

Mathematik*

Linus Yury Schneeberg

2025/26

Inhaltsverzeichnis

1	Differentialrechnung	2
1.1	Ableitungen in verschiedenen Kontexten	2

1 Differentialrechnung

⋮

1.1 Ableitungen in verschiedenen Kontexten

reine Mathematik

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen an einer beliebigen Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches:

- (a) $c(x) = c, x \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}$

Dann ist

$$c'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x_0 + h) - c(x_0)}{h}.$$

Das lässt sich zu $c'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} 0$ umformen.

$$c'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} 0$$

genau dann, wenn: $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x: |0 - x| < \delta \implies |0 - c'(x_0)| < \varepsilon$

genau dann, wenn: $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x: |x| < \delta \implies |c'(x_0)| < \varepsilon$

genau dann, wenn: $\forall \varepsilon > 0: [(\forall \delta > 0: \exists x: |x| < \delta) \implies |c'(x_0)| < \varepsilon]$ Lemma 1.1, 1.2

genau dann, wenn: $\forall \varepsilon > 0: |c'(x_0)| < \varepsilon$

Da $\forall \varepsilon > 0: |c'(x_0)| < \varepsilon$ nur für $c'(x_0) = 0$ gilt, ist $c'(x_0) = 0$.

Lemma 1.1. Sei $P(x)$ eine logische Aussage, die abhängig von x ist und Q eine logische Aussage, die unabhängig von x ist. Dann gilt

$$\forall x: P(x) \implies Q$$

$$\text{genau dann, wenn: } (\exists x: P(x)) \implies Q$$

Beweis.

$$\forall x: P(x) \implies Q$$

$$\text{genau dann, wenn: } \forall x: \neg P(x) \vee Q$$

$$\text{genau dann, wenn: } \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \neg P(x) \vee Q$$

$$\text{genau dann, wenn: } \left(\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \neg P(x) \right) \vee Q$$

$$\text{genau dann, wenn: } \left(\neg \bigvee_{x \in \mathbb{R}} P(x) \right) \vee Q$$

$$\text{genau dann, wenn: } \neg (\exists x: P(x)) \vee Q$$

$$\text{genau dann, wenn: } (\exists x: P(x)) \implies Q$$

QED

Lemma 1.2. Sei $P(x)$ eine logische Aussage, die abhängig von x ist und Q eine logische Aussage, die unabhängig von x ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \exists x: P(x) &\implies Q \\ \text{genau dann, wenn: } (\forall x: P(x)) &\implies Q \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \exists x: P(x) &\implies Q \\ \text{genau dann, wenn: } \exists x: \neg P(x) \vee Q & \\ \text{genau dann, wenn: } \bigvee_{x \in \mathbb{R}} \neg P(x) \vee Q & \\ \text{genau dann, wenn: } \left(\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \neg P(x) \right) \vee Q & \\ \text{genau dann, wenn: } \left(\neg \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} P(x) \right) \vee Q & \\ \text{genau dann, wenn: } (\neg \forall x: P(x)) \vee Q & \\ \text{genau dann, wenn: } (\forall x: P(x)) &\implies Q \end{aligned}$$

QED

(b) $f(x) = ax + b, x, a, b \in \mathbb{R}$

Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a * (x_0 + h) + b - (ax_0 + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a \\ &= a \end{aligned}$$

(c) $p(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$

Dann ist

$$\begin{aligned} p'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x_0 + h) - p(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

- (d) $q(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$
Dann ist

$$\begin{aligned} q'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x_0 + h) - q(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0h^2 + 3x_0^2h + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3x_0h + 3x_0^2 + h^2 \\ &= 3x_0^3 \end{aligned}$$

- (e) $g(x) = x^n, x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Dann ist

$$\begin{aligned} q'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &\stackrel{?}{=} nx_0^{n-1} \end{aligned}$$