Mathe-Ergänzungskurs

Linus Yury Schneeberg

2025-2027

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Q1

1 Reelle Zahlenfolgen

1.1 Definitionen

Definition 1.1. $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *heißt reelle Zahlenfolge.*
$n \mapsto a(n) = a_n$

Definition 1.2. *Als Bildungsvorschrift bezeichnet man*

(a) $a(n) = f(n)$ *z.B.* $a(n) = n^2$ *(explizit)*

(b) $a(n) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, n)$ *z.B.* $a(n+1) = a(n) + a(n-1)$ *(rekursiv)*

1.2 Beweis (rekursive Summenfolge = explizite)

Satz 1.1. *Seien* $a_1(n)$ *und* $a_2(n)$ *Folgen mit den Bildungsforschriften*

$$a_1(n) = a_1(n) + (n+1) \quad a_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k$$
$$a_1(0) = 0.$$

Dann gilt $\forall n\colon a_1(n) = a_2(n)$.

Beweis. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.
Induktionsanfang: Für $n = 0$

$$a_1(0) = 0 \tag{1}$$

$$a_2(0) = \sum_{k=0}^{0} k = 0 \tag{2}$$

$$(1) \land (2) \implies a_1(0) = a_2(0)$$

Induktionsschritt: Induktionshypothese: $\exists n\colon a_1(n) = a_2(n)$
Zu zeigen ist, Ind. Hypot. $\implies a_1(n+1) = a_2(n+1)$

$$
\begin{aligned}
a_1(n+1) &= a_1(n) + (n+1) \\
&= a_2(n) + (n+1) \quad \text{Ind. Hypot.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k \\
&= a_2(n+1)
\end{aligned}
$$

QED

1.3 Satz (Jede konvergente Folge ist beschränkt)

Satz 1.2. *Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a. Dann gilt*

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon m < a_n < M$$

Beweis. Da a_n gegen a konvergiert gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N_\varepsilon \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Da $|a_n - a| < \varepsilon$ in der oberen Aussage äquivalent zu $-x < a_n < x$ ist, gilt auch

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N_\varepsilon \colon -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon.$$

Für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$ existiert also ein N_ε, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ a_n beschränkt ist. Da es nur endlich viele Folgenglieder für $n < N_\varepsilon$ gibt, lässt sich eine obere Grenze als $max(\{a_n | n < N_\varepsilon\} \cup \{\varepsilon + a\})$ und eine untere Grenze als $min(\{a_n | n < N_\varepsilon\} \cup \{-\varepsilon + a\}\})$ berechnen. QED

1.4 Satz von Bolzano-Weierstraß (I und II)

Satz 1.3 (Satz von Bolzano-Weierstraß I)**.** *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei beschränkt durch $m \leq a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man teile das intervall $[n, M]$ in zwei Teile bei $\frac{m+M}{2}$.

1. Fall: Auf $\frac{m+M}{2}$ liegen unendlich viele Folgeglieder.
2. Fall: In $[m, \frac{m+M}{2}[$ liegen unendlich viele Folgeglieder.
   Dann beginne mit $[m, \frac{m+M}{2}[$ von vorne.
3. Fall: In $]\frac{m+M}{2}, M]$ liegen undenlich viele Folgeglieder.
   Dann beginne mit $]\frac{m+M}{2}, M]$ von vorne.

Das Verfahren...

(a) ... bricht mit Eintreten des ersten Falls ab und hat damit eine konvergente Teilfolge.

(b) ... setzt sich unendlich fort und erzeugt eine Folge von Intervallen mit

- $I_n \subset I_{n-1}, I_0 = [m; M]$,
- Länge von $I_n = \frac{M-m}{2^n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$,
- Jedes Intervall enthält unendlich viele Folgeglieder.

Zu dieser Intervallschachtelung gehört genau eine reelle Zahl. Nimmt man aus jedem Intervall das Folgeglied mit dem kleinsten Index, welches noch nicht vorher ausgewählt wurde, erhält man eine Teilfolge, die gegen diese Zahl konvergiert. QED

Satz 1.4 (Satz von Bolzano-Weierstraß II)**.** *Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.*

Beweis. O.B.d.A (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton wachsend. Sei *sup* das Supremum von (a_n).

(a_n) **ist monoton wachsend genau dann, wenn:**

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \colon n_1 > n_2 \implies a_{n_1} \geq a_{n_2}$$

(a_n) **hat eine obere Schranke** σ **genau dann, wenn:**

$$\exists \sigma \in \mathbb{R} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \leq \sigma$$

Die kleinste obere Schranke (Supremum) von (a_n) **ist** *sup* **genau dann, wenn:**

$$\exists sup \in \mathbb{R} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \leq sup \wedge \forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon sup - \varepsilon < a_{N_\varepsilon}$$

Zu zeigen ist $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_\varepsilon \colon \forall n > N_\varepsilon \colon |a_n - sup| < \varepsilon$ (1).

$$\begin{aligned} & |a_n - sup| < \varepsilon \\ \iff & sup - a_n < \varepsilon \qquad \text{weil } sup > a_n \\ \iff & sup - \varepsilon < a_n \end{aligned}$$

(1) ist also wahr genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_\varepsilon \colon \forall n > N_\varepsilon \colon sup - \varepsilon < a_n$$

Laut Definition des Supremums gilt $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists \colon N_\varepsilon sup - \varepsilon < a_{N_\varepsilon}$. Weil (a_n) monoton wachsend ist, gilt auch $\forall n > N_\varepsilon \colon a_n \geq a_{N_\varepsilon}$. Daraus folgt, dass (1) wahr ist und (a_n) gegen *sup* konvergiert. QED

1.5 Cauchy-Folgen

Definition 1.3. *Eine Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt Cauchy-Folge (altmodisch auch Fundamentalfolge), wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_\varepsilon \in \mathbb{B} \colon \forall m, n \in \mathbb{N} \colon m, n \geq N_\varepsilon \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Satz 1.5. *In den reellen Zahlen (in jeder topologisch abgeschlossenen Menge mit Abstandsbegriff) sind Konvergenz und Cauchy-Eigenschaft äquivalent.*

Beweis. ($\implies$) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent gegen a. Zu zeigen ist, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_\varepsilon \in \mathbb{B} \colon \forall m, n \in \mathbb{N} \colon m, n \geq N_\varepsilon \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Wir wissen, dass (a_n) gegen a konvergiert. Es gilt also

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_\varepsilon \colon \forall n > N_\varepsilon \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Weil die Aussage für alle ε (also auch für $\frac{\varepsilon}{2}$) gilt, finden wir auch ein N_ε und ein M_ε, so dass gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \forall n > N_\varepsilon, m > M_\varepsilon \colon |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon.$$

Lemma 1.6.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \colon |x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und beliebig, aber fest. Da ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ entweder positiv ($a = |a|$) oder negativ ($a = -|a|$) ist (und $-a$ auch) gilt:

$$a \leq |a| \wedge -a \leq |a| \tag{1}$$

Für $x + y$ müssen zwei Fälle überprüft werden:

1. Fall: $x + y \geq 0$

$$\begin{aligned} |x + y| &= x + y \\ (1) \implies x + y &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

2. Fall: $x_y < 0$

$$\begin{aligned} |x + y| &= -x - y \\ (1) \implies -x - y &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

QED

Laut Lemma 1.6 gilt also auch

$$\forall \varepsilon > 0\colon \forall n > N_\varepsilon, m > M_\varepsilon\colon |a_m - a + a - a_n| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

Das impliziert

$$\forall \varepsilon > 0\colon \forall n > N_\varepsilon, m > M_\varepsilon\colon |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Das ist äquivalent zur Definition der Cauchy-Folge, weil man ein K_ε bestimmen kann, welches größer oder gleich dem N_ε und M_ε ist. Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0\colon \forall n, m > K_\varepsilon\colon |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Damit ist (a_n) eine Cauchy-Folge. QED