

## **Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme**

---

### **Zusammenfassung**

Ein gemischt-ganzzahliges Programm ist ein lineares Optimierungsprogramm, bei dem die Variablen einer bestimmten Indexmenge auf die ganzen Zahlen beschränkt sind. Wir verstärken bisherige Resultate, die eine Abschätzung optimaler Lösungen zweier gemischt-ganzzahliger Programme, die sich nur in der Indexmenge unterscheiden, anhand der Anzahl an Variablen und  $\Delta$  geben. Die Größe  $\Delta$  quantifiziert dabei den größten Absolutwert der Determinanten aller quadratischer Untermatrizen. Wir zeigen eine Abschätzung, die nur die beiden Indexmengen und  $\Delta$  verwendet, und vermuten, dass der Abstand gemischt-ganzzahliger Probleme sogar linear von  $\Delta$  abhängt, wobei wir Szenarien untersuchen, die diese Vermutung bestätigen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Gemischt-ganzzahlige lineare Programme</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme</b>	<b>1</b>
2.1	Folgerungen aus Davenport-Konstante von $p$ -Gruppen . . . . .	2
2.2	Abschätzung mit Anzahl ganzzahliger Variablen . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Lineare Abhängigkeit von <math>\Delta</math></b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Ausblick und ähnliche Arbeiten</b>	<b>9</b>

## 1 Gemischt-ganzzahlige lineare Programme

Diese Arbeit behandelt die Abschätzung von Abständen optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme. Ein gemischt-ganzzahliges Programm ist ein lineares Programm, bei dem die Matrix, die rechte Seite  $b$  sowie einige Variablen ganzzahlig und die restlichen Variablen reell sind. Speziell erzeugen  $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  und  $I \subseteq [n] := \{1, \dots, n\}$  das gemischt-ganzzahlige Programm (mixed integer program, MIP)

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array} \quad (I\text{-MIP})$$

Wir schreiben  $(I\text{-MIP}^*)$ , falls zusätzlich  $b \in \mathbb{R}^m$  zugelassen wird. Ist also beispielsweise  $I = \emptyset$ , erhält man ein Problem in Standardform;  $I = [n]$  bildet ein rein ganzzahliges lineares Programm.

Gesucht ist nun für  $I, J \subseteq [n]$  eine möglichst kleine Schranke, die den Abstand zwischen jeder optimalen Lösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  und einer zu  $x^*$  nächsten optimalen Lösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  beschränkt. Diese Schranke soll außerdem nur von  $A$ ,  $I$  und  $J$  abhängen und der Abstand mittels Maximumsnorm ermittelt werden. Desweiteren wird immer vorausgesetzt, dass  $(J\text{-MIP})$  eine optimale Lösung besitzt. Definiert man

$$\Delta := \Delta(A) := \max\{|\det(Q)| \mid Q \text{ quadratische Untermatrix von } A\},$$

so erhält man die folgende in [PWW18] formulierte Vermutung.

*Vermutung 1.1.* Es gibt eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass für alle  $I, J \subseteq [n]$ , unter denen  $(J\text{-MIP})$  eine optimale Lösung besitzt, gilt: Besitzt  $(I\text{-MIP})$  eine optimale Lösung  $x^*$ , so existiert eine optimale Lösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq f(\Delta)$ .

In dieser Arbeit werden wir eine etwas schwächere Aussage in Theorem 2.11 zeigen, bei der der Abstand zusätzlich noch von  $|I \cup J|$  abhängt. Des Weiteren werden wir in Abschnitt 3 Fälle diskutieren, in denen wir sogar die verstärkte Vermutung der Linearität von  $f$  beweisen können.

## 2 Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme

Um eine simple Abschätzung, die zusätzlich von der Dimension  $n$  abhängt, herzuleiten, wird das folgende Theorem genutzt, das von Cook et al. in [CGST86, Theorem 1 und Bemerkung 1] formuliert wurde:

**Theorem 2.1** (Cook et al., 1986). *Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP}^*)$  eine optimale Lösung hat und entweder  $I = \emptyset$  oder  $J = \emptyset$  gilt. Dann existiert für jede optimale Lösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP}^*)$  eine optimale Lösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP}^*)$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq n\Delta$ .*

Mit Hilfe dieses Theorems kann nun für allgemeine Indexmengen eine ähnliche obere Grenze gefunden werden:

**Korollar 2.2.** *Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP}^*)$  eine optimale Lösung hat. Dann existiert für jede optimale Lösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP}^*)$  eine optimale Lösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP}^*)$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq 2n\Delta$ .*

*Beweis.* Sei  $x^*$  optimale Lösung von  $(I\text{-MIP}^*)$ . Ein Korollar aus dem Satz von Meyer in [Mey74, Korollar 5.2] besagt, dass ein gemischt-ganzzahliges Problem genau dann eine optimale Lösung besitzt, wenn das entsprechende unrestringierte Problem, bei dem keine Entscheidungsvariable als ganzzahlig gefordert ist, eine optimale Lösung besitzt. Also existiert eine optimale Lösung für  $(\emptyset\text{-MIP}^*)$ .

Daher folgt nach Theorem 2.1 die Existenz einer optimalen Lösung  $z^*$  von  $(\emptyset\text{-MIP}^*)$  mit  $\|x^* - z^*\|_\infty \leq n\Delta$ . Wendet man das Theorem ein weiteres Mal folgt die Existenz einer optimalen Lösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP}^*)$  mit  $\|z^* - y^*\|_\infty \leq n\Delta$ . Mit Hilfe der Dreiecksungleichung gelangt man zur Abschätzung  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \|x^* - z^*\|_\infty + \|z^* - y^*\|_\infty \leq 2n\Delta$ .  $\square$

In diesem Abschnitt wollen wir nun diese Aussage verstärken, indem wir in der Abschätzung  $2n$  durch  $|I \cup J|$  ersetzen, also durch die Anzahl der Variablen, die in  $(I\text{-MIP}^*)$  oder  $(J\text{-MIP}^*)$  ganzzahlig sind.

## 2.1 Folgerungen aus Davenport-Konstante von $p$ -Gruppen

Spannenderweise lässt sich aus der Theorie endlicher Gruppen nun ein wichtiges Hilfslemma für unser Problem mit Hilfe der sogenannten Davenport-Konstante herleiten:

**Definition 2.3** (Davenport-Konstante). Sei  $(G, +, 0)$  eine endliche, abelsche Gruppe. Die *Davenport-Konstante* von  $G$  ist

$$D(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall g^1, \dots, g^k \in G \exists I \subseteq [k]: I \neq \emptyset \wedge \sum_{i \in I} g^i = 0\}.$$

Olson hat in [Ols69] die Davenport-Konstante für sogenannte  $p$ -Gruppen ermittelt. Für die Interpretation seiner Aussage ist der Begriff der invarianten Faktoren einer endlichen abelschen Gruppe nötig. Dieser wird im Hauptsatz endlicher abelscher Gruppen, der beispielsweise in [KM17, Satz 10.6] zu finden ist, eingeführt.

**Definition 2.4** ( $p$ -Gruppe). Sei  $p$  eine Primzahl. Eine  $p$ -Gruppe ist eine Gruppe, in der die Ordnung jedes Elements eine Potenz von  $p$  ist.

**Theorem 2.5** (Hauptsatz endlicher abelscher Gruppen). Sei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe.  $C_n$  bezeichne die zyklische Gruppe mit Ordnung  $n$ . Dann existiert eine eindeutige Darstellung  $G \cong C_{n_1} \times \dots \times C_{n_d}$  mit  $2 \leq n_1 \mid \dots \mid n_d$ . Die Zahlen  $n_1, \dots, n_d$  werden dabei als die sogenannten invarianten Faktoren von  $G$  bezeichnet.

Auf dieser Grundlage basiert nun die folgende Aussage von Olson:

**Theorem 2.6** (Olson, 1969). Für eine endliche abelsche  $p$ -Gruppe  $G$  mit invarianten Faktoren  $p^{e_1}, \dots, p^{e_r}$  ist die Davenport-Konstante  $D(G) = 1 + \sum_{i=1}^r (p^{e_i} - 1)$ .

Mit diesem Ergebnis können wir leicht eine für uns relevante Folgerung beschreiben:

**Korollar 2.7.** Seien  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl,  $d \in \mathbb{N}$  und  $f^1, \dots, f^r \in \mathbb{Z}^d$  mit  $r \geq 1 + dp - d$ . Dann existiert eine nicht-leere Menge  $I \subseteq [r]$  mit  $\sum_{i \in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$ .

*Beweis.* Die  $d$  invarianten Faktoren der  $p$ -Gruppe  $\mathbb{Z}^d/p\mathbb{Z}^d \cong C_p \times \dots \times C_p$  sind jeweils  $p$  und mit Theorem 2.6 ist  $D(\mathbb{Z}^d/p\mathbb{Z}^d) = 1 + \sum_{i=1}^d (p - 1) = 1 + dp - d$ .

Nach Definition der Davenport-Konstante existiert eine nichtleere Menge  $I \subseteq [1 + dp - d]$  mit  $\sum_{i \in I} [f^i]_p = [0]_p = p\mathbb{Z}^d$ . Mit  $[1 + dp - d] \subseteq [r]$  und  $\sum_{i \in I} [f^i]_p = [\sum_{i \in I} f^i]_p$  folgt die Behauptung.  $\square$

Damit können wir das folgende Lemma zeigen, das in [PWW18] als Lemma 1 bezeichnet wurde.

**Lemma 2.8.** *Seien  $d, k \in \mathbb{N}$ ,  $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{Z}^d$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \geq d$ . Dann existiert  $\beta \in \times_{i=1}^k [0, \alpha_i]$  mit  $\beta \neq 0$  und  $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ .*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\alpha_i > 0$  für  $i = 1, \dots, k$ , denn für  $\alpha_i = 0$  wird  $\beta_i = 0$  vorausgesetzt, wodurch das Resultat nicht verändert werden kann.

Zunächst betrachten wir den Fall der Existenz einer Primzahl  $p$ , die  $\alpha_i = q_i/p$  mit bestimmten  $q_i \in \mathbb{N}$  für alle  $i \in [k]$  erfüllt. Wir können nun Korollar 2.7 auf die Vektoren

$$\underbrace{u^1, \dots, u^1}_{q_1 \text{ Einträge}}, \dots, \underbrace{u^k, \dots, u^k}_{q_k \text{ Einträge}}$$

anwenden, da nach Voraussetzung  $r := \sum_{i=1}^k q_i = (\sum_{i=1}^k \alpha_i) \cdot p \geq dp \geq 1 + dp - d$  gilt. Dadurch erhalten wir  $l_i \in \{0, \dots, q_i\}$  für  $i \in [k]$  mit nicht alle  $l_i = 0$  und  $\sum_{i=1}^k l_i u^i \in p\mathbb{Z}^d$ . Teilen wir durch  $p$  gelangen wir mit  $\beta_i := l_i/p$  zu unserer Behauptung  $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$  und  $\beta \neq 0$  sowie  $\beta_i \in [0, \alpha_i]$ , da  $0 \leq l_i/p \leq q_i/p = \alpha_i$ .

Den allgemeinen Fall führen wir auf den ersten zurück, indem wir  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$  durch Brüche mit Primzahlen im Nenner annähern. Dazu definieren wir die Folge

$$(v^j)_{j \in \mathbb{N}} := (q_1^j/p^j, \dots, q_k^j/p^j)_{j \in \mathbb{N}}$$

mit  $q_i^j \in \mathbb{N}$ ,  $p^j$  Primzahl und  $q_i^j/p^j \in [\alpha_i, \alpha_i + j^{-1}]$ . Damit ist  $\lim_{j \rightarrow \infty} v^j = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  und für  $j \in \mathbb{N}$  können wir den ersten Fall auf  $u$  und  $v^j$  anwenden und erhalten damit  $\beta^j \in \times_{i=1}^k [0, v_i^j]$  mit  $\beta^j \neq 0$  sowie  $\sum_{i=1}^k \beta_i^j u^i \in \mathbb{Z}^d$ . Da die Folge  $(\beta^j)_{j \in \mathbb{N}}$  in der kompakten Menge  $\times_{i=1}^k [0, \alpha_i + 1]$  liegt, existiert nach Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \beta^{\sigma(j)} =: \beta$ . Aus  $\beta_i^{\sigma(j)} \in [0, v_i^{\sigma(j)}]$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} v_i^{\sigma(j)} = \alpha_i$  folgt nun  $\beta_i \in [0, \alpha_i]$ . Da es nur endlich viele  $z \in \mathbb{Z}^d$  der Form  $z = \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i$  mit  $\gamma_i \in [0, \alpha_i + 1]$  gibt, existiert ein Punkt  $z \in \mathbb{Z}^d$ , für den  $\sum_{i=1}^k \beta_i^{\sigma(j)} u^i = z$  für unendlich viele  $j$  gilt. Also gibt es wegen der Konvergenz von  $(\beta^{\sigma(j)})_{j \in \mathbb{N}}$  ein  $n$ , sodass  $\sum_{i=1}^k \beta_i^{\sigma(j)} u^i = z$  für alle  $j \geq n$  gilt, und damit ist  $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i = z$ .

Ist  $\beta \neq 0$ , so erfüllt es die Behauptung. Andernfalls ist  $z = 0$ . Setze  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $\varepsilon \beta_i^{\sigma(n)} \in [0, \alpha_i]$  für  $i \in [k]$ . Nach Wahl von  $\beta^{\sigma(n)}$  ist dann  $\varepsilon \beta^{\sigma(n)} \neq 0$  und es gilt

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon \beta_i^{\sigma(n)} u^i = \varepsilon z = 0 \in \mathbb{Z}^d.$$

□

Im nächsten Schritt wird das Resultat dieses Unterkapitels formuliert, welches wir in der Abschätzung im nächsten Unterkapitel benötigen werden.

**Lemma 2.9.** *Seien  $d \in \mathbb{N}$ ,  $u^i \in \mathbb{Z}^d$  sowie  $\lambda_i \geq 0$  für  $i \in [k]$  gegeben. Dann existiert  $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$  mit  $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$  und  $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$ .*

*Beweis.* Die beschränkte Menge  $G := \{\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i] \mid \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d\}$  ist abgeschlossen: Sei  $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $\mathbb{R}^k$  konvergente Folge mit  $\gamma^n \in G$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n =: \tilde{\gamma}$ . Da es nur endlich viele  $z \in \mathbb{Z}^d$  mit  $z = \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i$  für  $\gamma_i \in [0, \lambda_i]$  gibt, existiert ein  $z \in \mathbb{Z}^d$ , sodass  $z = \sum_{i=1}^k \gamma_i^n u^i$  für unendlich viele  $\gamma^n$  gilt und damit auch für  $\tilde{\gamma} \in G$ . Also ist

$G$  abgeschlossen und mit dem Satz von Heine-Borel auch kompakt. Nach dem Satz von Weierstraß nimmt  $\gamma \mapsto \sum_{i=1}^k \gamma_i$  also bei einem  $\gamma$  ihr Maximum auf  $G$  an.

Angenommen, es gelte  $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) \geq d$ . Wenden wir Lemma 2.8 auf  $\alpha_i := \lambda_i - \gamma_i \geq 0$  und  $u^i$  für  $i \in [k]$  an, erhalten wir  $\beta \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i - \gamma_i]$  mit  $\beta \neq 0$  und  $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ . Für  $\gamma' := \gamma + \beta \leq \lambda$  gilt  $\sum_{i=1}^k \gamma'_i u^i = \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i + \sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$  und damit ist auch  $\gamma' \in G$ . Wegen  $\beta \neq 0$  ist  $\sum_{i=1}^k \gamma'_i > \sum_{i=1}^k \gamma_i$ , was im Widerspruch zur Maximalität von  $\gamma$  steht.  $\square$

## 2.2 Abschätzung mit Anzahl ganzzahliger Variablen

Dieser Abschnitt verfolgt nun das Ziel eine Abschätzung optimaler Lösungen zweier gemischt-ganzzahliger Programme ( $I$ -MIP $^*$ ) und ( $J$ -MIP $^*$ ) in Abhängigkeit von  $\Delta$  und  $|I \cup J|$  zu finden.

Zunächst betrachten wir noch folgendes Hilfslemma über die Darstellung eines polyedrischen Kegels. Dieses ist als Standardresult in der Theorie ganzzahliger Optimierung bekannt und wird beispielsweise in [KV12, Lemma 5.4] bewiesen.

**Lemma 2.10.** *Sei  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ , dessen Zeilen in zwei Untermatrizen  $A_1$  und  $A_2$  aufgeteilt sind. Die Menge  $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \leq 0, A_2 x \geq 0\}$  besitzt die Darstellung*

$$C = \{\lambda_1 v^1 + \dots + \lambda_k v^k \mid \forall i \in [k]: \lambda_i \geq 0\}$$

mit  $v^i \in \mathbb{Z}^n$  und  $\|v^i\|_\infty \leq \Delta(A)$  für  $i \in [k]$ .

Nun formulieren wir unser Theorem:

**Theorem 2.11.** *Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass ( $J$ -MIP $^*$ ) eine optimale Lösung  $\tilde{y}$  hat. Für jede optimale Lösung  $x^*$  von ( $I$ -MIP $^*$ ) existiert eine optimale Lösung  $y^*$  von ( $J$ -MIP $^*$ ) mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq |I \cup J| \cdot \Delta$ .*

*Beweis.* Ohne Einschränkung seien  $I$  und  $J$  nicht beide leer. Zunächst werden alle ganzzahligen Variablen an die ersten Stellen getauscht und es kann  $I \cup J = [d]$  mit  $d \in [n]$  angenommen werden. Es sei eine optimale Lösung  $x^*$  von ( $I$ -MIP $^*$ ) gegeben. Setze  $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \leq 0, A_2 x \geq 0\}$ , wobei die Zeilen von  $A$  in  $A_1$  und  $A_2$  so aufgeteilt werden, dass  $A_1(\tilde{y} - x^*) < 0$  und  $A_2(\tilde{y} - x^*) \geq 0$  erfüllt werden. Nach Lemma 2.10 erhalten wir die Darstellung

$$\tilde{y} - x^* = \lambda_1 v^1 + \dots + \lambda_k v^k$$

mit  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\|v^i\|_\infty \leq \Delta$  und  $v^i \in C \cap \mathbb{Z}^n$  für alle  $i \in [k]$ . Man setze  $u^i$  als die Projektion des Vektors  $v^i$  auf dessen erste  $d$  Komponenten. Nach Lemma 2.9 existiert ein  $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$  mit  $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$  und  $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$ .

Wir definieren nun unseren Kandidaten

$$y^* := \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i v^i = x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) v^i$$

sowie

$$\tilde{x} := x^* + \sum_{i=1}^k \gamma_i v^i = \tilde{y} - \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) v^i.$$

Zunächst zeigen wir, dass  $y^*$  für ( $J$ -MIP $^*$ ) und  $\tilde{x}$  für ( $I$ -MIP $^*$ ) zulässig sind. Dabei sind für  $i \in I$  und  $j \in J$  die Koordinaten  $\tilde{x}_i$  und  $y_j^*$  ganzzahlig, weil bereits  $x_i^*$  und  $\tilde{y}_j$  für

$i, j \in [d]$  ganzzahlig sind und  $\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$  gilt. Die Ungleichungen  $Ay^* \leq b$  und  $A\tilde{x} \leq b$  folgen nun mit  $v^i \in C$  für alle  $i \in [k]$  und

$$\begin{aligned} A_1 y^* &= A_1 x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i &\leq A_1 x^* &\leq b_1 \\ A_2 y^* &= A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i A_2 v^i &\leq A_2 \tilde{y} &\leq b_2 \\ A_1 \tilde{x} &= A_1 x^* + \sum_{i=1}^k \gamma_i A_1 v^i &\leq A_1 x^* &\leq b_1 \\ A_2 \tilde{x} &= A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_2 v^i &\leq A_2 \tilde{y} &\leq b_2. \end{aligned}$$

Da  $x^*$  optimal für  $(I\text{-MIP}^*)$  ist, gilt  $c^\top x^* \geq c^\top \tilde{x} = c^\top x^* + c^\top (\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i)$ . Zieht man auf beiden Seiten  $c^\top x^*$  ab, folgt  $c^\top (\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i) \leq 0$ . Damit erhalten wir mit der Optimalität von  $\tilde{y}$  für  $(J\text{-MIP}^*)$  und mit  $c^\top y^* = c^\top \tilde{y} - c^\top (\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i) \geq c^\top \tilde{y}$  auch die Optimalität von  $y^*$  für  $(J\text{-MIP}^*)$ . Es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\|x^* - y^*\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) v^i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) \|v^i\|_\infty \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) \Delta \leq d\Delta.$$

□

*Bemerkung 2.12.* In der letzten Zeile des Beweises kann man erkennen, dass für  $A \neq 0$  und  $I, J$  nicht beide leer sogar die strikte Abschätzung  $\|x^* - y^*\|_\infty < |I \cup J| \cdot \Delta$  gilt, da dann  $\Delta$  ungleich 0 ist.

### 3 Lineare Abhängigkeit von $\Delta$

Bisher haben wir Abschätzungen mit  $b \in \mathbb{R}^m$  betrachtet. Schrijver hat in [Sch86, Kapitel 17.2] ein Beispiel angeführt, das  $n\Delta$  als beste Abschätzung von optimalen Lösungen von  $(\emptyset\text{-MIP}^*)$  und  $([n]\text{-MIP}^*)$  besitzt. Schränkt man das Problem mit  $b \in \mathbb{Z}^m$  ein, kann man mit folgendem Beispiel erkennen, dass der Abstand optimaler Lösungen zumindest linear von  $\Delta$  abhängt:

**Beispiel 3.1.** Für  $\delta \in \mathbb{N}$  seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^\top := (0, -1).$$

Es wird also die zweite Komponente minimiert unter der Nebenbedingung  $Ax \leq b$ , also  $\delta x_1 - x_2 \leq 0 \Leftrightarrow \delta x_1 \leq x_2$  und  $\delta x_1 \geq 1$ . Diese können wir zusammenfassen in  $1 \leq \delta x_1 \leq x_2$ . Es gilt  $\Delta = \delta$  und die optimale Lösung von  $(\emptyset\text{-MIP})$  und  $(\{2\}\text{-MIP})$  ist  $x^* = (1/\delta, 1)$ . Die optimale Lösung von  $(\{1\}\text{-MIP})$  und  $(\{1, 2\}\text{-MIP})$  ist jedoch  $y^* = (1, \delta)$ . Entsprechend ist der Abstand  $\|x^* - y^*\|_\infty = \delta - 1 = \Omega(\Delta)$ .

Im restlichen Abschnitt wird das Problem weiter eingeschränkt, um in diesen Fällen die Vermutung 1.1 zeigen zu können. Dabei werden keine echt gemischt-ganzzahligen Programme mehr zugelassen, sondern nur noch Indexmengen in  $\{\emptyset, [n]\}$ .

*Notation 3.2.* Seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  und  $x^* \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Im Kontext des Polyeders  $\{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax \leq b\}$  bezeichnen  $A_{\text{eq}(x^*)}$  und  $b_{\text{eq}(x^*)}$  diejenigen Zeilen aus  $A$  und  $b$ , bei denen die zugehörigen Ungleichungen für  $x^*$  straff sind.

Für eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  bezeichne  $\text{co}(M)$  ihre konvexe Hülle.

Wir benutzen nun das folgende Lemma aus [VC09, Theorem 2 und Beweis], um für einige Situationen die Vermutung 1.1 zu bestätigen:

**Lemma 3.3** (Veselov-Chirkov, 2009). *Seien eine ganzzahlige Matrix  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  mit  $\text{rang}(A) = n$  gegeben und der Betrag jeder Determinante einer  $n \times n$  Teilmatrix von  $A$  sei kleinergleich 2.*

*Sei  $z$  eine Ecke von  $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  und sei  $Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}(z)}x \leq b_{\text{eq}(z)}\})$ . Dann gelten:*

- (a) *Jede Ecke von  $Q$  liegt auf einer Kante von  $P$ , die  $z$  enthält.*
- (b) *Jede Kante von  $P$ , die  $z$  und einen ganzzahligen Punkt enthält, enthält auch einen ganzzahligen Punkt  $y$  mit  $\|z - y\|_\infty \leq 1$ .*

**Lemma 3.4.** *Seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\Delta(A) \geq 1$  gegeben und  $e \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor, der in einem Eintrag den Wert 1 oder  $-1$  hat und in allen anderen den Wert 0. Erhält man die Matrix  $\tilde{A}$  durch Einfügen von  $e$  als Zeile oder Spalte bei  $A$ , so bleibt  $\Delta(\tilde{A}) = \Delta(A)$  erhalten.*

*Beweis.* Da jede Untermatrix von  $A$  auch eine Untermatrix von  $\tilde{A}$  ist, folgt die Ungleichung  $\Delta(A) \leq \Delta(\tilde{A})$ .

Sei nun  $M$  eine quadratische Untermatrix von  $\tilde{A}$ , die keine Untermatrix von  $A$  ist. Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, dass  $e$  als letzte Zeile an  $A$  angefügt worden ist, da sich der Betrag der Determinante unter Transponieren und Zeilentausch nicht verändert. Die ersten Zeilen von  $M$  bilden also eine Untermatrix von  $A$ , die letzte Zeile  $\tilde{e}$  ist ein Untervektor von  $e$ .

Ist  $\tilde{e} = 0$ , so ist  $\det(M) = 0$ . Sonst lässt sich  $M$  mit elementaren Zeilen- und Spaltentransformationen in die Form

$$\tilde{M} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bringen, wobei  $B$  eine Untermatrix von  $A$  ist und  $|\det(M)| = |\det(\tilde{M})|$  gilt. Ist  $B$  leer, so ist  $|\det(M)| = 1$ , sonst gilt  $|\det(M)| = |\det(B)| \leq \Delta(A)$ .  $\square$

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass für Probleme in Standardform mit einer total unimodularen Matrix alle Ecken ganzzahlig sind. Eine *total unimodulare Matrix* ist dabei eine Matrix, bei der die Determinante jeder quadratischen Untermatrix in  $\{-1, 0, 1\}$  liegt. Da jede total unimodulare Matrix bereits ganzzahlig ist, kann die Eigenschaft auch durch  $\Delta(A) \leq 1$  für ganzzahlige Matrizen  $A$  charakterisiert werden.

**Lemma 3.5.** *Seien  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  gegeben mit  $\Delta(A) \leq 1$ . Dann ist jede Ecke von  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  ganzzahlig.*

*Beweis.* Für eine Ecke  $x$  gilt  $\text{rang}(A_{\text{eq}(x)}) = n$ . Nach dem Basisauswahlsatz können, falls nötig, Zeilen von  $A_{\text{eq}(x)}$  und  $b_{\text{eq}(x)}$  entfernt werden, um eine reguläre Teilmatrix  $\tilde{A}$  von  $A_{\text{eq}(x)}$  mit zugehörigem  $\tilde{b}$  zu erhalten. Nun kann  $\tilde{A}x = \tilde{b}$  mit der Cramerschen Regel eindeutig gelöst werden. Dabei ist  $x_i = \det(\tilde{A}_i) / \det(\tilde{A})$ , wobei  $\tilde{A}_i$  aus  $\tilde{A}$  durch Ersetzen der  $i$ -ten Spalte mit  $\tilde{b}$  entsteht. Da  $\det(\tilde{A}) \in \{-1, 1\}$  gilt und  $\tilde{A}_i$  ganzzahlig ist, ist auch  $x_i$  ganzzahlig.  $\square$

**Lemma 3.6.** *Seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  und  $c \in \mathbb{R}^n$  sowie  $x^* \in P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  gegeben.  $c^\top x^*$  ist obere Schranke von  $x \mapsto c^\top x$  über  $Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}(x^*)}x \leq b_{\text{eq}(x^*)}\})$ , falls  $x \mapsto c^\top x$  von  $x^*$  über  $P$  maximiert wird.*

*Beweis.* Für beliebiges  $q \in Q \setminus \{x^*\}$  gilt: Es existiert  $\lambda \in [0, 1)$  mit  $\tilde{q} := \lambda q + (1 - \lambda)x^* \in P$ , da wir uns für jede Ungleichung, die  $q$  noch nicht erfüllt, solange an  $x^*$  annähern können bis sie erfüllt ist und diese Ungleichung für  $x^*$  keine Gleichheit erfüllt. Ist  $\lambda = 0$ , so ist  $q \in P$  und  $c^\top q \leq c^\top x^*$ . Mit  $c^\top \tilde{q} \leq c^\top x^*$  gilt sonst  $c^\top q = (c^\top \tilde{q} - c^\top (1 - \lambda)x^*) / \lambda \leq c^\top x^*$ . Also ist  $x \mapsto c^\top x$  in  $Q$  mit  $c^\top x^*$  nach oben beschränkt.  $\square$



Zunächst wird die gewünschte Abschätzung für  $J = [n]$  und  $I = \emptyset$  gezeigt:

**Lemma 3.7.** *Seien  $\Delta \in \{1, 2\}$ ,  $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  beschränkt und es existiere eine optimale Lösung von  $([n]\text{-MIP})$ . Dann existiert für jede optimale Lösung  $x^*$  von  $(\emptyset\text{-MIP})$  eine optimale Lösung  $y^*$  von  $([n]\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$ .*

*Beweis. Spezialfall:  $x^*$  ist Ecke von  $P$ .*

Ist  $\Delta = 1$ , so ist  $x^*$  nach Lemma 3.5 ganzzahlig und  $y^* := x^*$  ist die gewünschte Lösung mit  $\|x^* - y^*\|_\infty = 0 \leq \Delta - 1$ . Sei also  $\Delta = 2$ .

Setze  $Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}(x^*)}x \leq b_{\text{eq}(x^*)}\})$ . Da  $Q$  nicht-leer ist und  $x \mapsto c^\top x$  nach Lemma 3.6 mit  $c^\top x^*$  über  $Q$  nach oben beschränkt ist, existiert also eine Ecke  $z \in \mathbb{Z}^n$  von  $Q$ , die  $x \mapsto c^\top x$  maximiert. Nach Lemma 3.3 (a) liegt  $z$  auf einer Kante  $E$  von  $P$ , die  $x^*$  enthält.

Sei  $y^* \in \mathbb{Z}^n \cap E$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty := \min\{\|x^* - y\|_\infty \mid y \in \mathbb{Z}^n \cap E\}$ . Da  $x^*$  Ecke der gemeinsamen Kante  $E$  ist, existiert ein  $\lambda \in [0, 1]$  mit  $y^* = \lambda z + (1 - \lambda)x^*$  und mit  $c^\top x^* \leq c^\top z$  gilt  $c^\top y^* \geq c^\top z$ . Aus der Optimalität von  $z$  folgt die Optimalität von  $y^*$  für  $([n]\text{-MIP})$  und mit Lemma 3.3 (b) folgt aus der Wahl von  $y^*$  die Abschätzung  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq 1 = \Delta - 1$ .

*Allgemeiner Fall.*

Die Menge aller optimalen Lösungen von  $(\emptyset\text{-MIP})$  bildet eine Seitenfläche von  $P$ , nämlich  $F := \{x \in P \mid c^\top x \geq c^\top x^*\}$ . Sei  $\tilde{z}$  eine optimale Lösung von  $([n]\text{-MIP})$  und  $\tilde{x}$  eine Ecke des Polytops  $B := \{x \in F \mid \forall i \in [n] : \lfloor x_i^* \rfloor \leq x_i \leq \lceil x_i^* \rceil\}$ . Dann folgt bereits  $\|\tilde{x} - x^*\|_\infty \leq 1$ .

Definiere die Polyeder

$$\begin{aligned} P_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor = \tilde{x}_i \Rightarrow x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor \quad \text{für alle } i \in [n]\}, \\ P_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}_i \geq \lceil x_i^* \rceil = \tilde{x}_i \Rightarrow x_i \geq \lceil x_i^* \rceil \quad \text{für alle } i \in [n]\}, \\ P_3 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor = \tilde{x}_i \Rightarrow x_i \leq \lceil x_i^* \rceil \quad \text{für alle } i \in [n]\}, \\ P_4 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}_i \geq \lceil x_i^* \rceil = \tilde{x}_i \Rightarrow x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor \quad \text{für alle } i \in [n]\} \end{aligned}$$

und das Polytop  $\tilde{P} := P \cap P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$ .  $\tilde{P}$  ist nicht-leer, da  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{P}$ , und beschränkt, da  $\tilde{P} \subseteq P$ . Da jede an  $\tilde{x}$  straffe Ungleichung von  $B$  auch in  $\tilde{P}$  vorkommt, ist  $\tilde{x}$  auch eine optimale Ecke von  $\tilde{P}$ .

$\tilde{P}$  kann wieder durch eine ganzzahlige Matrix  $\tilde{A}$  und einen ganzzahligen Vektor  $\tilde{b}$  beschrieben werden, wobei  $\tilde{A}$  nach Lemma 3.4 weiterhin  $\text{rang}(\tilde{A}) = n$  und  $\Delta(\tilde{A}) = \Delta(A)$  erfüllt, da nur einige Zeilen mit einer einzelnen  $\pm 1$  in einer der Spalten hinzukommen. Nun können wir den Spezialfall anwenden und erhalten eine optimale Lösung  $y^* \in \mathbb{Z}^n$  in  $\tilde{P}$ , also auch eine optimale Lösung von  $([n]\text{-MIP})$ , mit  $\|\tilde{x} - y^*\|_\infty \leq \Delta - 1$ . Mittels Dreiecksungleichung folgt  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$ . □

**Lemma 3.8.** *Seien  $\Delta \in \{1, 2\}$ ,  $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  beschränkt und es existiere eine optimale Lösung von  $(\emptyset\text{-MIP})$ . Dann existiert für jede optimale Lösung  $x^*$  von  $([n]\text{-MIP})$  eine optimale Lösung  $y^*$  von  $(\emptyset\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$ .*

*Beweis.* Für  $\Delta = 1$  ist nach Lemma 3.5 jede Ecke ganzzahlig, und da eine optimale Ecke existiert, ist  $x^*$  auch eine optimale Lösung von  $(\emptyset\text{-MIP})$ .

*Spezialfall:*  $x^*$  ist Ecke von  $R := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\})$ .

Nach Definition einer Ecke, existiert ein Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \tilde{x} \in R : d^\top x \geq d^\top \tilde{x}\} = \{x^*\}.$$

Demnach ist  $x^*$  der einzige Maximierer von  $x \mapsto d^\top x$  über  $R$ .

Wir bezeichnen die Seitenfläche aller optimalen Lösungen von  $(\emptyset\text{-MIP})$  mit  $F$ . Ist  $x^* \in F$ , so ist  $x^*$  bereits optimal für  $(\emptyset\text{-MIP})$ . Sonst sei  $y^* \in F$  eine Ecke, die  $x \mapsto d^\top x$  über  $F$  maximiert. Setze  $\lambda \geq 0$  so groß, dass  $\lambda \geq d^\top(v - y^*)/c^\top(y^* - v)$  für alle Ecken  $v \in P \setminus F$  von  $P$  gilt. Mit  $\tilde{c} := \lambda c + d$  maximiert  $y^*$  die Funktion  $x \mapsto \tilde{c}^\top x$  über  $P$ , denn für alle Ecken  $v$  in  $P$  gilt: Ist  $v \in F$ , dann ist  $\tilde{c}^\top v = \lambda c^\top y^* + \lambda d^\top v \leq \tilde{c}^\top y^*$ , und sonst ist  $\tilde{c}^\top(y^* - v) \geq (d^\top(v - y^*)/c^\top(y^* - v))c^\top(y^* - v) + d^\top(y^* - v) = 0$ .

Setze  $Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}}(y^*)x \leq b_{\text{eq}}(y^*)\})$ . Nach Lemma 3.6 ist  $x \mapsto \tilde{c}^\top x$  mit  $\tilde{c}^\top y^*$  in  $Q$  nach oben beschränkt und, da  $Q$  nicht-leer ist, gibt es eine Ecke  $v \in \mathbb{Z}^n$  von  $Q$ , die  $x \mapsto \tilde{c}^\top x$  über  $Q$  maximiert. Nach Lemma 3.3 (a) liegt  $v$  auf einer Kante  $E$  von  $P$ , die  $y^*$  enthält. Insbesondere ist also  $Av \leq b$  und damit  $v \in R$ . Da auch  $R \subseteq Q$ , ist  $v$  Maximierer von  $x \mapsto \tilde{c}^\top x$  über  $R$  und damit ist  $v = x^*$ .

Da  $v = x^*$ , liegt  $x^*$  auf der Kante  $E$  von  $P$ , die  $y^*$  enthält. Auf der offenen Strecke zwischen  $x^*$  und  $y^*$  liegen keine ganzzahligen Punkte, weil  $x \mapsto \tilde{c}^\top x$  von  $x^*$  über  $R$  und von  $y^*$  über  $P \supseteq R$  maximiert wird und beide auf einer Kante von  $P$  liegen. Also gilt nach Lemma 3.3 (b), dass  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq 1 = \Delta - 1$ .

*Allgemeiner Fall.*

Da  $P$  beschränkt, ist auch  $R := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\})$  beschränkt und, da  $x^* \in R$ , existiert eine Konvexkombination  $x^* = \sum_{i=1}^t \lambda_i v^i$  mit  $v^1, \dots, v^t$  Ecken von  $R$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_t > 0$  und  $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$ .

Angenommen für ein  $k \in [t]$  ist  $v^k$  nicht optimal für  $([n]\text{-MIP})$ . Dann ist  $c^\top x^* = \sum_{i=1}^t \lambda_i c^\top v^i \leq (1 - \lambda_k) c^\top x^* + \lambda_k c^\top v^k < c^\top x^*$ . Also ist  $v^i$  optimal für  $([n]\text{-MIP})$  und nach dem Spezialfall existiert  $z^i \in \mathbb{R}^n$  optimal für  $(\emptyset\text{-MIP})$  mit  $\|v^i - z^i\|_\infty \leq \Delta$  für alle  $i \in [t]$ . Die Konvexkombination  $y^* := \sum_{i=1}^t \lambda_i z^i$  ist ebenfalls optimal für  $(\emptyset\text{-MIP})$  und

$$\|x^* - y^*\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^t \lambda_i (v^i - z^i) \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^t \lambda_i \|v^i - z^i\|_\infty = \Delta.$$

□

Die Ergebnisse der letzten beiden Lemmata werden in folgendem Theorem festgehalten:

**Theorem 3.9.** *Seien  $\Delta \leq 2$  und  $I, J \in \{\emptyset, [n]\}$ , sodass eine optimale Lösung von  $(J\text{-MIP})$  existiert. Für jede optimale Lösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  existiert eine optimale Lösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$ .*

*Beweis.* Sei  $x^*$  eine optimale Lösung von  $(I\text{-MIP})$  gegeben. Für  $\Delta = 0$  ist  $A = 0$  und damit jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  optimale Lösung. Wir betrachten also  $\Delta \in \{1, 2\}$ .

Es existiert ein  $U \in \mathbb{N}$ , sodass die beschränkte Menge

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [m] : -U \leq x_i \leq U\}$$

$x^*$  und eine optimale Lösung von  $(J\text{-MIP})$  enthält. Setzt man

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A \\ -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ U \\ U \end{pmatrix},$$

gilt  $\text{rang}(\tilde{A}) = n$  und nach Lemma 3.4 ist  $\Delta(A) = \Delta(\tilde{A})$ . Wir können  $P$  nun darstellen als  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x \leq \tilde{b}\}$ . Es genügt, ein  $y^*$  in  $P$  zu finden, das für  $(J\text{-MIP})$  optimal ist und  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$  erfüllt.

Mit Lemma 3.7 und Lemma 3.8 folgt die Behauptung.  $\square$

## 4 Ausblick und ähnliche Arbeiten

In dieser Arbeit konnten wir das Theorem von Cook verallgemeinern und eine Abschätzung für verschiedene Indexmengen erreichen.

Die Vermutung der linearen Abhängigkeit des Abstands von  $\Delta$  konnten wir für den Fall  $\Delta \leq 2$  zeigen. Dies beruhte hauptsächlich auf der Aussage von Veselov Chirkov, welche die Voraussetzung  $\Delta \leq 2$  besitzt. Hierbei könnten ähnliche, allgemeinere Resultate in der Zukunft hilfreich sein, um die Vermutung für größeres  $\Delta$  zeigen zu können.

## Literatur

- [CGST86] COOK, W. ; GERARDS, A. M. H. ; SCHRIJVER, A. ; TARDOS, É.: Sensitivity theorems in integer linear programming. In: *Mathematical Programming* 34 (1986), Apr, Nr. 3, 251–264. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01582230>. – DOI 10.1007/BF01582230. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf Seite 1.)
- [KM17] (Zitiert auf Seite 2.)  
In: KARPFFINGER, Christian ; MEYBERG, Kurt: *Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2017. – ISBN 978–3–662–54722–9, 131–137
- [KV12] (Zitiert auf Seite 4.)  
In: KORTE, Bernhard ; VYGEN, Jens: *Ganzzahlige Optimierung*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. – ISBN 978–3–642–25401–7, 111–141
- [Mey74] MEYER, R. R.: On the existence of optimal solutions to integer and mixed-integer programming problems. In: *Mathematical Programming* 7 (1974), Dec, Nr. 1, 223–235. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01585518>. – DOI 10.1007/BF01585518. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf Seite 2.)
- [Ols69] OLSON, John E.: A combinatorial problem on finite Abelian groups, I. In: *Journal of Number Theory* 1 (1969), Nr. 1, 8 - 10. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X\(69\)90021-3](http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(69)90021-3). – DOI 10.1016/0022–314X(69)90021–3. – ISSN 0022–314X (Zitiert auf Seite 2.)
- [PWW18] PAAT, Joseph ; WEISMANTEL, Robert ; WELTGE, Stefan: Distances between optimal solutions of mixed-integer programs. In: *Mathematical Programming* (2018), Aug. <http://dx.doi.org/10.1007/s10107-018-1323-z>. – DOI 10.1007/s10107–018–1323–z. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf den Seiten 1 und 3.)
- [Sch86] SCHRIJVER, Alexander: *Theory of Linear and Integer Programming*. New York, NY, USA : John Wiley & Sons, Inc., 1986. – ISBN 0–471–90854–1 (Zitiert auf Seite 5.)
- [VC09] VESELOV, S.I. ; CHIRKOV, A.J.: Integer program with bimodular matrix. In: *Discrete Optimization* 6 (2009), Nr. 2, 220 - 222. <http://dx.doi.org/10.1016/j.disopt.2008.12.002>. – DOI 10.1016/j.disopt.2008.12.002. – ISSN 1572–5286 (Zitiert auf Seite 5.)