Mathematik*

Linus Yury Schneeberg

2025/26

Inhaltsverzeichnis

Hinweis: Dieses Dokument ist unvollständig und enthält nur einige Aufzeichnungen aus dem Mathe*-Kurs bei Herrn Ohnesorge. Drei vertikal übereinanderstehende Punkte stehen dafür, dass Abschnitte ausgelassen wurden.

Teil I

Q1

1 Differentialrechnung

$\vdots$

1.1 Ableitungen in verschiedenen Kontexten

reine Mathematik
Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Fuktionen an einer beliebigen Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches:

(a) $c(x) = c, x \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}$
Dann ist

$$c'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{c(x_0 + h) - c(x_0)}{h}.$$

Das lässt sich zu $c'(x_0) = \lim_{h \to 0} 0$ umformen.

$$c'(x_0) = \lim_{h \to 0} 0$$

genau dann, wenn: $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x\colon |0 - x| < \delta \implies |0 - c'(x_0)| < \varepsilon$
genau dann, wenn: $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x\colon |x| < \delta \implies |c'(x_0)| < \varepsilon$
genau dann, wenn: $\forall \varepsilon > 0\colon \; [(\forall \delta > 0\colon \exists x\colon |x| < \delta) \implies |c'(x_0)| < \varepsilon]$ Lemma 1.1, 1.2
genau dann, wenn: $\forall \varepsilon > 0\colon |c'(x_0)| < \varepsilon$

Da $\forall \varepsilon > 0\colon |c'(x_0)| < \varepsilon$ nur für $c'(x_0) = 0$ gilt, ist $c'(x_0) = 0$.

Lemma 1.1. *Sei $P(x)$ eine logische Aussage, die abhängig von x ist und Q eine logische Aussage, die unabhängig von x ist. Dann gilt*

$$\forall x\colon P(x) \implies Q$$
genau dann, wenn: $(\exists x\colon P(x)) \implies Q$

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\forall x\colon P(x) \implies Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\forall x\colon \neg P(x) \vee Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \neg P(x) \vee Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\left(\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \neg P(x)\right) \vee Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\left(\neg \bigvee_{x\in\mathbb{R}} P(x)\right) \vee Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\neg\left(\exists x\colon P(x)\right) \vee Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\left(\exists x\colon P(x)\right) \implies Q
\end{aligned}$$

QED

Lemma 1.2. *Sei $P(x)$ eine logische Aussage, die abhängig von x ist und Q eine logische Aussage, die unabhängig von x ist. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&\exists x\colon P(x) \implies Q\\
\textit{genau dann, wenn: }&\left(\forall x\colon P(x)\right) \implies Q
\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\exists x\colon P(x) \implies Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\exists x\colon \neg P(x) \vee Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\bigvee_{x\in\mathbb{R}} \neg P(x) \vee Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\left(\bigvee_{x\in\mathbb{R}} \neg P(x)\right) \vee Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\left(\neg \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} P(x)\right) \vee Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\left(\neg\forall x\colon P(x)\right) \vee Q\\
\text{genau dann, wenn: }&\left(\forall x\colon P(x)\right) \implies Q
\end{aligned}$$

QED

(b) $f(x) = ax + b, x, a, b \in \mathbb{R}$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a*(x_0+h) + b - (ax_0+b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} a \\
&= a
\end{aligned}
$$

(c) $p(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
Dann ist

$$
\begin{aligned}
p'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{p(x_0+h) - p(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x_0 + h \\
&= 2x_0
\end{aligned}
$$

(d) $q(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$
Dann ist

$$
\begin{aligned}
q'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{q(x_0+h) - q(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x_0h^2 + 3x_0^2h + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x_0h + 3x_0^2 + h^2 \\
&= 3x_0^3
\end{aligned}
$$

(e) $g(x) = x^n, x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Dann ist

$$
\begin{aligned}
q'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \\
&\stackrel{?}{=} nx_0^2
\end{aligned}
$$