Markl, Michael 08.11.2018
Seminar zur Optimierung und Spieltheorie
Institut für Mathematik der Universität Augsburg
Diskrete Mathematik, Optimierung und Operations Research
Wintersemester 2018/19

Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme

Ein *gemischt-ganzzahliges Programm* (mixed integer program, MIP) ist ein lineares Programm, das von einer ganzzahligen Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$, einer ganzzahligen rechten Seite $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und einer Indexmenge $I \subseteq [n] := \{1, \ldots, n\}$ erzeugt wird, und von der folgenden Form ist:

$$\begin{array}{rc} & \max c^\intercal x \\ \textbf{s.t.} & Ax \leqslant b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array} . \tag{I-MIP}$$

Gesucht ist für $I, J \subseteq [n]$ eine möglichst kleine Schranke, die den Abstand zwischen jeder optimalen Lösung x^* von (I-MIP) und einer zu x^* nähesten optimalen Lösung y^* von (J-MIP) beschränkt. Definiert man

$$\Delta := \Delta(A) := \max\{|\det(Q)| \mid Q \text{ quadratische Untermatrix von } A\},$$

so erhält man die in [PWW18] formulierte Vermutung:

Vermutung 1.1. Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $I, J \subseteq [n]$, unter denen (J-MIP) eine optimale Lösung besitzt, gilt: Besitzt (I-MIP) eine optimale Lösung x^*, so existiert eine optimale Lösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant f(\Delta)$.

Eine Abschätzung, die zusätzlich von der Dimension n abhängt, lieferte bereits Cook in [CGST86, Theorem 1 und Bemerkung 1]:

Theorem 2.1 (Cook et al., 1986). *Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine optimale Lösung hat und entweder $I = \varnothing$ oder $J = \varnothing$ gilt. Dann existiert für jede optimale Lösung x^* von (I-MIP) eine optimale Lösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant n\Delta$.*

Daraus kann leicht eine Abschätzung für allgemeine Indexmengen I, J mit der oberen Schranke $2n\Delta$ gefolgert werden. Diese soll nun verstärkt werden, indem die Schranke auf $|I \cup J|\Delta$ reduziert wird, wobei $|I \cup J|$ die Anzahl ganzzahliger Variablen ist.
Dabei lässt sich aus der Theorie endlicher abelscher Gruppen ein wichtiges Hilfslemma beziehen, das auf einem Theorem von Olson in [Ols69] beruht. Die sogenannte *Davenport-Konstante* $D(G)$ einer endlichen abelschen Gruppe G bezeichnet dabei die kleinste natürliche Zahl k, für die gilt:

$$\forall g^1, \ldots, g^k \in G \;\; \exists I \subseteq [k] \colon I \neq \varnothing \wedge \sum_{i\in I} g^i = 0.$$

Theorem 2.6 (Olson, 1969). *Für eine Primzahl p ist $D(\mathbb{Z}^d/p\mathbb{Z}^d) = 1 + dp - p$.*

Korollar 2.7. *Seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $d \in \mathbb{N}$ und $f^1, \ldots, f^r \in \mathbb{Z}^d$ mit $r \geqslant 1 + dp - d$ gegeben. Dann existiert eine nicht-leere Menge $I \subseteq [r]$ mit $\sum_{i\in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$.*

Mit Hilfe dieses Korollars kann eine Reihe weiterer Aussagen gezeigt werden, die für den Beweis der Abschätzung notwendig sind:

Lemma 2.8. *Seien $d, k \in \mathbb{N}, u^1, \dots, u^k \in \mathbb{Z}^d$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geqslant 0$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i \geqslant d$. Dann existiert $\beta \in \bigtimes_{i=1}^k [0, \alpha_i]$ mit $\beta \neq 0$ und $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$.*

Lemma 2.9. *Seien $u^i \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda_i \geqslant 0$ für $i \in [k]$ gegeben. Dann existiert $\gamma \in \bigtimes_{i=1}^k [0, \lambda_i]$ mit $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$.*

Außerdem spielt das folgende Lemma aus [KV12, Lemma 5.4] über die Darstellung von polyedrischen Kegeln eine wichtige Rolle:

Lemma 2.10. *Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ gegeben. Der Polyeder $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant 0\}$ besitzt die Darstellung $C = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v^i \mid \forall i \in [k]\colon \lambda_i \geqslant 0\}$ mit $v^i \in \mathbb{Z}^n$ und $\left\|v^i\right\|_\infty \leqslant \Delta(A)$ für $i \in [k]$.*

Mit diesen Grundlagen kann nun die gewünschte Abschätzung bewiesen werden:

Theorem 2.11. *Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine Optimallösung $\tilde{y}$ hat.*
Für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) existiert eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant |I \cup J| \cdot \Delta$.

Man kann zeigen, dass eine Abschätzung wie in Vermutung 1.1, die nur Δ verwendet, mindestens linear von Δ abhängen muss. Betrachten wir nur $I, J \in \{\varnothing, [n]\}$, gilt eine solche Abschätzung für $\Delta \leqslant 2$. Dies baut auf ein Theorem von Veselov-Chirkov aus [VC09, Theorem 2 und Beweis] auf:

Lemma 2.10 (Veselov-Chirkov, 2009). *Seien eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ mit $\operatorname{rang}(A) = n$ gegeben und der Betrag jeder Determinante einer $n \times n$ Teilmatrix von A sei kleinergleich 2.*
Sei z eine Ecke von $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$ und sei $Q := \operatorname{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\mathrm{eq}(z)} x \leqslant b_{\mathrm{eq}(z)}\})$. Dann gelten:

(a) Jede Ecke von Q liegt auf einer Kante von P, die z enthält.

(b) Jede Kante von P, die z und einen ganzzahligen Punkt enthält, enthält auch einen ganzzahligen Punkt y mit $\|z - y\|_\infty \leqslant 1$.

Theorem 2.11. *Seien $\Delta \leqslant 2$ und $I, J \in \{\varnothing, [n]\}$, sodass eine Optimallösung von (J-MIP) existiert. Für jede Optimallösung x^* von (I-MIP) existiert eine Optimallösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant \Delta$.*

Literatur

[CGST86] Cook, W. ; Gerards, A. M. H. ; Schrijver, A. ; Tardos, É.: Sensitivity theorems in integer linear programming. In: *Mathematical Programming* 34 (1986), Apr, Nr. 3, 251–264. http://dx.doi.org/10.1007/BF01582230. – DOI 10.1007/BF01582230. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf Seite 1.)

[KV12] (Zitiert auf Seite 2.)

In: Korte, Bernhard ; Vygen, Jens: *Ganzzahlige Optimierung.* Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. – ISBN 978–3–642–25401–7, 111–141

[Ols69] Olson, John E.: A combinatorial problem on finite Abelian groups, I. In: *Journal of Number Theory* 1 (1969), Nr. 1, 8 - 10. http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(69)90021-3. – DOI 10.1016/0022–314X(69)90021–3. – ISSN 0022–314X (Zitiert auf Seite 1.)

[PWW18] Paat, Joseph ; Weismantel, Robert ; Weltge, Stefan: Distances between optimal solutions of mixed-integer programs. In: *Mathematical Programming* (2018), Aug. http://dx.doi.org/10.1007/s10107-018-1323-z. – DOI 10.1007/s10107–018–1323–z. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf Seite 1.)

[VC09] Veselov, S.I. ; Chirkov, A.J.: Integer program with bimodular matrix. In: *Discrete Optimization* 6 (2009), Nr. 2, 220 - 222. http://dx.doi.org/10.1016/j.disopt.2008.12.002. – DOI 10.1016/j.disopt.2008.12.002. – ISSN 1572–5286 (Zitiert auf Seite 2.)