

# Mathe-Ergänzungskurs

Linus Yury Schneeberg

2025-2027

## Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Q1</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Reelle Zahlenfolgen</b>	<b>2</b>
1.1	Definitionen . . . . .	2
1.2	Beweis (rekursive Summenfolge = explizite) . . . . .	2
1.3	Satz (Jede konvergente Folge ist beschränkt) . . . . .	3
1.4	Satz von Bolzano-Weierstraß (I und II) . . . . .	3
1.5	Cauchy-Folgen . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Grenzwerte</b>	<b>6</b>
2.1	Einschachtelungssatz/Sandwichlemma . . . . .	6
2.2	Teilfolgekriterium . . . . .	7

## Teil I

# Q1

## 1 Reelle Zahlenfolgen

### 1.1 Definitionen

**Definition 1.1.**  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt reelle Zahlenfolge.  
 $n \mapsto a(n) = a_n$

**Definition 1.2.** Als Bildungsvorschrift bezeichnet man

(a)  $a(n) = f(n)$  z.B.  $a(n) = n^2$  (explizit)

(b)  $a(n) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, n)$  z.B.  $a(n+1) = a(n) + a(n-1)$  (rekursiv)

### 1.2 Beweis (rekursive Summenfolge = explizite)

**Satz 1.1.** Seien  $a_1(n)$  und  $a_2(n)$  Folgen mit den Bildungsvorschriften

$$a_1(n) = a_1(n) + (n+1) \quad a_2(n) = \sum_{k=0}^n k$$
$$a_1(0) = 0.$$

Dann gilt  $\forall n: a_1(n) = a_2(n)$ .

*Beweis.* Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.

**Induktionsanfang:** Für  $n = 0$

$$a_1(0) = 0 \tag{1}$$

$$a_2(0) = \sum_{k=0}^0 k = 0 \tag{2}$$

$$(1) \wedge (2) \implies a_1(0) = a_2(0)$$

**Induktionsschritt:** Induktionshypothese:  $\exists n: a_1(n) = a_2(n)$

Zu zeigen ist, Ind. Hypot.  $\implies a_1(n+1) = a_2(n+1)$

$$\begin{aligned}
a_1(n+1) &= a_1(n) + (n+1) \\
&= a_2(n) + (n+1) \quad \text{Ind. Hypot.} \\
&= \sum_{k=0}^n k + (n+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k \\
&= a_2(n+1)
\end{aligned}$$

QED

### 1.3 Satz (Jede konvergente Folge ist beschränkt)

**Satz 1.2.** Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine konvergente Folge mit dem Grenzwert  $a$ . Dann gilt

$$\exists m, M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: m < a_n < M.$$

*Beweis.* Da  $a_n$  gegen  $a$  konvergiert gilt

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_\varepsilon: |a_n - a| < \varepsilon.$$

Da  $|a_n - a| < \varepsilon$  in der oberen Aussage äquivalent zu  $-x < a_n < x$  ist, gilt auch

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_\varepsilon: -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon.$$

Für ein bestimmtes  $\varepsilon > 0$  existiert also ein  $N_\varepsilon$ , so dass für alle  $n \geq N_\varepsilon$   $a_n$  beschränkt ist. Da es nur endlich viele Folgenglieder für  $n < N_\varepsilon$  gibt, lässt sich eine obere Grenze als  $\max(\{a_n | n < N_\varepsilon\} \cup \{\varepsilon + a\})$  und eine untere Grenze als  $\min(\{a_n | n < N_\varepsilon\} \cup \{-\varepsilon + a\})$  berechnen. QED

### 1.4 Satz von Bolzano-Weierstraß (I und II)

**Satz 1.3** (Satz von Bolzano-Weierstraß I). Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

*Beweis.*  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  sei beschränkt durch  $m \leq a_n \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man teile das Intervall  $[m, M]$  in zwei Teile bei  $\frac{m+M}{2}$ .

1. Fall: Auf  $\frac{m+M}{2}$  liegen unendlich viele Folgenglieder.
2. Fall: In  $[m, \frac{m+M}{2}[$  liegen unendlich viele Folgenglieder.  
Dann beginne mit  $[m, \frac{m+M}{2}[$  von vorne.
3. Fall: In  $] \frac{m+M}{2}, M]$  liegen unendlich viele Folgenglieder.  
Dann beginne mit  $] \frac{m+M}{2}, M]$  von vorne.

Das Verfahren...

- (a) ... bricht mit Eintreten des ersten Falls ab und hat damit eine konvergente Teilfolge.
- (b) ... setzt sich unendlich fort und erzeugt eine Folge von Intervallen mit
  - $I_n \subset I_{n-1}, I_0 = [m; M]$ ,
  - Länge von  $I_n = \frac{M-m}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,
  - Jedes Intervall enthält unendlich viele Folgenglieder.

Zu dieser Intervallschachtelung gehört genau eine reelle Zahl. Nimmt man aus jedem Intervall das Folgenglied mit dem kleinsten Index, welches noch nicht vorher ausgewählt wurde, erhält man eine Teilfolge, die gegen diese Zahl konvergiert. QED

**Satz 1.4** (Satz von Bolzano-Weierstraß II). *Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.*

*Beweis.* O.B.d.A (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) sei  $(a_n)_{n=1}^\infty$  monoton wachsend. Sei  $\sup$  das Supremum von  $(a_n)$ .

$(a_n)$  **ist monoton wachsend genau dann, wenn:**

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}: n_1 > n_2 \implies a_{n_1} \geq a_{n_2}$$

$(a_n)$  **hat eine obere Schranke  $\sigma$  genau dann, wenn:**

$$\exists \sigma \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq \sigma$$

Wenn  $\sup$  das Supremum von  $(a_n)$  ist, dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq \sup \wedge \forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \sup - \varepsilon < a_{N_\varepsilon}.$$

Wir zeigen nun, dass  $(a_n)$  gegen  $\sup$  konvergiert, mit anderen Worten:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon: |a_n - \sup| < \varepsilon. \quad (1)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & |a_n - \sup| < \varepsilon \\ \iff & \sup - a_n < \varepsilon \quad \text{weil } \sup > a_n \\ \iff & \sup - \varepsilon < a_n \end{aligned}$$

Aussage (1) ist also wahr genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon: \sup - \varepsilon < a_n.$$

Laut Definition des Supremums gilt  $\forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \sup - \varepsilon < a_{N_\varepsilon}$ . Weil  $(a_n)$  monoton wachsend ist, gilt auch  $\forall n > N_\varepsilon: a_{N_\varepsilon} \leq a_n$ . Daraus folgt, dass (1) wahr ist und  $(a_n)$  gegen  $\sup$  konvergiert. QED

## 1.5 Cauchy-Folgen

**Definition 1.3.** Eine Folge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  heißt *Cauchy-Folge* (altmodisch auch *Fundamentalfolge*), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall m, n \in \mathbb{N}: m, n \geq N_\varepsilon \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

**Lemma 1.5.**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: |x + y| \leq |x| + |y|$$

*Beweis.* Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  und beliebig, aber fest. Da ein beliebiges  $a \in \mathbb{R}$  entweder positiv ( $a = |a|$ ) oder negativ ( $a = -|a|$ ) ist (und  $-a$  auch) gilt:

$$a \leq |a| \wedge -a \leq |a| \quad (1)$$

Für  $x + y$  müssen zwei Fälle überprüft werden:

1. Fall:  $x + y \geq 0$

$$\begin{aligned} |x + y| &= x + y \\ (1) \implies x + y &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

2. Fall:  $x + y < 0$

$$\begin{aligned} |x + y| &= -x - y \\ (1) \implies -x - y &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

QED

**Satz 1.6.** In den reellen Zahlen (in jeder topologisch abgeschlossenen Menge mit Abstandsbegriff) sind Konvergenz und Cauchy-Eigenschaft äquivalent.

*Beweis.* ( $\implies$ ) Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergent gegen  $a$ . Zu zeigen ist, dass  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge ist:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall m, n \in \mathbb{N}: m, n \geq N_\varepsilon \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Wir wissen, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert. Es gilt also

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon: |a_n - a| < \varepsilon.$$

Weil die Aussage für alle  $\varepsilon$  (also auch für  $\frac{\varepsilon}{2}$ ) gilt, finden wir auch ein  $N_\varepsilon$  und ein  $M_\varepsilon$ , so dass gilt

$$\forall \varepsilon > 0: \forall n > N_\varepsilon, m > M_\varepsilon: |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon.$$

Laut Lemma 1.5 gilt also auch

$$\forall \varepsilon > 0: \forall n > N_\varepsilon, m > M_\varepsilon: |a_m - a + a - a_n| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon.$$

Das impliziert

$$\forall \varepsilon > 0: \forall n > N_\varepsilon, m > M_\varepsilon: |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Das ist äquivalent zur Definition der Cauchy-Folge, weil man ein  $K_\varepsilon$  bestimmen kann, welches größer oder gleich  $N_\varepsilon$  und  $M_\varepsilon$  ist. Man wähle also  $K_\varepsilon := \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$ . Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0: \forall n, m > K_\varepsilon: |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Damit ist  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge.

QED

⋮

## 2 Grenzwerte

⋮

### 2.1 Einschachtelungssatz/Sandwichlemma

**Satz 2.1** (Einschachtelungssatz/Sandwichlemma). *Seien  $(a_n)_{n=1}^\infty$ ,  $(b_n)_{n=1}^\infty$  und  $(c_n)_{n=1}^\infty$  beliebige Folgen mit  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \leq c_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$ . Dann konvergiert auch  $(b_n)$  gegen  $g$ .*

*Beweis.* Zu zeigen ist

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n > N_\varepsilon: |b_n - g| < \varepsilon.$$

Gegeben ist

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_\varepsilon, M_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n > N_\varepsilon, m > M_\varepsilon: |a_n - g| < \varepsilon \wedge |c_m - g| < \varepsilon.$$

Es existiert also für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon$  und ein  $M_\varepsilon$ , so dass für  $K_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$  gilt

$$\forall k > K_\varepsilon: |a_k - g| < \varepsilon \wedge |c_k - g| < \varepsilon.$$

Das und  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \leq c_n$  implizieren

$$\begin{aligned} & \forall k > K_\varepsilon: -\varepsilon < a_k - g \leq b_k - g \leq c_k - g < \varepsilon \\ \implies & \forall k > K_\varepsilon: -\varepsilon < b_k - g < \varepsilon \\ \iff & \forall k > K_\varepsilon: |b_k - g| < \varepsilon \end{aligned}$$

$(b_n)$  ist also ebenfalls konvergent gegen  $g$ .

QED

## 2.2 Teilfolgekriterium

**Satz 2.2** (Teilfolgekriterium). *Eine Folge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergiert genau dann gegen  $g$ , wenn jede Teilfolge von  $(a_n)$  ebenfalls gegen  $g$  konvergiert.*

*Beweis.* (  $\Leftarrow$  ) Wenn jede Teilfolge von  $(a_n)$  gegen  $g$  konvergiert, konvergiert auch  $(a_n)$  gegen  $g$ , weil  $(a_n)$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  ist.

(  $\Rightarrow$  ) Indirekter Beweis.

**Annahme:** Es gibt eine Teilfolge, die nicht gegen  $g$  konvergiert. Dann existiert eine streng monoton steigende Folge von natürlichen Zahlen  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ , so dass die Folge  $b_k = a_{n_k}$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  ist, für die gilt

$$\begin{aligned} & \neg \forall \varepsilon > 0: \exists K_{\varepsilon} \in \mathbb{N}: \forall k > K_{\varepsilon}: |b_k - g| < \varepsilon \\ \iff & \neg \forall \varepsilon > 0: \exists K_{\varepsilon} \in \mathbb{N}: \forall k > K_{\varepsilon}: |a_{n_k} - g| < \varepsilon \end{aligned} \quad (1)$$

Weil  $(a_n)$  gegen  $g$  konvergiert, gilt

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}: \forall m > N_{\varepsilon}: |a_m - g| < \varepsilon.$$

Weil  $n_m \geq m > N_{\varepsilon}$ , gilt

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}: \forall m > N_{\varepsilon}: |a_{n_m} - g| < \varepsilon,$$

was im Widerspruch zu (1) steht.

QED