

Ising

MATIAS AGUIRRE, SOLANGE LUQUE

Física computacional, Dep. Física, UBA

Resumen

En el presente trabajo se estudian los observables termodinámicos en un arreglo cuadrangular de espines. Se analizaron la magnetización M , susceptibilidad magnética χ y la energía tanto en los casos con campo magnético externo B y espines no interactuantes como en el caso con constante de acoplamiento J no nulo (positivo o negativo) y espines con interacción entre primeros y segundos vecinos. Además se analizan los algoritmos de Baño Térmico, Glauber y Swendsen-Wang.

1. Introducción

El Modelo de Ising es muy útil para describir materiales ferromagnéticos.

En su primera versión consistía en un arreglo unidimensional de sitios que pueden tomar valores 1 o -1 . Estos representan al estado de un espín $|+\rangle$ o $|-\rangle$ respectivamente. En esta dimensión no se producen transiciones de fase.

Para dimensiones mayores, las transiciones de fase son posibles y el modelo bidimensional fue resuelto analíticamente por Onsager.

En este trabajo se estudia el modelo para $d = 2$ a fin de comparar los resultados computacionales con las soluciones analíticas.

Si se considera un campo magnético externo B en la dirección de los espines, el Hamiltoniano se escribe como

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{T} \sum_{ij} s_i s_j - \frac{B}{T} \mu \sum_i s_i \quad (1)$$

donde la primera suma es solo sobre primeros vecinos y la segunda sobre todos los sitios. J es la constante de acoplamiento para la interacción entre espines y μ la constante de acoplamiento con el campo externo B .

Es necesario fijar condiciones de contorno para el sistema pudiendo ser cerradas o periódicas, en particular en este trabajo se usa ésta última.

La función de partición en el ensamble canónico es

$$Q = \sum_{s_i} \exp[-\beta \mathcal{H}(s_i)] \quad (2)$$

Donde $\beta = 1/kT$ con k la constante de Boltzmann y T la temperatura del sistema.

Utilizando esta función de partición se pueden calcular los valores medios de magnitudes asociadas al sistema.

La magnetización por sitio del sistema puede ser calculada como

$$m = \frac{1}{N} \sum_i s_i \quad (3)$$

donde N es el número de sitios.

La susceptibilidad magnética es

$$\chi = \beta(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2) \quad (4)$$

con M magnetización total, o dicho de otra forma, la varianza de la magnetización.

La cantidad de estados posibles para el sistema es 2^L donde L es el largo de la matriz. Es por esto que analizar el problema de forma analítica es complicado y trabajoso, y las simulaciones numéricas son útiles para estudiar las variables termodinámicas del sistema y en particular para analizar el comportamiento cerca de la transición de fase.

Sin embargo, nos valdremos de los resultados teóricos en $d = 2$ para comparar con los resultados modelados.

En el caso en el que no hay interacción entre los espines, es decir $J = 0$, se encuentra de forma analítica que la magnetización es

$$M = L^2 \tanh(\beta B) \quad (5)$$

La energía se puede calcular como:

$$\mathcal{U} = -BL^2 \tanh(\beta B) \quad (6)$$

Cuando hay interacción entre vecinos, es decir, J distinto de 0, entonces existe una temperatura crítica T_c . Para $T < T_c$ la magnetización es nula. Se sabe que el valor teórico de la T_c es $T_c \approx 2,3$.

2. Implementación Computacional

Durante nuestro trabajo se tomaron $k = 1$, $\mu = 1$, $B = 1$ y $J = 1$. Notamos $J^* = \frac{J}{T}$ y $B^* = \frac{B}{T}$.

Inicialmente se pobló la red de tamaño $L \times L$ de forma aleatoria. Se recorrió la red sitio por sitio y en cada uno se generó un número al azar. Si el número aleatorio era mayor a 0,8 se puebla la celda con 1 y si es menor un -1 . Se eligió el 0,8 de forma de obtener una red inicial que favoreciera a los valores *up* sobre los *down*. Esto, como se explicará más adelante, es útil a la hora de analizar sistemas con temperaturas bajas.

Una vez obtenido el sistema inicial, se procedió a *flippear* los espines. Para ello, se recorrió de forma secuencial el sistema. Por cada sitio, se cambiaba el valor del espín y se calculaba la variación de la energía respecto del estado anterior.

Se sabe que la probabilidad de encontrar al sistema en el estado i es

$$p_i = \frac{1}{Q} \exp[-\beta E_i] \quad (7)$$

donde E_i es la energía asociada a ese estado.

De esta manera se puede implementar el *algoritmo de Metrópolis*. Si al *flippear* un espín la energía decrece, el *flippeo* es aceptado. En cambio, si la energía crece, el *flippeo* es aceptado con una probabilidad

$$p_a = \frac{p_f}{p_i} = \exp[-\beta(E_f - E_i)] \quad (8)$$

donde p_f y E_f son la probabilidad de estar en el estado f y la energía de ese estado respectivamente.

En todos los casos, una vez obtenido el estado inicial se procedió a *termalizar* el sistema: Es decir, se dejó evolucionar al sistema hasta un estado coherente con la temperatura elegida. Al poblar de forma aleatoria la red, lo más probable es que el estado inicial no se corresponda a un estado posible con la temperatura elegida. Es por ello que es necesario dejar pasar varias iteraciones para que el sistema se *acomode* a su temperatura.

Este proceso es más rápido para temperaturas altas que para temperaturas bajas, ya que con temperaturas bajas el sistema se encuentra en estados de menor energía, y se puede tornar difícil mover al sistema de un mínimo. Es por esto que el sistema inicial fue poblado con probabilidad $p = 0,8$: De esta forma, para temperaturas bajas, el estado inicial no está alejado del estado *termalizado* y por lo tanto se acelera el proceso.

3. Resultados

3.1. Introducción a Metropolis

Para estudiar el algoritmo de Metropolis antes de implementarlo en un sistema de espines, se lo utilizó para calcular la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \exp[-x^2/2] \quad (9)$$

Esta integral no es más que el valor medio de x^2 utilizando una distribución Gaussiana.

El procedimiento para calcular la integral es el siguiente: Se elige un intervalo δ dentro del cuál se elegirán los valores de x posibles. Dentro de ese intervalo, se toma de forma aleatoria un valor x_n .

Se genera un número random r y si $\exp(x_v^2 - x_n^2)/2,0 > r$, entonces x_n es aceptado. Caso contrario, es rechazado. x_v es el valor de x anterior.

Es decir, se compara el valor de la distribución en x_n con el valor en x_v . Si el valor en x_n es mayor, el cambio es aceptado. Si es menor, es aceptado con una probabilidad r .

Se estudió el porcentaje de aprobación en función del intervalo δ elegido (Ver figura 1).

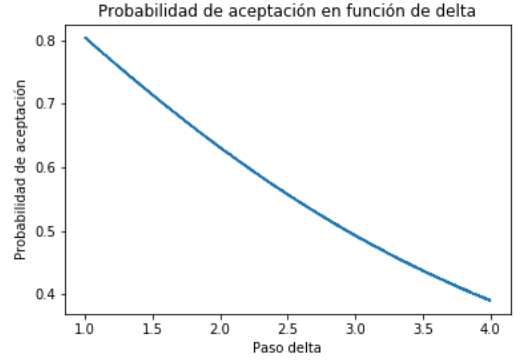


Figura 1: Probabilidad de aceptación en función de intervalo δ

Una probabilidad de aceptación óptima toma valores cercanos a 0,5. Esto se debe a que si la probabilidad de aceptación es cercana a 1, entonces solo se está sampleando una parte del intervalo de interés. En cambio, si es cercana a 0, no tendremos puntos suficientes para analizar la función.

El valor de δ para el cuál $P_a \approx 0,5$ es $\delta \approx 2,8$.

Se estudió también la correlación entre los valores de x tomados. Es decir, se calculó

$$C(k) = \frac{\langle x_{i+k} x_i \rangle - \langle x_i \rangle^2}{\langle x_i \rangle^2 - \langle x_i^2 \rangle} \quad (10)$$

Donde k es el paso.

Se calculó para δ cercano al óptimo (Ver figura 2).

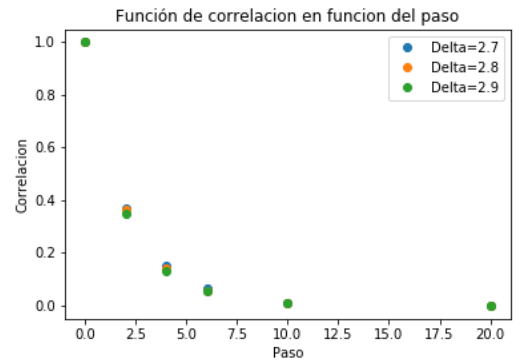


Figura 2: Correlación en función del paso para tres valores de δ

Se puede observar que en todos los casos, a partir de cinco pasos, la correlación es menor a 0,1, y por lo tanto se puede considerar que los valores se encuentran descorrelacionados.

A su vez, se realizó un histograma con los valores de x aceptados (Ver figura 3).

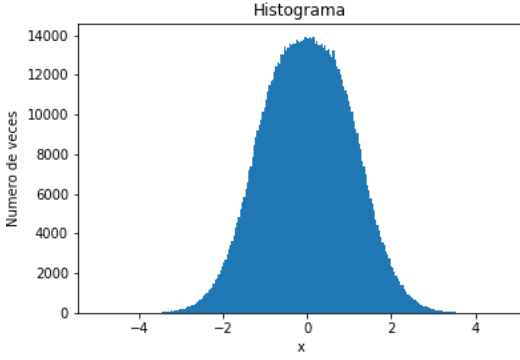


Figura 3: Histograma con los valores aceptados

Como se puede observar, el histograma tiene la forma de una Gaussiana como era de esperarse.

Finalmente, se calculó el valor de la integral 9 calculando el valor medio de los valores de x aceptados. Esto coincidió con el valor teórico de la integral.

3.2. Sistema sin Interacción entre Espines ($J=0$)

Se consideró un arreglo con $N = 256$ y sin interacción entre vecinos, pero sujeto a un campo externo B .

Se fue variando la temperatura del sistema y se buscó el tiempo de termalización necesario para cada una.

Para ello, para cada temperatura, se realizaron varios pasos y se calculó la magnetización media. Cuando esta tomaba el mismo valor que el valor teórico calculado usando la ecuación 5, se consideraba que el sistema había termalizado, y se procedía a tomar los datos a partir de ese paso.

Se encontró que para todas las temperaturas era suficiente con dejar pasar alrededor de cuatro mil iteraciones.

Para cada temperatura, se calculó el valor medio de la magnetización y luego se realizó el gráfico correspondiente de magnetización en función de $B^* = \frac{B}{T}$.

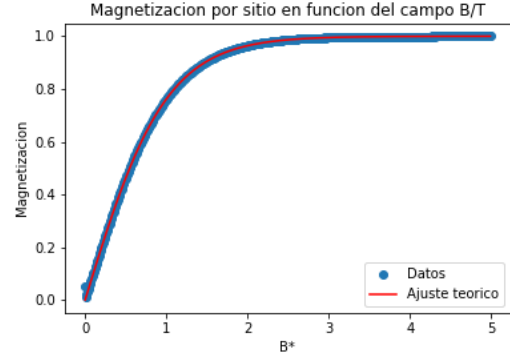


Figura 4: Magnetización en función de B^*

Como se observa en la figura 4 en azul se muestran los datos simulados y en rojo las resultados teóricos predichos por la ecuación 5.

Como es de esperarse, se observa que para temperaturas bajas, es decir B^* grande, la magnetización por sitio tiende a 1. Por lo contrario, para temperaturas altas, es decir para B^* chico, la magnetización tiende a cero.

Esto es coherente ya que para temperaturas altas todos los espines están desordenados y en promedio la magnetización se anula. Para temperaturas bajas, en cambio, hay bloques con espines *up* o *down* y para temperaturas suficientemente bajas todos los espines estarán alineados consiguiendo así la magnetización máxima.

Se calculó también la energía. Como se puede ver de la expresión 1, para $J = 0$, la energía no es más que la magnetización multiplicada por el campo B^* . Los resultados se pueden observar en la figura 5.

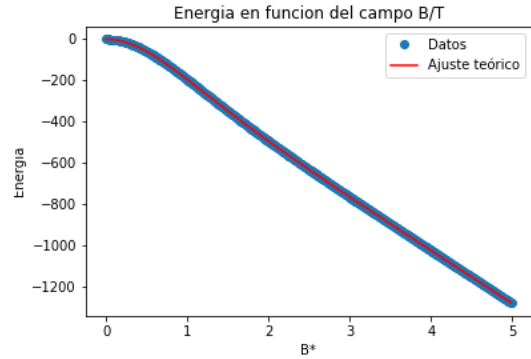


Figura 5: Energía en función de B^*

En azul se pueden ver los datos simulados y en rojo los valores teóricos calculados utilizando la expresión 6.

Como era esperable, la energía baja con la temperatura, y se encuentra el valor mínimo medido para la menor temperatura usada.

Para temperaturas altas, la energía es nula y es coherente con que la magnetización sea nula allí, porque como se mencionó, en

este caso sin interacción entre vecinos, la energía es proporcional a la magnetización.

Utilizando la expresión 4, se calculó la susceptibilidad magnética (Ver figura 6).

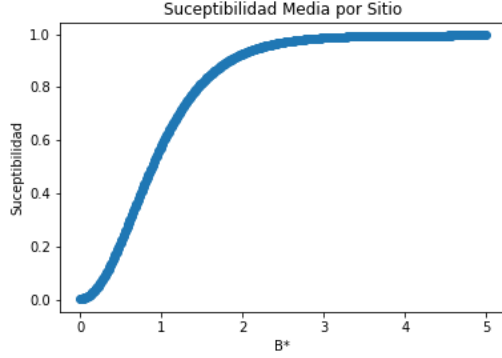


Figura 6: Susceptibilidad magnética en función de B^*

En física de los materiales se sabe que mientras mayor es la susceptibilidad magnética, mejor conductor es el material. Es posible hacer una analogía para nuestro sistema: Se observa que a menores temperaturas mayor es la susceptibilidad magnética, por lo tanto, mejor conductor es el sistema a bajas temperaturas.

3.3. Sistema sin Campo Externo ($B=0$)

En esta sección se estudia el sistema sin presencia de campo externo B , pero con interacción ferromagnética entre primeros vecinos.

Para tomar mediciones sobre el sistema, es necesario que las muestras consideradas estén descorrelacionadas entre sí. Por lo tanto, es necesario tomar una frecuencia de muestreo lo suficientemente grande como para que esto suceda.

Para conocer esta frecuencia se calculó la correlación para el observable magnetización de la siguiente forma:

$$\rho(k) = \frac{\langle m_{i+k}m_i \rangle - \langle m_i \rangle^2}{\langle m_i \rangle^2 - \langle m_i^2 \rangle} \quad (11)$$

Donde k es el paso.

Este mismo cálculo podría haberse hecho con cualquiera de los observables del sistema, como la energía o la susceptibilidad.

Una vez lograda la termalización, se calculó la correlación para distintas temperaturas para un sistema de tamaño 32×32 .

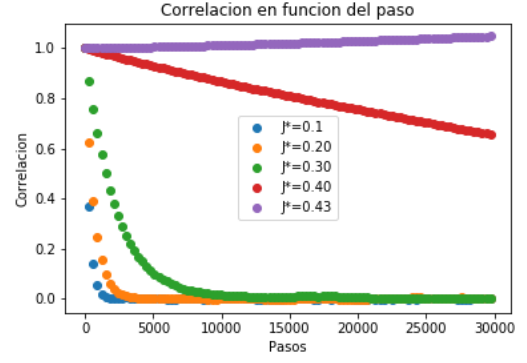


Figura 7: Correlación para distintas frecuencias de muestreo.

Como se puede observar en la figura 7, para T mucho mayores que la temperatura crítica, es decir para J^* por debajo de 0,4, el sistema posee una correlación menor a 0,1 a los pocos pasos.

Se observa que a medida que aumenta la temperatura el sistema tarda cada vez más en descorrelacionar. Para $J^* = 0,4$ ya se observa un tiempo de correlación considerablemente mayor al de las tres temperaturas mayores consideradas.

Para $J^* = 0,43$, es decir, en $T \approx 2,3 = T_c$, el tiempo de descorrelación crece varios órdenes de magnitud.

Se calculó para 4000000 inversiones de la red entera y la correlación todavía era mayor a 0,8, por lo que no se llegó a estimar de forma razonable una frecuencia de muestreo para la T_c .

Para temperaturas alejadas de la temperatura crítica se estimó que con cien inversiones de la red entera era suficiente para descorrelacionar.

Con estas frecuencias de muestreo, se calculó la magnetización, susceptibilidad y energía del sistema para distintos tamaños de red como se ve en las figuras 8, 9 y 10 respectivamente.

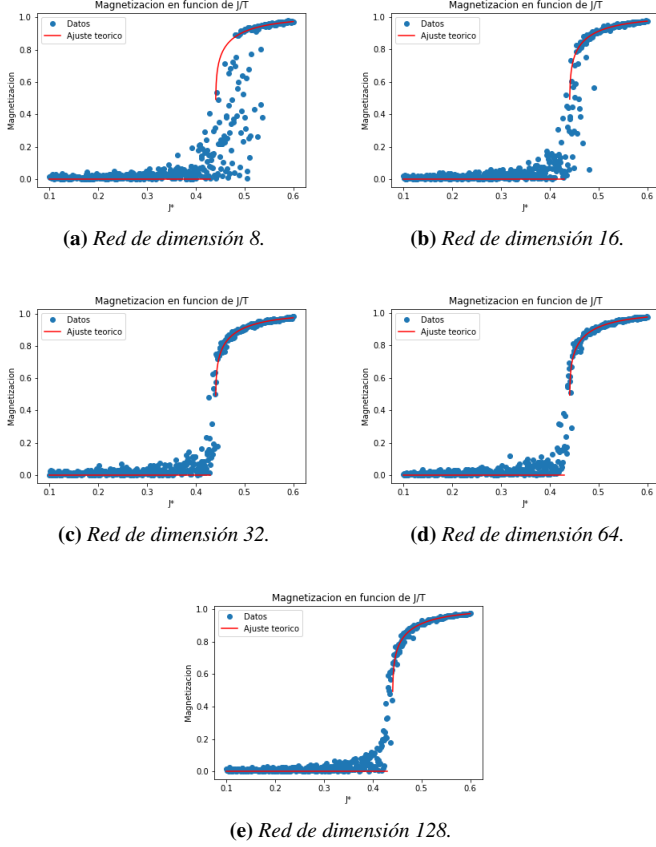


Figura 8: Magnetización en función de J^* para distintas dimensiones.

Para la magnetización se puede observar que a mayor la dimensión, menos ruidosa es la curva. A pesar de esto, salvo para la red de 8×8 , el ajuste teórico es bastante bueno.

Se puede observar, como era de esperarse, que para J^* grande (T chicas) la magnetización por sitios tiende a 1. Es decir, todos los espines se encuentran alineados.

Para J^* chicos (Temperaturas altas), la magnetización tiende a cero. Lo cuál es coherente con un estado con espines desordenados.

En todas las dimensiones es posible observar que el cambio de concavidad de la curva de magnetización se da a partir de $J^* = 0,4$. Si bien para la red de 8×8 es difícil dar un valor exacto de este punto debido a la dispersión, esto mejora a medida que aumenta la dimensión.

Para las dimensiones mayores el punto crítico se encontró en $J^* \approx 0,43$ como era de esperarse.

Se espera mayor dispersión para dimensiones bajas ya que el modelo contempla una red infinita. Mientras menor sea la red, más alejada de este caso ideal se encuentra y mayor es la dispersión.

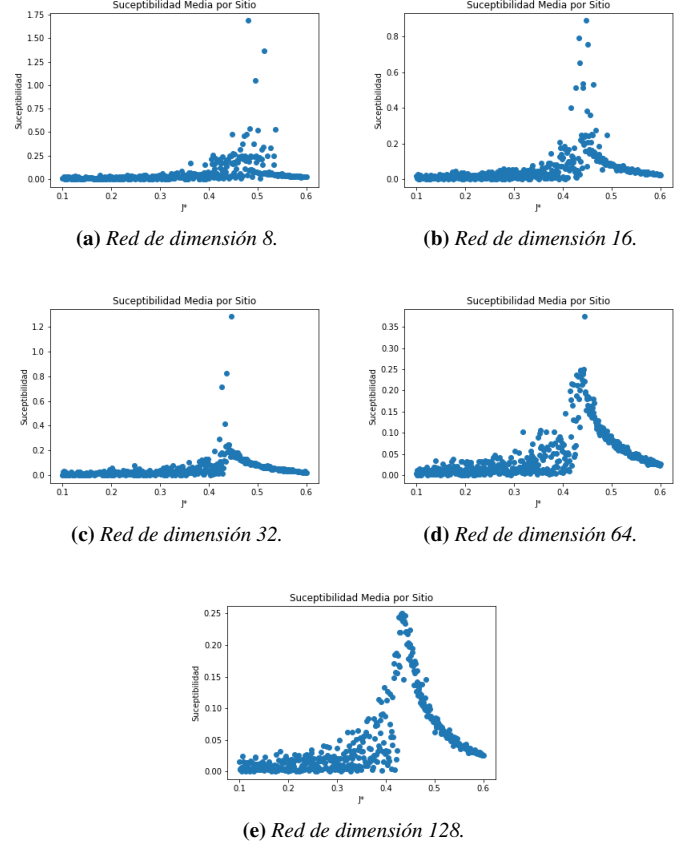


Figura 9: Susceptibilidad magnética en función de J^* para distintas dimensiones.

Para la susceptibilidad se observa en todos los casos una campana centrada en $J^* > 0,4$. Nuevamente se observa mucha dispersión para las dimensiones menores, y por lo tanto es difícil estimar el valor exacto del centro de la campana. Sin embargo, para dimensiones grandes se encuentra que éste se halla en $J^* \approx 0,43$ como era de esperarse.

La rama izquierda de la campana presenta siempre más ruido que la derecha. Esto se debe a la imposición de condición de contorno periódica.

Con una longitud L finita no hay una propia compensación del sistema del lado de bloques grandes de la red, osea del lado izquierdo, ya que solo estoy viendo replicas del mismo sistema haciéndose más evidente cuanto más grande es el tamaño de la red estudiada.

Veamos los resultados para la energía de las distintas redes presentes en la figura 10.

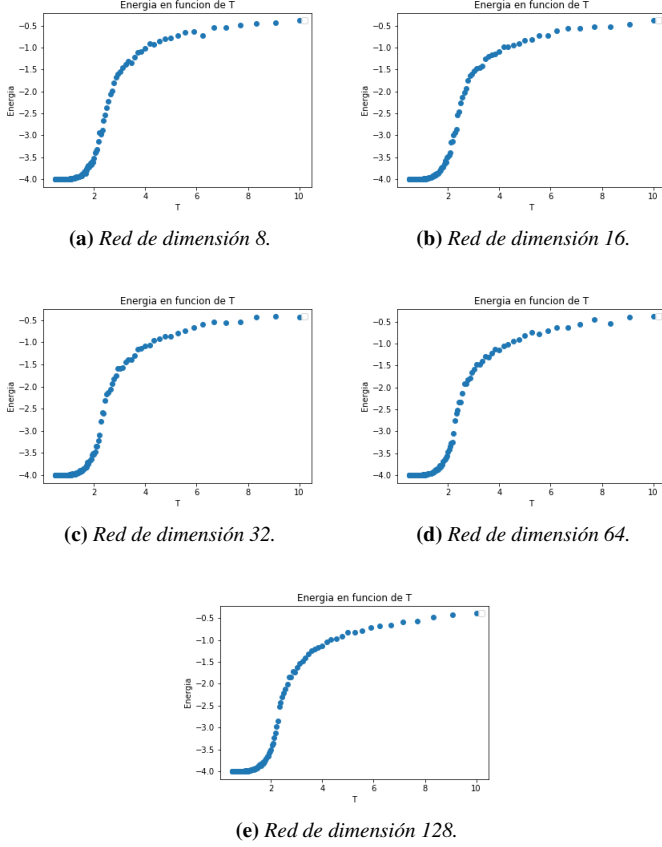


Figura 10: Energía en función de T para distintas dimensiones.

En dichos gráficos como en los casos anteriores se observa nuevamente el cambio de concavidad para $T \approx 2,3$. En todos los casos se encuentra que para temperaturas bajas la energía se minimiza y se maximiza para temperaturas altas.

Para temperaturas bajas la energía por sitio toma valor de -4 . Esto se debe a que corresponde a la energía del sistema con todos los espines alineados sin presencia de un campo externo y con $J = 1$.

Para temperaturas altas, en cambio, se esperaría que la energía sea nula ya que todos los espines están desalineados y por lo tanto el término de interacción de la energía es nulo. Sin embargo, esto no se observa. Puede que se deba a que es necesario subir aun más la temperatura para desalinearse completamente el sistema.

3.4. Sistema con Campo Externo e Interacción Anti-Ferromagnética

Para realizar este análisis se fijaron 4 campos magnéticos distintos, más específicamente $B = 0,01, B = 0,1, B = 1$ y $B = 10$, para ver como interactuaban los primeros vecinos con presencia de un campo externo débil, comparable y fuerte respecto a dicha interacción en una red de $L = 32$.

Todas las mediciones se realizaron a temperatura constante y se varió la constante de acoplamiento J .

Como se puede ver en la figura 11 se pierde la forma que antes obtenida pero se observa cierto comportamiento dependiente del campo.

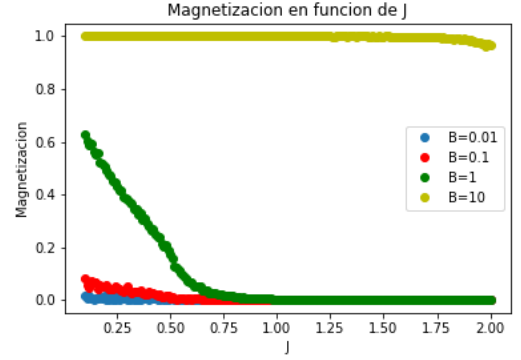


Figura 11: Magnetización en función de J para $L=32$.

Para $B = 10$ el campo es mucho más grande que la constante de acoplamiento, y por lo tanto este hace que los espines queden siempre alineados con el campo sin importar cual sea la intensidad de la interacción. Por lo tanto, la magnetización media por sitio es constantemente uno. Se puede ver que cuando J toma valores cercanos al 2 se produce una pequeña curva ya que empieza a no ser más despreciable frente al campo magnético.

Para $B = 0,1$ y $B = 0,01$ pasa lo contrario. La interacción entre vecinos es la que domina el sistema y ésta se estabiliza con magnetización casi nula. Esto es porque al tener $J < 0$, la energía ahora es máxima cuando los espines están alineados y mínima cuando están desordenados.

Para $B = 1$ ambos términos de la energía tienen peso y el resultado es un sistema intermedio entre los dos casos extremos anteriores.

Cuando comparamos en la figura 12 la susceptibilidad magnética entre estos cuatro sistemas, vemos que tanto para campos externos muy grandes o chicos ésta es cercana a 0 respecto a la interacción entre vecinos. Esto puede deberse a que el pico que corresponde al estado crítico va corriéndose a medida que aumenta el campo, así para los primeros dos campos $B = 0,01$ y $B = 0,1$ solo se llega a ver el extremo derecho del pico y para $B = 10$ se observa el extremo izquierdo. Sin embargo, para $B = 1$ se puede llegar a ver el máximo. Todo esto corresponde con lo visto en los gráficos de magnetización.

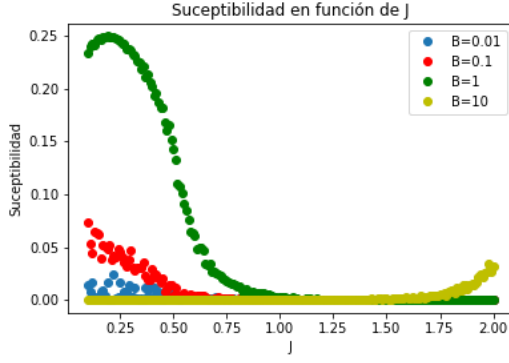


Figura 12: Susceptibilidad magnética en función de J para $L=32$.

En la figura 13 vemos que la energía para campo grande, $B = 10$, es constante. Es esperable porque si $B \gg J$, domina el término $B \sum S_i$ que es constante para B y T fijos.

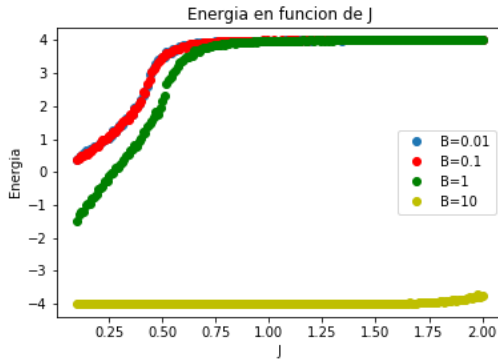


Figura 13: Energía en función de J para $L=32$.

Cuando el campo es chico, domina el término de interacción. Nuevamente, como $J < 0$, el mínimo valor de energía posible es con los espines desalineados y el máximo será cuando todos los espines estén alineados. Eso se puede ver en las curvas para $B = 0,01$ y $B = 0,1$.

Para $B = 1$ tanto el término de B como el de interacción contribuyen a la energía y, nuevamente, se ve un caso intermedio entre los dos extremos mencionados anteriormente.

3.5. Sistema con Interacción Ferromagnética y Anti-Ferromagnética

Se estudió un sistema con interacción ferromagnética a primeros vecinos e interacción anti-ferromagnética a segundos vecinos.

Se consideró $B = 0$ y que el módulo de la constante de acoplamiento a primeros vecinos es el mismo que el de la constante de acoplamiento a segundos vecinos.

Se calcularon nuevamente la magnetización y energía media en función de la temperatura como se ve en las figuras 14 y 15 respectivamente.

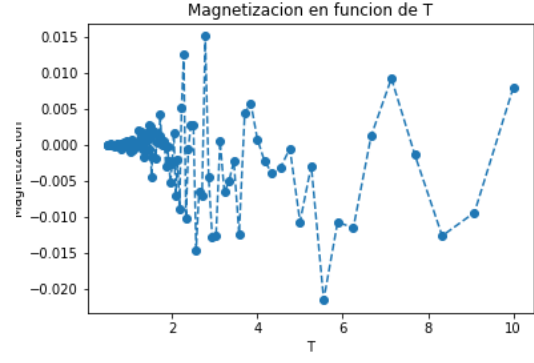


Figura 14: Magnetización en función de T para $L=32$.

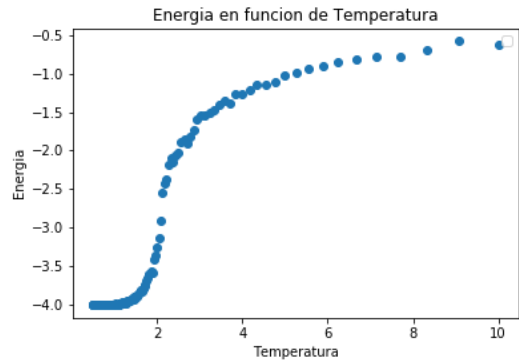


Figura 15: Energía en función de T para $L=32$.

La energía presenta el comportamiento ya estudiado en los casos anteriores: Se minimiza para temperaturas bajas, tiene un cambio de concavidad en la temperatura crítica y luego crece hasta estabilizarse cerca del cero.

La magnetización, sin embargo, presenta un comportamiento nuevo. En la figura 14 se ve que para temperaturas bajas es nula, pero luego empieza a tener fluctuaciones alrededor del 0. Esta imposibilidad de alinear todos los espines para temperaturas bajas se la conoce como *frustración*. Esto se debe a que la interacción anti-ferromagnética hace que el estado de menor energía no sea el de magnetización máxima, sino el de magnetización nula.

3.6. Algoritmos Alternativos

3.6.1. Algoritmo de Baño Térmico y Método de Glauber

Como se mencionó en la introducción, la probabilidad de aceptación para el logaritmo de Metrópolis, depende del valor espín seleccionado y es

$$\frac{w(S_{i+1})}{w(S_i)} = \exp[-\beta * \Delta H] = \exp[-\beta * \Delta E] \quad (12)$$

El Algoritmo de Baño Térmico consiste, en cambio, en seleccionar un espín y luego, independientemente de su valor original,

redefinir su valor en función de resultados obtenidos para la configuración total con probabilidades $p_{up} = (1 + g)^{-1}$ si el nuevo valor es *up* o $p_{down} = g(1 + g)^{-1}$ si el nuevo valor es *down* con $g = \exp[2(Jf + B)]$ (con f la suma de los primeros vecinos). Dicho algoritmo satisface balance detallado.

Por otro lado el *Método de Glauber* propone una probabilidad de transición del estilo

$$\frac{w(S_{i+1})}{w(S_{i+1}) + w(S_i)} = \frac{1}{1 + \frac{w(S_i)}{w(S_{i+1})}} = \frac{1}{1 + \exp[\beta * \Delta E]} \quad (13)$$

El fin de esta modificación al logaritmo de Metrópolis es tener una probabilidad de aceptación un poco más grande que antes para los estados que pasan a tener mayor energía que el anterior. De esta forma, resulta más fácil salir de los mínimos a bajas temperaturas.

Se puede mostrar que los métodos de Glauber y baño térmico son equivalentes.

Si se pasa de un espín *down* a un espín *up* la probabilidad según el primer método será p_{up} . Al multiplicar y dividir por $\exp\left[\frac{-\beta(E_{up} - E_{down})}{2}\right]$ y notando $E_{up} - E_{down} = \Delta E$ se obtiene la misma probabilidad de transición que el *Método de Glauber*.

En el gráfico de p vs $\beta\Delta E$, para $\beta\Delta E$ muy grandes o chicos las probabilidades se pegan, sin embargo para valores cercanos a 0, con este nuevo método hace que estas bajen, haciendo que no queden ni en valles ni montañas al realizar los cálculos.

3.6.2. Algoritmo de Swendsen-Wang

El anterior método realiza las inversiones de espines de a uno por vez, con lo cual esto es un proceso lento para temperaturas cercanas a la crítica. Otro cambio que se puede hacer es invertir bloques de espines con igual sentido, esto se lo llama método de Swendsen-Wang.

Este método produce grupos de espín representativos a realizar menor cantidad de pasos pero evitando realizar cambios del estilo todos *up* a *down* o viceversa. El cambio por conglomerados analiza la red identificando fragmentos con igual sentido y genera uniones entre las celdas de los fragmentos con una cierta probabilidad $p_{S-W} = 1 - \exp[-2\beta J]$ para generar cierta flexibilidad y que no suceda el cambio anteriormente mencionado. Luego invierte los bloques con una probabilidad de 0,5 y finalmente los separa.

A $T \rightarrow 0$ la probabilidad quedará $p_{S-W} \sim 1$ con lo cual quedarán varias celdas por bloque unidas solucionando problemas a estas temperaturas. A $T \rightarrow \infty$ la probabilidad es $p_{S-W} \sim 0$, produciendo menos uniones. Además como la p_{S-W} es creciente a medida que la temperatura disminuye el tamaño de los bloques aumentarán siendo menos costoso invertir todo el entramado y esto mejora los tiempos para temperaturas en un entorno a la crítica.

4. Conclusiones

Se calcularon los tiempos de correlación para redes de espines de distintas dimensiones. Se observó que con invertir la red entera 100 veces ya era más que suficiente para descorrelacionar los datos para temperaturas alejadas de la $T_c \sim 2,3$. Para valores cercanos a dicha temperatura es necesario realizar muchas más de 4000000 para poder llegar a valores similares.

Para los arreglos con campo externo pero sin interacción entre vecinos se obtuvieron valores esperados tanto para la magnetización, la energía y la susceptibilidad magnética. Para la primera 0 para temperaturas altas debido a que todos los espines se encuentran desalineados y 1 para temperaturas bajas debido a la completa alineación del sistema. Para la segunda debido a que la energía es proporcional al campo, los resultados fueron coherentes a lo anteriormente mencionado. Finalmente para la susceptibilidad se observa comportamientos de un muy buen conductor para temperaturas bajas, y uno muy malo para temperaturas altas.

Para los análisis de redes de distintas dimensiones con interacción entre primeros vecinos pero sin campo externo, los valores de magnetización fueron más precisos en entornos cercanos a las T_c cuanto más grande era la red a costa de un mayor tiempo de cálculo. El comportamiento del sistema es el esperado para una interacción ferromagnética: Para temperaturas grandes a la crítica la magnetización es nula y para temperaturas chicas tiene a 1 habiendo un cambio abrupto en la T_c . En la susceptibilidad se puede observar este cambio en forma de pico y la asimetría producida por la condición periódica del sistema. Finalmente al ver la energía del sistema se observa que para temperaturas bajas el sistema tiene un mínimo de energía. El máximo es cercano al 0 y se encuentra a temperaturas altas. Esto corresponde al sistema con todos los espines desalineados.

Se analizó también un sistema sometido a un campo externo con interacciones anti-ferromagnéticas entre primeros vecinos. Se dejó la temperatura fija y se varió el valor de la constante de acoplamiento. Se halló que para campos externos chicos, cuando la interacción a primeros vecinos domina, la magnetización es casi nula. Esto es razonable porque en este caso la energía se minimiza cuando los espines están desalineados y no alineados como en el caso ferromagnético. Cuando el campo externo es grande respecto de la constante de acoplamiento éste domina y todos los espines se alinean consiguiendo la magnetización máxima. En cuanto a la energía, se halló que era constante cuando $B \gg J$. Para B chicos, en cambio, toma la forma habitual.

Como último caso se realizó un arreglo sin campo, con interacción ferromagnética a primeros vecinos y anti-ferromagnética a segundos vecinos. En este caso se pudo observar el fenómeno de frustración magnética de espines, a mayor temperatura el sistema oscila al rededor de 0.

Se estudiaron algoritmos alternativos, estableciendo una equivalencia entre Baño Térmico y Glauber, y observando que para Swendsen-Wang se puede disminuir los tiempos para cálculos alrededor de la T_c .