss minimaler Auslastung  $q^*$  einer  $b$ -Fluss-Instanz in einem  $s$ -Netzwerks mit  $b_s > 0$  und  $X$  ein dünnster Schnitt, so stimmen die Knotenauslastungen  $l$  von  $f$  auf  $X$  mit der Knotenauslastung  $l'$  von  $f'$  überein. Ist  $X$  inklusionsminimal, so existiert ein  $b[X]$ -Fluss in  $(X, E[X])$ , dessen Auslastung geringer als  $q^*$  ist.

*Beweis.* Da  $X$  ein dünnster Schnitt in einem  $s$ -Netzwerk mit  $b_s > 0$  ist, liegt  $s$  in  $X$ , da  $X$  nur so eine positive Auslastung haben kann. Sei ein beliebiger Knoten  $v$  aus  $X$  gegeben. Da jeder  $s$ - $v$ -Pfad in  $(X, E[X])$  auch in  $(V, E)$  enthalten ist, ist die Auslastung  $l'_v$  bereits mindestens  $l_v$ . Angenommen,  $l_v$  beträgt  $q^*$ , so gilt automatisch  $l_v \geq l'_v$ . Seien also  $l_v < q^*$  und  $P$  ein  $s$ - $v$ -Pfad mit Auslastung  $l_v$  bzgl.  $f$  in  $(V, E)$ . Dann ist jede Kante in  $P$  auch in  $E[X]$  enthalten, da ausgehende Kanten aus  $X$  Auslastung  $q^*$  bzgl.  $f$  haben. Insbesondere gilt also auch hier  $l_v \geq l'_v$ .

Sei  $X$  nun außerdem inklusionsminimal. Gilt  $b[X]_s = 0$ , so ist die Aussage klar. Sonst existiert wieder ein dünnster Schnitt  $Y$  auf  $(X, E[X])$  bezüglich der Balancen  $b[X]$ . Angenommen, die Auslastung von  $Y$  ist  $q^*$ , so ist die Einschränkung von  $f$  auf  $E[X]$  ein auslastungsminimaler  $b[X]$ -Fluss ist. Dann ist  $Y$  nach Korollar 4.1.14 ein dünnster Schnitt von  $(V, E)$  bezüglich den Balancen  $b$ . Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Inklusionsminimalität von  $X$ .  $\square$

Daher kann man bereits erkennen, dass ein schmaler Fluss ohne Zurücksetzen eingeschränkt auf eine durch einen dünnsten Schnitt induzierte Teilinstanz wieder ein schmaler Fluss ist. Das Ziel ist es nun, aus einem schmalen Fluss der Teilinstanz einen schmalen Fluss auf der ursprünglichen Instanz zu konstruieren.

**Lemma 5.2.6.** Seien ein  $b$ -Fluss  $f$  minimaler Auslastung  $q^*$  mit zugehöriger Knotenauslastung  $l$  und ein dünnster Schnitt  $X$  in einem  $s$ -Netzwerk ohne zurücksetzende Kanten gegeben. Für alle  $v \in V \setminus X$  hat jeder  $s$ - $v$ -Pfad  $P$  Auslastung  $q^* = l_v$ .

*Beweis.* Ist  $b$  der Nullvektor, so ist  $f$  der Nullfluss und  $l_v = 0$  für alle  $v \in V$ . Sonst ist  $s$  in  $X$  enthalten und für alle  $v \in V \setminus X$  enthält jeder  $s$ - $v$ -Pfad mindestens eine Kante, die  $X$  verlässt und nach Korollar 4.1.14 Auslastung  $q^*$  besitzt. Da das Netz keine zurücksetzenden Kanten hat, beträgt die Auslastung jedes Pfades also  $q^*$ .  $\square$

**Korollar 5.2.7.** *Seien ein  $b$ -Fluss  $f$  minimaler Auslastung sowie ein dünnster Schnitt  $X$  auf einem  $s$ -Netzwerk ohne zurücksetzende Kanten gegeben. Ist  $f'$  ein schmaler Fluss ohne Zurücksetzen auf der durch  $X$  induzierten Teilinstanz, so ist  $g := f' \sqcup f$  definiert durch*

$$g_e := \begin{cases} f'_e, & \text{falls } e \in E[X], \\ f_e, & \text{falls } e \in E \setminus E[X], \end{cases}$$

*ein schmaler Fluss ohne Zurücksetzen auf der ursprünglichen Instanz.*

*Beweis.* Es ist leicht zu sehen, dass  $g$  ein  $b$ -Fluss minimaler Auslastung  $q^*$  ist: Für einen Knoten  $v \in V \setminus X$  ist  $g(\delta_E^+(v)) - g(\delta_E^-(v)) = f(\delta_E^+(v)) - f(\delta_E^-(v)) = b_v$  und für  $v \in X$  gilt

$$\begin{aligned} g(\delta_E^+(v)) - g(\delta_E^-(v)) &= f'(\delta_{E[X]}^+(v)) - f'(\delta_{E[X]}^-(v)) \\ &\quad + f(\delta_E^+(v) \cap \delta_E^+(X)) - f(\delta_E^-(v) \cap \delta_E^-(X)) \\ &= b[X]_v + u(\delta_E^+(v) \cap \delta_E^+(X))q^* = b_v \end{aligned}$$

Sei ein  $s$ - $v$ -Pfad  $P$  mit positivem Fluss gegeben. Ist  $v$  nicht in  $X$  enthalten, so hat  $P$  nach Lemma 5.2.6 Auslastung  $l_v$ . Liegt  $v$  in  $X$ , muss  $P$  entlang Kanten innerhalb von  $X$  laufen, da  $g$  auf eingehenden Kanten von  $X$  verschwindet. Nach Proposition 5.2.5 stimmt die Auslastung von  $v$  bezüglich der Einschränkung von  $f$  mit der Auslastung von  $v$  bezüglich  $f$  überein, sodass auch die Auslastung von  $P$  mit der Auslastung von  $v$  bezüglich  $f$  übereinstimmt.  $\square$

Dies bildet die Grundlage des polynomiellen Algorithmus 5.1 zur Berechnung von schmalen Flüssen ohne Zurücksetzen.

---

**Algorithmus 5.1** Berechnung eines schmalen Flusses ohne Zurücksetzen

---

```

1: procedure THINFLOWWITHOUTRESETTING( $V, E, u, s, b$ )
2:    $f \leftarrow 0^E$ 
3:    $(V', E', b') \leftarrow (V, E, b)$ 
4:   while  $b'_s \neq 0$  do
5:     Berechne auslastungsminimalen  $b'$ -Fluss  $f'$  und inklusionsminimalen,
       dünnsten Schnitt  $X$  auf  $(V', E', b')$  mit Kapazitäten  $u|_{E'}$ 
6:      $f|_{E' \setminus E'[X]} \leftarrow f'|_{E' \setminus E'[X]}$ 
7:      $(V', E', b') \leftarrow (V'[X], E'[X], b'[X])$ 
8:   end while
9:   return  $f$ 
10: end procedure
    
```

---

**Theorem 5.2.8.** *Algorithmus 5.1 löst das Problem (TFWOR) und berechnet einen schmalen Fluss ohne Zurücksetzen mit  $\mathcal{O}((\langle b \rangle + \langle u \rangle)n^2mL)$  arithmetischen Operationen, wobei  $L := |\{l_v \mid v \in V\}|$  die Anzahl der verschiedenen Knotenauslastungen eines schmalen Flusses ohne Zurücksetzen ist.*



*Beweis.* Für die Korrektheit des Algorithmus benutzt man Korollar 5.2.7: Man prüfe die folgende Invariante der Schleife: „ $f$  verschwindet auf  $E'$  und ist  $g$  ein schmaler Fluss auf  $(V', E', b')$ , so ist  $g \sqcup f$  ein schmaler Fluss auf  $(V, E, b)$ .“ Zu Beginn gilt dies offenbar, da in diesem Fall  $(V', E', b')$  mit  $(V, E, b)$  übereinstimmt und  $f$  mit Nullen initialisiert wurde. Nun betrachte man die Invariante im Verlauf einer Iteration. Seien dazu  $(f^1, V^1, E^1, b^1)$  die Werte von  $(f, V', E', b')$  zu Beginn der Iteration, für die die Invariante bereits gilt, und  $(f^2, V^2, E^2, b^2)$  die Werte nach Ende der Iteration. Dann sei  $f'$  der berechnete auslastungsminimale Fluss auf  $(V^1, E^1, b^1)$  und  $(V^2, E^2, b^2)$  die durch den dünnsten Schnitt  $X$  induzierte Teilinstanz von  $(V^1, E^1, b^1)$ . Man nehme nun an,  $g$  sei ein schmaler Fluss auf  $(V^2, E^2, b^2)$ . Dann ist  $g \sqcup f^2_{|E^1} = g \sqcup f'$  nach Korollar 5.2.7 ein schmaler Fluss auf  $(V^1, E^1, b^1)$  und aufgrund der Invariante ist  $g \sqcup f^2 = (g \sqcup f') \sqcup f^1$  ein schmaler Fluss auf  $(V, E, b)$ . Außerdem verschwindet  $f^2$  auf  $E^2$ , da  $f$  nur auf  $E^1 \setminus E^2$  verändert wird. Terminiert die Schleife, so ist  $b_s = 0$ , wodurch die Voraussetzung der Invariante für den Nullfluss  $f_{|E'}$  erfüllt ist, sodass  $f$  ein schmaler Fluss ist.

Da die Existenz eines  $b$ -Flusses vorausgesetzt wird, ist auch die Berechnung eines auslastungsminimalen Flusses in jeder Iteration möglich, weil die Einschränkung eines auslastungsminimalen  $b$ -Flusses auf  $E[X]$  ein  $b[X]$ -Fluss ist, sodass auch in jeder Iteration ein  $b'$ -Fluss existiert.

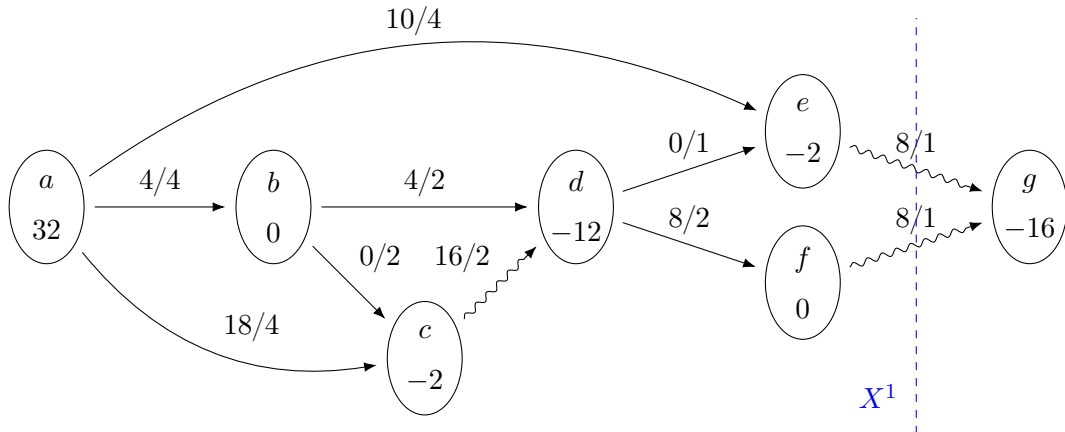
Daher terminiert der Algorithmus nach mindestens  $L$  Iterationen, denn in jeder Iteration wird die minimale Auslastung eines  $b'$ -Flusses nach Proposition 5.2.5 echt reduziert. Außerdem kann ein auslastungsminimaler  $b'$ -Fluss nach Theorem 4.2.23 mit  $\mathcal{O}((\langle b \rangle + \langle u \rangle)n^2m)$  Operationen bestimmt werden. Daraus kann man nach Lemma 4.1.15 in  $\mathcal{O}(n+m)$  arithmetischen Operationen einen dünnsten Schnitt gewinnen, sodass der gesamte Algorithmus  $\mathcal{O}((\langle b \rangle + \langle u \rangle)n^2mL)$  Operationen benötigt.  $\square$

Die Funktionsweise des Algorithmus soll durch das folgende Beispiel illustriert werden:

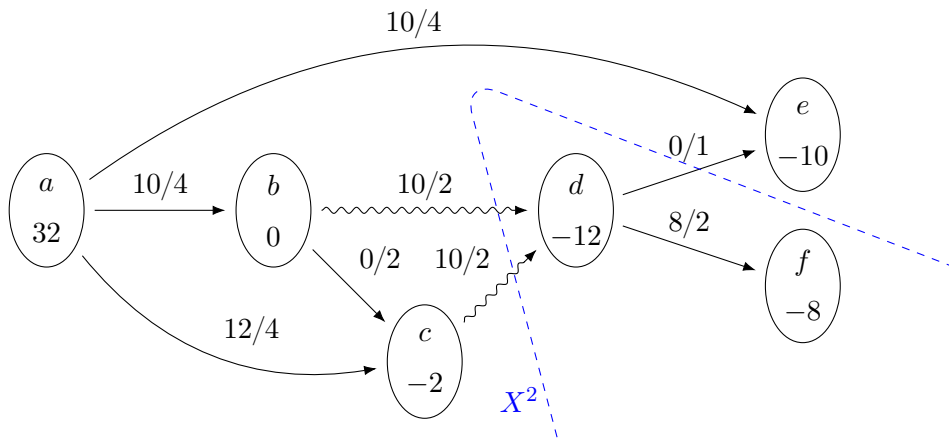
**Beispiel 5.2.9.** In Abbildung 5.2.1 sieht man den Algorithmus 5.1 in Aktion. Dabei wird als Eingabeinstanz der Graph aus Abbildung 5.1.1 verwendet.

Der erste Schritt besteht darin, in der ersten Iteration einen auslastungsminimalen  $b$ -Fluss sowie einen dünnsten Schnitt auf dem Ursprungsnetzwerk zu berechnen. Dabei erhält man den  $b$ -Fluss in Abbildung 5.2.1a mit dem Schnitt  $X^1 := V \setminus \{g\}$  bei Auslastung  $q^1 := 8$ . Zu diesem Zeitpunkt weiß man bereits, dass der Fluss auf allen Kanten, die nicht innerhalb von  $X^1$  verlaufen, hier  $(e, g)$  und  $(f, g)$ , bereits in den entstehenden schmalen Fluss ohne Zurücksetzen übernommen werden können. Alle ausgehenden Kanten von  $X^1$  haben nämlich die maximale Auslastung  $q^1$ , sodass auch schon die Knotenauslastung aller Knoten außerhalb  $X^1$  gerade  $q^1$  ist.

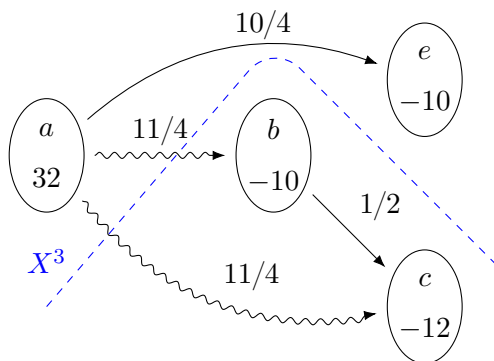
Daher wird nun der Graph auf die von  $X$  induzierte Teilinstanz reduziert: Dabei wird die Balance der Knoten  $e$  und  $f$  wegen der entfernten Kanten  $(e, g)$  und  $(f, g)$  um jeweils 8 reduziert und man sucht jetzt nach einem schmalen Fluss ohne Zurücksetzen auf dieser Teilinstanz. Ein auslastungsminimaler Fluss  $f^2$  und der zugehörige dünnste Schnitt  $X^2 = \{a, b, c, e\}$  bei Auslastung  $q^2 = 5$  sind in Abbildung 5.2.1b zu sehen. Man erkennt außerdem, dass eingehende Kanten in den dünnsten Schnitt bereits Nullkanten sind – hier betrifft es die Kante  $(d, e)$ . Die Knotenauslastung auf  $d$  und  $f$  beträgt damit gerade  $q^2 = 5$ .



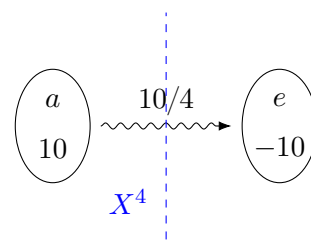
(a) Erste Iteration. Die Auslastung der Flaschenhalskanten beträgt 8.



(b) Zweite Iteration. Die Auslastung der Flaschenhalskanten beträgt 5.



(c) Dritte Iteration. Die Auslastung der Flaschenhalskanten beträgt 2,75.



(d) Vierte Iteration. Die Auslastung der Flaschenhalskante beträgt 2,5.

Abbildung 5.2.1: Algorithmus zur Bestimmung von schmalen Flüssen ohne Zurücksetzen. Geschlängelte Kanten sind Flaschenhalskanten in den jeweiligen auslastungsminimalen Flüssen. Kanten  $e$  sind mit  $f_e/u_e$  und Knoten mit der Bezeichnung und der Balance beschriftet.

Führt man dies im selben Schema in Iteration drei und vier, wie in den Abbildungen 5.2.1c und 5.2.1d zu sehen ist, weiter, bemerkt man, dass das Angebot von  $s$  nach Iteration drei bereits um 22 verringert wurde und nach Iteration vier gänzlich verschwunden ist. Der berechnete schmale Fluss ohne Zurücksetzen ist schließlich in Abbildung 5.1.1b dargestellt.

### 5.2.2 Berechnung schmaler Flüsse mit Zurücksetzen

Nachdem im letzten Abschnitt herausgearbeitet wurde, dass schmale Flüsse ohne Zurücksetzen in polynomieller Zeit ermittelbar sind, wird in diesem Abschnitt die Problemstellung wieder allgemein mit zurücksetzenden Kanten betrachtet. In Theorem 5.1.12 wurde bereits die Existenz solcher Flüsse gezeigt. Die Tatsache, dass im Beweis dieses Theorems der Fixpunktsatz von Kakutani benutzt wird, kann Aufschluss darüber geben, in welcher Komplexitätsklasse das untersuchte Problem liegt: Papadimitriou hat 1992 in [Pap94] unter anderen die Komplexitätsklasse **PPAD** eingeführt, da sich die Komplexität vieler Probleme mit ähnlichem Existenzbeweis nicht in eine der bestehenden Komplexitätsklassen eingliedern ließ.

Die Abkürzung **PPAD** ist kurz für „Polynomial Parity Argument on Directed Graphs“. Das Paritätsargument beruht dabei darauf, dass für jeden gerichteten Graphen mit einem unbalancierten Knoten, d.h. einem Knoten, dessen Eingangsgrad ungleich seinem Ausgangsgrad ist, ein weiterer unbalancierter Knoten existiert. Dies folgt leicht aus der Gradgleichung

$$2|E| = \sum_{v \in V} (|\delta^+(v)| + |\delta^-(v)|),$$

denn gäbe es sonst keinen weiteren unbalancierten Knoten, so wäre der rechte Teil der Gleichung ungerade, der linke jedoch gerade. Für die Definition von **PPAD** führt man zunächst das sogenannte ENDOFALINE-Problem ein. Der Eingangs- und Ausgangsgrad jedes Knotens eines gerichteten Graphen sei dabei maximal 1. Ein Knoten mit Eingangsgrad 0 und Ausgangsgrad 1 heiße dann *Quelle* und ein Knoten mit Eingangsgrad 1 und Ausgangsgrad 0 heiße *Senke*. Das Problem besteht nun darin, ausgehend von einer Quelle eine Senke oder eine weitere Quelle zu finden. Die einfachste Lösung wäre hier natürlich, ausgehend von der Quelle solange den ausgehenden Kanten zu folgen bis man an einer Senke angelangt. Jedoch betrachtet man hier Graphen, die exponentiell in der Eingabe wachsen können:

Knoten in diesem Graphen sind repräsentiert durch  $n$  Bits in der Knotenmenge  $V := \{0, 1\}^n$ . Kanten werden dann durch eine Nachfolger-Funktion  $S : V \rightarrow V \dot{\cup} \{\varepsilon\}$  und eine Vorgänger-Funktion  $P : V \rightarrow V \dot{\cup} \{\varepsilon\}$  kodiert, die jeweils polynomiell berechenbar sind und die Eigenschaft  $S(x) = y \Leftrightarrow P(y) = x$  für alle  $x, y \in V$  erfüllen. Eine Kante  $(x, y)$  zwischen zwei Knoten  $x, y \in V$  soll also genau dann existieren, wenn  $S(x) = y$  und  $P(y) = x$  erfüllt sind. Ein Knoten  $x$  ist also eine Quelle oder eine Senke, wenn er entweder keinen Vorgänger oder keinen Nachfolger, d.h. wenn entweder  $P(x)$  oder  $S(x)$  gerade  $\varepsilon$  ist. Mit diesen Grundlagen kann das Problem nun formalisiert werden:

## ENDOFALINE

**Input:** Polynomiell berechenbare Funktionen  $S, P : V \rightarrow V \cup \{\varepsilon\}$  mit  $S(x) = y \Leftrightarrow P(y) = x$  für alle  $x, y \in V$  und  $P(0^n) = \varepsilon \neq S(0^n)$  sowie eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $V = \{0, 1\}^n$ .

**Output:** Ein Knoten  $x \in V \setminus \{0^n\}$  mit  $\{P(x), S(x)\} \subsetneq \{\varepsilon\}$ .

Aufbauend auf diesem Problem formuliert man nun die Komplexitätsklasse **PPAD**:

**Definition 5.2.10.** Die Komplexitätsklasse **PPAD** enthält alle Suchprobleme, die sich polynomiell auf ENDOFALINE reduzieren lassen.

Per Definition ist also das Problem ENDOFALINE vollständig in **PPAD**. Goldberg und Hollender zeigen in [GH19, Theorem 15], dass auch die allgemeinere Variante, also gegeben eines unbalancierten Knotens einen weiteren unbalancierten Knoten zu finden, vollständig in **PPAD** ist.

Es stellt sich zudem heraus, dass die Klasse **PPAD** schwache Approximationen von Fixpunkten erlaubt, die durch verschiedene Fixpunktsätze bewiesen werden können. Ein Beispiel dafür ist der Brouwer'sche Fixpunktsatz, welcher besagt, dass jede stetige Selbstabbildung  $f$  einer nichtleeren, kompakten und konvexen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  einen Fixpunkt  $x$  mit  $f(x) = x$  hat. Die folgende diskrete Version davon ist nach [Das19] vollständig in **PPAD**:

## BROUWER

**Input:** Polynomiell berechenbare Funktion  $F : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ , eine Konstante  $K$  mit  $\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq K\|x - y\|_\infty$  für alle  $x, y \in [0, 1]^m$  sowie die Genauigkeit  $\varepsilon > 0$ .

**Output:** Ein Punkt  $x \in [0, 1]^m$  mit  $\|F(x) - x\|_\infty \leq \varepsilon$ .

Papadimitriou gibt in [Pap94] auch an, dass eine Version des Fixpunktsatzes von Kakutani ebenfalls in **PPAD** liegt. Dies wird in [CCL15] aufgegriffen und benutzt, um zu begründen, dass die Berechnung eines schmalen Flusses mit Zurücksetzen ebenfalls in dieser Komplexitätsklasse liegt. Allerdings nennt Papadimitriou wenig Details darüber, welche konkrete Version des Fixpunktsatzes von Kakutani in **PPAD** liegt. Auch die Kodierung einer Korrespondenz, d.h. einer mengenwertigen Funktion, wie sie im Fixpunktsatz von Kakutani verwendet wird, ist nicht offensichtlich. Daher wird dies als Vermutung festgehalten:

*Vermutung 5.2.11.* Das Problem (TFwR) der Berechnung eines schmalen Flusses mit Zurücksetzen liegt in **PPAD**.

Nichtsdestotrotz wird im weiteren Verlauf dieses Abschnitts der Zusammenhang zwischen schmalen Flüssen mit Zurücksetzen und schmalen Flüssen ohne Zurücksetzen erarbeitet, um einen Kandidaten für die Anwendung des Brouwerschen Suchproblems zu finden. Dieser wurde auch in [Koc12] eingeführt. Dazu wird mit der Transformierung eines Netzwerks mit zurücksetzenden Kanten zu seinem verankerten Netzwerk ohne zurücksetzende Kanten begonnen:

**Definition 5.2.12** (Verankertes Netzwerk). Sei ein  $s$ -Netzwerk  $\mathcal{N}$  mit Zurücksetzen auf  $E_1$  gegeben. Das *verankerte Netzwerk*  $\mathcal{N}'$  von  $\mathcal{N}$  entstehe aus dem Umbiegen jeder zurücksetzenden Kante  $e \in E_1$ , sodass diese in  $s$  statt in  $\text{tail}(e)$  startet. Die umgebogene Kante  $e_s$  wird als die *verankerte Kante von  $e$*  bezeichnet und soll die gleiche Kapazität haben wie  $e$ , jedoch keine zurücksetzende Kante sein.

Dieses Konzept verhilft zur folgenden Einsicht:

**Lemma 5.2.13.** Seien  $\mathcal{N} := (V, E, u, s, E_1)$  ein zurücksetzendes  $s$ -Netzwerk und  $\mathcal{N}'$  sein verankertes Netzwerk. Seien  $f$  ein Fluss auf  $\mathcal{N}$  und  $f'$  ein Fluss auf  $\mathcal{N}'$ , der aus  $f$  durch Übernehmen des Flusses der zurücksetzenden auf die verankerten Kanten entsteht. Dann stimmen die Knotenauslastungen beider schmaler Flüsse überein und  $f$  ist genau dann ein schmaler  $b$ -Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$  in  $\mathcal{N}$ , wenn  $f'$  ein schmaler  $b'$ -Fluss ohne Zurücksetzen in  $\mathcal{N}'$  ist, wobei  $b'$  gegeben ist durch

$$b'_s = b_s + f(E_1) \quad \text{und} \quad b'_v = b_v - f(\delta^+(v) \cap E_1) \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{s\}.$$

*Beweis.* Zunächst vergewissere man sich, dass  $f$  und  $f'$  die gleichen Knotenauslastungen erzeugen: Ein  $s$ - $v$ -Pfad  $P$ , der keine zurücksetzende bzw. verankerte Kante benutzt, existiert in beiden Netzwerken und hat bzgl.  $f$  und  $f'$  die gleiche Auslastung. Ist  $P$  jedoch ein Pfad in  $\mathcal{N}$ , der eine zurücksetzende Kante verwendet, so betrachte man den Teilpfad ab der letzten zurücksetzenden Kante in  $P$  und ersetze die zurücksetzende mit der verankerten Kante. Dann erhält man einen  $s$ - $v$ -Pfad in  $\mathcal{N}'$ , der die gleiche Auslastung wie  $P$  hat. Ist umgekehrt  $P$  ein Pfad in  $\mathcal{N}'$ , der eine verankerte Kante verwendet, so ersetze man diese mit der zugehörigen zurücksetzenden Kante  $uv$  und hänge den entstehenden Pfad an einen beliebigen  $s$ - $u$ -Pfad an. Dadurch erhält man einen  $s$ - $v$ -Pfad in  $\mathcal{N}$ , der die gleiche Auslastung wie  $P$  hat.

Per Konstruktion ist außerdem  $f$  genau dann ein  $b$ -Fluss, wenn  $f'$  ein  $b'$ -Fluss ist. Für die restliche Aussage werden die Kriterien für schmale Flüsse aus Lemma 5.1.7 genutzt und die Eigenschaften (T3) und (T4) für die zurücksetzenden bzw. verankerten Kanten gezeigt. Sei zunächst  $f$  ein schmaler Fluss in  $\mathcal{N}$  und  $vw_s$  eine verankerte Kante in  $\mathcal{N}'$  mit  $f'_{vw_s} > 0$ . Dann gilt (T3) für  $vw_s$  wegen

$$l_w = \frac{f_{vw}}{u_{vw}} = \frac{f'_{vw_s}}{u'_{vw_s}} = \max \left\{ l_s, \frac{f'_{vw_s}}{u'_{vw_s}} \right\}$$

nach (T4) für  $vw$ . Seien umgekehrt  $f'$  ein schmaler Fluss in  $\mathcal{N}'$  und  $vw$  eine zurücksetzende Kante in  $\mathcal{N}$ . Ist  $f_{vw} = 0$ , so gilt  $l_w \leq l_s = 0 = f_{vw}/u_{vw}$  wegen (T2) für  $vw_s$ . Sonst gilt (T4) für  $vw$  aufgrund von (T3) für  $vw_s$ :

$$l_w = \max \left\{ l_s, \frac{f'_{vw_s}}{u'_{vw_s}} \right\} = \frac{f_{vw}}{u_{vw}}.$$

□

Es ist nun erkennbar, dass sich das Bestimmen eines schmalen Flusses mit Zurücksetzen auf das Bestimmen seines Wertes auf den zurücksetzenden Kanten reduzieren lässt: Sind nämlich die Werte eines schmalen Flusses auf den zurücksetzenden Kanten – welche nach Korollar 5.1.11 eindeutig sind – bekannt, so kann man einen schmalen

Fluss ohne Zurücksetzen auf dem verankerten Netzwerk mit Balancen  $b'$  wie in Lemma 5.2.13 berechnen, um so einen schmalen Fluss auf dem ursprünglichen Netzwerk zu erhalten. Dies verhilft auch zu einem Kandidaten für die Fixpunktiteration nach Brouwer:

**Definition 5.2.14.** Für ein  $s$ -Netzwerk  $\mathcal{N} := (V, E, u, s, E_1)$  mit Zurücksetzen und Balancen  $b$  seien  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^{E_1}$  die Menge aller Werte, die ein  $b$ -Fluss in  $\mathcal{N}$  auf den Kanten  $E_1$  annehmen kann, und  $\mathcal{N}'$  das verankerte Netzwerk von  $\mathcal{N}$ . Dann bezeichne  $\Phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  die Funktion, die einem Vektor  $f \in \Sigma$  die Werte der verankerten Kanten eines schmalen  $b'$ -Flusses ohne Zurücksetzen in  $\mathcal{N}'$  bei Balancen  $b'$  mit

$$b'_s := b_s + f(E_1) \quad \text{und} \quad b'_v := b_v - f(\delta^+(v) \cap E_1) \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{s\}$$

zuweist.

Zunächst bemerke man, dass  $\Phi$  wohldefiniert und eindeutig ist: Einen schmalen  $b'$ -Fluss auf  $\mathcal{N}'$  kann man auch als  $b$ -Fluss auf  $\mathcal{N}$  interpretieren, wobei die Flusswerte der verankerten Kanten auf die zurücksetzenden Kanten übertragen werden; insbesondere liegt der Zielbereich von  $\Phi$  tatsächlich in  $\Sigma$ . Da jeder schmale Fluss  $f$  in  $\mathcal{N}'$  im Sinne von Lemma 5.2.13 auch ein schmaler Fluss auf  $\mathcal{N}$  mit Zurücksetzen auf  $E_1$  und geeigneten Balancen ist und der Fluss auf zurücksetzenden Kanten nach 5.1.11 eindeutig ist, ist auch der Fluss auf den verankerten Kanten eindeutig.

Außerdem ist die Menge  $\Sigma$  nichtleer, kompakt und konvex, da sie eine Projektion des nichtleeren Polytops  $\{f \mid f \text{ ist } b\text{-Fluss}\}$  auf  $E_1$  ist. Wir betrachten nun die Fixpunkte von  $\Phi$ :

**Proposition 5.2.15.** *Die Funktion  $\Phi$  hat auf  $\Sigma$  genau einen Fixpunkt  $x$ , wobei  $x$  aus den Werten der zurücksetzenden Kanten eines schmalen  $b$ -Flusses in  $\mathcal{N}$  besteht.*

*Beweis.* Man folgert dies leicht aus Lemma 5.2.13: Es ist  $x$  genau dann ein Fixpunkt von  $\Phi$ , wenn ein schmaler  $b'$ -Fluss  $f$  ohne Zurücksetzen auf  $\mathcal{N}'$ , der auf den verankerten Kanten  $x$  entspricht, existiert. Dabei ist  $b'$  der Vektor wie in Definition 5.2.14. Nach Lemma 5.2.13 entspricht  $f$  einem schmalen Fluss mit Zurücksetzen auf  $\mathcal{N}$ .  $\square$

Koch gelangt mittels einer Sensitivitätsanalyse von schmalen Flüssen ohne Zurücksetzen zu folgendem Theorem in [Koc12, Theorem 6.53]:

**Theorem 5.2.16.** *Seien zwei schmale Flüsse  $f$  und  $\tilde{f}$  ohne Zurücksetzen bzgl. den Balancen  $b$  und  $\tilde{b}$  mit  $b_v \leq \tilde{b}_v$  für alle  $v \in V \setminus \{s\}$  gegeben. Dann gilt  $\tilde{f}_e \geq f_e$  für alle  $e \in E$  und  $\tilde{f}_e - f_e \leq \tilde{b}_s - b_s$  für alle Kanten  $e \in \delta^+(s)$ .*

Damit lässt sich folgern, dass  $\Phi$  eine Lipschitzstetige Funktion ist:

**Korollar 5.2.17.** *Für ein  $s$ -Netzwerk mit Zurücksetzen auf  $E_1$  und Zurücksetzen auf  $E_1$  ist  $\Phi$  eine stetige Funktion mit Lipschitzkonstante  $|E_1|$  bzgl. der Maximumsnorm.*

*Beweis.* Seien  $x, y$  aus  $\Sigma$  gegeben. Man zeige  $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq |E_1| \|x - y\|_\infty$ . Seien für  $h \in \{x, y\}$  die Balancen  $b_s^h := b_s + h(E_1)$  und  $b_v^h := b_v - h(\delta^+(v) \cap E_1)$  für  $v \in V \setminus \{s\}$  gegeben. Man definiere weiter die Balancen  $b_v^z := \min\{b_v^x, b_v^y\}$  für alle  $v \in V \setminus \{s\}$  und  $b_s^z := -b^z(V \setminus \{s\})$ . Sei  $f^h$  ein schmaler  $b^h$ -Fluss ohne Zurücksetzen in

$\mathcal{N}'$  für  $h \in \{x, y, z\}$ . Dann ist  $f_{|E_1}^h = \Phi(h)$  für  $h \in \{x, y\}$  und nach Theorem 5.2.16 gilt für alle  $e \in E_1$ :

$$0 \leq f_e^z - f_e^h \leq b_s^z - b_s^h = - \sum_{v \in V \setminus \{s\}} (b_v^z + b_v^h).$$

Daraus lässt sich für alle Kanten  $e \in E_1$  mit der Dreiecksungleichung folgern:

$$\begin{aligned} |f_e^x - f_e^y| &\leq \sum_{v \in V \setminus \{s\}} (b_v^x - b_v^z + b_v^y - b_v^z) = \sum_{v \in V \setminus \{s\}} |b_v^x - b_v^y| \\ &= \sum_{v \in V \setminus \{s\}} |x(\delta_{\mathcal{N}}^+(v) \cap E_1) - y(\delta_{\mathcal{N}}^+(v) \cap E_1)| \\ &\leq \sum_{v \in V \setminus \{s\}} \sum_{e \in \delta_{\mathcal{N}}^+(v) \cap E_1} |x_e - y_e| = \sum_{e \in E_1} |x_e - y_e| \leq |E_1| \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Will man nun die Kenntnisse über das BROUWER Problem nutzen, könnte man anstreben, das folgende Problem einer schwachen Approximation darauf zu reduzieren:

*Approximate Thin Flow with Resetting ( $\varepsilon$ -TFWR)*

**Input:**  $s$ -Netzwerk mit Zurücksetzen  $(V, E, u \in \mathbb{Q}_{>0}^E, s \in V, E_1 \subseteq E)$ ,  
Balancen  $b \in \mathbb{Q}^V$  und Genauigkeit  $\varepsilon > 0$ .  
**Output:** Ein schmaler  $b'$ -Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$  und  $\|b' - b\|_\infty \leq \varepsilon$ .

**Lemma 5.2.18.** *Liegt das Problem BROUWER sogar bei Eingabe von Funktionen, die auf einem Polytop in Normalform definiert sind, in **PPAD**, so ist auch das Problem ( $\varepsilon$ -TFWR) in **PPAD** enthalten.*

*Beweis.* Sei eine rationale THINFLOW Instanz und eine Genauigkeit  $\varepsilon$  gegeben. Sei  $f \in \Sigma$  mit  $\|\Phi(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon/|E_1|$  die Lösung der Instanz von BROUWER bei Eingabe von  $\Phi$  und der Genauigkeit  $\varepsilon/|E_1|$ . In polynomieller Zeit kann man dann einen schmalen Fluss  $g$  ohne Zurücksetzen im verankerten Netzwerk bei Balancen  $b''$  mit  $b_s'' = b_s + f(E_1)$  und  $b_v'' = b_v - f(\delta^+(v) \cap E_1)$  für  $v \in V \setminus \{s\}$  berechnen. Dieser ist nach Lemma 5.2.13 auch ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen im ursprünglichen Netzwerk bei den Balancen  $b'$  mit  $b_s' = b_s + (f - g)(E_1)$  und  $b_v' = b_v + (f - g)(\delta^+(v) \cap E_1)$  für  $v \in V \setminus \{s\}$ . Insbesondere gilt also  $\|b - b'\|_\infty \leq \sum_{e \in E_1} |f_e - g_e| \leq \varepsilon$ . □

Ob das Problem BROUWER dahingehend verallgemeinert werden kann, dass als Definitionsbereich ein allgemeines Polytop in Normalform verwendet werden kann, bleibt an dieser Stelle jedoch offen. Da wir außerdem schon gesehen haben, dass bei rationalen Kapazitäten und Balancen auch eine rationale Lösung existiert, bleibt die Hoffnung erhalten, dass auch die exakte Berechnung (TFWR) in **PPAD** liegt. Beides könnte durch eine Anpassung der Triangulation erreicht werden, die bei der Reduktion von BROUWER auf eine Version des Lemma von Sperner, welche selbst vollständig in **PPAD** liegt, gebildet wird. Dabei könnten außerdem die Erkenntnisse aus Abschnitt 4.2.2, der Einblicke in die exakte Suche rationaler Zahlen gibt, hilfreich sein.

### 5.3 Berechnung dynamischer Nash-Flüsse mit schmalen Flüssen

In diesem Abschnitt soll es schließlich darum gehen, den Zusammenhang zwischen dynamischen Nash-Flüssen und schmalen Flüssen mit Zurücksetzen aufzuzeigen. Danach wird kurz auf die Existenz dynamischer Nash-Flüsse und deren Berechnung bei konstanter Einflussrate in das Netzwerk eingegangen. Dazu wird wieder die Notation dynamischer Flüsse aus den Kapiteln 2 und 3 verwendet.

Für diese Ergebnisse werden schmale Flüsse mit einer kleinen Modifikation eingeführt:

**Definition 5.3.1** (Normierter schmaler Fluss). Seien ein  $s$ -Netzwerk  $\mathcal{N}$  und ein  $b$ -Fluss  $f$  gegeben. Für einen  $s$ - $v$ -Pfad  $P = (e_1, \dots, e_k)$  bezeichnet die *normierte Auslastung von  $P$*  die Verkettung  $\rho_{e_k}(\cdot, f_{e_k}) \circ \dots \circ \rho_{e_1}(\cdot, f_{e_1})(1)$ . Die zu  $f$  gehörige *normierte Knotenauslastung*  $l \in \mathbb{R}^V$  ist für jeden Knoten  $v \in V$  die minimale normierte Auslastung eines  $s$ - $v$ -Pfades. Dann heißt  $f$  ein *normierter  $b_s$ -wertiger schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $E_1$* , falls die normierte Auslastung jedes  $s$ - $v$ -Pfades mit positivem Fluss  $l_v$  beträgt.

Schnell kann man sehen, dass sich die Ergebnisse aus den vorherigen Abschnitten ohne großen Aufwand auf normierte schmale Flüsse übertragen lassen:

**Proposition 5.3.2.** *Es sei ein  $b$ -Fluss  $f$  in einem  $s$ -Netzwerk  $\mathcal{N}$  mit  $b_s > 0$  gegeben. Man erhalte das Netzwerk  $\mathcal{N}'$  aus  $\mathcal{N}$ , indem man einen zusätzlichen Knoten  $s'$  und eine Kante  $(s, s')$  mit Kapazität  $b_s$  hinzufügt und das Angebot von  $s$  mit  $b'_s := 0$  und  $b'_{s'} := b_s$  auf  $s'$  überträgt. Ergänzt man  $f$  durch den Flusswert  $b_s$  auf der Kante  $(s', s)$ , so erhält man den  $b'$ -Fluss  $f'$ .*

*Dann ist die normierte Auslastung jedes  $s$ - $v$ -Pfades  $P$  in  $\mathcal{N}$  gerade die Auslastung des  $s'$ - $v$ -Pfades  $P'$  in  $\mathcal{N}'$ , der vor dem Pfad  $P$  noch die Kante  $(s', s)$  benutzt. Insbesondere ist  $f$  genau dann ein normierter schmaler Fluss in  $\mathcal{N}$ , wenn  $f'$  ein schmaler Fluss in  $\mathcal{N}'$  ist.*

*Beweis.* Die Kante  $(s', s)$  hat für jeden  $b'$ -Fluss Auslastung 1. Daher ist die normierte Auslastung eines  $s$ - $v$ -Pfades in  $\mathcal{N}$  gerade die Auslastung des durch die Kante  $(s', s)$  verlängerten Pfades in  $\mathcal{N}'$ .  $\square$

Dadurch kann ein normierter schmaler Fluss durch die Bestimmung eines schmalen Flusses ermittelt werden. Außerdem können Lemma 5.1.9 ohne Veränderung und Lemma 5.1.7 mit der kleinen Modifikation, dass statt (T1), also  $l_s = 0$ , hier  $l_s = 1$  gelten muss, für normierte schmale Flüsse übernommen werden.

Das folgende Theorem liefert das Resultat, dass ein dynamischer Nash-Fluss zu jedem Zeitpunkt  $\theta \in \mathbb{R}$  einen normierten schmalen Fluss mit Zurücksetzen induziert. Die Voraussetzung, dass hierbei die entsprechenden Ableitungen existieren, kann man dadurch rechtfertigen, dass nach [Els11, Kap. VII, Folgerung 4.12 b)] absolut stetige Funktionen fast überall differenzierbar sind. Zudem gilt nach [Els11, Kap. VII, Aufgabe 4.10] die Substitutionsregel für absolut stetige Funktionen, wodurch

$$\int_{l_v(\theta_1)}^{l_v(\theta_2)} f_{vw}^+(t) dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_{vw}^+(l_v(t)) l'_v(t) dt$$



gefolgert werden kann. Daher gilt auch für fast alle  $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$x'_{vw}(\theta) = f_{vw}^+(l_v(\theta))l'_v(\theta) \quad \text{bzw. analog} \quad x'_{vw}(\theta) = f_{vw}^-(l_w(\theta))l'_w(\theta).$$

**Theorem 5.3.3.** *Seien ein dynamischer Nash-Fluss  $f$  im Graphen  $(V, E)$  sowie ein Zeitpunkt  $\theta \in \mathbb{R}$  gegeben. Existieren die Ableitungen  $x'_{vw}(\theta)$  und  $l'_v(\theta)$  mit*

$$x'_{vw}(\theta) = f_{vw}^+(l_v(\theta))l'_v(\theta) = f_{vw}^-(l_w(\theta))l'_w(\theta)$$

*für alle Kanten  $vw$  und Knoten  $v$ , so ist der statische Fluss  $x'(\theta) \in \mathbb{R}^{E_\theta}$ , eingeschränkt auf die zu  $\theta$  aktiven Kanten, ein normierter schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf den Kanten mit Warteschlange  $E_1 := \{vw \in E \mid q_{vw}(l_v(\theta)) > 0\}$  von Wert  $d(\theta)$ . Dabei sind die Ableitungen  $(l'_v(\theta))_{v \in V}$  die normierten Knotenauslastungen.*

*Beweis.* Man bemerke zunächst  $l'_s(\theta) = 1$ . Da außerdem der Einfluss in das Netzwerk

$$d(\theta) = \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e^+(\theta) - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e^-(\theta) = \sum_{e \in \delta^+(s)} x'_e(\theta) - \sum_{e \in \delta^-(s)} x'_e(\theta)$$

erfüllt, ist  $x'(\theta)$  ein  $d(\theta)$ -wertiger Fluss, weil  $x'_e(\theta)$  nach Lemma 3.2.2 für inaktive Kanten  $e$  verschwindet. Es bleibt also die Bedingungen (T2)-(T5) zu zeigen.

Um Bedingung (T5) zu folgern, nehme man an, dass die Warteschlange jeder eingehenden Kante  $vw$  eines Knotens  $w$  zur Zeit  $l_v(\theta)$  leer ist. Da für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine eingehende und zur Zeit  $\theta_n := \theta + 1/n$  aktive Kante existiert, gibt es eine Kante  $vw$  die zu unendlich vielen  $\theta_n$  aktiv ist. Betrachtet man diese Teilfolge  $(\theta_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  der aktiven Zeitpunkte von  $vw$ , ist  $vw$  wegen der Stetigkeit auch zur Zeit  $\theta$  aktiv und es gilt

$$l'_w(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l_w(\theta_{n_k}) - l_w(\theta)}{1/n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l_v(\theta_{n_k}) + q_{vw}(l_v(\theta_{n_k})) - l_v(\theta)}{1/n_k} \geq l'_v(\theta).$$

Also ist insbesondere  $l'_w(\theta) \geq \min_{vw \in \delta^-(w) \cap E_\theta} l'_v(\theta)$  erfüllt.

Sei nun eine Kante  $vw \in E_\theta$ , also eine aktive Kante zum Zeitpunkt  $\theta$ , gegeben. Man prüfe die Bedingungen (T2), (T3) und (T4) jeweils in den folgenden drei Fällen:

1. *Fall:*  $\exists \varepsilon > 0 : \forall \theta' \in (\theta, \theta + \varepsilon] : q_{vw}(l_v(\theta')) > 0$ .

Nach Lemma 3.2.3 ist  $[\theta, \theta + \varepsilon] \subseteq \Theta_{vw}$ . Außerdem ist  $q_{vw}$  nach Proposition 2.1.7 (ii) auf  $[l_v(\theta'), l_w(\theta') - \tau_{vw}]$  positiv, also auch auf  $(l_w(\theta) - \tau_{vw}, l_w(\theta + \varepsilon) - \tau_{vw})$ . Mit (F4) folgere man

$$x_{vw}(\theta + \varepsilon) - x_{vw}(\theta) = \int_{l_w(\theta) - \tau_{vw}}^{l_w(\theta + \varepsilon) - \tau_{vw}} f_{vw}^-(t + \tau_{vw}) dt = u_{vw}(l_w(\theta + \varepsilon) - l_w(\theta)).$$

Teilt man diese Gleichung durch  $\varepsilon$ , so erhält man  $x'_{vw}(\theta) = u_{vw}l'_w(\theta)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ist  $vw \in E_1$ , so ist also Bedingung (T4) erfüllt. Für Bedingung (T2) setze man  $x'_{vw}(\theta) = 0$  voraus, wodurch  $l'_w(\theta) = 0$  folgt und mit der Monotonie von  $l_v$  gilt  $0 \leq l'_v(\theta)$ .

Ist  $vw \notin E_1$ , ist also die Warteschlange zum Zeitpunkt  $l_v(\theta)$  leer, so gilt:

$$l_w(\theta + \varepsilon) - l_w(\theta) = l_v(\theta + \varepsilon) + q_{vw}(l_v(\theta + \varepsilon)) - l_v(\theta) \geq l_v(\theta + \varepsilon) - l_v(\theta).$$

Teilt man diese Ungleichung wieder durch  $\varepsilon$ , so erhält man für  $\varepsilon \rightarrow 0$  Bedingung (T3) mit  $l'_w(\theta) \leq l'_v(\theta)$  und dem Resultat des letzten Absatzes.

2. Fall:  $\exists \varepsilon > 0 : (\theta, \theta + \varepsilon] \subseteq \Theta_{vw}^c$ .

Nach Lemma 3.2.3 gilt bereits  $vw \notin E_1$  und nach Lemma 3.2.2 ist  $x'_{vw}(\theta) = 0$ . Es muss nur Bedingung (T2) geprüft werden: Es gilt  $l_w(\theta + \varepsilon) - l_w(\theta) < l_v(\theta + \varepsilon) - l_v(\theta)$  wegen  $\theta \in \Theta_{vw}$ . Teilt man diese Ungleichung durch  $\varepsilon$ , so erhält man für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Bedingung  $l'_w(\theta) \leq l'_v(\theta)$ .

3. Fall:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \theta_\varepsilon \in (\theta, \theta + \varepsilon] : T_{vw}(l_v(\theta_\varepsilon)) = l_w(\theta_\varepsilon)$ .

Dies ist die exakte Umkehrung der Bedingung von Fall 2. Zusätzlich betrachte man diesen Fall nur, falls Fall 1 nicht eintritt. Das heißt, für alle  $\theta_\varepsilon$  existiert ein  $\theta' \in (\theta, \theta_\varepsilon]$  mit  $q_{vw}(l_v(\theta')) = 0$ ; insbesondere ist  $vw$  nicht in  $E_1$  enthalten. Dann wähle man  $\theta'_\varepsilon := \max\{\theta' \in (\theta, \theta_\varepsilon] \mid q_{vw}(l_v(\theta')) = 0\}$  als das Maximum solcher Zeitpunkte, welches aufgrund der Stetigkeit von  $q_{vw} \circ l_v$  existiert. Nach Konstruktion ist  $q_{vw} \circ l_v$  im Intervall  $(\theta'_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$  positiv und nach Lemma 3.2.3 ist die Kante  $vw$  in diesem Intervall aktiv. Nun impliziert  $\theta'_\varepsilon \in \Theta_{vw}$  gerade  $\theta_\varepsilon \in \Theta_{vw}$ , da  $\Theta_{vw}$  abgeschlossen ist. Daher folgt aus  $l_w(\theta'_\varepsilon) - l_w(\theta) = l_v(\theta'_\varepsilon) - l_v(\theta)$  Bedingung (T2), indem man durch  $\theta'_\varepsilon - \theta$  teilt und  $l'_w(\theta) = l'_v(\theta)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhält.

Für Bedingung (T3) bleibt zu zeigen, dass  $x'_{vw}(\theta)/u_{vw} \leq l'_w(\theta)$  gilt. Wegen Bedingung (F1) ist  $x_{vw}(\theta + \varepsilon) - x_{vw}(\theta) = \int_{l_w(\theta)}^{l_w(\theta + \varepsilon)} f_{vw}^-(t) dt \leq (l_w(\theta + \varepsilon) - l_w(\theta))u_{vw}$  für beliebiges  $\varepsilon > 0$ . Durch Teilen mit  $\varepsilon u_{vw}$  erhält man das gewünschte Resultat für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

**Definition 5.3.4.** Ein *dynamischer Fluss*  $f$  mit Zeithorizont  $T \geq 0$  ist ein Fluss, für dessen Zufluss  $d(\theta) = 0$  für  $\theta \geq T$  gilt.

Durch folgende Proposition erkennt man, dass in einem Nash-Fluss mit Zeithorizont  $T$  der Zu- bzw. Abfluss ab der frühestmöglichen Ankunftszeit am Start- bzw. Endknoten jeder Kante bei Startzeit  $T$  fast überall verschwinden.

**Proposition 5.3.5.** Für einen dynamischen Nash-Fluss  $f$  mit Zeithorizont  $T$  und eine Kante  $e \in E$  gilt  $x_e(\theta) = x_e(T)$  für alle  $\theta \geq T$ . Insbesondere verschwinden  $f_{vw}^+$  ab dem Zeitpunkt  $l_v(T)$  und  $f_{vw}^-$  ab dem Zeitpunkt  $l_w(T)$  fast überall für alle Kanten  $vw \in E$ .

*Beweis.* Der statische  $s$ - $t$ -Fluss  $x(\theta) - x(T)$  ist nach Proposition 3.2.4 in  $s$ - $t$ -Wege zerlegbar. Zudem hat der Fluss  $x(T)$  den gleichen Flusswert wie  $x(\theta)$ , da

$$\sum_{e \in \delta^+(s)} x_e(T) - \sum_{e \in \delta^-(s)} x_e(T) = \sum_{e \in \delta^+(s)} x_e(\theta) - \sum_{e \in \delta^-(s)} x_e(\theta)$$

wegen  $d(\xi) = 0$  für  $\xi \geq T$  gilt. Daher ist  $x(\theta) - x(T)$  bereits der Nullfluss, sodass  $x(T)$  und  $x(\theta)$  bereits auf allen Kanten übereinstimmen, wodurch die Behauptung folgt.  $\square$

**Definition 5.3.6** ( $\alpha$ -Erweiterung). Seien ein dynamischer Nash-Fluss  $f$  mit Zeithorizont  $T$  und ein normierter schmaler Fluss  $x'$  mit Zurücksetzen auf den Kanten mit Warteschlange  $E_1 := \{vw \in E \mid q_{vw}(l_v(T)) > 0\}$  und Knotenbewertung  $l'$  im Graphen  $G_T$  der aktiven Kanten und ein  $\alpha \geq 0$  gegeben.

Ergänzt man die Werte aus  $f$ , sodass für alle zur Zeit  $T$  aktiven Kanten  $vw \in E_T$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{vw}^+(\theta) &:= \frac{x'_{vw}}{l'_v} \quad \text{für } \theta \in [l_v(T), l_v(T) + \alpha l'_v) \text{ und} \\ \tilde{f}_{vw}^-(\theta) &:= \frac{x'_{vw}}{l'_w} \quad \text{für } \theta \in [l_w(T), l_w(T) + \alpha l'_w)\end{aligned}$$

gelten, so erhält man eine  $\alpha$ -Erweiterung  $\tilde{f}$  von  $f$  mit  $x'$ . Dabei entspricht der Netzwerkzufluss von  $\tilde{f}$  im Intervall  $[T, T + \alpha)$  gerade dem Wert von  $x'$ .

Im nächsten Theorem wird gezeigt, dass eine solche  $\alpha$ -Erweiterung wieder einen Nash-Fluss erzeugt.

*Notation 5.3.7.* Im folgenden Theorem und Beweis werden alle zur  $\alpha$ -Erweiterung  $\tilde{f}$  gehörigen Größen wie der kumulative Zufluss  $\tilde{F}_e^+$ , die Wartezeit  $\tilde{q}_e$  etc. mit einer Tilde notiert.

**Theorem 5.3.8.** Für jede  $\alpha$ -Erweiterung  $\tilde{f}$  eines dynamischen Nash-Flusses  $f$  mit Zeithorizont  $T$  und normiertem schmalen Fluss  $x'$  mit Knotenauslastungen  $l'$ , die für alle Kanten mit positiver Warteschlange zum Zeitpunkt  $T$  die Bedingung

$$l_w(T) - l_v(T) + \alpha(l'_w - l'_v) \geq \tau_{vw} \quad (\alpha 1)$$

erfüllt, gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Für positive  $x'_{vw}$  und  $\theta \in [T, T + \alpha]$  gilt  $l_w(T) + (\theta - T)l'_w \geq l_v(T) + (\theta - T)l'_v + \tau_{vw}$ . Für  $\theta \leq l_v(T)$  gilt  $\tilde{f}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}) = f_{vw}^-(\theta + \tau_{vw})$  für alle  $vw \in E$ . Insbesondere ist  $\tilde{q}_e(\theta) = q_e(\theta)$  und  $\tilde{T}_e(\theta) = T_e(\theta)$  für  $\theta \leq l_v(T)$ .
- (ii) Die  $\alpha$ -Erweiterung  $\tilde{f}$  ist ein zulässiger dynamischer Fluss mit Zeithorizont  $T + \alpha$  und für alle  $\gamma \in [0, \alpha]$  gilt  $\tilde{F}_{vw}^+(l_v(T) + \gamma l'_v) = \tilde{F}_{vw}^-(l_w(T) + \gamma l'_w)$ .
- (iii) Gilt zusätzlich für alle zum Zeitpunkt  $T$  inaktiven Kanten die Bedingung

$$l_w(T) - l_v(T) + \alpha(l'_w - l'_v) \leq \tau_{vw}, \quad (\alpha 2)$$

so sind die  $\tilde{f}$  zugeordneten frühesten Ankunftszeiten  $\tilde{l}_v(\theta)$  für  $\theta \leq T + \alpha$  durch

$$\tilde{l}_v(\theta) = \begin{cases} l_v(\theta), & \text{falls } \theta < T, \\ l_v(T) + (\theta - T)l'_v, & \text{falls } \theta \in [T, T + \alpha], \end{cases}$$

gegeben und der Fluss  $\tilde{f}$  ist ein dynamischer Nash-Fluss.

*Beweis.* Zu Aussage (i): Ist  $vw \in E_1$  mit  $l'_w < l'_v$ , so gilt mit Voraussetzung  $(\alpha 1)$

$$l_w(T) - l_v(T) + (\theta - T)(l'_w - l'_v) \geq l_w(T) - l_v(T) + \alpha(l'_w - l'_v) \geq \tau_{vw}.$$

Sonst gilt  $l'_w \geq l'_v$  nach Bedingung (T3) und mit  $T \in \Theta_{vw}$  folgt

$$\begin{aligned} l_w(T) + (\theta - T)l'_w &= l_v(T) + q_{vw}(l_v(T)) + \tau_{vw} + (\theta - T)l'_w \\ &\geq l_v(T) + (\theta - T)l'_v + \tau_{vw}. \end{aligned}$$

Für alle  $\theta \leq l_v(T)$  folgt daraus mit  $\theta + \tau_{vw} \leq l_v(T) + \tau_{vw} \leq l_w(T)$  auch

$$\tilde{f}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}) = f_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}).$$

Insbesondere gilt  $\tilde{q}_{vw}(\theta) = q_{vw}(\theta)$  und sogar  $\tilde{T}_{vw}(\theta) = T_{vw}(\theta)$  für  $\theta \leq l_v(T)$ .

*Zu Aussage (ii):* Um zu zeigen, dass  $\tilde{f}$  zulässig ist, zeige man die Eigenschaften (F1)-(F4). Die Bedingung (F3) gilt, da  $x'$  ein statischer  $s$ - $t$ -Fluss ist und Flusserhaltung in  $V \setminus \{s, t\}$  erfüllt. Für die Bedingungen (F1), (F2) und (F4) genügt es, Kanten  $e \in E_T$  mit  $x'_e > 0$  zu prüfen, da sonst  $\tilde{f}_e$  mit  $f_e$  übereinstimmt und  $f$  bereits zulässig ist. Sei  $vw$  also eine Kante mit  $x'_{vw} > 0$ , die zur Zeit  $T$  bzgl.  $f$  aktiv ist. Es gilt die Kapazitätsbeschränkung (F1), da  $l'_w \geq x'_{vw}/u_{vw}$  wegen (T3) und (T4) gilt, wodurch  $\tilde{f}_{vw}^-(\theta) = x'_{vw}/l'_w \leq u_{vw}$  für  $\theta \in [l_w(T), l_w(T) + \alpha l'_w]$  folgt.

Für (F2) zeige man  $\tilde{F}_{vw}^+(\theta) \geq \tilde{F}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw})$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$ . Für  $\theta \leq l_v(T)$  gilt dies bereits nach (i). Existiert ein  $\gamma \in [0, \alpha]$  mit  $\theta = l_v(T) + \gamma l'_v$ , so gilt

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{vw}^+(l_v(T) + \gamma l'_v) &= F_{vw}^+(l_v(T)) + \gamma x'_{vw} \\ &= F_{vw}^-(l_w(T)) + \gamma x'_{vw} = \tilde{F}_{vw}^-(l_w(T) + \gamma l'_w). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Aussage, da  $\theta + \tau_{vw} \leq l_w(T) + \gamma l'_w$  nach (i) erfüllt ist. Für alle  $\theta > l_v(T) + \alpha l'_v$  gilt

$$\tilde{F}_{vw}^+(\theta) = \tilde{F}_{vw}^+(l_v(T) + \alpha l'_v) = \tilde{F}_{vw}^-(l_w(T) + \alpha l'_w) \geq \tilde{F}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}).$$

Es bleibt Bedingung (F4) zu prüfen, d.h. Warteschlangen sollen mit der Kantenkapazität abgebaut werden. Sei also  $\tilde{q}_{vw}(\theta)$  positiv. Es gilt  $\tilde{f}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}) = f_{vw}^-(\theta + \tau_{vw})$  und damit  $\tilde{f}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}) = u_{vw}$  für  $\theta \leq l_v(T)$  nach (i).

Ist  $\theta > l_v(T)$ , so unterscheide man, ob die Warteschlange von  $vw$  zur Zeit  $l_v(T)$  positiv ist: Ist dies der Fall, so gilt  $l'_w = x'_{vw}/u_{vw}$  nach (T4), und ohne Einschränkung gilt  $\theta + \tau_{vw} \geq l_w(T)$ , denn  $f_{vw}^-$  ist nach Proposition 2.1.7 (ii) und Eigenschaft (F4) konstant  $u_{vw}$  auf  $[l_v(T) + \tau_{vw}, l_w(T))$ . Existiert ein  $\gamma \in [0, \alpha]$  mit  $\theta = l_v(T) + \gamma l'_v$ , so gilt  $\theta + \tau_{vw} = l_v(T) + \gamma l'_v + \tau_{vw} \leq l_w(T) + \gamma l'_w$  nach (i). Damit ist  $\tilde{f}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}) = x'_{vw}/l'_w = u_{vw}$ . Ist hingegen  $\theta > l_v(T) + \alpha l'_v$ , so gilt

$$0 < \tilde{F}_{vw}^+(\theta) - \tilde{F}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}) = \alpha x'_{vw} - \min\{\alpha l'_w, \theta + \tau_{vw} - l_w(T)\} x'_{vw}/l'_w.$$

Insbesondere ist also  $\theta + \tau_{vw} < l_w(T) + \alpha l'_w$  und auch hier gilt

$$\tilde{f}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}) = x'_{vw}/l'_w = u_{vw}.$$

Nun betrachte man Kanten  $vw$ , die zum Zeitpunkt  $l_v(T)$  keine Warteschlange haben. Nach (T3) gilt hier  $l'_w = \max\{l'_v, x'_{vw}/u_{vw}\}$ . Existiert ein  $\gamma \in [0, \alpha]$  mit  $\theta = l_v(T) + \gamma l'_v$ ,

so ist  $\theta + \tau_{vw}$  in  $[l_w(T), l_w(T) + \alpha l'_w]$  enthalten und es gilt

$$0 < \tilde{F}_{vw}^+(\theta) - \tilde{F}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}) = \gamma x'_{vw} - \gamma l'_v x'_{vw} / l'_w.$$

Daher ist  $l'_w > l'_v$  und es müssen  $l'_w = x'_{vw} / u_{vw}$  und  $\tilde{f}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}) = u_{vw}$  gelten. Für  $\theta > l_v(T) + \alpha l'_v$  gilt  $\theta + \tau_{vw} > l_w(T) + \alpha l'_w$  und dadurch gilt

$$0 < \tilde{F}_{vw}^+(\theta) - \tilde{F}_{vw}^-(\theta + \tau_{vw}) = \alpha x'_{vw} - \min\{\alpha l'_w, \theta - l_v(T)\} x'_{vw} / l'_w.$$

Insbesondere ist  $\theta - l_v(T) < \alpha l'_w$ , was äquivalent zu  $\theta + \tau_{vw} < l_w(T) + \alpha l'_w$  ist. Nun kann man  $l'_v < l'_w$  folgern, was wiederum  $l'_w = x'_{vw} / u_{vw}$  impliziert. Damit gilt  $\tilde{f}^-(\theta + \tau_{vw}) = u_{vw}$ .

*Zu Aussage (iii):* Man bemerke, dass  $(l_v(\theta))_{v \in V}$  das Gleichungssystem in Proposition 2.2.7 für  $\theta \leq T$  erfüllt, da hier  $\tilde{T}_{vw}(\theta)$  und  $T_{vw}(\theta)$  nach (i) übereinstimmen. Für  $\theta \in (T, T + \alpha)$  löst  $(l_v(T) + (\theta - T)l'_v)_{v \in V}$  das System: Wegen  $l'_s = 1$  gilt  $l_s(T) + (\theta - T)l'_s = \theta$ . Für  $w \neq s$  ist  $l_w(T) + (\theta - T)l'_w$  eine untere Schranke an  $\tilde{T}_{vw}(l_v(T) + (\theta - T)l'_v)$  für zur Zeit  $T$  inaktive Kanten  $vw$ : Zunächst zeige man  $l_w(T) + (\theta - T)l'_w \leq l_v(T) + (\theta - T)l'_v + \tau_{vw}$ : Ist  $l'_w \leq l'_v$ , so gilt dies bereits, da  $vw$  zur Zeit  $l_v(T)$  keine Warteschlange hat. Für  $l'_w \geq l'_v$  gilt mit der zusätzlichen Voraussetzung ( $\alpha 2$ ):

$$l_w(T) - l_v(T) + (\theta - T)(l'_w - l'_v) \leq l_w(T) - l_v(T) + \alpha(l'_w - l'_v) \leq \tau_{vw}.$$

Demnach ist also  $l_w(T) + (\theta - T)l'_w \leq l_v(T) + (\theta - T)l'_v + \tau_{vw} \leq \tilde{T}_{vw}(l_v(T) + (\theta - T)l'_v)$ .

Im nächsten Schritt zeige man  $\tilde{T}_{vw}(l_v(T) + (\theta - T)l'_v) = l_w(T) + (\theta - T)l'_w$  für Kanten  $vw \in E_T$ , für die  $x'_{vw}$  positiv ist oder deren Warteschlange zur Zeit  $l_v(T)$  positiv ist: Für  $x'_{vw} > 0$  impliziert (ii) zusammen mit Proposition 2.1.7 (iii) bereits  $\tilde{T}_{vw}(l_v(T) + (\theta - T)l'_v) = l_w(T) + (\theta - T)l'_w$ . Für  $vw \in E_1$  mit  $x'_{vw} = 0$  gilt jedoch  $l'_w = x'_{vw} / u_{vw} = 0$  nach (T4). Entsprechend erfüllt die Warteschlange

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{vw}(l_v(T) + (\theta - T)l'_v) - z_{vw}(l_v(T)) &= (\theta - T)x'_{vw} - \int_{l_v(T) + \tau_{vw}}^{l_v(T) + (\theta - T)l'_v + \tau_{vw}} f_e^-(t) dt \\ &= (\theta - T)(x'_{vw} - l'_v u_{vw}), \end{aligned}$$

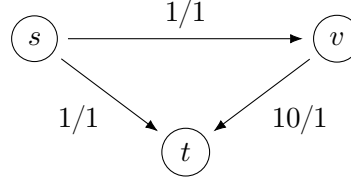
da zusätzlich  $(\theta - T)l'_v \leq \alpha(l'_v - l'_w) \leq q_{vw}(l_v(T))$  gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{vw}(l_v(T) + (\theta - T)l'_v) &= l_w(T) + (\theta - T)l'_v + \tilde{q}_{vw}(l_v(T) + (\theta - T)l'_v) - q_{vw}(l_v(T)) \\ &= l_w(T) + (\theta - T)l'_w. \end{aligned}$$

Zuletzt betrachte man aktive Kanten  $vw \notin E_1$  mit  $x'_{vw} = 0$ . Für diese Kanten gelten  $l_w(T) = l_v(T) + \tau_{vw}$  und  $l'_w \leq l'_v$  nach (T2). Außerdem ist

$$z_{vw}(l_v(T) + (\theta - T)l'_v) = F_{vw}^+(l_v(T)) - F_{vw}^-(l_w(T)) = 0,$$

wodurch man  $\tilde{T}_{vw}(l_v(T) + (\theta - T)l'_v) = l_w(T) + (\theta - T)l'_v \geq l_w(T) + (\theta - T)l'_w$  folgern kann. Dabei gilt sogar Gleichheit nach (T5), falls  $w$  keine eingehende Kante mit positiver Warteschlange hat. Daher ist  $l_w(T) + (\theta - T)l'_w$  nicht nur eine untere


 Abbildung 5.3.1: Ein dynamisches Netzwerk mit Kantenbeschriftung  $\tau_e/u_e$ .

Schranke, sondern auch das Minimum an  $\tilde{T}_{vw}(l_v(T) + (\theta - T)l'_v)$  für alle  $vw \in \delta^-(w)$ .

Um nun zu erkennen, dass  $\tilde{f}$  ein Nash-Fluss ist, zeige man Bedingung (ii) aus Theorem 3.1.11, d.h. man zeige  $\tilde{x}_e^+(\theta) = \tilde{x}_e^-(\theta)$  für alle Kanten  $e$  und Zeitpunkte  $\theta$ . Für  $\theta \leq T$  gilt  $\tilde{x}_e^+(\theta) = x_e^+(\theta) = x_e^-(\theta) = \tilde{x}_e^-(\theta)$  für alle Kanten  $e \in E$ . Des Weiteren gilt  $\tilde{x}_e^+(\theta) = \tilde{x}_e^+(T) = \tilde{x}_e^-(T) = \tilde{x}_e^-(\theta)$  für Kanten mit  $x'_e = 0$  und  $\theta > T$ . Für  $\theta$  zwischen  $T$  und  $T + \alpha$  liefert (ii) die Behauptung. Für  $\theta > T + \alpha$  gilt schließlich  $\tilde{x}_e^+(\theta) = \tilde{x}_e^+(T + \alpha) = \tilde{x}_e^-(T + \alpha) = \tilde{x}_e^-(\theta)$ .  $\square$

**Bemerkung 5.3.9** (Fortsetzung von Bemerkung 5.1.8). Hier erkennt man, warum die Bedingung (T5), die in dieser Arbeit im Vergleich zu [KS11, Definition 6] hinzugezogen wurde, für die Korrektheit von Theorem 5.3.8 benötigt wird: Dies wird benötigt, damit die erweiterten Ankunftszeiten tatsächlich mit den angegebenen übereinstimmen.

Man betrachte den dynamischen Nullfluss im Netzwerk aus Abbildung 5.3.1 mit Zeithorizont 0. Die Kanten  $st$  und  $sv$  sind aktiv, wohingegen die Kante  $vt$  inaktiv ist. Dann ist der Fluss  $x'$  mit  $x'_{sv} = x'_{vt} = 0$  und  $x'_{st} = 2$  nach [KS11, Definition 6] ein schmaler Fluss mit Zurücksetzen auf  $\emptyset$  und Knotenauslastungen  $l'_s = 1$ ,  $l'_v = 0$  und  $l'_t = 2$ , aber für eine  $\alpha$ -Erweiterung mit  $x'$  gilt  $l_v(\theta) = \theta + 1 > 1 = l_v(0) + l'_v\theta$  für alle  $\theta > 0$ .

Ferner kann man zeigen, dass man das  $\alpha$  in Theorem 5.3.8 stets strikt positiv wählen kann:

**Proposition 5.3.10.** *Für einen dynamischen Nash-Fluss  $f$  mit Zeithorizont  $T$  und normierten schmalen Fluss  $x'$  mit Knotenauslastungen  $l'$  existiert ein  $\alpha > 0$ , das sowohl  $(\alpha 1)$  und  $(\alpha 2)$  erfüllt.*

*Beweis.* Für Kanten  $vw$  mit positiver Warteschlange zur Zeit  $T$  muss  $(\alpha 1)$ , also  $l_w(T) - l_v(T) + \alpha(l'_w - l'_v) \geq \tau_{vw}$ , gelten. Wegen Lemma 3.2.3 ist dies äquivalent zu  $\alpha(l'_v - l'_w) \leq q_{vw}(l_v(T))$ . Ist also  $l'_w$  größer oder gleich  $l'_v$ , so ist die linke Seite nicht-positiv, sodass die Gleichung erfüllt ist. Für  $l'_w < l'_v$  muss jedoch zusätzlich  $\alpha \leq q_{vw}(l_v(T))/(l'_v - l'_w)$  gefordert werden.

Für zur Zeit  $\theta$  inaktive Kanten  $vw$  muss  $(\alpha 2)$ , d.h.  $\alpha(l'_w - l'_v) \leq l_v(T) + \tau_{vw} - l_w(T)$ , gelten. Per Definition ist  $l_v(T) + \tau_{vw} - l_w(T)$  für inaktive Kanten positiv. Analog muss für diese Kanten mit  $l'_w > l'_v$  also  $\alpha \leq (l_v(T) + \tau_{vw} - l_w(T))/(l'_w - l'_v)$  gefordert werden.

Da alle diese oberen Schranken positiv sind, folgt die Aussage.  $\square$

Dies hat Koch in [KS11] genutzt, um einen Algorithmus zur Berechnung von dynamischen Nash-Flüssen mit konstanter Netzwerkeinflussrate vorzuschlagen: Ausge-

hend vom dynamischen Nullfluss mit Zeithorizont 0 wird der Fluss nach und nach mit normierten schmalen Flüssen um einen möglichst großen Zeitraum  $\alpha$  erweitert.

Ob dieser Algorithmus jedoch terminiert in dem Sinne, dass nach endlich vielen Erweiterungen ein  $\alpha$  beliebig groß und somit der dynamische Nash-Fluss ab einem Zeitpunkt  $T$  konstant gewählt werden kann, ist eine bisher unbeantwortete Frage. Cominetti, Correa und Olver beantworten Teile der Frage in [CCO17]: Übersteigt die minimale Warteschlangenkapazität  $u(\delta^+(S))$  eines  $s$ - $t$ -Schnitts  $S$  den konstanten Netzwerkzufluss  $d$  nicht, so erreicht ein dynamischer Nash-Fluss schließlich einen stabilen Zustand, ab dem der Fluss konstant ist. Ob dieser Zustand jedoch durch endlich viele  $\alpha$ -Erweiterungen berechnet werden kann, bleibt ungeklärt. Jedoch geben die Autoren ein Beispiel, in dem erst exponentiell viele  $\alpha$ -Erweiterungen zu einem stabilen Zustand führen.

Unter Benutzung des Lemmas von Zorn kann man jedoch die Existenz von dynamischen Nash-Flüssen mit konstantem Netzwerkzufluss zeigen:

**Theorem 5.3.11.** *Für einen konstanten Netzwerkzufluss  $d \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert ein dynamischer Nash-Fluss.*

*Beweis.* Man betrachte auf der Menge aller dynamischer Nash-Flüsse mit Zeithorizont  $T$ , wobei  $T = \infty$  zugelassen wird, und Netzwerkzufluss  $d$  die folgende Ordnung  $\leq$ : Für zwei dynamische Nash-Flüsse  $f$  bzw.  $g$  mit Zeithorizont  $T^1$  bzw.  $T^2$  gelte  $(f, T^1) \leq (g, T^2)$  genau dann, wenn  $T^1 \leq T^2$  gilt und  $g_{vw}^+$  mit  $f_{vw}^+$  bzw.  $g_{vw}^-$  mit  $f_{vw}^-$  auf  $(-\infty, l_v(T^1))$  bzw.  $(-\infty, l_w(T^1))$  für alle Kanten  $vw$  übereinstimmen, wobei  $l_v$  die früheste Ankunftszeit bzgl.  $f$  an einem Knoten  $v$  sein soll. Sei nun eine aufsteigende Kette  $(f^i, T^i)_{i \in \mathbb{N}}$  bezüglich  $\leq$  gegeben. Man bemerke, dass für  $i \leq j$  die frühesten Ankunftszeiten der Flüsse  $f^i$  und  $f^j$  auf  $(-\infty, T^i)$  übereinstimmen.

Man definiere nun  $T^* := \lim_{i \in \mathbb{N}} T^i$  sowie die Ankunftszeit  $l_v(\theta)$  an einem Knoten  $v$  zur Zeit  $\theta \in (-\infty, T^*)$ , die von einem Fluss  $f^i$  mit  $T^i \geq \theta$  angenommen wird. Sei außerdem  $l_w(T^*) := \lim_{i \in \mathbb{N}} l_w(T^i)$ . Man definiere nun  $f$  als den Fluss, dessen Zuflussrate für  $\theta < l_v(T^*)$  den Wert  $f_{vw}^{i+}(\theta)$  für ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $l_v(T^i) > l_v(\theta)$  und für  $\theta \geq l_v(T^*)$  den Wert 0 hat, und dessen Abflussrate für  $\theta < l_w(T^*)$  den Wert  $f_{vw}^{i-}(\theta)$  für ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $l_w(T^i) > l_w(\theta)$  und für  $\theta \geq l_w(T^*)$  den Wert 0 hat. Dann ist  $f$  nicht nur ein zulässiger dynamischer Fluss, sondern sogar ein dynamischer Nash-Fluss mit Zeithorizont  $T^*$ . Somit folgt, dass  $(f, T^*)$  eine obere Schranke der Kette  $(f^i, T^i)_{i \in \mathbb{N}}$  bezüglich  $\leq$  ist. Nach dem Lemma von Zorn besitzt die Ordnung  $\leq$  ein maximales Element  $(f, T^*)$ . Dann muss  $T^*$  aber bereits unendlich sein, da man durch eine  $\alpha$ -Erweiterung von  $f$  mit  $\alpha > 0$  sonst einen dynamischen Nash-Fluss  $(\tilde{f}, T^* + \alpha)$  erhält, für den  $(\tilde{f}, T^* + \alpha) \not\leq (f, T^*)$  gelten würde.  $\square$

Mit der gleichen Argumentation kann man zeigen, dass auch für jeden rechts-konstanten Netzwerkzufluss ein dynamischer Nash-Fluss existiert: Dabei muss lediglich  $T^* + \alpha$  noch vor der nächsten Sprungstelle liegen. Cominetti u. a. zeigen in [CCL15] sogar die Existenz für Netzwerke mit  $\tau_e > 0$  für alle  $e \in E$ , bei denen der Netzwerkzufluss eine beliebige Funktion in  $L^p(0, T)$  ist.

## 6 Fazit

In dieser Arbeit wurde ein Überblick über die Komplexität und die möglichen Ansätze zur Berechnung von Nash-Gleichgewichten in dynamischen Flüssen mit dem deterministischen Warteschlangenmodell gegeben. Setzt man voraus, dass die Netzwerkzuflussrate in die Quelle konstant ist, so kann man einen Nash-Fluss durch  $\alpha$ -Erweiterungen mit schmalen Flüssen phasenweise konstruieren. Ob diese Konstruktion terminiert, bleibt ungeklärt.

Stattdessen wurde die Berechnung der schmalen Flüsse in zurücksetzenden Netzwerken genauer analysiert: So konnte mithilfe des Fixpunktsatzes von Kakutani die Existenz dieser Flüsse gezeigt werden. Insbesondere folgte, dass das Problem der Berechnung von schmalen Flüssen (TFWR) in der Komplexitätsklasse **TFNP** liegt. Des Weiteren wurde die Behauptung von Cominetti u. a. aus [CCL15] untersucht, ob das Problem auch in der Subklasse **PPAD** enthalten ist. Zwar ist in der Literatur oft davon die Rede, dass Probleme, die durch den Fixpunktsatz von Kakutani gelöst werden, in **PPAD** liegen, jedoch gibt es keine formale Einführung eines solchen Problems. Entsprechend wurde in der Arbeit ein Ansatz entwickelt, den Brouwerschen Fixpunktsatz, für den es entsprechende Formalisierungen als Berechnungsproblem in **PPAD** gibt, zu verwenden. Gleichwohl es auch hier zu Schwierigkeiten bei der konkreten Reduktion kommt, kann man unter weiteren Annahmen eine schwache Approximation von schmalen Flüssen darauf reduzieren. Ob die exakte Berechnung schmaler Flüsse in **PPAD** enthalten ist, bleibt offen.

Schränkt man das Problem auf Netzwerke ohne zurücksetzende Kanten ein, so wurde entsprechend [Koc12] ein polynomieller Algorithmus beschrieben, der solche schmalen Flüsse in Netzwerken ohne zurücksetzende Kanten berechnet. Dieser setzt schmale Flüsse ohne Zurücksetzen mit auslastungsminimalen  $b$ -Flüssen und dünnsten Schnitten in Zusammenhang.

Aufgrund einer Formulierung auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse als Optimallösung eines linearen Optimierungsproblems folgt schnell, dass die Berechnung solcher Flüsse in polynomieller Zeit möglich ist. Nichtsdestotrotz wurde ausgehend von der Behauptung von Koch in [Koc12], dass die Bestimmung auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse und die Bestimmung dünnster Schnitte duale Probleme sind, eine Strukturanalyse auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse erarbeitet und die Behauptung gezeigt. Daraus entwuchs ein Algorithmus, der mit  $\mathcal{O}(n + m)$  Operation gegeben eines auslastungsminimalen  $b$ -Flusses einen dünnsten Schnitt berechnet.

Da sich die Suche nach einem rein-kombinatorischen Algorithmus zur Berechnung auslastungsminimaler  $b$ -Flüsse als erfolglos gestaltete, wurde erörtert, ob es möglich ist, trotzdem einen effizienteren Algorithmus als die Ellipsoidmethode zu erarbeiten. Dabei wurde eine effiziente Suche rationaler Zahlen eingeführt, mit der die minimale Auslastung  $q^*$  eines  $b$ -Flusses mit Vergleichen der Form „Ist  $q^* \leq p/q$ ?“ ermittelt wird. Solch ein Vergleich kann mit einem maximalen  $s$ - $t$ -Flusses realisiert werden.



# Literaturverzeichnis

- [CCL11] COMINETTI, Roberto ; CORREA, José R. ; LARRÉ, Omar: Existence and Uniqueness of Equilibria for Flows over Time. In: ACETO, Luca (Hrsg.) ; HENZINGER, Monika (Hrsg.) ; SGALL, Jiří (Hrsg.): *Automata, Languages and Programming*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011. – ISBN 978-3-642-22012-8, S. 552–563 (Zitiert auf Seite 38.)
- [CCL15] COMINETTI, Roberto ; CORREA, José ; LARRÉ, Omar: Dynamic Equilibria in Fluid Queueing Networks. In: *Operations Research* 63 (2015), Nr. 1, S. 21–34. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.2015.1348>. – DOI 10.1287/opre.2015.1348 (Zitiert auf den Seiten 4, 9, 10, 34, 35, 48, 59 und 60.)
- [CCO17] COMINETTI, Roberto ; CORREA, José ; OLVER, Neil: Long Term Behavior of Dynamic Equilibria in Fluid Queueing Networks. In: EISENBRAND, Friedrich (Hrsg.) ; KOENEMANN, Jochen (Hrsg.): *Integer Programming and Combinatorial Optimization*. Cham : Springer International Publishing, 2017. – ISBN 978-3-319-59250-3, S. 161–172 (Zitiert auf Seite 59.)
- [Das19] DASKALAKIS, Constantinos: Equilibria, Fixed Points, and Computational Complexity - Nevanlinna Prize Lecture. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM 2018)*, World Scientific, Mai 2019, 147 - 209 (Zitiert auf Seite 48.)
- [Els11] ELSTRODT, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 2011. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17905-1>. – ISBN 978-3-642-17904-4 (Zitiert auf den Seiten 6, 10 und 52.)
- [GH19] GOLDBERG, Paul W. ; HOLLENDER, Alexandros: The Hairy Ball Problem is PPAD-Complete. In: *CoRR* abs/1902.07657 (2019). <http://arxiv.org/abs/1902.07657> (Zitiert auf Seite 48.)
- [Gri13] *Kapitel* Einstiege: Algorithmen und Komplexität. In: GRITZMANN, Peter: *Grundlagen der Mathematischen Optimierung*. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013. – ISBN 978-3-528-07290-2, 113–230 (Zitiert auf den Seiten 22 und 23.)
- [Heu91] *Kapitel* Die Fixpunktsätze von Brouwer, Schauder und Kakutani. In: HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis Teil 2*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1991. – ISBN 3-519-02232-X, S. 592–616 (Zitiert auf Seite 39.)
- [Jun08] JUNGnickel, Dieter: *Optimierungsmethoden*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. <http://dx.doi.org/10.1007/>

- 978-3-540-76790-9. – ISBN 978-3-540-76789-3 (Zitiert auf Seite 30.)
- [Kha79] KHACHIYAN, Leonid G.: A polynomial algorithm in linear programming. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 244 (1979), 1093–1096. <http://mi.mathnet.ru/dan42319> (Zitiert auf Seite 29.)
- [KM03] KWEK, Stephen ; MEHLHORN, Kurt: Optimal Search for Rationals. In: *Information Processing Letters* 86 (2003), April, Nr. 1, 23–26. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-0190\(02\)00455-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-0190(02)00455-6). – DOI 10.1016/S0020-0190(02)00455-6. – ISSN 0020-0190 (Zitiert auf Seite 29.)
- [Koc12] KOCH, Ronald: *Routing Games over Time*, Technische Universität Berlin, Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften, Diss., 2012. <http://dx.doi.org/10.14279/depositonce-3347>. – DOI 10.14279/depositonce-3347 (Zitiert auf den Seiten 14, 34, 35, 42, 48, 50 und 60.)
- [KS11] KOCH, Ronald ; SKUTELLA, Martin: Nash Equilibria and the Price of Anarchy for Flows over Time. In: *Theory of Computing Systems* 49 (2011), Jul, Nr. 1, 71–97. <http://dx.doi.org/10.1007/s00224-010-9299-y>. – DOI 10.1007/s00224-010-9299-y. – ISSN 1433-0490 (Zitiert auf den Seiten 4, 9, 10, 38 und 58.)
- [KV12] KORTE, Bernhard ; VYGEN, Jens: *Kombinatorische Optimierung*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. – ISBN 978-3-642-25400-0 (Zitiert auf den Seiten 4, 21, 22 und 33.)
- [Pap79] PAPADIMITRIOU, Christos H.: Efficient search for rationals. In: *Information Processing Letters* 8 (1979), Nr. 1, 1 - 4. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-0190\(79\)90079-6](http://dx.doi.org/10.1016/0020-0190(79)90079-6). – DOI 10.1016/0020-0190(79)90079-6 (Zitiert auf Seite 24.)
- [Pap94] PAPADIMITRIOU, Christos H.: On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence. In: *Journal of Computer and System Sciences* 48 (1994), Nr. 3, 498 - 532. [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-0000\(05\)80063-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-0000(05)80063-7). – DOI 10.1016/S0022-0000(05)80063-7. – ISSN 0022-0000 (Zitiert auf den Seiten 47 und 48.)
- [SP08] SCHULZE-PILLOT, Rainer: *Einführung in Algebra und Zahlentheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 2008. – ISBN 978-3-540-79569-8 (Zitiert auf Seite 24.)