

## Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme

Ein *gemischt-ganzzahliges Programm* (mixed integer program, MIP) ist ein lineares Programm, das von einer ganzzahligen Matrix  $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ , einer ganzzahligen rechten Seite  $b \in \mathbb{Z}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  und einer Indexmenge  $I \subseteq [n] := \{1, \dots, n\}$  erzeugt wird, und von der folgenden Form ist:

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array} \quad (I\text{-MIP})$$

Gesucht ist für  $I, J \subseteq [n]$  eine möglichst kleine Schranke, die den Abstand zwischen jeder optimalen Lösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  und einer zu  $x^*$  nächsten optimalen Lösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  beschränkt. Definiert man

$$\Delta := \Delta(A) := \max\{|\det(Q)| \mid Q \text{ quadratische Untermatrix von } A\},$$

so erhält man die in [PWW18] formulierte Vermutung:

*Vermutung 1.1.* Es gibt eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass für alle  $I, J \subseteq [n]$ , unter denen  $(J\text{-MIP})$  eine optimale Lösung besitzt, gilt: Besitzt  $(I\text{-MIP})$  eine optimale Lösung  $x^*$ , so existiert eine optimale Lösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq f(\Delta)$ .

Eine Abschätzung, die zusätzlich von der Dimension  $n$  abhängt, lieferte bereits Cook in [CGST86, Theorem 1 und Bemerkung 1]:

**Theorem 2.1** (Cook et al., 1986). *Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine optimale Lösung hat und entweder  $I = \emptyset$  oder  $J = \emptyset$  gilt. Dann existiert für jede optimale Lösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  eine optimale Lösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq n\Delta$ .*

Daraus kann leicht eine Abschätzung für allgemeine Indexmengen  $I, J$  mit der oberen Schranke  $2n\Delta$  gefolgert werden. Diese soll nun verstärkt werden, indem die Schranke auf  $|I \cup J|\Delta$  reduziert wird, wobei  $|I \cup J|$  die Anzahl ganzzahliger Variablen ist.

Dabei lässt sich aus der Theorie endlicher abelscher Gruppen ein wichtiges Hilfslemma beziehen, das auf einem Theorem von Olson in [Ols69] beruht. Die sogenannte *Davenport-Konstante*  $D(G)$  einer endlichen abelschen Gruppe  $G$  bezeichnet dabei die kleinste natürliche Zahl  $k$ , für die gilt:

$$\forall g^1, \dots, g^k \in G \quad \exists I \subseteq [k] : I \neq \emptyset \wedge \sum_{i \in I} g^i = 0.$$

**Theorem 2.6** (Olson, 1969). *Für eine Primzahl  $p$  ist  $D(\mathbb{Z}^d/p\mathbb{Z}^d) = 1 + dp - p$ .*

**Korollar 2.7.** *Seien  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl,  $d \in \mathbb{N}$  und  $f^1, \dots, f^r \in \mathbb{Z}^d$  mit  $r \geq 1 + dp - d$  gegeben. Dann existiert eine nicht-leere Menge  $I \subseteq [r]$  mit  $\sum_{i \in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$ .*

Mit Hilfe dieses Korollars kann eine Reihe weiterer Aussagen gezeigt werden, die für den Beweis der Abschätzung notwendig sind:

**Lemma 2.8.** Seien  $d, k \in \mathbb{N}$ ,  $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{Z}^d$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \geq d$ . Dann existiert  $\beta \in \times_{i=1}^k [0, \alpha_i]$  mit  $\beta \neq 0$  und  $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ .

**Lemma 2.9.** Seien  $u^i \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\lambda_i \geq 0$  für  $i \in [k]$  gegeben. Dann existiert  $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$  mit  $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$  und  $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$ .

Außerdem spielt das folgende Lemma aus [KV12, Lemma 5.4] über die Darstellung von polyedrischen Kegeln eine wichtige Rolle:

**Lemma 2.10.** Sei  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  gegeben. Der Polyeder  $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$  besitzt die Darstellung  $C = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v^i \mid \forall i \in [k]: \lambda_i \geq 0\}$  mit  $v^i \in \mathbb{Z}^n$  und  $\|v^i\|_\infty \leq \Delta(A)$  für  $i \in [k]$ .

Mit diesen Grundlagen kann nun die gewünschte Abschätzung bewiesen werden:

**Theorem 2.11.** Seien  $I, J \subseteq [n]$ , sodass  $(J\text{-MIP})$  eine Optimallösung  $\tilde{y}$  hat. Für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  existiert eine Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq |I \cup J| \cdot \Delta$ .

Man kann zeigen, dass eine Abschätzung wie in Vermutung 1.1, die nur  $\Delta$  verwendet, mindestens linear von  $\Delta$  abhängen muss. Betrachten wir nur  $I, J \in \{\emptyset, [n]\}$ , gilt eine solche Abschätzung für  $\Delta \leq 2$ . Dies baut auf ein Theorem von Veselov-Chirkov aus [VC09, Theorem 2 und Beweis] auf:

**Lemma 2.10** (Veselov-Chirkov, 2009). Seien eine ganzzahlige Matrix  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  und  $c \in \mathbb{R}^n$  mit  $\text{rang}(A) = n$  gegeben und der Betrag jeder Determinante einer  $n \times n$  Teilmatrix von  $A$  sei kleinergleich 2. Seien  $z$  eine Ecke von  $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  und  $Q := \text{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\text{eq}(x^*)} x \leq b_{\text{eq}(x^*)}\})$ . Dann gelten:

- (a) Jede Ecke von  $Q$  liegt auf einer Kante von  $P$ , die  $z$  enthält.
- (b) Jede Kante von  $P$ , die  $z$  und einen ganzzahligen Punkt enthält, enthält auch einen ganzzahligen Punkt  $y$  mit  $\|z - y\|_\infty \leq 1$ .

**Theorem 2.11.** Seien  $\Delta \leq 2$  und  $I, J \in \{\emptyset, [n]\}$ , sodass eine Optimallösung von  $(J\text{-MIP})$  existiert. Für jede Optimallösung  $x^*$  von  $(I\text{-MIP})$  existiert eine Optimallösung  $y^*$  von  $(J\text{-MIP})$  mit  $\|x^* - y^*\|_\infty \leq \Delta$ .

## Literatur

- [CGST86] COOK, W. ; GERARDS, A. M. H. ; SCHRIJVER, A. ; TARDOS, É.: Sensitivity theorems in integer linear programming. In: *Mathematical Programming* 34 (1986), Apr, Nr. 3, 251–264. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01582230>. – DOI 10.1007/BF01582230. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf Seite 1.)
- [KV12] (Zitiert auf Seite 2.)  
In: KORTE, Bernhard ; VYGEN, Jens: *Ganzzahlige Optimierung*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. – ISBN 978–3–642–25401–7, 111–141
- [Ols69] OLSON, John E.: A combinatorial problem on finite Abelian groups, I. In: *Journal of Number Theory* 1 (1969), Nr. 1, 8 – 10. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X\(69\)90021-3](http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(69)90021-3). – DOI 10.1016/0022–314X(69)90021–3. – ISSN 0022–314X (Zitiert auf Seite 1.)
- [PWW18] PAAT, Joseph ; WEISMANTEL, Robert ; WELTGE, Stefan: Distances between optimal solutions of mixed-integer programs. In: *Mathematical Programming* (2018), Aug. <http://dx.doi.org/10.1007/s10107-018-1323-z>. – DOI 10.1007/s10107–018–1323–z. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf Seite 1.)
- [VC09] VESELOV, S.I. ; CHIRKOV, A.J.: Integer program with bimodular matrix. In: *Discrete Optimization* 6 (2009), Nr. 2, 220 – 222. <http://dx.doi.org/10.1016/j.disopt.2008.12.002>. – DOI 10.1016/j.disopt.2008.12.002. – ISSN 1572–5286 (Zitiert auf Seite 2.)