Markl, Michael 08.11.2018
Seminar zur Optimierung und Spieltheorie
Institut für Mathematik der Universität Augsburg
Diskrete Mathematik, Optimierung und Operations Research
Wintersemester 2018/19

Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme

Zusammenfassung

Ein gemischt-ganzzahliges Programm ist ein lineares Optimierungsprogramm, bei dem die Variablen einer bestimmten Indexmenge auf die ganzen Zahlen beschränkt sind. Wir verstärken bisherige Resultate, die eine Abschätzung optimaler Lösungen zweier gemischt-ganzzahliger Programme, die sich nur in der Indexmenge unterscheiden, anhand der Anzahl an Variablen und Δ geben. Die Größe Δ quantifiziert dabei den größten Absolutwert der Determinanten aller quadratischer Untermatrizen. Wir zeigen eine Abschätzung, die nur die beiden Indexmengen und Δ verwendet, und vermuten, dass der Abstand gemischt-ganzzahliger Probleme sogar linear von Δ abhängt, wobei wir Szenarien untersuchen, die diese Vermutung bestätigen.

Inhaltsverzeichnis

1 Gemischt-ganzzahlige lineare Programme **1**

2 Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme **1**

2.1 Folgerungen aus Davenport-Konstante von p-Gruppen 2

2.2 Abschätzung mit Anzahl ganzzahliger Variablen 4

3 Lineare Abhängigkeit von Δ **5**

4 Ausblick und ähnliche Arbeiten **9**

1 Gemischt-ganzzahlige lineare Programme

Diese Arbeit behandelt die Abschätzung von Abständen optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme. Ein gemischt-ganzzahliges Programm ist ein lineares Programm, bei dem die Matrix, die rechte Seite b sowie einige Variablen ganzzahlig und die restlichen Variablen reell sind. Speziell erzeugen $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $I \subseteq [n] := \{1, \dots, n\}$ das gemischt-ganzzahlige Programm (mixed integer program, MIP)

$$\begin{array}{rc} & \max c^\intercal x \\ \textbf{s.t.} & Ax \leqslant b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array} . \tag{I-MIP}$$

Wir schreiben (I-MIP*), falls zusätzlich $b \in \mathbb{R}^m$ zugelassen wird. Ist also beispielsweise $I = \varnothing$, erhält man ein Problem in Standardform; $I = [n]$ bildet ein rein ganzzahliges lineares Programm.
Gesucht ist nun für $I, J \subseteq [n]$ eine möglichst kleine Schranke, die den Abstand zwischen jeder optimalen Lösung x^* von (I-MIP) und einer zu x^* nähesten optimalen Lösung y^* von (J-MIP) beschränkt. Diese Schranke soll außerdem nur von A, I und J abhängen und der Abstand mittels Maximumsnorm ermittelt werden. Desweiteren wird immer vorausgesetzt, dass (J-MIP) eine optimale Lösung besitzt. Definiert man

$$\Delta := \Delta(A) := \max\{|\det(Q)| \mid Q \text{ quadratische Untermatrix von } A\},$$

so erhält man die folgende in [PWW18] formulierte Vermutung.

Vermutung 1.1. Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $I, J \subseteq [n]$, unter denen (J-MIP) eine optimale Lösung besitzt, gilt: Besitzt (I-MIP) eine optimale Lösung x^*, so existiert eine optimale Lösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant f(\Delta)$.

In dieser Arbeit werden wir eine etwas schwächere Aussage in Theorem 2.11 zeigen, bei der der Abstand zusätzlich noch von $|I \cup J|$ abhängt. Des Weiteren werden wir in Abschnitt 3 Fälle diskutieren, in denen wir sogar die verstärkte Vermutung der Linearität von f beweisen können.

2 Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme

Um eine simple Abschätzung, die zusätzlich von der Dimension n abhängt, herzuleiten, wird das folgende Theorem genutzt, das von Cook et al. in [CGST86, Theorem 1 und Bemerkung 1] formuliert wurde:

Theorem 2.1 (Cook et al., 1986)**.** *Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP*) eine optimale Lösung hat und entweder $I = \varnothing$ oder $J = \varnothing$ gilt. Dann existiert für jede optimale Lösung x^* von (I-MIP*) eine optimale Lösung y^* von (J-MIP*) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant n\Delta$.*

Mit Hilfe dieses Theorems kann nun für allgemeine Indexmengen eine ähnliche obere Grenze gefunden werden:

Korollar 2.2. *Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP*) eine optimale Lösung hat. Dann existiert für jede optimale Lösung x^* von (I-MIP*) eine optimale Lösung y^* von (J-MIP*) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant 2n\Delta$.*

Beweis. Sei x^* optimale Lösung von (I-MIP*). Nach Theorem 2.1 existiert eine optimale Lösung z^* von ($\varnothing$-MIP*) mit $\|x^* - z^*\|_\infty \leqslant n\Delta$ und eine optimale Lösung y^* von (J-MIP*) mit $\|z^* - y^*\|_\infty \leqslant n\Delta$.
Nach Dreiecksungleichung ist $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant \|x^* - z^*\|_\infty + \|z^* - y^*\|_\infty \leqslant 2n\Delta$. □

In diesem Abschnitt wollen wir nun diese Aussage verstärken, indem wir in der Abschätzung $2n$ durch $|I \cup J|$ ersetzen, also durch die Anzahl der Variablen, die in (I-MIP*) oder (J-MIP*) ganzzahlig sind.

2.1 Folgerungen aus Davenport-Konstante von p-Gruppen

Spannenderweise lässt sich aus der Theorie endlicher Gruppen nun ein wichtiges Hilfslemma für unser Problem mit Hilfe der sogenannten Davenport-Konstante herleiten:

Definition 2.3 (Davenport-Konstante)**.** Sei $(G, +, 0)$ eine endliche, abelsche Gruppe. Die *Davenport-Konstante* von G ist

$$D(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall g^1, \ldots, g^k \in G\ \exists I \subseteq [k] \colon I \neq \varnothing \wedge \sum_{i \in I} g^i = 0\}.$$

Olson hat in [Ols69] die Davenport-Konstante für sogenannte p-Gruppen ermittelt. Für die Interpretation seiner Aussage ist der Begriff der invarianten Faktoren einer endlichen abelschen Gruppe nötig. Dieser wird im Hauptsatz endlicher abelscher Gruppen, der beispielsweise in [KM17, Satz 10.6] zu finden ist, eingeführt.

Definition 2.4 (p-Gruppe)**.** Sei p eine Primzahl. Eine *p-Gruppe* ist eine Gruppe, in der die Ordnung jedes Elements eine Potenz von p ist.

Theorem 2.5 (Hauptsatz endlicher abelscher Gruppen)**.** *Sei G eine endliche abelsche Gruppe. C_n bezeichne die zyklische Gruppe mit Ordnung n. Dann existiert eine eindeutige Darstellung $G \cong C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_d}$ mit $2 \leqslant n_1 \mid \cdots \mid n_d$. Die Zahlen $n_1, \ldots, n_d$ werden dabei als die sogenannten* invarianten Faktoren *von G bezeichnet.*

Auf dieser Grundlage basiert nun die folgende Aussage von Olson:

Theorem 2.6 (Olson, 1969)**.** *Für eine endliche abelsche p-Gruppe G mit invarianten Faktoren $p^{e_1}, \ldots, p^{e_r}$ ist die Davenport-Konstante $D(G) = 1 + \sum_{i=1}^{r}(p^{e_i} - 1)$.*

Mit diesem Ergebnis können wir leicht eine für uns relevante Folgerung beschreiben:

Korollar 2.7. *Seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $d \in \mathbb{N}$ und $f^1, \ldots, f^r \in \mathbb{Z}^d$ mit $r \geqslant 1 + dp - d$. Dann existiert eine nicht-leere Menge $I \subseteq [r]$ mit $\sum_{i \in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$.*

Beweis. Die d invarianten Faktoren der p-Gruppe $\mathbb{Z}^d / p\mathbb{Z}^d \cong C_p \times \cdots \times C_p$ sind jeweils p und mit Theorem 2.6 ist $D(\mathbb{Z}^d / p\mathbb{Z}^d) = 1 + \sum_{i=1}^{d}(p-1) = 1 + dp - d$.
Nach Definition der Davenport-Konstante existiert eine nichtleere Menge $I \subseteq [1 + dp - d]$ mit $\sum_{i \in I}[f^i]_p = [0]_p = p\mathbb{Z}^d$. Mit $[1 + dp - d] \subseteq [r]$ und $\sum_{i \in I}[f^i]_p = [\sum_{i \in I} f^i]_p$ folgt die Behauptung. □

Damit können wir das folgende Lemma zeigen, das in [PWW18] als Lemma 1 bezeichnet wurde.

Lemma 2.8. *Seien $d, k \in \mathbb{N}, u^1, \ldots, u^k \in \mathbb{Z}^d$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$ mit $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geqslant d$. Dann existiert $\beta \in \times_{i=1}^{k}[0, \alpha_i]$ mit $\beta \neq 0$ und $\sum_{i=1}^{k} \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha_i > 0$ für $i = 1, \ldots, k$, denn für $\alpha_i = 0$ wird $\beta_i = 0$ vorausgesetzt, wodurch das Resultat nicht verändert werden kann.
Zunächst betrachten wir den Fall der Existenz einer Primzahl p, die $\alpha_i = q_i/p$ mit bestimmten $q_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in [k]$ erfüllt. Wir können nun Korollar 2.7 auf die Vektoren

$$\underbrace{u^1, \ldots, u^1}_{q_1 \text{ Einträge}}, \ \ldots \ , \underbrace{u^k, \ldots, u^k}_{q_k \text{ Einträge}}$$

anwenden, da nach Voraussetzung $r := \sum_{i=1}^k q_i = (\sum_{i=1}^k \alpha_i) \cdot p \geqslant dp \geqslant 1 + dp - d$ gilt. Dadurch erhalten wir $l_i \in \{0, \ldots, q_i\}$ für $i \in [k]$ mit nicht alle $l_i = 0$ und $\sum_{i=1}^k l_i u^i \in p\mathbb{Z}^d$. Teilen wir durch p gelangen wir mit $\beta_i := l_i/p$ zu unserer Behauptung $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und $\beta \neq 0$ sowie $\beta_i \in [0, \alpha]$, da $0 \leqslant l_i/p \leqslant q_i/p = \alpha_i$.
Den allgemeinen Fall führen wir auf den ersten zurück, indem wir $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ durch Brüche mit Primzahlen im Nenner annähern. Dazu definieren wir die Folge

$$(v^j)_{j\in\mathbb{N}} := (q_1^j/p^j, \ldots, q_k^j/p^j)_{j\in\mathbb{N}}$$

mit $q_i^j \in \mathbb{N}$, p^j Primzahl und $q_i^j/p^j \in [\alpha_i, \alpha_i + j^{-1}]$. Damit ist $\lim_{j\to\infty} v^j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ und für $j \in \mathbb{N}$ können wir den ersten Fall auf u und v^j anwenden und erhalten damit $\beta^j \in \times_{i=1}^k [0, v_i^j]$ mit $\beta^j \neq 0$ sowie $\sum_{i=1}^k \beta_i^j u^i \in \mathbb{Z}^d$. Da die Folge $(\beta^j)_{j\in\mathbb{N}}$ in der kompakten Menge $\times_{i=1}^k [0, \alpha_i + 1]$ liegt, existiert nach Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge mit $\lim_{j\to\infty} \beta^{\sigma(j)} =: \beta$. Aus $\beta_i^{\sigma(j)} \in [0, v_i^{\sigma(j)}]$ und $\lim_{j\to\infty} v_i^{\sigma(j)} = \alpha_i$ folgt nun $\beta_i \in [0, \alpha_i]$. Da es nur endlich viele $z \in \mathbb{Z}^d$ der Form $z = \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i$ mit $\gamma_i \in [0, \alpha_i + 1]$ gibt, existiert ein Punkt $z \in \mathbb{Z}^d$, für den $\sum_{i=1}^k \beta_i^{\sigma(j)} u^i = z$ für unendlich viele j gilt. Also gibt es wegen der Konvergenz von $(\beta^{\sigma(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ ein n, sodass $\sum_{i=1}^k \beta_i^{\sigma(j)} u^i = z$ für alle $j \geqslant n$ gilt, und damit ist $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i = z$.
Ist $\beta \neq 0$, so erfüllt es die Behauptung. Andernfalls ist $z = 0$. Setze $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\varepsilon\beta_i^{\sigma(n)} \in [0, \alpha_i]$ für $i \in [k]$. Nach Wahl von $\beta^{\sigma(n)}$ ist dann $\varepsilon\beta^{\sigma(n)} \neq 0$ und es gilt

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon\beta_i^{\sigma(n)} u^i = \varepsilon z = 0 \in \mathbb{Z}^d.$$

□

Im nächsten Schritt wird das Resultat dieses Unterkapitels formuliert, welches wir in der Abschätzung im nächsten Unterkapitel benötigen werden.

Lemma 2.9. *Seien $d \in \mathbb{N}$, $u^i \in \mathbb{Z}^d$ sowie $\lambda_i \geqslant 0$ für $i \in [k]$ gegeben. Dann existiert $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$ mit $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$.*

Beweis. Die beschränkte Menge $G := \{\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i] \mid \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d\}$ ist abgeschlossen: Sei $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{R}^k$ konvergente Folge mit $\gamma^n \in G$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \gamma^n =: \tilde{\gamma}$. Da es nur endlich viele $z \in \mathbb{Z}^d$ mit $z = \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i$ für $\gamma_i \in [0, \lambda_i]$ gibt, existiert ein $z \in \mathbb{Z}^d$, sodass $z = \sum_{i=1}^k \gamma_i^n u^i$ für unendlich viele γ^n gilt und damit auch für $\tilde{\gamma} \in G$. Also ist G abgeschlossen und mit dem Satz von Heine-Borel auch kompakt. Nach dem Satz von Weierstraß nimmt $\gamma \mapsto \sum_{i=1}^k \gamma_i$ also bei einem γ ihr Maximum auf G an.
Angenommen, es gelte $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) \geqslant d$. Wenden wir Lemma 2.8 auf $\alpha_i := \lambda_i - \gamma_i \geqslant 0$ und u^i für $i \in [k]$ an, erhalten wir $\beta \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i - \gamma_i]$ mit $\beta \neq 0$ und $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$. Für $\gamma' := \gamma + \beta \leqslant \lambda$ gilt $\sum_{i=1}^k \gamma_i' u^i = \sum_{i=1}^k \gamma_i u^i + \sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und damit ist auch $\gamma' \in G$. Wegen $\beta \neq 0$ ist $\sum_{i=1}^k \gamma_i' > \sum_{i=1}^k \gamma_i$, was im Widerspruch zur Maximalität von γ steht. □

2.2 Abschätzung mit Anzahl ganzzahliger Variablen

Dieser Abschnitt verfolgt nun das Ziel eine Abschätzung optimaler Lösungen zweier gemischt-ganzzahliger Programme (I-MIP*) und (J-MIP*) in Abhängigkeit von Δ und $|I \cup J|$ zu finden.
Zunächst betrachten wir noch folgendes Hilfslemma über die Darstellung eines polyedrischen Kegels. Dieses ist als Standardresult in der Theorie ganzzahliger Optimierung bekannt und wird beispielsweise in [KV12, Lemma 5.4] bewiesen.

Lemma 2.10. *Sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, dessen Zeilen in zwei Untermatrizen A_1 und A_2 aufgeteilt sind. Die Menge $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \leqslant 0, A_2 x \geqslant 0\}$ besitzt die Darstellung*

$$C = \{\lambda_1 v^1 + \cdots + \lambda_k v^k \mid \forall i \in [k]\colon \lambda_i \geqslant 0\}$$

mit $v^i \in \mathbb{Z}^n$ und $\left\|v^i\right\|_\infty \leqslant \Delta(A)$ für $i \in [k]$.

Nun formulieren wir unser Theorem:

Theorem 2.11. *Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP*) eine optimale Lösung $\tilde{y}$ hat. Für jede optimale Lösung x^* von (I-MIP*) existiert eine optimale Lösung y^* von (J-MIP*) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant |I \cup J| \cdot \Delta$.*

Beweis. Ohne Einschränkung seien I und J nicht beide leer. Zunächst werden alle ganzzahligen Variablen an die ersten Stellen getauscht und es kann $I \cup J = [d]$ mit $d \in [n]$ angenommen werden. Es sei eine optimale Lösung x^* von (I-MIP*) gegeben. Setze $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \leqslant 0, A_2 x \geqslant 0\}$, wobei die Zeilen von A in A_1 und A_2 so aufgeteilt werden, dass $A_1(\tilde{y} - x^*) < 0$ und $A_2(\tilde{y} - x^*) \geqslant 0$ erfüllt werden. Nach Lemma 2.10 erhalten wir die Darstellung

$$\tilde{y} - x^* = \lambda_1 v^1 + \cdots + \lambda_k v^k$$

mit $\lambda_i \geqslant 0$, $\left\|v^i\right\|_\infty \leqslant \Delta$ und $v^i \in C \cap \mathbb{Z}^n$ für alle $i \in [k]$. Man setze u^i als die Projektion des Vektors v^i auf dessen erste d Komponenten. Nach Lemma 2.9 existiert ein $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$ mit $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ und $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$.
Wir definieren nun unseren Kandidaten

$$y^* := \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i v^i = x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) v^i$$

sowie

$$\tilde{x} := x^* + \sum_{i=1}^k \gamma_i v^i = \tilde{y} - \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) v^i.$$

Zunächst zeigen wir, dass y^* für (J-MIP*) und $\tilde{x}$ für (I-MIP*) zulässig sind. Dabei sind für $i \in I$ und $j \in J$ die Koordinaten $\tilde{x}_i$ und y^*_j ganzzahlig, weil bereits x^*_i und $\tilde{y}_j$ für $i, j \in [d]$ ganzzahlig sind und $\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ gilt. Die Ungleichungen $Ay^* \leqslant b$ und $A\tilde{x} \leqslant b$ folgen nun mit $v^i \in C$ für alle $i \in [k]$ und

$$\begin{array}{lllllll}
A_1 y^* & = & A_1 x^* + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_1 v^i & \leqslant & A_1 x^* & \leqslant & b_1 \\
A_2 y^* & = & A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k \gamma_i A_2 v^i & \leqslant & A_2 \tilde{y} & \leqslant & b_2 \\
A_1 \tilde{x} & = & A_1 x^* + \sum_{i=1}^k \gamma_i A_1 v^i & \leqslant & A_1 x^* & \leqslant & b_1 \\
A_2 \tilde{x} & = & A_2 \tilde{y} - \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) A_2 v^i & \leqslant & A_2 \tilde{y} & \leqslant & b_2.
\end{array}$$

Da x^* optimal für (I-MIP*) ist, gilt $c^\intercal x^* \geqslant c^\intercal \tilde{x} = c^\intercal x^* + c^\intercal(\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i)$. Zieht man auf beiden Seiten $c^\intercal x^*$ ab, folgt $c^\intercal(\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i) \leqslant 0$. Damit erhalten wir mit der Optimalität von $\tilde{y}$ für (J-MIP*) und mit $c^\intercal y^* = c^\intercal \tilde{y} - c^\intercal(\sum_{i=1}^k \gamma_i v^i) \geqslant c^\intercal \tilde{y}$ auch die Optimalität von y^* für (J-MIP*). Es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\|x^* - y^*\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) v^i\right\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) \left\|v^i\right\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i)\Delta \leqslant d\Delta.$$

□

Bemerkung 2.12. In der letzten Zeile des Beweises kann man erkennen, dass für $A \neq 0$ und I,J nicht beide leer sogar die strikte Abschätzung $\|x^* - y^*\|_\infty < |I \cup J| \cdot \Delta$ gilt, da dann Δ ungleich 0 ist.

3 Lineare Abhängigkeit von Δ

Bisher haben wir Abschätzungen mit $b \in \mathbb{R}^m$ betrachtet. Schrijver hat in [Sch86, Kapitel 17.2] ein Beispiel angeführt, das $n\Delta$ als beste Abschätzung von optimalen Lösungen von ($\varnothing$-MIP*) und ($[n]$-MIP*) besitzt. Schränkt man das Problem mit $b \in \mathbb{Z}^m$ ein, kann man mit folgendem Beispiel erkennen, dass der Abstand optimaler Lösungen zumindest linear von Δ abhängt:

Beispiel 3.1. Für $\delta \in \mathbb{N}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^\intercal := (0, -1).$$

Es wird also die zweite Komponente minimiert unter der Nebenbedingung $Ax \leqslant b$, also $\delta x_1 - x_2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \delta x_1 \leqslant x_2$ und $\delta x_1 \geqslant 1$. Diese können wir zusammenfassen in $1 \leqslant \delta x_1 \leqslant x_2$. Es gilt $\Delta = \delta$ und die optimale Lösung von ($\varnothing$-MIP) und ($\{2\}$-MIP) ist $x^* = (1/\delta, 1)$. Die optimale Lösung von ($\{1\}$-MIP) und ($\{1,2\}$-MIP) ist jedoch $y^* = (1, \delta)$. Entsprechend ist der Abstand $\|x^* - y^*\|_\infty = \delta - 1 = \Omega(\Delta)$

Im restlichen Abschnitt wird das Problem weiter eingeschränkt, um in diesen Fällen die Vermutung 1.1 zeigen zu können. Dabei werden keine echt gemischt-ganzzahligen Programme mehr zugelassen, sondern nur noch Indexmengen in $\{\varnothing, [n]\}$.

Notation 3.2. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Im Kontext des Polyeders $\{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax \leqslant b\}$ bezeichnen $A_{\mathrm{eq}(x^*)}$ und $b_{\mathrm{eq}(x^*)}$ diejenigen Zeilen aus A und b, bei denen die zugehörigen Ungleichungen für x^* straff sind.
Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathrm{co}(M)$ ihre konvexe Hülle.

Wir benutzen nun das folgende Lemma aus [VC09, Theorem 2 und Beweis], um für einige Situationen die Vermutung 1.1 zu bestätigen:

Lemma 3.3 (Veselov-Chirkov, 2009)**.** *Seien eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{rang}(A) = n$ gegeben und der Betrag jeder Determinante einer $n \times n$ Teilmatrix von A sei kleinergleich 2.*
Seien z eine Ecke von $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$ und $Q := \mathrm{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\mathrm{eq}(x^*)} x \leqslant b_{\mathrm{eq}(x^*)}\})$. Dann gelten:

(a) Jede Ecke von Q liegt auf einer Kante von P, die z enthält.

(b) Jede Kante von P, die z und einen ganzzahligen Punkt enthält, enthält auch einen ganzzahligen Punkt y mit $\|z - y\|_\infty \leqslant 1$.

Lemma 3.4. *Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\Delta(A) \geqslant 1$ gegeben und $e \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, der in einem Eintrag den Wert 1 oder -1 hat und in allen anderen den Wert 0. Erhält man die Matrix $\tilde{A}$ durch Einfügen von e als Zeile oder Spalte bei A, so bleibt $\Delta(\tilde{A}) = \Delta(A)$ erhalten.*

Beweis. Da jede Untermatrix von A auch eine Untermatrix von $\tilde{A}$ ist, folgt die Ungleichung $\Delta(A) \leqslant \Delta(\tilde{A})$.
Sei nun M eine quadratische Untermatrix von $\tilde{A}$, die keine Untermatrix von A ist. Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, dass e als letzte Zeile an A angefügt worden ist, da sich der Betrag der Determinante unter Transponieren und Zeilentausch nicht verändert. Die ersten Zeilen von M bilden also eine Untermatrix von A, die letzte Zeile $\tilde{e}$ ist ein Untervektor von e.
Ist $\tilde{e} = 0$, so ist $\det(M) = 0$. Sonst lässt sich M mit elementaren Zeilen- und Spaltentransformationen in die Form

$$\tilde{M} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bringen, wobei B eine Untermatrix von A ist und $|\det(M)| = |\det(\tilde{M})|$ gilt. Ist B leer, so ist $|\det(M)| = 1$, sonst gilt $|\det(M)| = |\det(B)| \leqslant \Delta(A)$. □

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass für Probleme in Standardform mit einer total unimodularen Matrix alle Ecken ganzzahlig sind. Eine *total unimodulare Matrix* ist dabei eine Matrix, bei der die Determinante jeder quadratischen Untermatrix in $\{-1, 0, 1\}$ liegt. Da jede total unimodulare Matrix bereits ganzzahlig ist, kann die Eigenschaft auch durch $\Delta(A) \leqslant 1$ für ganzzahlige Matrizen A charakterisiert werden.

Lemma 3.5. *Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m$ gegeben mit $\Delta(A) \leqslant 1$. Dann ist jede Ecke von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$ ganzzahlig.*

Beweis. Für eine Ecke x gilt $\operatorname{rang}(A_{\mathrm{eq}(x)}) = n$. Nach dem Basisauswahlsatz können, falls nötig, Zeilen von $A_{\mathrm{eq}(x)}$ und $b_{\mathrm{eq}(x)}$ entfernt werden, um eine reguläre Teilmatrix $\tilde{A}$ von $A_{\mathrm{eq}(x)}$ mit zugehörigem $\tilde{b}$ zu erhalten. Nun kann $\tilde{A}x = \tilde{b}$ mit der Cramerschen Regel eindeutig gelöst werden. Dabei ist $x_i = \det(\tilde{A}_i)/\det(\tilde{A})$, wobei $\tilde{A}_i$ aus $\tilde{A}$ durch Ersetzen der i-ten Spalte mit $\tilde{b}$ entsteht. Da $\det(\tilde{A}) \in \{-1, 1\}$ gilt und $\tilde{A}_i$ ganzzahlig ist, ist auch x_i ganzzahlig. □

Lemma 3.6. *Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ sowie $x^* \in P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$ gegeben. $c^\mathsf{T} x^*$ ist obere Schranke von $x \mapsto c^\mathsf{T} x$ über $Q := \operatorname{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\mathrm{eq}(x^*)} x \leqslant b_{\mathrm{eq}(x^*)}\})$, falls $x \mapsto c^\mathsf{T} x$ von x^* über P maximiert wird.*

Beweis. Für beliebiges $q \in Q \backslash \{x^*\}$ gilt: Es existiert $\lambda \in [0, 1)$ mit $\tilde{q} := \lambda q + (1 - \lambda) x^* \in P$, da wir uns für jede Ungleichung, die q noch nicht erfüllt, solange an x^* annähern können bis sie erfüllt ist und diese Ungleichung für x^* keine Gleichheit erfüllt. Ist $\lambda = 0$, so ist $q \in P$ und $c^\mathsf{T} q \leqslant c^\mathsf{T} x^*$. Mit $c^\mathsf{T} \tilde{q} \leqslant c^\mathsf{T} x^*$ gilt sonst $c^\mathsf{T} q = (c^\mathsf{T} \tilde{q} - c^\mathsf{T}(1 - \lambda) x^*)/\lambda \leqslant c^\mathsf{T} x^*$. Also ist $x \mapsto c^\mathsf{T} x$ in Q mit $c^\mathsf{T} x^*$ nach oben beschränkt. □

Zunächst wird die gewünschte Abschätzung für $J = [n]$ und $I = \varnothing$ gezeigt:

Lemma 3.7. *Seien $\Delta \in \{1, 2\}$, $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$ beschränkt und es existiere eine optimale Lösung von ($[n]$-MIP). Dann existiert für jede optimale Lösung x^* von ($\varnothing$-MIP) eine optimale Lösung y^* von ($[n]$-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant \Delta$.*

Beweis. Spezialfall: x^* ist Ecke von P.

Ist $\Delta = 1$, so ist x^* nach Lemma 3.5 ganzzahlig und $y^* := x^*$ ist die gewünschte Lösung mit $\|x^* - y^*\|_\infty = 0 \leqslant \Delta - 1$. Sei also $\Delta = 2$.

Setze $Q := \operatorname{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\mathrm{eq}(x^*)}x \leqslant b_{\mathrm{eq}(x^*)}\})$. Da Q nicht-leer ist und $x \mapsto c^\intercal x$ nach Lemma 3.6 mit $c^\intercal x^*$ über Q nach oben beschränkt ist, existiert also eine Ecke $z \in \mathbb{Z}^n$ von Q, die $x \mapsto c^\intercal x$ maximiert. Nach Lemma 3.3 (a) liegt z auf einer Kante E von P, die x^* enthält.

Sei $y^* \in \mathbb{Z}^n \cap E$ mit $\|x^* - y^*\|_\infty := \min\{\|x^* - y\|_\infty \mid y \in \mathbb{Z}^n \cap E\}$. Da x^* Ecke der gemeinsamen Kante E ist, existiert ein $\lambda \in [0,1]$ mit $y^* = \lambda z + (1-\lambda)x^*$ und mit $c^\intercal x^* \leqslant c^\intercal z$ gilt $c^\intercal y^* \geqslant c^\intercal z$. Aus der Optimalität von z folgt die Optimalität von y^* für ([n]-MIP) und mit Lemma 3.3 (b) folgt aus der Wahl von y^* die Abschätzung $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant 1 = \Delta - 1$.

Allgemeiner Fall.

Die Menge aller optimalen Lösungen von ($\varnothing$-MIP) bildet eine Seitenfläche von P, nämlich $F := \{x \in P \mid c^\intercal x \geqslant c^\intercal x^*\}$. Sei $\tilde{z}$ eine optimale Lösung von ([n]-MIP) und $\tilde{x}$ eine Ecke des Polytops $B := \{x \in F \mid \forall i \in [n] : \lfloor x_i^* \rfloor \leqslant x_i \leqslant \lceil x_i^* \rceil\}$. Dann folgt bereits $\|\tilde{x} - x^*\|_\infty \leqslant 1$.

Definiere die Polyeder

$$\begin{aligned}
P_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \tilde{y}_i \leqslant \lfloor x_i^* \rfloor = \tilde{x}_i \ \Rightarrow \ x_i \leqslant \lfloor x_i^* \rfloor && \text{für alle } i \in [n]\},\\
P_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \tilde{y}_i \geqslant \lfloor x_i^* \rfloor = \tilde{x}_i \ \Rightarrow \ x_i \geqslant \lfloor x_i^* \rfloor && \text{für alle } i \in [n]\},\\
P_3 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \tilde{y}_i \leqslant \lceil x_i^* \rceil = \tilde{x}_i \ \Rightarrow \ x_i \leqslant \lceil x_i^* \rceil && \text{für alle } i \in [n]\},\\
P_4 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \tilde{y}_i \geqslant \lceil x_i^* \rceil = \tilde{x}_i \ \Rightarrow \ x_i \geqslant \lceil x_i^* \rceil && \text{für alle } i \in [n]\}
\end{aligned}$$

und das Polytop $\tilde{P} := P \cap P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$. $\tilde{P}$ ist nicht-leer, da $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{P}$, und beschränkt, da $\tilde{P} \subseteq P$. Da jede an $\tilde{x}$ straffe Ungleichung von B auch in $\tilde{P}$ vorkommt, ist $\tilde{x}$ auch eine optimale Ecke von $\tilde{P}$.

$\tilde{P}$ kann wieder durch eine ganzzahlige Matrix $\tilde{A}$ und einen ganzzahligen Vektor $\tilde{b}$ beschrieben werden, wobei $\tilde{A}$ nach Lemma 3.4 weiterhin $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = n$ und $\Delta(\tilde{A}) = \Delta(A)$ erfüllt, da nur einige Zeilen mit einer einzelnen ± 1 in einer der Spalten hinzukommen. Nun können wir den Spezialfall anwenden und erhalten eine optimale Lösung $y^* \in \mathbb{Z}^n$ in $\tilde{P}$, also auch eine optimale Lösung von ([n]-MIP), mit $\|\tilde{x} - y^*\|_\infty \leqslant \Delta - 1$. Mittels Dreiecksungleichung folgt $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant \Delta$.

□

Lemma 3.8. *Seien $\Delta \in \{1,2\}$, $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$ beschränkt und es existiere eine optimale Lösung von ($\varnothing$-MIP). Dann existiert für jede optimale Lösung x^* von ([n]-MIP) eine optimale Lösung y^* von ($\varnothing$-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant \Delta$.*

Beweis. Für $\Delta = 1$ ist nach Lemma 3.5 jede Ecke ganzzahlig, und da eine optimale Ecke existiert, ist x^* auch eine optimale Lösung von ($\varnothing$-MIP).

Spezialfall: x^* ist Ecke von $R := \operatorname{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leqslant b\})$.

Nach Definition einer Ecke, existiert ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \tilde{x} \in R : d^\intercal x \geqslant d^\intercal \tilde{x}\} = \{x^*\}.$$

Demnach ist x^* der einzige Maximierer von $x \mapsto d^\intercal x$ über R.

Wir bezeichnen die Seitenfläche aller optimalen Lösungen von ($\emptyset$-MIP) mit F. Ist $x^* \in F$, so ist x^* bereits optimal für ($\emptyset$-MIP). Sonst sei $y^* \in F$ eine Ecke, die $x \mapsto d^\intercal x$ über F maximiert. Setze $\lambda \geqslant 0$ so groß, dass $\lambda \geqslant d^\intercal(v - y^*)/c^\intercal(y^* - v)$ für alle Ecken $v \in P \backslash F$ von P gilt. Mit $\tilde{c} := \lambda c + d$ maximiert y^* die Funktion $x \mapsto \tilde{c}^\intercal x$ über P, denn für alle Ecken v in P gilt: Ist $v \in F$, dann ist $\tilde{c}^\intercal v = \lambda c^\intercal y^* + \lambda d^\intercal v \leqslant \tilde{c}^\intercal y^*$, und sonst ist $\tilde{c}^\intercal(y^* - v) \geqslant (d^\intercal(v - y^*)/c^\intercal(y^* - v))c^\intercal(y^* - v) + d^\intercal(y^* - v) = 0$

Setze $Q := \mathrm{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\mathrm{eq}(y^*)}x \leqslant b_{\mathrm{eq}(y^*)}\})$. Nach Lemma 3.6 ist $x \mapsto \tilde{c}^\intercal x$ mit $\tilde{c}^\intercal y^*$ in Q nach oben beschränkt und, da Q nicht-leer ist, gibt es eine Ecke $v \in \mathbb{Z}^n$ von Q, die $x \mapsto \tilde{c}^\intercal x$ über Q maximiert. Nach Lemma 3.3 (a) liegt v auf einer Kante E von P, die y^* enthält. Insbesondere ist also $Av \leqslant b$ und damit $v \in R$. Da auch $R \subseteq Q$, ist v Maximierer von $x \mapsto \tilde{c}^\intercal x$ über R und damit ist $v = x^*$.

Da $v = x^*$, liegt x^* auf der Kante E von P, die y^* enthält. Auf der offenen Strecke zwischen x^* und y^* liegen keine ganzzahligen Punkte, weil $x \mapsto \tilde{c}^\intercal x$ von x^* über R und von y^* über $P \supseteq R$ maximiert wird und beide auf einer Kante von P liegen. Also gilt nach Lemma 3.3 (b), dass $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant 1 = \Delta - 1$

Allgemeiner Fall.

Da P beschränkt, ist auch $R := \mathrm{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leqslant b\})$ beschränkt und, da $x^* \in R$, existiert eine Konvexkombination $x^* = \sum_{i=1}^t \lambda_i v^i$ mit $v^1, \dots, v^t$ Ecken von R und $\lambda_1, \dots, \lambda_t > 0$ und $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$.

Angenommen für ein $k \in [t]$ ist v^k nicht optimal für ($[n]$-MIP). Dann ist $c^\intercal x^* = \sum_{i=1}^t \lambda_i c^\intercal v^i \leqslant (1 - \lambda_k)c^\intercal x^* + \lambda_k c^\intercal v^k < c^\intercal x^*$. Also ist v^i optimal für ($[n]$-MIP) und nach dem Spezialfall existiert $z^i \in \mathbb{R}^n$ optimal für ($\emptyset$-MIP) mit $\left\|v^i - z^i\right\|_\infty \leqslant \Delta$ für alle $i \in [t]$. Die Konvexkombination $y^* := \sum_{i=1}^t \lambda_i z^i$ ist ebenfalls optimal für ($\emptyset$-MIP) und

$$\|x^* - y^*\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^t \lambda_i(v^i - z^i)\right\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^t \lambda_i \left\|v^i - z^i\right\|_\infty = \Delta.$$

□

Die Ergebnisse der letzten beiden Lemmata werden in folgendem Theorem festgehalten:

Theorem 3.9. *Seien $\Delta \leqslant 2$ und $I, J \in \{\emptyset, [n]\}$, sodass eine optimale Lösung von (J-MIP) existiert. Für jede optimale Lösung x^* von (I-MIP) existiert eine optimale Lösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant \Delta$.*

Beweis. Sei x^* eine optimale Lösung von (I-MIP) gegeben. Für $\Delta = 0$ ist $A = 0$ und damit jedes $x \in \mathbb{R}^n$ optimale Lösung. Wir betrachten also $\Delta \in \{1, 2\}$.
Es existiert ein $U \in \mathbb{N}$, sodass die beschränkte Menge

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [m] : -U \leqslant x_i \leqslant U\}$$

x^* und eine optimale Lösung von (J-MIP) enthält. Setzt man

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A \\ -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ U \\ U \end{pmatrix},$$

gilt $\mathrm{rang}(\tilde{A}) = n$ und nach Lemma 3.4 ist $\Delta(A) = \Delta(\tilde{A})$. Wir können P nun darstellen als $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x \leqslant \tilde{b}\}$. Es genügt, ein y^* in P zu finden, das für (J-MIP) optimal ist und $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant \Delta$ erfüllt.
Mit Lemma 3.7 und Lemma 3.8 folgt die Behauptung. □

4 Ausblick und ähnliche Arbeiten

In dieser Arbeit konnten wir das Theorem von Cook verallgemeinern und eine Abschätzung für verschiedene Indexmengen erreichen.
Die Vermutung der linearen Abhängigkeit des Abstands von Δ konnten wir für den Fall $\Delta \leqslant 2$ zeigen. Dies beruhte hauptsächlich auf der Aussage von Veselov Chirkov, welche die Voraussetzung $\Delta \leqslant 2$ besitzt. Hierbei könnten ähnliche, allgemeinere Resultate in der Zukunft hilfreich sein, um die Vermutung für größeres Δ zeigen zu können.

Literatur

[CGST86] Cook, W. ; Gerards, A. M. H. ; Schrijver, A. ; Tardos, É.: Sensitivity theorems in integer linear programming. In: *Mathematical Programming* 34 (1986), Apr, Nr. 3, 251–264. http://dx.doi.org/10.1007/BF01582230. – DOI 10.1007/BF01582230. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf Seite 1.)

[KM17] (Zitiert auf Seite 2.)

In: Karpfinger, Christian ; Meyberg, Kurt: *Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2017. – ISBN 978–3–662–54722–9, 131–137

[KV12] (Zitiert auf Seite 4.)

In: Korte, Bernhard ; Vygen, Jens: *Ganzzahlige Optimierung*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. – ISBN 978–3–642–25401–7, 111–141

[Ols69] Olson, John E.: A combinatorial problem on finite Abelian groups, I. In: *Journal of Number Theory* 1 (1969), Nr. 1, 8 - 10. http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(69)90021-3. – DOI 10.1016/0022–314X(69)90021–3. – ISSN 0022–314X (Zitiert auf Seite 2.)

[PWW18] Paat, Joseph ; Weismantel, Robert ; Weltge, Stefan: Distances between optimal solutions of mixed-integer programs. In: *Mathematical Programming* (2018), Aug. http://dx.doi.org/10.1007/s10107-018-1323-z. – DOI 10.1007/s10107–018–1323–z. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf den Seiten 1 und 2.)

[Sch86] Schrijver, Alexander: *Theory of Linear and Integer Programming*. New York, NY, USA : John Wiley & Sons, Inc., 1986. – ISBN 0–471–90854–1 (Zitiert auf Seite 5.)

[VC09] Veselov, S.I. ; Chirkov, A.J.: Integer program with bimodular matrix. In: *Discrete Optimization* 6 (2009), Nr. 2, 220 - 222. http://dx.doi.org/10.1016/j.disopt.2008.12.002. – DOI 10.1016/j.disopt.2008.12.002. – ISSN 1572–5286 (Zitiert auf Seite 5.)