# Datenstrukturen und effiziente Algorithmen

Markus Vieth David Klopp

26. Januar 2016

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorlesung

## 1.1 Restnetzwerk $G_f = (V, E_f)$

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{für } (u,v) \in E \\ f(v,u) & \text{für } (v,u) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## 1.2 Max-Flow-Min-Cut-Theorem

1. $|f|$ ist maximal $\Rightarrow$ Es gibt keinen $f$-verbessernden Pfad
2. Es gibt einen $(S,T)$-Schnitt, so dass $c(S,T) = |f|$
3. $c(S,T) = |f| \Rightarrow f$ ist maximal und $c(S,T)$ minimal

### 1.2.1 Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2.

Gegeben sein ein maximaler Fluss $f \Rightarrow t$ ist ein $G_f$ nicht von $s$ erreichbar.

$$\text{Sei } S = \{v \in V | \exists\, p: \; s \rightsquigarrow v \text{ in } G_f\}, T = V \setminus S, t \in T$$

### 1.2.2 Idee

**Zeige:** Alle Vorwärtskanten über den Schnitt $S, T$ sind saturiert, d.h. $f(u,v) = c(u,v)$ Alle Rückwärtskanten von $T$ nach $S$ tragen den Flusswert 0.

**Beweis** Sei $(u,v) \in S \times T \cap E$

**Anmerkung** $f(u,v) < c(u,v)$

$$\Rightarrow (u,v) \in E_f \text{ mit } c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) > 0$$

$$\Rightarrow v \text{ ist von } s \text{ aus erreichbar:} s \rightsquigarrow u \rightarrow v \lightning$$

Sei $(v, u) \in T \times S$

**Anmerkung:** $f(v, u) > 0$

$$\Rightarrow (u, v) \in E_f \text{ mit } c_f(u, v) = f(v, u) > 0$$

$$\Rightarrow v \text{ ist auf dem Weg } s \rightsquigarrow u \to v \text{ in } G_f \text{ erreichbar.} \lightning$$

$$|f| = \sum_{u \in S, v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S, v \in T} f(v, u) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u, v) - 0 = c(S, T)$$

1. ⇒ 2.
q.e.d.

$$|f| = c(S, T) \Rightarrow f \text{ maximal und } c(S, T) \text{ minimal.}$$

---

**Offene Frage** Unter welchen Bedingungen terminiert der Ford-Fulkerson-Algorithmus?

**Anmerkung** $c : E \to \mathbb{N}$

$$\Rightarrow |f^*|^{\mathrm{I}} \in \mathbb{N}, c_{min}(p) \in \mathbb{N} \text{ für } p \text{ flussverbessernder Pfad} \geq 1$$

$$\Rightarrow \text{ Es genügen } |f^*| \text{ viele Iterationen zur Flussverbesserung}$$

$$\Rightarrow \text{Laufzeit}(|f^*| \cdot |E|)$$

### 1.2.3 Zwick

$$\overline{\phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad X > 1000 \quad |f^*| = 2X + 1$$

**Invariante** $\overline{\phi} = 0,613\ldots$

$$1 - \overline{\phi} = \overline{\phi}^{\,2}$$
$$\overline{\phi}^{\,k-1} - \overline{\phi}^{\,k} = \overline{\phi}^{\,k+1}$$

**1. Schritt** Schicke $\overline{\phi}^{\,k}$ Flusseinheiten entlang Pfad B

**2. Schritt** Schicke $\overline{\phi}^{\,k}$ entlang C

**3. Schritt** Schicke $\overline{\phi}^{\,k+1}$ entlang B

**2. Schritt** Schicke $\overline{\phi}^{\,k+1}$ entlang A Wir iterieren diese 4 Schritte unendlich oft

$$|f| = 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\phi}^{\,k} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\phi}^{\,k+1} < 7 \leq 2X + 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\phi}^{\,k} = \frac{1}{1 - \overline{\phi}}$$

---

[I] maximaler Fluss

# Abbildungsverzeichnis