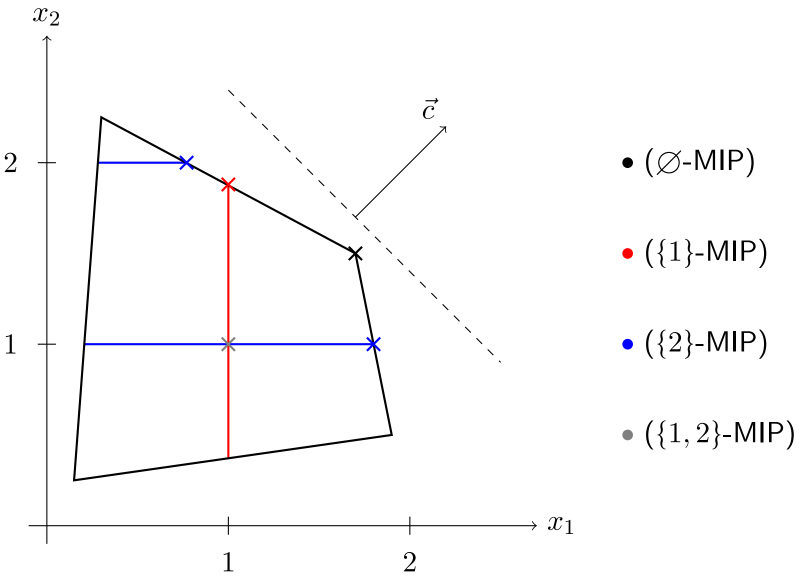
Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme

Seminar zur Optimierung und Spieltheorie

Insitut für Mathematik der Universität Augsburg
Diskrete Mathematik, Optimierung und Operations Research

Michael Markl

08. November 2018


x_2
x_1
2
1
1
2
$\vec{c}$
($\emptyset$-MIP)
($\{1\}$-MIP)
($\{2\}$-MIP)
($\{1,2\}$-MIP)

Gliederung

Problemdefinition und wichtige Größen

Definition (Gemischt-ganzzahliges lineares Programm)

Für $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $I \subseteq [n] := \{1, \ldots, n\}$ bezeichne (I-MIP) das Programm

$$\begin{array}{rc} & \max c^\mathsf{T} x \\ \textbf{s.t.} & Ax \leqslant b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array} \quad .$$

Definition (Gemischt-ganzzahliges lineares Programm)

Für $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $I \subseteq [n] := \{1, \ldots, n\}$ bezeichne (I-MIP) das Programm

$$\begin{array}{rc} & \max c^\intercal x \\ \textbf{s.t.} & Ax \leqslant b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array} \quad .$$

Mit $\Delta(A) := \max\{|\det(Q)| \mid Q$ quadratische Untermatrix von $A\}$ formulieren wir folgende Vermutung:

Definition (Gemischt-ganzzahliges lineares Programm)

Für $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $I \subseteq [n] := \{1, \dots, n\}$ bezeichne (I-MIP) das Programm

$$\begin{array}{rc} & \max c^\intercal x \\ \textbf{s.t.} & Ax \leqslant b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array} .$$

Mit $\Delta(A) := \max\{|\det(Q)| \mid Q \text{ quadratische Untermatrix von } A\}$ formulieren wir folgende Vermutung:

Vermutung 1.1

Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $I, J \subseteq [n]$ gilt: Besitzt (J-MIP) eine Optimallösung, so existiert für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant f(\Delta)$.

Theorem von Cook

Theorem 2.1 (Cook u. a., 1986)

Seien $I, J \subseteq [n]$ mit $I = \emptyset$ oder $J = \emptyset$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung hat.
Dann existiert für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant n\Delta$.

Theorem von Cook

Theorem 2.1 (Cook u. a., 1986)

Seien $I, J \subseteq [n]$ mit $I = \emptyset$ oder $J = \emptyset$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung hat.
Dann existiert für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant n\Delta$.

Korollar 2.2

Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung hat.
Dann existiert für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant 2n\Delta$.

Theorem von Cook

Theorem 2.1 (Cook u. a., 1986)

Seien $I, J \subseteq [n]$ mit $I = \emptyset$ oder $J = \emptyset$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung hat.
Dann existiert für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant n\Delta$.

Korollar 2.2

Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung hat.
Dann existiert für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant 2n\Delta$.

Wir wollen in dieser Abschätzung $2n$ durch $|I \cup J|$ ersetzen.

Abschätzung mit Anzahl ganzzahliger Variablen

Hilfslemmata und Theorem

Lemma 2.10

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ *eine Matrix, deren Zeilen in zwei Untermatrizen* A_1 *und* A_2 *aufgeteilt sind.*
Der Polyeder $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \leqslant 0, A_2 x \geqslant 0\}$ *besitzt die Darstellung* $C = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i \mid \forall i \in [k] \colon \lambda_i \geqslant 0\}$ *mit* $v^i \in \mathbb{Z}^n$ *und* $\left\|v^i\right\|_\infty \leqslant \Delta(A)$ *für* $i \in [k]$.

Hilfslemmata und Theorem

Lemma 2.10

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ eine Matrix, deren Zeilen in zwei Untermatrizen A_1 und A_2 aufgeteilt sind.
Der Polyeder $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \leqslant 0, A_2 x \geqslant 0\}$ besitzt die Darstellung $C = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v^i \mid \forall i \in [k]\colon \lambda_i \geqslant 0\}$ mit $v^i \in \mathbb{Z}^n$ und $\left\|v^i\right\|_\infty \leqslant \Delta(A)$ für $i \in [k]$.

Lemma 2.9

Seien $u^i \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda_i \geqslant 0$ für $i \in [k]$ gegeben. Dann existiert $\gamma \in \bigtimes_{i=1}^k [0, \lambda_i]$ mit $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$.

Hilfslemmata und Theorem

Lemma 2.10

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ eine Matrix, deren Zeilen in zwei Untermatrizen A_1 und A_2 aufgeteilt sind.
Der Polyeder $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \leqslant 0, A_2 x \geqslant 0\}$ besitzt die Darstellung $C = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v^i \mid \forall i \in [k] \colon \lambda_i \geqslant 0\}$ mit $v^i \in \mathbb{Z}^n$ und $\left\|v^i\right\|_\infty \leqslant \Delta(A)$ für $i \in [k]$.

Lemma 2.9

Seien $u^i \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda_i \geqslant 0$ für $i \in [k]$ gegeben. Dann existiert $\gamma \in \bigtimes_{i=1}^k [0, \lambda_i]$ mit $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$.

Theorem 2.11

Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung $\tilde{y}$ hat.
Für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) existiert eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant |I \cup J| \cdot \Delta$.

Hilfslemmata und Theorem

Theorem 2.11

Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung $\tilde{y}$ hat.
Für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) existiert eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant |I \cup J| \cdot \Delta$.

Zur Zulässigkeit von y^* für (J-MIP) und $\tilde{x}$ für (I-MIP):

Hilfslemmata und Theorem

Theorem 2.11

Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung $\tilde{y}$ hat. Für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) existiert eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant |I \cup J| \cdot \Delta$.

Zur Zulässigkeit von y^* für (J-MIP) und $\tilde{x}$ für (I-MIP):

$$A_1 y^* \quad = \quad A_1 x^* + \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i \quad \leqslant \quad A_1 x^* \quad \leqslant \quad b_1$$

Hilfslemmata und Theorem

Theorem 2.11

Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung $\tilde{y}$ hat. Für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) existiert eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant |I \cup J| \cdot \Delta$.

Zur Zulässigkeit von y^* für (J-MIP) und $\tilde{x}$ für (I-MIP):

$$\begin{array}{rcllcl} A_1 y^* & = & A_1 x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i & \leqslant & A_1 x^* & \leqslant & b_1 \\ A_2 y^* & = & A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i A_2 v^i & \leqslant & A_2 \tilde{y} & \leqslant & b_2 \end{array}$$

Hilfslemmata und Theorem

Theorem 2.11

Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung $\tilde{y}$ hat. Für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) existiert eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant |I \cup J| \cdot \Delta$.

Zur Zulässigkeit von y^* für (J-MIP) und $\tilde{x}$ für (I-MIP):

$$\begin{array}{lclclcl}
A_1 y^* & = & A_1 x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i & \leqslant & A_1 x^* & \leqslant & b_1 \\
A_2 y^* & = & A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i A_2 v^i & \leqslant & A_2 \tilde{y} & \leqslant & b_2 \\
A_1 \tilde{x} & = & A_1 x^* + \sum_{i=1}^k \gamma_i A_1 v^i & \leqslant & A_1 x^* & \leqslant & b_1
\end{array}$$

Hilfslemmata und Theorem

Theorem 2.11

Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung $\tilde{y}$ hat. Für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) existiert eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant |I \cup J| \cdot \Delta$.

Zur Zulässigkeit von y^* für (J-MIP) und $\tilde{x}$ für (I-MIP):

$$\begin{array}{rclcccc}
A_1 y^* & = & A_1 x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i & \leqslant & A_1 x^* & \leqslant & b_1 \\
A_2 y^* & = & A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i A_2 v^i & \leqslant & A_2 \tilde{y} & \leqslant & b_2 \\
A_1 \tilde{x} & = & A_1 x^* + \sum_{i=1}^k \gamma_i A_1 v^i & \leqslant & A_1 x^* & \leqslant & b_1 \\
A_2 \tilde{x} & = & A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_2 v^i & \leqslant & A_2 \tilde{y} & \leqslant & b_2.
\end{array}$$

Das Theorem von Olson

Definition 2.3 (Davenport-Konstante)

Sei $(G, +, 0)$ eine endliche, abelsche Gruppe. Die *Davenport-Konstante* $D(G)$ ist die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall g^1, \ldots, g^k \in G \ \ \exists I \subseteq [k] \colon I \neq \emptyset \wedge \sum_{i \in I} g^i = 0.$$

Theorem 2.6 (Olson, 1969)

Die Davenport-Konstante von $\mathbb{Z}^d / p\mathbb{Z}^d$ ist $1 + dp - d$ für p prim.

Das Theorem von Olson

Definition 2.3 (Davenport-Konstante)

Sei $(G, +, 0)$ eine endliche, abelsche Gruppe. Die *Davenport-Konstante* $D(G)$ ist die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall g^1, \dots, g^k \in G \;\; \exists I \subseteq [k] \colon I \neq \emptyset \wedge \sum_{i \in I} g^i = 0.$$

Theorem 2.6 (Olson, 1969)

Die Davenport-Konstante von $\mathbb{Z}^d / p\mathbb{Z}^d$ ist $1 + dp - d$ für p prim.

Korollar 2.7

Seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $d \in \mathbb{N}$ und $f^1, \dots, f^r \in \mathbb{Z}^d$ mit $r \geqslant 1 + dp - d$ gegeben.
Dann existiert eine nicht-leere Menge $I \subseteq [r]$ mit $\sum_{i \in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$.

Beweis des Hilflemmas

Korollar 2.7

Seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $d \in \mathbb{N}$ und $f^1, \ldots, f^r \in \mathbb{Z}^d$ mit $r \geqslant 1 + dp - d$ gegeben.
Dann existiert eine nicht-leere Menge $I \subseteq [r]$ mit $\sum_{i \in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$.

Lemma 2.8

Seien $d, k \in \mathbb{N}, u^1, \ldots, u^k \in \mathbb{Z}^d$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i \geqslant d$.
Dann existiert $\beta \in \times_{i=1}^k [0, \alpha_i]$ mit $\beta \neq 0$ und $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$.

Beweis des Hilflemmas

Korollar 2.7

Seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $d \in \mathbb{N}$ und $f^1, \dots, f^r \in \mathbb{Z}^d$ mit $r \geqslant 1 + dp - d$ gegeben.
Dann existiert eine nicht-leere Menge $I \subseteq [r]$ mit $\sum_{i \in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$.

Lemma 2.8

Seien $d, k \in \mathbb{N}, u^1, \dots, u^k \in \mathbb{Z}^d$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geqslant 0$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i \geqslant d$.
Dann existiert $\beta \in \bigtimes_{i=1}^k [0, \alpha_i]$ mit $\beta \neq 0$ und $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$.

Lemma 2.9

Seien $u^i \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda_i \geqslant 0$ für $i \in [k]$ gegeben. Dann existiert $\gamma \in \bigtimes_{i=1}^k [0, \lambda_i]$ mit $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$.

Ergebnisse für lineare Abschätzung

Untere Schranke für f

Angenommen, es gäbe ein f wie in der Vermutung, das den Abstand nur in Abhängigkeit von Δ beschränkt.

Beispiel 3.1

Für $\delta \in \mathbb{N}$ *seien*

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^{\intercal} := (0, -1).$$

Untere Schranke für f

Angenommen, es gäbe ein f wie in der Vermutung, das den Abstand nur in Abhängigkeit von Δ beschränkt.

Beispiel 3.1

Für $\delta \in \mathbb{N}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^{\mathsf{T}} := (0, -1).$$

Es wird x_2 minimiert unter den Nebenbedingungen $1 \leqslant \delta x_1 \leqslant x_2$.

Untere Schranke für f

Angenommen, es gäbe ein f wie in der Vermutung, das den Abstand nur in Abhängigkeit von Δ beschränkt.

Beispiel 3.1

Für $\delta \in \mathbb{N}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^\intercal := (0, -1).$$

Es wird x_2 minimiert unter den Nebenbedingungen $1 \leqslant \delta x_1 \leqslant x_2$. Es gilt $\Delta = \delta$ und $x^* = (1/\delta, 1)$ ist Optimallösung von ($\emptyset$-MIP) und ($\{2\}$-MIP).

Untere Schranke für f

Angenommen, es gäbe ein f wie in der Vermutung, das den Abstand nur in Abhängigkeit von Δ beschränkt.

Beispiel 3.1

Für $\delta \in \mathbb{N}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^\intercal := (0, -1).$$

Es wird x_2 minimiert unter den Nebenbedingungen $1 \leqslant \delta x_1 \leqslant x_2$.
Es gilt $\Delta = \delta$ und $x^* = (1/\delta, 1)$ ist Optimallösung von ($\emptyset$-MIP) und ($\{2\}$-MIP).
Die Optimallösung von ($\{1\}$-MIP) und ($\{1, 2\}$-MIP) ist $y^* = (1, \delta)$.

Untere Schranke für f

Angenommen, es gäbe ein f wie in der Vermutung, das den Abstand nur in Abhängigkeit von Δ beschränkt.

Beispiel 3.1

Für $\delta \in \mathbb{N}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^{\mathsf{T}} := (0, -1).$$

Es wird x_2 minimiert unter den Nebenbedingungen $1 \leqslant \delta x_1 \leqslant x_2$.
Es gilt $\Delta = \delta$ und $x^* = (1/\delta, 1)$ ist Optimallösung von ($\emptyset$-MIP) und ($\{2\}$-MIP).
Die Optimallösung von ($\{1\}$-MIP) und ($\{1, 2\}$-MIP) ist $y^* = (1, \delta)$.
$\|x^* - y^*\|_\infty = \delta - 1 = \Omega(\Delta)$.

Abschätzung nur mit Δ

Lemma 3.3 (Veselov-Chirkov, 2009)

Seien $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ *mit* $\operatorname{rang}(A) = n$, *und jede* $n \times n$ *Teilmatrix* $\tilde{A}$ *von* A *erfülle* $|\det(\tilde{A})| \leqslant 2$.
Sei z *eine Ecke von* $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$. *Mit* $Q := \operatorname{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\mathrm{eq}(z)}x \leqslant b_{\mathrm{eq}(z)}\})$ *gelten:*

(a) *Jede Ecke von* Q *liegt auf einer Kante von* P, *die* z *enthält.*

(b) *Jede Kante von* P, *die* z *und einen ganzzahligen Punkt enthält, enthält auch einen ganzzahligen Punkt* y *mit* $\|z - y\|_\infty \leqslant 1$.

Abschätzung nur mit Δ

Lemma 3.3 (Veselov-Chirkov, 2009)

Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ *mit* $\operatorname{rang}(A) = n$, *und jede* $n \times n$ *Teilmatrix* $\tilde{A}$ *von* A *erfülle* $|\det(\tilde{A})| \leqslant 2$.
Sei z *eine Ecke von* $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$. *Mit* $Q := \operatorname{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\mathrm{eq}(z)} x \leqslant b_{\mathrm{eq}(z)}\})$ *gelten:*

(a) *Jede Ecke von* Q *liegt auf einer Kante von* P, *die* z *enthält.*

(b) *Jede Kante von* P, *die* z *und einen ganzzahligen Punkt enthält, enthält auch einen ganzzahligen Punkt* y *mit* $\|z - y\|_\infty \leqslant 1$.

Theorem 3.9

Seien $\Delta \leqslant 2$ *und* $I, J \in \{\varnothing, [n]\}$, *sodass eine Optimallösung von (J-MIP) existiert.*
Für jede Optimallösung x^* *von (I-MIP) existiert eine Optimallösung* y^* *von (J-MIP) mit* $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant \Delta$.

Literatur I

[CGST86] Cook, W. ; Gerards, A. M. H. ; Schrijver, A. ; Tardos, É.:
Sensitivity theorems in integer linear programming.
In: *Mathematical Programming* 34 (1986), Apr, Nr. 3, 251–264.
http://dx.doi.org/10.1007/BF01582230. –
DOI 10.1007/BF01582230. –
ISSN 1436–4646

[Ols69] Olson, John E.:
A combinatorial problem on finite Abelian groups, I.
In: *Journal of Number Theory* 1 (1969), Nr. 1, 8 - 10.
http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(69)90021-3. –
DOI 10.1016/0022–314X(69)90021–3. –
ISSN 0022–314X

[PWW18] Paat, Joseph ; Weismantel, Robert ; Weltge, Stefan:
Distances between optimal solutions of mixed-integer programs.
In: *Mathematical Programming* (2018), Aug.
http://dx.doi.org/10.1007/s10107-018-1323-z. –
DOI 10.1007/s10107–018–1323–z. –
ISSN 1436–4646

Literatur II

[Sch86] Schrijver, Alexander:
Theory of Linear and Integer Programming.
New York, NY, USA : John Wiley & Sons, Inc., 1986. –
ISBN 0–471–90854–1

[VC09] Veselov, S.I. ; Chirkov, A.J.:
Integer program with bimodular matrix.
In: *Discrete Optimization* 6 (2009), Nr. 2, 220 - 222.
http://dx.doi.org/10.1016/j.disopt.2008.12.002. –
DOI 10.1016/j.disopt.2008.12.002. –
ISSN 1572–5286