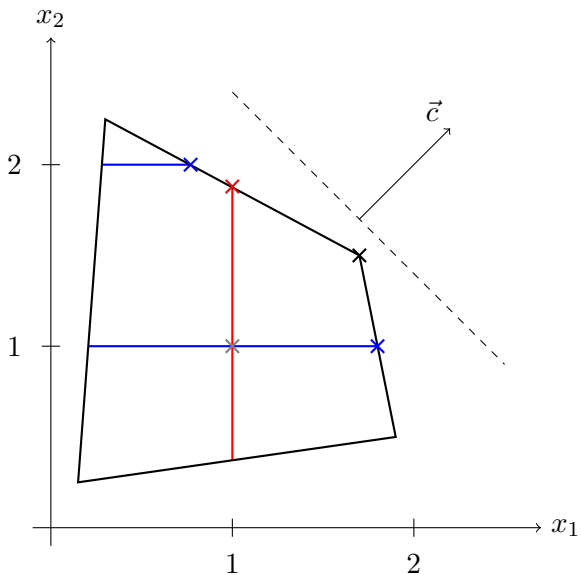


# Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme

.....

Seminar zur Optimierung und Spieltheorie  
Institut für Mathematik der Universität Augsburg  
Diskrete Mathematik, Optimierung und Operations Research

Michael Markl  
08. November 2018



- $(\emptyset\text{-MIP})$
- $(\{1\}\text{-MIP})$
- $(\{2\}\text{-MIP})$
- $(\{1, 2\}\text{-MIP})$

# Gliederung

1. Problemdefinition und wichtige Größen
  - 1.1 Einfache Folgerung aus Theorem von Cook
2. Abschätzung mit Anzahl ganzzahliger Variablen
  - 2.1 Beweis der Abschätzung
  - 2.2 Folgerungen aus Theorie endlicher Gruppen
3. Ergebnisse für lineare Abschätzung

# Problemdefinition und wichtige Größen

## Definition (Gemischt-ganzzahliges lineares Programm)

Für  $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  und  $I \subseteq [n] := \{1, \dots, n\}$  bezeichne ( $I$ -MIP) das Programm

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array} .$$

## Definition (Gemischt-ganzzahliges lineares Programm)

Für  $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  und  $I \subseteq [n] := \{1, \dots, n\}$  bezeichne ( $I$ -MIP) das Programm

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array} .$$

Mit  $\Delta(A) := \max\{|\det(Q)| \mid Q \text{ quadratische Untermatrix von } A\}$  formulieren wir folgende Vermutung:

## Definition (Gemischt-ganzzahliges lineares Programm)

Für  $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  und  $I \subseteq [n] := \{1, \dots, n\}$  bezeichne ( $I$ -MIP) das Programm

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array}.$$

Mit  $\Delta(A) := \max\{|\det(Q)| \mid Q \text{ quadratische Untermatrix von } A\}$  formulieren wir folgende Vermutung:

### Vermutung 1.1

*Es gibt eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass für alle  $I, J \subseteq [n]$  gilt: Besitzt ( $J$ -MIP) eine Optimallösung, so existiert für jede Optimallösung  $x^*$  von ( $I$ -MIP) eine Optimallösung  $y^*$  von ( $J$ -MIP) mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq f(\Delta)$ .*

# Theorem von Cook

## Theorem 2.1 (Cook u. a., 1986)

*Seien  $I, J \subseteq [n]$  mit  $I = \emptyset$  oder  $J = \emptyset$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung hat.*

*Dann existiert für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq n\Delta$ .*



# Theorem von Cook

## Theorem 2.1 (Cook u. a., 1986)

*Seien  $I, J \subseteq [n]$  mit  $I = \emptyset$  oder  $J = \emptyset$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung hat.*

*Dann existiert für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq n\Delta$ .*

## Korollar 2.2

*Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung hat.*

*Dann existiert für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq 2n\Delta$ .*

# Theorem von Cook

## Theorem 2.1 (Cook u. a., 1986)

*Seien  $I, J \subseteq [n]$  mit  $I = \emptyset$  oder  $J = \emptyset$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung hat.*

*Dann existiert für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq n\Delta$ .*

## Korollar 2.2

*Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung hat.*

*Dann existiert für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq 2n\Delta$ .*

Wir wollen in dieser Abschätzung  $2n$  durch  $|I \cup J|$  ersetzen.

# Abschätzung mit Anzahl ganzzahliger Variablen

# Hilfslemmata und Theorem

## Lemma 2.9

*Seien  $u^i \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\lambda_i \geq 0$  für  $i \in [k]$  gegeben. Dann existiert  $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$  mit  $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$  und  $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$ .*

# Hilfslemmata und Theorem

## Lemma 2.9

*Seien  $u^i \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\lambda_i \geq 0$  für  $i \in [k]$  gegeben. Dann existiert  $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$  mit  $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$  und  $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$ .*

## Lemma 2.10

*Sei  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  gegeben. Der Polyeder  $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$  besitzt die Darstellung  $C = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v^i \mid \forall i \in [k]: \lambda_i \geq 0\}$  mit  $v^i \in \mathbb{Z}^n$  und  $\|v^i\|_\infty \leq \Delta(A)$  für  $i \in [k]$ .*

# Hilfslemmata und Theorem

## Lemma 2.9

Seien  $u^i \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\lambda_i \geq 0$  für  $i \in [k]$  gegeben. Dann existiert  $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$  mit  $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$  und  $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$ .

## Lemma 2.10

Sei  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  gegeben. Der Polyeder  $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$  besitzt die Darstellung  $C = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v^i \mid \forall i \in [k]: \lambda_i \geq 0\}$  mit  $v^i \in \mathbb{Z}^n$  und  $\|v^i\|_\infty \leq \Delta(A)$  für  $i \in [k]$ .

## Theorem 2.11

Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $\tilde{y}$  hat. Für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  existiert eine Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq |I \cup J| \cdot \Delta$ .

# Hilfslemmata und Theorem

## Theorem 2.11

*Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $\tilde{y}$  hat.  
Für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  existiert eine  
Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq |I \cup J| \cdot \Delta$ .*

Zur Zulässigkeit von  $y^*$  für  $(J\text{-MIP})$  und  $\tilde{x}$  für  $(I\text{-MIP})$ :

# Hilfslemmata und Theorem

## Theorem 2.11

*Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $\tilde{y}$  hat.  
Für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  existiert eine  
Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq |I \cup J| \cdot \Delta$ .*

Zur Zulässigkeit von  $y^*$  für  $(J\text{-MIP})$  und  $\tilde{x}$  für  $(I\text{-MIP})$ :

$$A_1 y^* = A_1 x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i \leq A_1 x^* \leq b_1$$



# Hilfslemmata und Theorem

## Theorem 2.11

*Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $\tilde{y}$  hat.  
Für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  existiert eine  
Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq |I \cup J| \cdot \Delta$ .*

Zur Zulässigkeit von  $y^*$  für  $(J\text{-MIP})$  und  $\tilde{x}$  für  $(I\text{-MIP})$ :

$$\begin{aligned} A_1 y^* &= A_1 x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i &\leq A_1 x^* &\leq b_1 \\ A_2 y^* &= A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i A_2 v^i &\leq A_2 \tilde{y} &\leq b_2 \end{aligned}$$

# Hilfslemmata und Theorem

## Theorem 2.11

*Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $\tilde{y}$  hat.  
Für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  existiert eine  
Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq |I \cup J| \cdot \Delta$ .*

Zur Zulässigkeit von  $y^*$  für  $(J\text{-MIP})$  und  $\tilde{x}$  für  $(I\text{-MIP})$ :

$$\begin{array}{llllll} A_1 y^* & = & A_1 x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i & \leq & A_1 x^* & \leq & b_1 \\ A_2 y^* & = & A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i A_2 v^i & \leq & A_2 \tilde{y} & \leq & b_2 \\ A_1 \tilde{x} & = & A_1 x^* + \sum_{i=1}^k \gamma_i A_1 v^i & \leq & A_1 x^* & \leq & b_1 \end{array}$$

# Hilfslemmata und Theorem

## Theorem 2.11

*Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $\tilde{y}$  hat.  
Für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  existiert eine  
Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq |I \cup J| \cdot \Delta$ .*

Zur Zulässigkeit von  $y^*$  für  $(J\text{-MIP})$  und  $\tilde{x}$  für  $(I\text{-MIP})$ :

$$\begin{aligned}
 A_1 y^* &= A_1 x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i &\leq A_1 x^* &\leq b_1 \\
 A_2 y^* &= A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i A_2 v^i &\leq A_2 \tilde{y} &\leq b_2 \\
 A_1 \tilde{x} &= A_1 x^* + \sum_{i=1}^k \gamma_i A_1 v^i &\leq A_1 x^* &\leq b_1 \\
 A_2 \tilde{x} &= A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_2 v^i &\leq A_2 \tilde{y} &\leq b_2.
 \end{aligned}$$

# Das Theorem von Olson

## Definition 2.3 (Davenport-Konstante)

Sei  $(G, +, 0)$  eine endliche, abelsche Gruppe. Die *Davenport-Konstante*  $D(G)$  ist die kleinste Zahl  $k \in \mathbb{N}$  mit

$$\forall g^1, \dots, g^k \in G \quad \exists I \subseteq [k]: I \neq \emptyset \wedge \sum_{i \in I} g^i = 0.$$

## Theorem 2.6 (Olson, 1969)

Die *Davenport-Konstante* von  $\mathbb{Z}^d/p\mathbb{Z}^d$  ist  $1 + dp - d$  für  $p$  prim.

# Das Theorem von Olson

## Definition 2.3 (Davenport-Konstante)

Sei  $(G, +, 0)$  eine endliche, abelsche Gruppe. Die *Davenport-Konstante*  $D(G)$  ist die kleinste Zahl  $k \in \mathbb{N}$  mit

$$\forall g^1, \dots, g^k \in G \quad \exists I \subseteq [k]: I \neq \emptyset \wedge \sum_{i \in I} g^i = 0.$$

## Theorem 2.6 (Olson, 1969)

Die *Davenport-Konstante* von  $\mathbb{Z}^d/p\mathbb{Z}^d$  ist  $1 + dp - d$  für  $p$  prim.

## Korollar 2.7

Seien  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl,  $d \in \mathbb{N}$  und  $f^1, \dots, f^r \in \mathbb{Z}^d$  mit  $r \geq 1 + dp - d$  gegeben.

Dann existiert eine nicht-leere Menge  $I \subseteq [r]$  mit  $\sum_{i \in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$ .

# Beweis des Hilfflemmas

## Korollar 2.7

*Seien  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl,  $d \in \mathbb{N}$  und  $f^1, \dots, f^r \in \mathbb{Z}^d$  mit  $r \geq 1 + dp - d$  gegeben.*

*Dann existiert eine nicht-leere Menge  $I \subseteq [r]$  mit  $\sum_{i \in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$ .*

## Lemma 2.8

*Seien  $d, k \in \mathbb{N}$ ,  $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{Z}^d$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \geq d$ .*

*Dann existiert  $\beta \in \times_{i=1}^k [0, \alpha_i]$  mit  $\beta \neq 0$  und  $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ .*

# Beweis des Hilflemmas

## Korollar 2.7

Seien  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl,  $d \in \mathbb{N}$  und  $f^1, \dots, f^r \in \mathbb{Z}^d$  mit  $r \geq 1 + dp - d$  gegeben.

Dann existiert eine nicht-leere Menge  $I \subseteq [r]$  mit  $\sum_{i \in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$ .

## Lemma 2.8

Seien  $d, k \in \mathbb{N}$ ,  $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{Z}^d$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \geq d$ .

Dann existiert  $\beta \in \times_{i=1}^k [0, \alpha_i]$  mit  $\beta \neq 0$  und  $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ .

## Lemma 2.9

Seien  $u^i \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\lambda_i \geq 0$  für  $i \in [k]$  gegeben. Dann existiert  $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$  mit  $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$  und  $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$ .

# Ergebnisse für lineare Abschätzung



## Untere Schranke für $f$

Angenommen, es gäbe ein  $f$  wie in der Vermutung, das den Abstand nur in Abhängigkeit von  $\Delta$  beschränkt.

### Beispiel 3.1

Für  $\delta \in \mathbb{N}$  seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^\top := (0, -1).$$

## Untere Schranke für $f$

Angenommen, es gäbe ein  $f$  wie in der Vermutung, das den Abstand nur in Abhängigkeit von  $\Delta$  beschränkt.

### Beispiel 3.1

Für  $\delta \in \mathbb{N}$  seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^\top := (0, -1).$$

Es wird  $x_2$  minimiert unter den Nebenbedingungen  $1 \leq \delta x_1 \leq x_2$ .

## Untere Schranke für $f$

Angenommen, es gäbe ein  $f$  wie in der Vermutung, das den Abstand nur in Abhängigkeit von  $\Delta$  beschränkt.

### Beispiel 3.1

Für  $\delta \in \mathbb{N}$  seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^\top := (0, -1).$$

*Es wird  $x_2$  minimiert unter den Nebenbedingungen  $1 \leq \delta x_1 \leq x_2$ .  
Es gilt  $\Delta = \delta$  und  $x^* = (1/\delta, 1)$  ist Optimallösung von  $(\emptyset\text{-MIP})$   
und  $(\{2\}\text{-MIP})$ .*

## Untere Schranke für $f$

Angenommen, es gäbe ein  $f$  wie in der Vermutung, das den Abstand nur in Abhängigkeit von  $\Delta$  beschränkt.

### Beispiel 3.1

Für  $\delta \in \mathbb{N}$  seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^\top := (0, -1).$$

*Es wird  $x_2$  minimiert unter den Nebenbedingungen  $1 \leq \delta x_1 \leq x_2$ .*

*Es gilt  $\Delta = \delta$  und  $x^* = (1/\delta, 1)$  ist Optimallösung von  $(\emptyset\text{-MIP})$  und  $(\{2\}\text{-MIP})$ .*

*Die Optimallösung von  $(\{1\}\text{-MIP})$  und  $(\{1, 2\}\text{-MIP})$  ist  $y^* = (1, \delta)$ .*

# Untere Schranke für $f$

Angenommen, es gäbe ein  $f$  wie in der Vermutung, das den Abstand nur in Abhängigkeit von  $\Delta$  beschränkt.

## Beispiel 3.1

Für  $\delta \in \mathbb{N}$  seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^\top := (0, -1).$$

*Es wird  $x_2$  minimiert unter den Nebenbedingungen  $1 \leq \delta x_1 \leq x_2$ .*

*Es gilt  $\Delta = \delta$  und  $x^* = (1/\delta, 1)$  ist Optimallösung von  $(\emptyset\text{-MIP})$  und  $(\{2\}\text{-MIP})$ .*

*Die Optimallösung von  $(\{1\}\text{-MIP})$  und  $(\{1, 2\}\text{-MIP})$  ist  $y^* = (1, \delta)$ .  
 $\|x^* - y^*\|_\infty = \delta - 1 = \Omega(\Delta)$ .*

# Abschätzung nur mit $\Delta$

## Lemma 3.3 (Veselov-Chirkov, 2009)

Seien  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  mit  $\text{rang}(A) = n$ , und jede  $n \times n$  Teilmatrix  $\tilde{A}$  von  $A$  erfülle  $|\det(\tilde{A})| \leq 2$ .

Sei  $z$  eine Ecke von  $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ . Mit

$Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}(z)}x \leq b_{\text{eq}(z)}\})$  gelten:

- (a) Jede Ecke von  $Q$  liegt auf einer Kante von  $P$ , die  $z$  enthält.
- (b) Jede Kante von  $P$ , die  $z$  und einen ganzzahligen Punkt enthält, enthält auch einen ganzzahligen Punkt  $y$  mit  $\|z - y\|_\infty \leq 1$ .

# Abschätzung nur mit $\Delta$

## Lemma 3.3 (Veselov-Chirkov, 2009)

Seien  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  mit  $\text{rang}(A) = n$ , und jede  $n \times n$  Teilmatrix  $\tilde{A}$  von  $A$  erfülle  $|\det(\tilde{A})| \leq 2$ .

Sei  $z$  eine Ecke von  $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ . Mit

$Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}(z)}x \leq b_{\text{eq}(z)}\})$  gelten:

- (a) Jede Ecke von  $Q$  liegt auf einer Kante von  $P$ , die  $z$  enthält.
- (b) Jede Kante von  $P$ , die  $z$  und einen ganzzahligen Punkt enthält, enthält auch einen ganzzahligen Punkt  $y$  mit  $\|z - y\|_\infty \leq 1$ .

## Theorem 3.9

Seien  $\Delta \leq 2$  und  $I, J \in \{\emptyset, [n]\}$ , sodass eine Optimallösung von  $(J\text{-MIP})$  existiert.

Für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  existiert eine Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$ .

# Literatur I

- [CGST86] COOK, W. ; GERARDS, A. M. H. ; SCHRIJVER, A. ; TARDOS, É.:  
Sensitivity theorems in integer linear programming.  
In: *Mathematical Programming* 34 (1986), Apr, Nr. 3, 251–264.  
<http://dx.doi.org/10.1007/BF01582230>. –  
DOI 10.1007/BF01582230. –  
ISSN 1436–4646
- [Ols69] OLSON, John E.:  
A combinatorial problem on finite Abelian groups, I.  
In: *Journal of Number Theory* 1 (1969), Nr. 1, 8 - 10.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X\(69\)90021-3](http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(69)90021-3). –  
DOI 10.1016/0022-314X(69)90021-3. –  
ISSN 0022-314X
- [PWW18] PAAT, Joseph ; WEISMANTEL, Robert ; WELTGE, Stefan:  
Distances between optimal solutions of mixed-integer programs.  
In: *Mathematical Programming* (2018), Aug.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s10107-018-1323-z>. –  
DOI 10.1007/s10107-018-1323-z. –  
ISSN 1436–4646



# Literatur II

- [Sch86] SCHRIJVER, Alexander:  
*Theory of Linear and Integer Programming.*  
New York, NY, USA : John Wiley & Sons, Inc., 1986. –  
ISBN 0-471-90854-1
- [VC09] VESELOV, S.I. ; CHIRKOV, A.J.:  
Integer program with bimodular matrix.  
In: *Discrete Optimization* 6 (2009), Nr. 2, 220 - 222.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.disopt.2008.12.002>. –  
DOI 10.1016/j.disopt.2008.12.002. –  
ISSN 1572-5286