Markl, Michael 08.11.2018
Seminar zur Optimierung und Spieltheorie
Institut für Mathematik der Universität Augsburg
Diskrete Mathematik, Optimierung und Operations Research
Wintersemester 2018/19

Abstände optimaler Lösungen gemischt-ganzzahliger Programme

Ein *gemischt-ganzzahliges Programm* (mixed integer program, MIP) ist ein lineares Programm, das von einer ganzzahligen Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$, einer ganzzahligen rechten Seite $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und einer Indexmenge $I \subseteq [n] := \{1,\dots,n\}$ erzeugt wird, und von der folgenden Form ist:

$$\begin{array}{rc} & \max c^\intercal x \\ \textbf{s.t.} & Ax \leqslant b \\ & \forall i \in I : x_i \in \mathbb{Z} \end{array} . \tag{I-MIP}$$

Gesucht ist für $I, J \subseteq [n]$ eine möglichst kleine Schranke, die den Abstand zwischen jeder optimalen Lösung x^* von (I-MIP) und einer zu x^* nähesten optimalen Lösung y^* von (J-MIP) beschränkt. Definiert man

$$\Delta := \Delta(A) := \max\{|\det(Q)| \mid Q \text{ quadratische Untermatrix von } A\},$$

so erhält man die in [PWW18] formulierte Vermutung:

Vermutung 1.1. Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $I, J \subseteq [n]$, unter denen (J-MIP) eine optimale Lösung besitzt, gilt: Besitzt (I-MIP) eine optimale Lösung x^*, so existiert eine optimale Lösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant f(\Delta)$.

Eine Abschätzung, die zusätzlich von der Dimension n abhängt, lieferte bereits Cook in [CGST86, Theorem 1 und Bemerkung 1]:

Theorem 2.1 (Cook et al., 1986). *Seien $I, J \subseteq [n]$, sodass (J-MIP) eine optimale Lösung hat und entweder $I = \varnothing$ oder $J = \varnothing$ gilt. Dann existiert für jede optimale Lösung x^* von (I-MIP) eine optimale Lösung y^* von (J-MIP) mit $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant n\Delta$.*

Daraus kann leicht eine Abschätzung für allgemeine Indexmengen I, J mit der oberen Schranke $2n\Delta$ gefolgert werden. Diese soll nun verstärkt werden, indem die Schranke auf $|I \cup J|\Delta$ reduziert wird, wobei $|I \cup J|$ die Anzahl ganzzahliger Variablen ist.
Dabei lässt sich aus der Theorie endlicher abelscher Gruppen ein wichtiges Hilfslemma beziehen, das auf einem Theorem von Olson in [Ols69] beruht. Die sogenannte *Davenport-Konstante* $D(G)$ einer endlichen abelschen Gruppe G bezeichnet dabei die kleinste natürliche Zahl k, für die gilt:

$$\forall g^1,\dots,g^k \in G \;\; \exists I \subseteq [k] \colon I \neq \varnothing \wedge \sum_{i\in I} g^i = 0.$$

Theorem 2.6 (Olson, 1969). *Für eine Primzahl p ist $D(\mathbb{Z}^d/p\mathbb{Z}^d) = 1 + dp - p$.*

Korollar 2.7. *Seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, $d \in \mathbb{N}$ und $f^1,\dots,f^r \in \mathbb{Z}^d$ mit $r \geqslant 1 + dp - d$ gegeben. Dann existiert eine nicht-leere Menge $I \subseteq [r]$ mit $\sum_{i\in I} f^i \in p\mathbb{Z}^d$.*

Mit Hilfe dieses Korollars kann eine Reihe weiterer Aussagen gezeigt werden, die für den Beweis der Abschätzung notwendig sind:

Lemma 2.8. *Seien* $d, k \in \mathbb{N}, u^1, \ldots, u^k \in \mathbb{Z}^d$ *und* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$ *mit* $\sum_{i=1}^k \alpha_i \geqslant d$. *Dann existiert* $\beta \in \times_{i=1}^k [0, \alpha_i]$ *mit* $\beta \neq 0$ *und* $\sum_{i=1}^k \beta_i u^i \in \mathbb{Z}^d$.

Lemma 2.9. *Seien* $u^i \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda_i \geqslant 0$ *für* $i \in [k]$ *gegeben. Dann existiert* $\gamma \in \times_{i=1}^k [0, \lambda_i]$ *mit* $\sum_{i=1}^k \gamma_i u^i \in \mathbb{Z}^d$ *und* $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma_i) < d$.

Außerdem spielt das folgende Lemma aus [KV12, Lemma 5.4] über die Darstellung von polyedrischen Kegeln eine wichtige Rolle:

Lemma 2.10. *Sei* $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ *gegeben. Der Polyeder* $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant 0\}$ *besitzt die Darstellung* $C = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v^i \mid \forall i \in [k]\colon \lambda_i \geqslant 0\}$ *mit* $v^i \in \mathbb{Z}^n$ *und* $\left\|v^i\right\|_\infty \leqslant \Delta(A)$ *für* $i \in [k]$.

Mit diesen Grundlagen kann nun die gewünschte Abschätzung bewiesen werden:

Theorem 2.11. *Seien* $I, J \subseteq [n]$, *sodass (J-MIP) eine Optimallösung* $\tilde{y}$ *hat.*
Für jede Optimallösung x^* *von (I-MIP) existiert eine Optimallösung* y^* *von (J-MIP) mit* $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant |I \cup J| \cdot \Delta$.

Man kann zeigen, dass eine Abschätzung wie in Vermutung 1.1, die nur Δ verwendet, mindestens linear von Δ abhängen muss. Betrachtet man nur $I, J \in \{\varnothing, [n]\}$, gilt eine solche Abschätzung für $\Delta \leqslant 2$. Dies baut auf ein Theorem von Veselov-Chirkov aus [VC09, Theorem 2 und Beweis] auf:

Lemma 2.10 (Veselov-Chirkov, 2009)**.** *Seien eine ganzzahlige Matrix* $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ *mit* $\operatorname{rang}(A) = n$ *gegeben und der Betrag jeder Determinante einer* $n \times n$ *Teilmatrix von* A *sei kleinergleich 2.*
Sei z *eine Ecke von* $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$ *und sei* $Q := \operatorname{co}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A_{\operatorname{eq}(z)} x \leqslant b_{\operatorname{eq}(z)}\})$.
Dann gelten:

(a) Jede Ecke von Q *liegt auf einer Kante von* P*, die* z *enthält.*

(b) Jede Kante von P*, die* z *und einen ganzzahligen Punkt enthält, enthält auch einen ganzzahligen Punkt* y *mit* $\|z - y\|_\infty \leqslant 1$.

Theorem 2.11. *Seien* $\Delta \leqslant 2$ *und* $I, J \in \{\varnothing, [n]\}$, *sodass eine Optimallösung von (J-MIP) existiert. Für jede Optimallösung* x^* *von (I-MIP) existiert eine Optimallösung* y^* *von (J-MIP) mit* $\|x^* - y^*\|_\infty \leqslant \Delta$.

Literatur

[CGST86] Cook, W. ; Gerards, A. M. H. ; Schrijver, A. ; Tardos, É.: Sensitivity theorems in integer linear programming. In: *Mathematical Programming* 34 (1986), Apr, Nr. 3, 251–264. http://dx.doi.org/10.1007/BF01582230. – DOI 10.1007/BF01582230. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf Seite 1.)

[KV12] Korte, Bernhard ; Vygen, Jens: *Kombinatorische Optimierung: Theorie und Algorithmen*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. – 111–141 S. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25401-7_5. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25401-7_5. – ISBN 978–3–642–25401–7 (Zitiert auf Seite 2.)

[Ols69] Olson, John E.: A combinatorial problem on finite Abelian groups, I. In: *Journal of Number Theory* 1 (1969), Nr. 1, 8 - 10. http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(69)90021-3. – DOI 10.1016/0022–314X(69)90021–3. – ISSN 0022–314X (Zitiert auf Seite 1.)

[PWW18] Paat, Joseph ; Weismantel, Robert ; Weltge, Stefan: Distances between optimal solutions of mixed-integer programs. In: *Mathematical Programming* (2018), Aug. http://dx.doi.org/10.1007/s10107-018-1323-z. – DOI 10.1007/s10107–018–1323–z. – ISSN 1436–4646 (Zitiert auf Seite 1.)

[VC09] Veselov, S.I. ; Chirkov, A.J.: Integer program with bimodular matrix. In: *Discrete Optimization* 6 (2009), Nr. 2, 220 - 222. http://dx.doi.org/10.1016/j.disopt.2008.12.002. – DOI 10.1016/j.disopt.2008.12.002. – ISSN 1572–5286 (Zitiert auf Seite 2.)