Mathe-Ergänzungskurs

Linus Yury Schneeberg

2025-2027

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Q1

1 Reelle Zahlenfolgen

1.1 Definitionen

Definition 1.1. $$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$ *heißt reelle Zahlenfolge.*

Definition 1.2. *Als Bildungsvorschrift bezeichnet man*

(a) $a(n) = f(n)$ *z.B.* $a(n) = n^2$ *(explizit)*

(b) $a(n) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, n)$ *z.B.* $a(n+1) = a(n) + a(n-1)$ *(rekursiv)*

1.2 Beweis (rekursive Summenfolge = explizite)

Satz 1.1. *Seien* $a_1(n)$ *und* $a_2(n)$ *Folgen mit den Bildungsforschriften*

$$\begin{aligned} &a_1(n) = a_1(n) + (n+1) \quad a_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k \\ &a_1(0) = 0. \end{aligned}$$

Dann gilt $\forall n\colon a_1(n) = a_2(n)$.

Beweis. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.
Induktionsanfang: Für $n = 0$

$$a_1(0) = 0 \tag{1}$$

$$a_2(0) = \sum_{k=0}^{0} k = 0 \tag{2}$$

$$(1) \wedge (2) \implies a_1(0) = a_2(0)$$

Induktionsschritt: Induktionshypothese: $\exists n\colon a_1(n) = a_2(n)$
Zu zeigen ist, Ind. Hypot. $\implies a_1(n+1) = a_2(n+1)$

$$
\begin{aligned}
a_1(n+1) &= a_1(n) + (n+1) \\
&= a_2(n) + (n+1) \quad \text{Ind. Hypot.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k \\
&= a_2(n+1)
\end{aligned}
$$

QED

1.3 Satz (Jede konvergente Folge ist beschränkt)

Satz 1.2. *Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a. Dann gilt*

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon m < a_n < M$$

Beweis. Da a_n gegen a konvergiert gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N_\varepsilon \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Da $|a_n - a| < \varepsilon$ in der oberen Aussage äquivalent zu $-x < a_n < x$ ist, gilt auch

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N_\varepsilon \colon -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon.$$

Für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$ existiert also ein N_ε, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ a_n beschränkt ist. Da es nur endlich viele Folgenglieder für $n < N_\varepsilon$ gibt, lässt sich eine obere Grenze als $max(\{a_n | n < N_\varepsilon\} \cup \{\varepsilon + a\})$ und eine untere Grenze als $min(\{a_n | n < N_\varepsilon\} \cup \{-\varepsilon + a\}\})$ berechnen. QED

1.4 Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz 1.3 (Satz von Bolzano-Weierstraß I)**.** *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei beschränkt durch $m \leq a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man teile das intervall $[n, M]$ in zwei Teile bei $\frac{m+M}{2}$.

1. Fall: Auf $\frac{m+M}{2}$ liegen unendlich viele Folgeglieder.
2. Fall: In $[m, \frac{m+M}{2}[$ liegen unendlich viele Folgeglieder. Dann beginne mit $[m, \frac{m+M}{2}[$ von vorne.
3. Fall: In $]\frac{m+M}{2}, M]$ liegen undenlich viele Folgeglieder. Dann beginne mit $]\frac{m+M}{2}, M]$ von vorne.

QED