

Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme

Zusammenfassung

Ein gemischt-ganzzahliges Programm ist ein lineares Optimierungsprogramm, bei dem die Variablen einer bestimmten Indexmenge auf die ganzen Zahlen beschränkt sind. Wir verstärken bisherige Resultate, die eine Abschätzung optimaler Lösungen zweier gemischt-ganzzahliger Programme, die sich nur in der Indexmenge unterscheiden, anhand der Anzahl an Variablen und Δ geben. Die Größe Δ quantifiziert dabei den größten Absolutwert der Determinanten aller quadratischer Untermatrizen. Wir zeigen eine Abschätzung, die nur die beiden Indexmengen und Δ verwendet, und vermuten, dass der Abstand gemischt-ganzzahliger Probleme sogar linear von Δ abhängt, wobei wir Szenarien untersuchen, die diese Vermutung bestätigen.

Inhaltsverzeichnis

1	Gemischt-ganzzahlige lineare Programme	1
2	Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme	1
2.1	Folgerungen aus Davenport-Konstante von p -Gruppen	2
2.2	Abschätzung mit Anzahl ganzzahliger Variablen	4
3	Lineare Abhängigkeit von Δ	5
4	Ausblick und ähnliche Arbeiten	9

1 Gemischt-ganzzahlige lineare Programme

Diese Arbeit behandelt die Abschätzung von Abständen optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme. Ein gemischt-ganzzahliges Programm ist ein lineares Programm, bei dem die Matrix, die rechte Seite b sowie einige Variablen ganzzahlig und die restlichen Variablen reell sind. Speziell erzeugen $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $I \subseteq [n] := \{1, \dots, n\}$ das gemischt-ganzzahlige Programm (mixed integer program, MIP)

$$\begin{aligned} & \max c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (I\text{-MIP})$$

Wir schreiben $(I\text{-MIP}^*)$, falls zusätzlich $b \in \mathbb{R}^m$ zugelassen wird. Ist also beispielsweise $I = \emptyset$, erhält man ein Problem in Standardform; $I = [n]$ bildet ein rein ganzzahliges lineares Programm.

Gesucht ist nun für $I, J \subseteq [n]$ eine möglichst kleine Schranke, die den Abstand zwischen jeder optimalen Lösung x^* von $(I\text{-MIP})$ und einer zu x^* nächsten optimalen Lösung y^* von $(J\text{-MIP})$ beschränkt. Diese Schranke soll außerdem nur von A , I und J abhängen und der Abstand mittels Maximumsnorm ermittelt werden. Desweiteren wird immer vorausgesetzt, dass $(J\text{-MIP})$ eine optimale Lösung besitzt. Definiert man

$$\Delta := \Delta(A) := \max\{|\det(Q)| \mid Q \text{ quadratische Untermatrix von } A\},$$

so erhält man die folgende in [PWW18] formulierte Vermutung.

Vermutung 1.1. Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle $I, J \subseteq [n]$, unter denen $(J\text{-MIP})$ eine optimale Lösung besitzt, gilt: Besitzt $(I\text{-MIP})$ eine optimale Lösung x^* , so existiert eine optimale Lösung y^* von $(J\text{-MIP})$ mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leq f(\Delta)$.

In dieser Arbeit werden wir eine etwas schwächere Aussage in Theorem 2.11 zeigen, bei der der Abstand zusätzlich noch von $|I \cup J|$ abhängt. Des Weiteren werden wir in Abschnitt 3 Fälle diskutieren, in denen wir sogar die verstärkte Vermutung der Linearität von f beweisen können.

2 Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme

Um eine simple Abschätzung, die zusätzlich von der Dimension n abhängt, herzuleiten, wird das folgende Theorem genutzt, das von Cook et al. in [CGST86, Theorem 1 und Bemerkung 1] formuliert wurde:

Theorem 2.1 (Cook et al., 1986). *Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass $(J\text{-MIP}^*)$ eine optimale Lösung hat und entweder $I = \emptyset$ oder $J = \emptyset$ gilt. Dann existiert für jede optimale Lösung x^* von $(I\text{-MIP}^*)$ eine optimale Lösung y^* von $(J\text{-MIP}^*)$ mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leq n\Delta$.*

Mit Hilfe dieses Theorems kann nun für allgemeine Indexmengen eine ähnliche obere Grenze gefunden werden:

Korollar 2.2. *Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass $(J\text{-MIP}^*)$ eine optimale Lösung hat. Dann existiert für jede optimale Lösung x^* von $(I\text{-MIP}^*)$ eine optimale Lösung y^* von $(J\text{-MIP}^*)$ mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leq 2n\Delta$.*

Beweis. Sei x^* optimale Lösung von $(I\text{-MIP}^*)$. Nach Theorem 2.1 existiert eine optimale Lösung z^* von $(\emptyset\text{-MIP}^*)$ mit $\|x^* - z^*\|_\infty \leq n\Delta$ und eine optimale Lösung y^* von $(J\text{-MIP}^*)$ mit $\|z^* - y^*\|_\infty \leq n\Delta$.

Nach Dreiecksungleichung ist $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \|x^* - z^*\|_\infty + \|z^* - y^*\|_\infty \leq 2n\Delta$. \square

In diesem Abschnitt wollen wir nun diese Aussage verstärken, indem wir in der Abschätzung $2n$ durch $|I \cup J|$ ersetzen, also durch die Anzahl der Variablen, die in $(I\text{-MIP}^*)$ oder $(J\text{-MIP}^*)$ ganzzahlig sind.

2.1 Folgerungen aus Davenport-Konstante von p -Gruppen

Spannenderweise lässt sich aus der Theorie endlicher Gruppen nun ein wichtiges Hilfslemma für unser Problem mit Hilfe der sogenannten Davenport-Konstante herleiten:

Definition 2.3 (Davenport-Konstante). Sei $(G, +, 0)$ eine endliche, abelsche Gruppe. Die *Davenport-Konstante* von G ist

$$D(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall g^1, \dots, g^k \in G \exists I \subseteq [k]: I \neq \emptyset \wedge \sum_{i \in I} g^i = 0\}.$$

Olson hat in [Ols69] die Davenport-Konstante für sogenannte p -Gruppen ermittelt. Für die Interpretation seiner Aussage ist der Begriff der invarianten Faktoren einer endlichen abelschen Gruppe nötig. Dieser wird im Hauptsatz endlicher abelscher Gruppen, der beispielsweise in [KM17, Satz 10.6] zu finden ist, eingeführt.

Definition 2.4 (p -Gruppe). Sei p eine Primzahl. Eine p -Gruppe ist eine Gruppe, in der die Ordnung jedes Elements eine Potenz von p ist.

Theorem 2.5 (Hauptsatz endlicher abelscher Gruppen). Sei G eine endliche abelsche Gruppe. C_n bezeichne die zyklische Gruppe mit Ordnung n . Dann existiert eine eindeutige Darstellung $G \cong C_{n_1} \times \dots \times C_{n_d}$ mit $2 \leq n_1 \mid \dots \mid n_d$. Die Zahlen n_1, \dots, n_d werden dabei als die sogenannten invarianten Faktoren von G bezeichnet.

Auf dieser Grundlage basiert nun die folgende Aussage von Olson:

Theorem 2.6 (Olson, 1969). Für eine endliche abelsche p -Gruppe G mit invarianten Faktoren p^{e_1}, \dots, p^{e_r} ist die Davenport-Konstante $D(G) = 1 + \sum_{i=1}^r (p^{e_i} - 1)$.

Mit diesem Ergebnis können wir leicht eine für uns relevante Folgerung beschreiben:

Korollar 2.7. Seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $d \in \mathbb{N}$ und $f^1, \dots, f^r \in \mathbb{Z}^d$ mit $r \geq 1 + dp - d$. Dann existiert eine nicht-leere Menge $I \subseteq [r]$ mit $\sum_{i \in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$.

Beweis. Die d invarianten Faktoren der p -Gruppe $\mathbb{Z}^d/p\mathbb{Z}^d \cong C_p \times \dots \times C_p$ sind jeweils p und mit Theorem 2.6 ist $D(\mathbb{Z}^d/p\mathbb{Z}^d) = 1 + \sum_{i=1}^d (p - 1) = 1 + dp - d$.

Nach Definition der Davenport-Konstante existiert eine nichtleere Menge $I \subseteq [1 + dp - d]$ mit $\sum_{i \in I} [f^i]_p = [0]_p = p\mathbb{Z}^d$. Mit $[1 + dp - d] \subseteq [r]$ und $\sum_{i \in I} [f^i]_p = [\sum_{i \in I} f^i]_p$ folgt die Behauptung. \square

Damit können wir das folgende Lemma zeigen, das in [PWW18] als Lemma 1 bezeichnet wurde.

Lemma 2.8. Seien $d, k \in \mathbb{N}$, $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{Z}^d$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i \geq d$. Dann existiert $\beta \in \times_{i=1}^k [0, \alpha_i]$ mit $\beta \neq 0$ und $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha_i > 0$ für $i = 1, \dots, k$, denn für $\alpha_i = 0$ wird $\beta_i = 0$ vorausgesetzt, wodurch das Resultat nicht verändert werden kann.

Zunächst betrachten wir den Fall der Existenz einer Primzahl p , die $\alpha_i = q_i/p$ mit bestimmten $q_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in [k]$ erfüllt. Wir können nun Korollar 2.7 auf die Vektoren

$$\underbrace{u^1, \dots, u^1}_{q_1 \text{ Einträge}}, \dots, \underbrace{u^k, \dots, u^k}_{q_k \text{ Einträge}}$$

anwenden, da nach Voraussetzung $r := \sum_{i=1}^k q_i = (\sum_{i=1}^k \alpha_i) \cdot p \geq dp \geq 1 + dp - d$ gilt. Dadurch erhalten wir $l_i \in \{0, \dots, q_i\}$ für $i \in [k]$ mit nicht alle $l_i = 0$ und $\sum_{i=1}^k l_i u^i \in p\mathbb{Z}^d$. Teilen wir durch p gelangen wir mit $\beta_i := l_i/p$ zu unserer Behauptung $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und $\beta \neq 0$ sowie $\beta_i \in [0, \alpha]$, da $0 \leq l_i/p \leq q_i/p = \alpha_i$.

Den allgemeinen Fall führen wir auf den ersten zurück, indem wir $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ durch Brüche mit Primzahlen im Nenner annähern. Dazu definieren wir die Folge

$$(v^j)_{j \in \mathbb{N}} := (q_1^j/p^j, \dots, q_k^j/p^j)_{j \in \mathbb{N}}$$

mit $q_i^j \in \mathbb{N}$, p^j Primzahl und $q_i^j/p^j \in [\alpha_i, \alpha_i + j^{-1}]$. Damit ist $\lim_{j \rightarrow \infty} v^j = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ und für $j \in \mathbb{N}$ können wir den ersten Fall auf u und v^j anwenden und erhalten damit $\beta^j \in \times_{i=1}^k [0, v_i^j]$ mit $\beta^j \neq 0$ sowie $\sum_{i=1}^k \beta_i^j u^i \in \mathbb{Z}^d$. Da die Folge $(\beta^j)_{j \in \mathbb{N}}$ in der kompakten Menge $\times_{i=1}^k [0, \alpha_i + 1]$ liegt, existiert nach Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \beta^{\sigma(j)} =: \beta$. Aus $\beta_i^{\sigma(j)} \in [0, v_i^{\sigma(j)}]$ und $\lim_{j \rightarrow \infty} v_i^{\sigma(j)} = \alpha_i$ folgt nun $\beta_i \in [0, \alpha_i]$. Da es nur endlich viele $z \in \mathbb{Z}^d$ der Form $z = \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i$ mit $\gamma_i \in [0, \alpha_i + 1]$ gibt, existiert ein Punkt $z \in \mathbb{Z}^d$, für den $\sum_{i=1}^k \beta_i^{\sigma(j)} u^i = z$ für unendlich viele j gilt. Also gibt es wegen der Konvergenz von $(\beta^{\sigma(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ ein n , sodass $\sum_{i=1}^k \beta_i^{\sigma(j)} u^i = z$ für alle $j \geq n$ gilt, und damit ist $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i = z$.

Ist $\beta \neq 0$, so erfüllt es die Behauptung. Andernfalls ist $z = 0$. Setze $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\varepsilon \beta_i^{\sigma(n)} \in [0, \alpha_i]$ für $i \in [k]$. Nach Wahl von $\beta^{\sigma(n)}$ ist dann $\varepsilon \beta^{\sigma(n)} \neq 0$ und es gilt

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon \beta_i^{\sigma(n)} u^i = \varepsilon z = 0 \in \mathbb{Z}^d.$$

□

Im nächsten Schritt wird das Resultat dieses Unterkapitels formuliert, welches wir in der Abschätzung im nächsten Unterkapitel benötigen werden.

Lemma 2.9. *Seien $d \in \mathbb{N}$, $u^i \in \mathbb{Z}^d$ sowie $\lambda_i \geq 0$ für $i \in [k]$ gegeben. Dann existiert $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$ mit $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$.*

Beweis. Die beschränkte Menge $G := \{\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i] \mid \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d\}$ ist abgeschlossen: Sei $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in \mathbb{R}^k konvergente Folge mit $\gamma^n \in G$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n =: \tilde{\gamma}$. Da es nur endlich viele $z \in \mathbb{Z}^d$ mit $z = \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i$ für $\gamma_i \in [0, \lambda_i]$ gibt, existiert ein $z \in \mathbb{Z}^d$, sodass $z = \sum_{i=1}^k \gamma_i^n u^i$ für unendlich viele γ^n gilt und damit auch für $\tilde{\gamma} \in G$. Also ist G abgeschlossen und mit dem Satz von Heine-Borel auch kompakt. Nach dem Satz von Weierstraß nimmt $\gamma \mapsto \sum_{i=1}^k \gamma_i$ also bei einem γ ihr Maximum auf G an.

Angenommen, es gelte $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) \geq d$. Wenden wir Lemma 2.8 auf $\alpha_i := \lambda_i - \gamma_i \geq 0$ und u^i für $i \in [k]$ an, erhalten wir $\beta \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i - \gamma_i]$ mit $\beta \neq 0$ und $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$. Für $\gamma' := \gamma + \beta \leq \lambda$ gilt $\sum_{i=1}^k \gamma'_i u^i = \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i + \sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und damit ist auch $\gamma' \in G$. Wegen $\beta \neq 0$ ist $\sum_{i=1}^k \gamma'_i > \sum_{i=1}^k \gamma_i$, was im Widerspruch zur Maximalität von γ steht. □

2.2 Abschätzung mit Anzahl ganzzahliger Variablen

Dieser Abschnitt verfolgt nun das Ziel eine Abschätzung optimaler Lösungen zweier gemischt-ganzzahliger Programme ($I\text{-MIP}^*$) und ($J\text{-MIP}^*$) in Abhängigkeit von Δ und $|I \cup J|$ zu finden.

Zunächst betrachten wir noch folgendes Hilfslemma über die Darstellung eines polyedrischen Kegels. Dieses ist als Standardresult in der Theorie ganzzahliger Optimierung bekannt und wird beispielsweise in [KV12, Lemma 5.4] bewiesen.

Lemma 2.10. *Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, dessen Zeilen in zwei Untermatrizen A_1 und A_2 aufgeteilt sind. Die Menge $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \leq 0, A_2 x \geq 0\}$ besitzt die Darstellung*

$$C = \{\lambda_1 v^1 + \dots + \lambda_k v^k \mid \forall i \in [k]: \lambda_i \geq 0\}$$

mit $v^i \in \mathbb{Z}^n$ und $\|v^i\|_\infty \leq \Delta(A)$ für $i \in [k]$.

Nun formulieren wir unser Theorem:

Theorem 2.11. *Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass ($J\text{-MIP}^*$) eine optimale Lösung \tilde{y} hat. Für jede optimale Lösung x^* von ($I\text{-MIP}^*$) existiert eine optimale Lösung y^* von ($J\text{-MIP}^*$) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leq |I \cup J| \cdot \Delta$.*

Beweis. Ohne Einschränkung seien I und J nicht beide leer. Zunächst werden alle ganzzahligen Variablen an die ersten Stellen getauscht und es kann $I \cup J = [d]$ mit $d \in [n]$ angenommen werden. Es sei eine optimale Lösung x^* von ($I\text{-MIP}^*$) gegeben. Setze $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \leq 0, A_2 x \geq 0\}$, wobei die Zeilen von A in A_1 und A_2 so aufgeteilt werden, dass $A_1(\tilde{y} - x^*) < 0$ und $A_2(\tilde{y} - x^*) \geq 0$ erfüllt werden. Nach Lemma 2.10 erhalten wir die Darstellung

$$\tilde{y} - x^* = \lambda_1 v^1 + \dots + \lambda_k v^k$$

mit $\lambda_i \geq 0$, $\|v^i\|_\infty \leq \Delta$ und $v^i \in C \cap \mathbb{Z}^n$ für alle $i \in [k]$. Man setze u^i als die Projektion des Vektors v^i auf dessen erste d Komponenten. Nach Lemma 2.9 existiert ein $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$ mit $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$.

Wir definieren nun unseren Kandidaten

$$y^* := \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i v^i = x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) v^i$$

sowie

$$\tilde{x} := x^* + \sum_{i=1}^k \gamma_i v^i = \tilde{y} - \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) v^i.$$

Zunächst zeigen wir, dass y^* für ($J\text{-MIP}^*$) und \tilde{x} für ($I\text{-MIP}^*$) zulässig sind. Dabei sind für $i \in I$ und $j \in J$ die Koordinaten \tilde{x}_i und y_j^* ganzzahlig, weil bereits x_i^* und \tilde{y}_j für $i, j \in [d]$ ganzzahlig sind und $\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ gilt. Die Ungleichungen $Ay^* \leq b$ und $A\tilde{x} \leq b$ folgen nun mit $v^i \in C$ für alle $i \in [k]$ und

$$\begin{aligned} A_1 y^* &= A_1 x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i &\leq A_1 x^* &\leq b_1 \\ A_2 y^* &= A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i A_2 v^i &\leq A_2 \tilde{y} &\leq b_2 \\ A_1 \tilde{x} &= A_1 x^* + \sum_{i=1}^k \gamma_i A_1 v^i &\leq A_1 x^* &\leq b_1 \\ A_2 \tilde{x} &= A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_2 v^i &\leq A_2 \tilde{y} &\leq b_2. \end{aligned}$$

Da x^* optimal für ($I\text{-MIP}^*$) ist, gilt $c^\top x^* \geq c^\top \tilde{x} = c^\top x^* + c^\top (\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i)$. Zieht man auf beiden Seiten $c^\top x^*$ ab, folgt $c^\top (\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i) \leq 0$. Damit erhalten wir mit der Optimalität

von \tilde{y} für $(J\text{-MIP}^*)$ und mit $c^\top y^* = c^\top \tilde{y} - c^\top (\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i) \geq c^\top \tilde{y}$ auch die Optimalität von y^* für $(J\text{-MIP}^*)$. Es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\|x^* - y^*\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) v^i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) \|v^i\|_\infty \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) \Delta \leq d\Delta.$$

□

Bemerkung 2.12. In der letzten Zeile des Beweises kann man erkennen, dass für $A \neq 0$ und I, J nicht beide leer sogar die strikte Abschätzung $\|x^* - y^*\|_\infty < |I \cup J| \cdot \Delta$ gilt, da dann Δ ungleich 0 ist.

3 Lineare Abhängigkeit von Δ

Bisher haben wir Abschätzungen mit $b \in \mathbb{R}^m$ betrachtet. Schrijver hat in [Sch86, Kapitel 17.2] ein Beispiel angeführt, das $n\Delta$ als beste Abschätzung von optimalen Lösungen von $(\emptyset\text{-MIP}^*)$ und $([n]\text{-MIP}^*)$ besitzt. Schränkt man das Problem mit $b \in \mathbb{Z}^m$ ein, kann man mit folgendem Beispiel erkennen, dass der Abstand optimaler Lösungen zumindest linear von Δ abhängt:

Beispiel 3.1. Für $\delta \in \mathbb{N}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^\top := (0, -1).$$

Es wird also die zweite Komponente minimiert unter der Nebenbedingung $Ax \leq b$, also $\delta x_1 - x_2 \leq 0 \Leftrightarrow \delta x_1 \leq x_2$ und $\delta x_1 \geq 1$. Diese können wir zusammenfassen in $1 \leq \delta x_1 \leq x_2$. Es gilt $\Delta = \delta$ und die optimale Lösung von $(\emptyset\text{-MIP})$ und $(\{2\}\text{-MIP})$ ist $x^* = (1/\delta, 1)$. Die optimale Lösung von $(\{1\}\text{-MIP})$ und $(\{1, 2\}\text{-MIP})$ ist jedoch $y^* = (1, \delta)$. Entsprechend ist der Abstand $\|x^* - y^*\|_\infty = \delta - 1 = \Omega(\Delta)$

Im restlichen Abschnitt wird das Problem weiter eingeschränkt, um in diesen Fällen die Vermutung 1.1 zeigen zu können. Dabei werden keine echt gemischt-ganzzahligen Programme mehr zugelassen, sondern nur noch Indexmengen in $\{\emptyset, [n]\}$.

Notation 3.2. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Im Kontext des Polyeders $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ bezeichnen $A_{\text{eq}(x^*)}$ und $b_{\text{eq}(x^*)}$ diejenigen Zeilen aus A und b , bei denen die zugehörigen Ungleichungen für x^* straff sind.

Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne $\text{co}(M)$ ihre konvexe Hülle.

Wir benutzen nun das folgende Lemma aus [VC09, Theorem 2 und Beweis], um für einige Situationen die Vermutung 1.1 zu bestätigen:

Lemma 3.3 (Veselov-Chirkov, 2009). *Seien eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ mit $\text{rang}(A) = n$ gegeben und der Betrag jeder Determinante einer $n \times n$ Teilmatrix von A sei kleinergleich 2.*

Sei z eine Ecke von $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ und sei $Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}(z)}x \leq b_{\text{eq}(z)}\})$. Dann gelten:

- (a) *Jede Ecke von Q liegt auf einer Kante von P , die z enthält.*
- (b) *Jede Kante von P , die z und einen ganzzahligen Punkt enthält, enthält auch einen ganzzahligen Punkt y mit $\|z - y\|_\infty \leq 1$.*

Lemma 3.4. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\Delta(A) \geq 1$ gegeben und $e \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, der in einem Eintrag den Wert 1 oder -1 hat und in allen anderen den Wert 0. Erhält man die Matrix \tilde{A} durch Einfügen von e als Zeile oder Spalte bei A , so bleibt $\Delta(\tilde{A}) = \Delta(A)$ erhalten.

Beweis. Da jede Untermatrix von A auch eine Untermatrix von \tilde{A} ist, folgt die Ungleichung $\Delta(A) \leq \Delta(\tilde{A})$.

Sei nun M eine quadratische Untermatrix von \tilde{A} , die keine Untermatrix von A ist. Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, dass e als letzte Zeile an A angefügt worden ist, da sich der Betrag der Determinante unter Transponieren und Zeilentausch nicht verändert. Die ersten Zeilen von M bilden also eine Untermatrix von A , die letzte Zeile \tilde{e} ist ein Untervektor von e .

Ist $\tilde{e} = 0$, so ist $\det(M) = 0$. Sonst lässt sich M mit elementaren Zeilen- und Spaltentransformationen in die Form

$$\tilde{M} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bringen, wobei B eine Untermatrix von A ist und $|\det(M)| = |\det(\tilde{M})|$ gilt. Ist B leer, so ist $|\det(M)| = 1$, sonst gilt $|\det(M)| = |\det(B)| \leq \Delta(A)$. \square

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass für Probleme in Standardform mit einer total unimodularen Matrix alle Ecken ganzzahlig sind. Eine *total unimodulare Matrix* ist dabei eine Matrix, bei der die Determinante jeder quadratischen Untermatrix in $\{-1, 0, 1\}$ liegt. Da jede total unimodulare Matrix bereits ganzzahlig ist, kann die Eigenschaft auch durch $\Delta(A) \leq 1$ für ganzzahlige Matrizen A charakterisiert werden.

Lemma 3.5. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ gegeben mit $\Delta(A) \leq 1$. Dann ist jede Ecke von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

Beweis. Für eine Ecke x gilt $\text{rang}(A_{\text{eq}(x)}) = n$. Nach dem Basisauswahlsatz können, falls nötig, Zeilen von $A_{\text{eq}(x)}$ und $b_{\text{eq}(x)}$ entfernt werden, um eine reguläre Teilmatrix \tilde{A} von $A_{\text{eq}(x)}$ mit zugehörigem \tilde{b} zu erhalten. Nun kann $\tilde{A}x = \tilde{b}$ mit der Cramerschen Regel eindeutig gelöst werden. Dabei ist $x_i = \det(\tilde{A}_i) / \det(\tilde{A})$, wobei \tilde{A}_i aus \tilde{A} durch Ersetzen der i -ten Spalte mit \tilde{b} entsteht. Da $\det(\tilde{A}) \in \{-1, 1\}$ gilt und \tilde{A}_i ganzzahlig ist, ist auch x_i ganzzahlig. \square

Lemma 3.6. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ sowie $x^* \in P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ gegeben. $c^\top x^*$ ist obere Schranke von $x \mapsto c^\top x$ über $Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}(x^*)}x \leq b_{\text{eq}(x^*)}\})$, falls $x \mapsto c^\top x$ von x^* über P maximiert wird.

Beweis. Für beliebiges $q \in Q \setminus \{x^*\}$ gilt: Es existiert $\lambda \in [0, 1)$ mit $\tilde{q} := \lambda q + (1 - \lambda)x^* \in P$, da wir uns für jede Ungleichung, die q noch nicht erfüllt, solange an x^* annähern können bis sie erfüllt ist und diese Ungleichung für x^* keine Gleichheit erfüllt. Ist $\lambda = 0$, so ist $q \in P$ und $c^\top q \leq c^\top x^*$. Mit $c^\top \tilde{q} \leq c^\top x^*$ gilt sonst $c^\top q = (c^\top \tilde{q} - c^\top (1 - \lambda)x^*) / \lambda \leq c^\top x^*$. Also ist $x \mapsto c^\top x$ in Q mit $c^\top x^*$ nach oben beschränkt. \square

Zunächst wird die gewünschte Abschätzung für $J = [n]$ und $I = \emptyset$ gezeigt:

Lemma 3.7. Seien $\Delta \in \{1, 2\}$, $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ beschränkt und es existiere eine optimale Lösung von $([n]\text{-MIP})$. Dann existiert für jede optimale Lösung x^* von $(\emptyset\text{-MIP})$ eine optimale Lösung y^* von $([n]\text{-MIP})$ mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$.

Beweis. Spezialfall: x^* ist Ecke von P .

Ist $\Delta = 1$, so ist x^* nach Lemma 3.5 ganzzahlig und $y^* := x^*$ ist die gewünschte Lösung mit $\|x^* - y^*\|_\infty = 0 \leq \Delta - 1$. Sei also $\Delta = 2$.

Setze $Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}(x^*)}x \leq b_{\text{eq}(x^*)}\})$. Da Q nicht-leer ist und $x \mapsto c^\top x$ nach Lemma 3.6 mit $c^\top x^*$ über Q nach oben beschränkt ist, existiert also eine Ecke $z \in \mathbb{Z}^n$ von Q , die $x \mapsto c^\top x$ maximiert. Nach Lemma 3.3 (a) liegt z auf einer Kante E von P , die x^* enthält.

Sei $y^* \in \mathbb{Z}^n \cap E$ mit $\|x^* - y^*\|_\infty := \min\{\|x^* - y\|_\infty \mid y \in \mathbb{Z}^n \cap E\}$. Da x^* Ecke der gemeinsamen Kante E ist, existiert ein $\lambda \in [0, 1]$ mit $y^* = \lambda z + (1 - \lambda)x^*$ und mit $c^\top x^* \leq c^\top z$ gilt $c^\top y^* \geq c^\top z$. Aus der Optimalität von z folgt die Optimalität von y^* für $([n]\text{-MIP})$ und mit Lemma 3.3 (b) folgt aus der Wahl von y^* die Abschätzung $\|x^* - y^*\|_\infty \leq 1 = \Delta - 1$.

Allgemeiner Fall.

Die Menge aller optimalen Lösungen von $(\emptyset\text{-MIP})$ bildet eine Seitenfläche von P , nämlich $F := \{x \in P \mid c^\top x \geq c^\top x^*\}$. Sei \tilde{z} eine optimale Lösung von $([n]\text{-MIP})$ und \tilde{x} eine Ecke des Polytops $B := \{x \in F \mid \forall i \in [n] : \lfloor x_i^* \rfloor \leq x_i \leq \lceil x_i^* \rceil\}$. Dann folgt bereits $\|\tilde{x} - x^*\|_\infty \leq 1$.

Definiere die Polyeder

$$\begin{aligned} P_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor = \tilde{x}_i \Rightarrow x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor \quad \text{für alle } i \in [n]\}, \\ P_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}_i \geq \lceil x_i^* \rceil = \tilde{x}_i \Rightarrow x_i \geq \lceil x_i^* \rceil \quad \text{für alle } i \in [n]\}, \\ P_3 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}_i \leq \lceil x_i^* \rceil = \tilde{x}_i \Rightarrow x_i \leq \lceil x_i^* \rceil \quad \text{für alle } i \in [n]\}, \\ P_4 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor = \tilde{x}_i \Rightarrow x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor \quad \text{für alle } i \in [n]\} \end{aligned}$$

und das Polytop $\tilde{P} := P \cap P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$. \tilde{P} ist nicht-leer, da $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{P}$, und beschränkt, da $\tilde{P} \subseteq P$. Da jede an \tilde{x} straffe Ungleichung von B auch in \tilde{P} vorkommt, ist \tilde{x} auch eine optimale Ecke von \tilde{P} .

\tilde{P} kann wieder durch eine ganzzahlige Matrix \tilde{A} und einen ganzzahligen Vektor \tilde{b} beschrieben werden, wobei \tilde{A} nach Lemma 3.4 weiterhin $\text{rang}(\tilde{A}) = n$ und $\Delta(\tilde{A}) = \Delta(A)$ erfüllt, da nur einige Zeilen mit einer einzelnen ± 1 in einer der Spalten hinzukommen. Nun können wir den Spezialfall anwenden und erhalten eine optimale Lösung $y^* \in \mathbb{Z}^n$ in \tilde{P} , also auch eine optimale Lösung von $([n]\text{-MIP})$, mit $\|\tilde{x} - y^*\|_\infty \leq \Delta - 1$. Mittels Dreiecksungleichung folgt $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$. □

Lemma 3.8. *Seien $\Delta \in \{1, 2\}$, $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ beschränkt und es existiere eine optimale Lösung von $(\emptyset\text{-MIP})$. Dann existiert für jede optimale Lösung x^* von $([n]\text{-MIP})$ eine optimale Lösung y^* von $(\emptyset\text{-MIP})$ mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$.*

Beweis. Für $\Delta = 1$ ist nach Lemma 3.5 jede Ecke ganzzahlig, und da eine optimale Ecke existiert, ist x^* auch eine optimale Lösung von $(\emptyset\text{-MIP})$.

Spezialfall: x^* ist Ecke von $R := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\})$.

Nach Definition einer Ecke, existiert ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \tilde{x} \in R : d^\top x \geq d^\top \tilde{x}\} = \{x^*\}.$$

Demnach ist x^* der einzige Maximierer von $x \mapsto d^\top x$ über R .

Wir bezeichnen die Seitenfläche aller optimalen Lösungen von $(\emptyset\text{-MIP})$ mit F . Ist $x^* \in F$, so ist x^* bereits optimal für $(\emptyset\text{-MIP})$. Sonst sei $y^* \in F$ eine Ecke, die $x \mapsto d^\top x$ über F maximiert. Setze $\lambda \geq 0$ so groß, dass $\lambda \geq d^\top(v - y^*)/c^\top(y^* - v)$ für alle Ecken $v \in P \setminus F$ von P gilt. Mit $\tilde{c} := \lambda c + d$ maximiert y^* die Funktion $x \mapsto \tilde{c}^\top x$ über P , denn für alle Ecken v in P gilt: Ist $v \in F$, dann ist $\tilde{c}^\top v = \lambda c^\top y^* + \lambda d^\top v \leq \tilde{c}^\top y^*$, und sonst ist $\tilde{c}^\top(y^* - v) \geq (d^\top(v - y^*)/c^\top(y^* - v))c^\top(y^* - v) + d^\top(y^* - v) = 0$.

Setze $Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}}(y^*)x \leq b_{\text{eq}}(y^*)\})$. Nach Lemma 3.6 ist $x \mapsto \tilde{c}^\top x$ mit $\tilde{c}^\top y^*$ in Q nach oben beschränkt und, da Q nicht-leer ist, gibt es eine Ecke $v \in \mathbb{Z}^n$ von Q , die $x \mapsto \tilde{c}^\top x$ über Q maximiert. Nach Lemma 3.3 (a) liegt v auf einer Kante E von P , die y^* enthält. Insbesondere ist also $Av \leq b$ und damit $v \in R$. Da auch $R \subseteq Q$, ist v Maximierer von $x \mapsto \tilde{c}^\top x$ über R und damit ist $v = x^*$.

Da $v = x^*$, liegt x^* auf der Kante E von P , die y^* enthält. Auf der offenen Strecke zwischen x^* und y^* liegen keine ganzzahligen Punkte, weil $x \mapsto \tilde{c}^\top x$ von x^* über R und von y^* über $P \supseteq R$ maximiert wird und beide auf einer Kante von P liegen. Also gilt nach Lemma 3.3 (b), dass $\|x^* - y^*\|_\infty \leq 1 = \Delta - 1$.

Allgemeiner Fall.

Da P beschränkt, ist auch $R := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\})$ beschränkt und, da $x^* \in R$, existiert eine Konvexkombination $x^* = \sum_{i=1}^t \lambda_i v^i$ mit v^1, \dots, v^t Ecken von R und $\lambda_1, \dots, \lambda_t > 0$ und $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$.

Angenommen für ein $k \in [t]$ ist v^k nicht optimal für $([n]\text{-MIP})$. Dann ist $c^\top x^* = \sum_{i=1}^t \lambda_i c^\top v^i \leq (1 - \lambda_k)c^\top x^* + \lambda_k c^\top v^k < c^\top x^*$. Also ist v^i optimal für $([n]\text{-MIP})$ und nach dem Spezialfall existiert $z^i \in \mathbb{R}^n$ optimal für $(\emptyset\text{-MIP})$ mit $\|v^i - z^i\|_\infty \leq \Delta$ für alle $i \in [t]$. Die Konvexkombination $y^* := \sum_{i=1}^t \lambda_i z^i$ ist ebenfalls optimal für $(\emptyset\text{-MIP})$ und

$$\|x^* - y^*\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^t \lambda_i (v^i - z^i) \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^t \lambda_i \|v^i - z^i\|_\infty = \Delta.$$

□

Die Ergebnisse der letzten beiden Lemmata werden in folgendem Theorem festgehalten:

Theorem 3.9. *Seien $\Delta \leq 2$ und $I, J \in \{\emptyset, [n]\}$, sodass eine optimale Lösung von $(J\text{-MIP})$ existiert. Für jede optimale Lösung x^* von $(I\text{-MIP})$ existiert eine optimale Lösung y^* von $(J\text{-MIP})$ mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$.*

Beweis. Sei x^* eine optimale Lösung von $(I\text{-MIP})$ gegeben. Für $\Delta = 0$ ist $A = 0$ und damit jedes $x \in \mathbb{R}^n$ optimale Lösung. Wir betrachten also $\Delta \in \{1, 2\}$.

Es existiert ein $U \in \mathbb{N}$, sodass die beschränkte Menge

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [m] : -U \leq x_i \leq U\}$$

x^* und eine optimale Lösung von $(J\text{-MIP})$ enthält. Setzt man

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A \\ -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ U \\ U \end{pmatrix},$$

gilt $\text{rang}(\tilde{A}) = n$ und nach Lemma 3.4 ist $\Delta(A) = \Delta(\tilde{A})$. Wir können P nun darstellen als $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x \leq \tilde{b}\}$. Es genügt, ein y^* in P zu finden, das für $(J\text{-MIP})$ optimal ist und $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$ erfüllt.

Mit Lemma 3.7 und Lemma 3.8 folgt die Behauptung. □

4 Ausblick und ähnliche Arbeiten

In dieser Arbeit konnten wir das Theorem von Cook verallgemeinern und eine Abschätzung für verschiedene Indexmengen erreichen.

Die Vermutung der linearen Abhängigkeit des Abstands von Δ konnten wir für den Fall $\Delta \leq 2$ zeigen. Dies beruhte hauptsächlich auf der Aussage von Veselov Chirkov, welche die Voraussetzung $\Delta \leq 2$ besitzt. Hierbei könnten ähnliche, allgemeinere Resultate in der Zukunft hilfreich sein, um die Vermutung für größeres Δ zeigen zu können.

Literatur

- [CGST86] COOK, W. ; GERARDS, A. M. H. ; SCHRIJVER, A. ; TARDOS, É.: Sensitivity theorems in integer linear programming. In: *Mathematical Programming* 34 (1986), Apr, Nr. 3, 251–264. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01582230>. – DOI 10.1007/BF01582230. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf Seite 1.)
- [KM17] (Zitiert auf Seite 2.)
In: KARPFFINGER, Christian ; MEYBERG, Kurt: *Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2017. – ISBN 978–3–662–54722–9, 131–137
- [KV12] (Zitiert auf Seite 4.)
In: KORTE, Bernhard ; VYGEN, Jens: *Ganzzahlige Optimierung*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. – ISBN 978–3–642–25401–7, 111–141
- [Ols69] OLSON, John E.: A combinatorial problem on finite Abelian groups, I. In: *Journal of Number Theory* 1 (1969), Nr. 1, 8 - 10. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X\(69\)90021-3](http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(69)90021-3). – DOI 10.1016/0022–314X(69)90021–3. – ISSN 0022–314X (Zitiert auf Seite 2.)
- [PWW18] PAAT, Joseph ; WEISMANTEL, Robert ; WELTGE, Stefan: Distances between optimal solutions of mixed-integer programs. In: *Mathematical Programming* (2018), Aug. <http://dx.doi.org/10.1007/s10107-018-1323-z>. – DOI 10.1007/s10107–018–1323–z. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf den Seiten 1 und 2.)
- [Sch86] SCHRIJVER, Alexander: *Theory of Linear and Integer Programming*. New York, NY, USA : John Wiley & Sons, Inc., 1986. – ISBN 0–471–90854–1 (Zitiert auf Seite 5.)
- [VC09] VESELOV, S.I. ; CHIRKOV, A.J.: Integer program with bimodular matrix. In: *Discrete Optimization* 6 (2009), Nr. 2, 220 - 222. <http://dx.doi.org/10.1016/j.disopt.2008.12.002>. – DOI 10.1016/j.disopt.2008.12.002. – ISSN 1572–5286 (Zitiert auf Seite 5.)