

# Datenstrukturen und effiziente Algorithmen

Markus Vieth

David Klopp

Christian Stricker

23. Dezember 2015



# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>I. Sortieren</b>  | <b>6</b>  |
| <b>1. Vorlesung 1</b>                                      | <b>7</b>  |
| 1.1. Bubblesort . . . . .                                  | 7         |
| 1.1.1. Pseudocode . . . . .                                | 7         |
| 1.1.2. Laufzeitanalyse . . . . .                           | 8         |
| 1.2. Heapsort . . . . .                                    | 9         |
| 1.2.1. Idee . . . . .                                      | 10        |
| <b>2. Vorlesung 2</b>                                      | <b>11</b> |
| 2.1. Pseudocode . . . . .                                  | 11        |
| 2.1.1. Phase: Bottom-up Strategie zum Heapaufbau . . . . . | 11        |
| 2.1.2. Phase: Sortierphase . . . . .                       | 11        |
| 2.2. Korrektheitsbetrachtung . . . . .                     | 11        |
| 2.3. Laufzeitanalyse . . . . .                             | 12        |
| 2.3.1. Zusammenhang von $n$ und $k$ . . . . .              | 12        |
| 2.3.2. Analyse Heapaufbau . . . . .                        | 13        |
| 2.3.3. Sortierphase . . . . .                              | 13        |
| 2.3.4. Fazit . . . . .                                     | 14        |
| <b>3. Vorlesung 3</b>                                      | <b>15</b> |
| 3.1. Landau-Notation . . . . .                             | 15        |
| 3.1.1. $O(n)$ . . . . .                                    | 15        |
| 3.1.2. $\Omega(n)$ . . . . .                               | 15        |
| 3.1.3. $\Theta(n)$ . . . . .                               | 15        |
| 3.1.4. $o(n)$ . . . . .                                    | 15        |
| 3.1.5. Notation . . . . .                                  | 16        |
| 3.2. Mergesort (Divide and Conquer) . . . . .              | 16        |
| 3.2.1. Pseudo-Code . . . . .                               | 16        |
| 3.2.2. Laufzeitanalyse . . . . .                           | 17        |
| <b>4. Vorlesung 4</b>                                      | <b>18</b> |
| 4.1. Master-Theorem . . . . .                              | 18        |
| 4.1.1. Fall 1 . . . . .                                    | 18        |
| 4.1.2. Fall 2 . . . . .                                    | 19        |
| 4.1.3. Fall 3 . . . . .                                    | 19        |
| 4.1.4. Beispiel: Mergesort . . . . .                       | 19        |
| 4.2. Schnelle Multiplikation langer Zahlen . . . . .       | 19        |
| 4.2.1. Schulmethode zur Multiplikation . . . . .           | 20        |
| 4.2.2. Karazuba Ofman . . . . .                            | 20        |
| 4.2.3. Akra-Brazzi Theorem . . . . .                       | 21        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>5. Vorlesung 5</b>  | <b>22</b> |
| 5.1. Akra-Brazzi . . . . .   | 22        |
| 5.2. Lineare Rekursionsgleichungen . . . . .   | 23        |
| 5.2.1. Fibonacci-Zahlen . . . . .  | 23        |
| 5.2.2. Methode der erzeugenden Funktionen . . . . .  | 23        |
| 5.2.3. Einschub: Beispiel Reihenentwicklung . . . . .  | 23        |
| 5.2.4. Nullstellen des Nennerpolynoms . . . . .  | 23        |
| 5.2.5. Partialbruchzerlegung . . . . .   | 24        |
| 5.2.6. Lösung . . . . .  | 24        |
| 5.3. Quicksort (Divide and Conquer) . . . . .  | 24        |
| <b>6. Vorlesung 6</b>  | <b>25</b> |
| 6.1. Quicksort . . . . .   | 25        |
| 6.1.1. Pseudo-Code . . . . .   | 25        |
| 6.1.2. Zufallspermutation . . . . .  | 26        |
| 6.1.3. Einschub: Stochastik . . . . .  | 26        |
| 6.1.4. Laufzeitanalyse . . . . .   | 26        |
| 6.2. Median in Linearzeit . . . . .  | 28        |
| <b>7. Vorlesung 7</b>  | <b>29</b> |
| 7.1. Quicksort . . . . .   | 29        |
| 7.2. Quickselect . . . . .   | 29        |
| <b>8. Vorlesung 8</b>  | <b>30</b> |
| 8.1. Verallgemeinerung von Akra-Brazzi . . . . .   | 30        |
| 8.2. Median der Mediane . . . . .  | 30        |
| 8.2.1. Deterministische Variante für k-Select . . . . .                                      | 31        |
| 8.2.2. Laufzeitanalyse für den worst-case . . . . .  | 31        |
| 8.3. Untere Schranke für vergleichsbasierte Sortierverfahren . . . . .                       | 32        |
| <b>9. Vorlesung 9</b>  | <b>33</b> |
| 9.1. Vergleichsbasierte Sortieralgorithmen . . . . .   | 33        |
| 9.1.1. Worst-case Laufzeit . . . . .   | 33        |
| 9.1.2. Lemma: Mittlere Tiefe der Blätter in einem Entscheidungsbaum $> \log_2(n)n$ . . . . . | 34        |
| 9.2. Radix-Sort . . . . .  | 35        |
| 9.2.1. Beispiel: . . . . .   | 35        |
| 9.2.2. Pseudo-Code . . . . .   | 35        |
| 9.3. Binäre Suchbäume . . . . .  | 36        |
| <b>10. Vorlesung 10</b>  | <b>37</b> |
| 10.1. Binärer Suchbaum . . . . .   | 37        |
| 10.2. Pseudo-Code . . . . .  | 37        |
| 10.3. AVL-Bäume . . . . .  | 38        |
| 10.4. Laufzeitanalyse . . . . .  | 38        |
| <b>11. Vorlesung 11</b>  | <b>40</b> |
| 11.1. AVL-Bäume von Adelson-Velskii and Landis . . . . .                                     | 40        |
| 11.1.1. AVL-Eigenschaft: . . . . .   | 40        |
| 11.2. Rotationen . . . . .   | 41        |
| 11.3. Pseudo-Code . . . . .  | 42        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>12. Vorlesung 12</b>  | <b>43</b> |
| 12.1. (a,b)-Suchbäume . . . . .                                  | 43        |
| 12.1.1. Aufspaltung bei Einfügen . . . . .                       | 43        |
| 12.1.2. Verschmelzen von Knoten beim Löschen . . . . .           | 43        |
| 12.2. Amortisierte Analyse . . . . .                             | 43        |
| 12.2.1. Bankkonto-Methode . . . . .                              | 43        |
| <b>13. Vorlesung 13</b>  | <b>45</b> |
| 13.1. Hashing . . . . .  | 45        |
| 13.1.1. Universelles Hashing . . . . .                           | 46        |
| <b>14. Vorlesung 14</b>  | <b>48</b> |
| 14.0.1. Definition . . . . .                                     | 48        |
| 14.0.2. Beispiel . . . . .                                       | 48        |
| 14.0.3. Abschätzung nach oben . . . . .                          | 49        |
| 14.1. Perfektes Hashing . . . . .                                | 49        |
| 14.1.1. Definition . . . . .                                     | 49        |
| 14.1.2. Nachteil . . . . .                                       | 51        |
| <b>15. Vorlesung 15</b>  | <b>52</b> |
| <b>II. Graphen-Algorithmen</b>                                   | <b>53</b> |
| 15.0.1. Einführung . . . . .                                     | 54        |
| 15.0.2. BFS (Breadth-First Search) Breitensuche . . . . .        | 56        |
| <b>16. Vorlesung 16</b>  | <b>58</b> |
| 16.1. Kürzeste Wege Algorithmen . . . . .                        | 63        |
| 16.1.1. Dijkstra-Algorithmus . . . . .                           | 63        |
| <b>17. Vorlesung 17</b>  | <b>65</b> |
| 17.0.1. Vorläufige Laufzeitanalyse von Dijkstra . . . . .        | 66        |
| 17.1. Bellman-Ford-Algorithmus . . . . .                         | 66        |
| 17.1.1. Pseudocode . . . . .                                     | 67        |
| 17.1.2. Laufzeit: Bellman-Ford . . . . .                         | 67        |
| 17.1.3. Korrektheitsbeweis: Bellman-Ford . . . . .               | 67        |
| 17.1.4. Induktionsschritt: $i \rightarrow i + 1$ . . . . .       | 67        |
| <b>18. Vorlesung 18</b>  | <b>68</b> |
| 18.1. All-Pairs-Shortest Path Algorithmen . . . . .              | 68        |
| 18.1.1. Laufzeit zur Berechnung von $D^{(n)}$ . . . . .          | 69        |
| 18.2. Floyd-Warshall-Algorithmus . . . . .                       | 69        |
| 18.2.1. Korrektheitsbeweis: . . . . .                            | 69        |
| 18.2.2. Beweis der Invariante durch Induktion nach $k$ . . . . . | 70        |
| 18.3. Naive lösung . . . . .                                     | 70        |
| 18.4. Johnson-Algorithmus . . . . .                              | 70        |
| 18.4.1. Laufzeit des Johnson-Algorithmus . . . . .               | 71        |

Teil I.

Sortieren

# 1. Vorlesung 1

## 1.1. Bubblesort

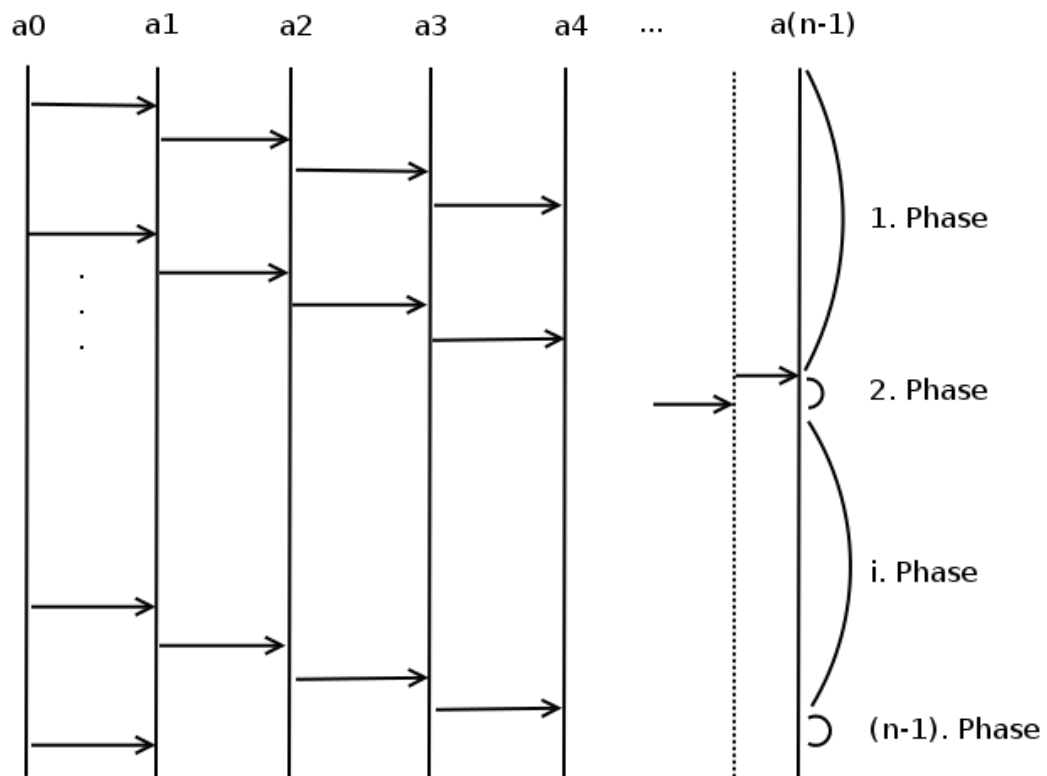


Abbildung 1.1.: Bubblesort

### 1.1.1. Pseudocode

```
1 void bubblesort (int[] a) {  
2     int n = a.length;  
3     for (int i = 1; i < n; i++) {  
4         for (int j = 0; j < n-i; j++) {  
5             if ( a[j] < a[j+1])  
6                 swap (a, j, j+1);  
7         }  
8     }  
9 }
```

**Schleifen-Invariante:** Nach dem Ablauf der i-ten Phase gilt:

Die Feldpositionen  $n-i, \dots, n-1$  enthalten die korrekt sortierten Feldelemente

**Beweis** durch Induktion nach  $i \stackrel{i=n-1}{\implies}$  Sortierung am Ende korrekt.

### 1.1.2. Laufzeitanalyse

$T(n)$  = Zahl der durchgeführten Elementvergleiche für eine Eingabemenge von n Elementen

|                               |       |     |
|-------------------------------|-------|-----|
| 1.                            | Phase | n-1 |
| 2.                            | Phase | n-1 |
| 3.                            | Phase | n-1 |
| ⋮                             |       |     |
| i.                            | Phase | n-1 |
| ⋮                             |       |     |
| (n-1).                        | Phase | n-1 |
| <hr/>                         |       |     |
| $1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1)$ |       |     |

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \in O(n^2)$$

| $n$      | $T_{real}$ |
|----------|------------|
| $2^{10}$ | 8ms        |
| $2^{11}$ | 11ms       |
| $2^{12}$ | 26ms       |
| ⋮        |            |
| $2^{16}$ | 5,819s     |
| $2^{17}$ | 23,381s    |
| ⋮        |            |
| $2^{20}$ | 16min      |
| ⋮        |            |
| $2^{26}$ | 52d        |

$$T_{real}(n) \approx cn^2 \quad c \approx 10^{-6}$$

$$T_{real}(2n) \approx c \cdot (2n)^2 = 4cn^2 = 4T_{real}(n)$$

$$\frac{T_{real}(2n)}{T_{real}(n)} = 4$$



## 1.2. Heapsort

z.B. 21 6 4 7 12 5 3 11 14 17 19 8 9 10 42

Skizze

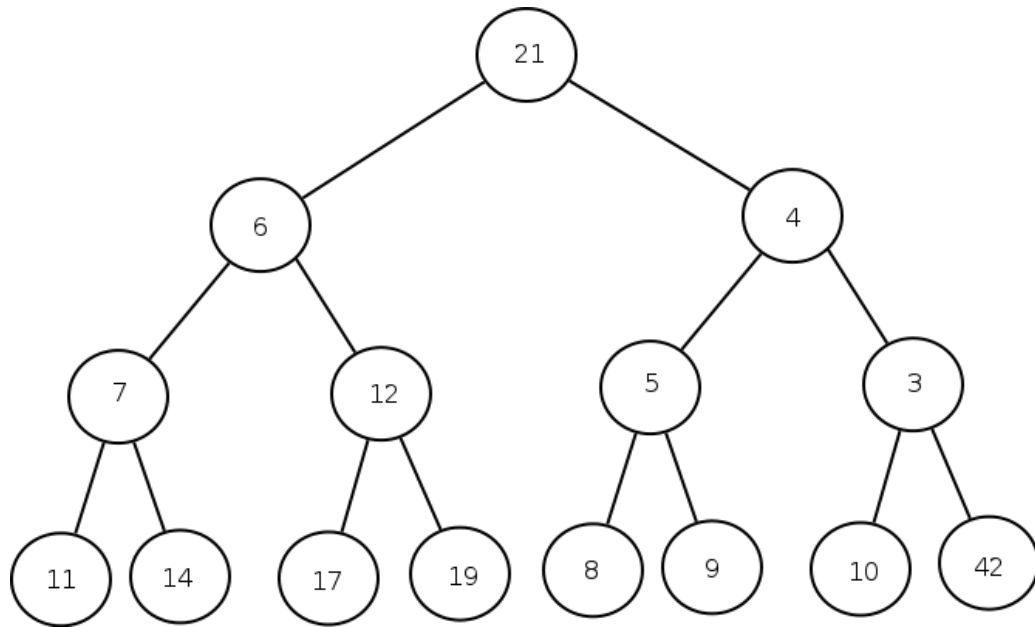


Abbildung 1.2.: Heapsort (Ausgangssituation)

Indices innerhalb der Baumstruktur

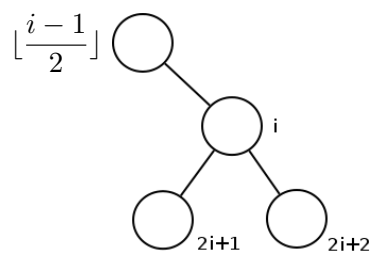


Abbildung 1.3.: Indices

## Heap-Eigenschaft

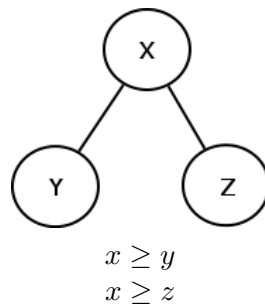


Abbildung 1.4.: Heap-Eigenschaft

### 1.2.1. Idee

**Phase 1** Stelle die Heap-Eigenschaft überall her  
⇒ größtes Element steht in der Wurzel

**Phase 2** Tausche Wurzel mit letztem Feldelement  
(z.B. 42 mit 3)  
- Entferne letztes Feldelement aus dem Baum  
- Gehe erneut zu Phase 1

## 2. Vorlesung 2

### Heapsort (Fortsetzung)

#### 2.1. Pseudocode

```
1 heapify ( int[] a, int i, int n) {
2   while (2i + 1 < n) {           //linkes Kind von i existiert
3     int j = 2i + 1;
4     if ( 2i + 2 < n)             //rechtes Kind von i existiert
5       if ( a[j] < a[j+1])
6         j = j + 1;               //j steht für Indes des größten Kindes
7     if ( a[i] > a[j])             //Vater größer als Kind
8       break;                    //Abbruch, weil heap bereits erfüllt
9     swap(a,i,j);                 //Tausch zwischen Vater und Kind
10    i = j;
11  }
12 }
```

##### 2.1.1. Phase: Bottom-up Strategie zum Heapaufbau

```
1 for ( int i = n/2; i ≥ 0; i--)
2   heapify(a,i,n);
```

##### 2.1.2. Phase: Sortierphase

```
1 for ( int i = n-1; i ≥ 0; i--) {
2   swap(a,0,i);
3   heapify(a,0,i);
4 }
```

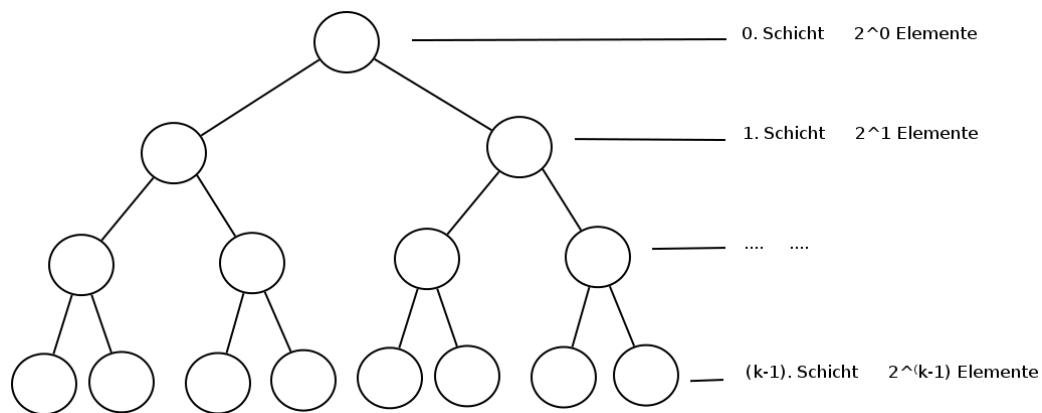
## 2.2. Korrektheitsbetrachtung

**Invariante beim Heapaufbau:** Beim Durchlauf der for-Schleife wird die Heapeigenschaft vom unteren Baumlevel bis zur Wurzel hergestellt.

**Invariante für Sortierphase:** Nach jedem weiteren Durchlauf der for-Schleife findet ein weiteres Element am Feldende seinen „richtigen Platz“.

## 2.3. Laufzeitanalyse

$T(n)$  = Zahl der Elementvergleiche.



$n$  := Zahl der Elemente

$k$  := Zahl der Schichten

### 2.3.1. Zusammenhang von $n$ und $k$

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$$

**Merke: Geometrische Reihe**

$$\sum_{i=0}^{k-1} x^i = \frac{1 - x^k}{1 - x} \quad \text{mit } x \neq 1$$

### 2.3.2. Analyse Heapaufbau

$$\sum_{l=0}^{k-1} 2^l (k-1-l)$$

$2^l$  := Anzahl Knoten auf Level  $l$

$(k-1-l)$  := Leveldifferenz zwischen  $l$  und der Blattebene

$$\sum_{l=0}^{k-1} (k-1-l) \cdot 2^l = \sum_{l=0}^{k-1} (k-1) \cdot 2^l - \sum_{l=0}^{k-1} l \cdot 2^l = (k-1)(2^k - 1) - 2 \sum_{l=1}^{k-1} l 2^{l-1}$$

#### Nebenrechnung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} i \cdot x^{i-1} &= \frac{d}{dx} \left( \sum_{i=0}^{k-1} x^i \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^k - 1}{x - 1} \right) \\ &= \frac{kx^{k-1}(x-1) - (x^k - 1)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

mit  $x = 2$  folgt:  $k \cdot 2^{k-1} - 2^k + 1$

$$\begin{aligned} &= (k-1)(2^k - 1) - k2^k + 2^{k+1} - 2 \\ &= k2^k - 2^k - k + 1 - k2^k + 2^{k+1} - 2 \\ &= -2^k - k - 1 + 2^{k+1} \leq 2^{k+1} \approx 2 \cdot n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Heapaufbau in lineare Zeit

### 2.3.3. Sortierphase

**1. Versuch**  $n \cdot k$  mit  $n = 2^k - 1 \Leftrightarrow k = \log_2(n+1) \approx n \cdot \log_2(n)$

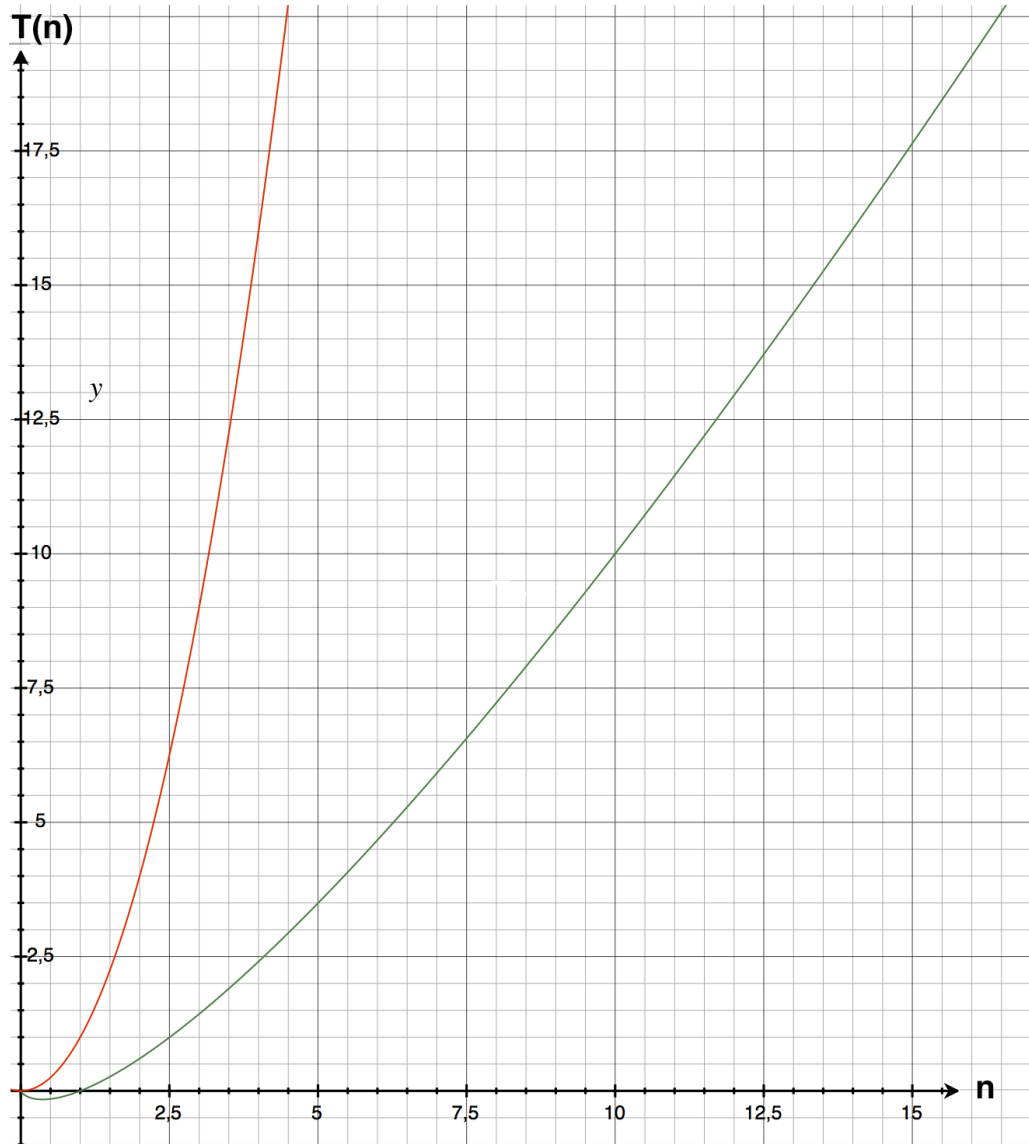
**2. Versuch (mit Verkleinerung der Liste)**

$$\sum_{l=0}^{k-1} 2^l \cdot l = 2 \sum_{l=1}^{k-1} l \cdot 2^{l-1} = 2 \cdot (k \cdot 2^{k-1} - 2^k + 1) \geq k \cdot 2^{k-1} \approx n \cdot \log_2(n)$$

### 2.3.4. Fazit

**Laufzeit**  $c \cdot n \cdot \log_2(n)$  wobei  $c \in \mathbb{R}$

**Vergleich** Bubblesort  $\leftrightarrow$  Heapsort



## 3. Vorlesung 3

### 3.1. Landau-Notation

$$g, f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

#### 3.1.1. $O(n)$

$$g(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow c > 0 \wedge n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } g(n) \leq c \cdot f(n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$

**Beispiel**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log_2(n)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(n)}{\ln(2)}}{n} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\ln(2)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

#### 3.1.2. $\Omega(n)$

$$g(n) \in \Omega(f(n)) \Leftrightarrow c > 0 \wedge n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } g(n) \geq c \cdot f(n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{g(n)}{f(n)} > 0$$

**Beispiel**  $g(n) = n^p \quad f(n) = n^q \quad p \geq q$

**Behauptung**  $g(n) \in \Omega(f(n))$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^q} = \infty > 0$$

#### 3.1.3. $\Theta(n)$

$$g(n) \in \Theta(f(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n)) \wedge g(n) \in \Omega(f(n))$$

**Beispiel**  $g(n) = n^p + n^{p-1} + c \cdot n^2 \quad f(n) = n^p$

**Behauptung**  $g(n) \in \Theta(f(n))$

.... Rechnung

#### 3.1.4. $o(n)$

$$g(n) \in o(f(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

**Beispiel**  $g(n) = n \cdot \log_2(n) \quad f(n) = n^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \quad \text{siehe oben}$$

**Erklärung** "g ist asymptotisch gesehen vernachlässigbar gegenüber f."

### 3.1.5. Notation

Häufig wird:

$$O(n) = O(n^2) = O(n^2 \cdot \log_2(n))$$

geschrieben, anstelle von:

$$O(n) \subseteq O(n^2) \subseteq O(n^2 \cdot \log_2(n))$$

Missbrauch der Notation !!!

## 3.2. Mergesort (Divide and Conquer)

### 3.2.1. Pseudo-Code

```
1  int[] a; //Eingabefeld
2  int[] b; //Hilfsfeld
3
4  void mergesort(int links, int rechts) {
5      if (links ≥ rechts) return;
6      int mitte = (links+rechts)/2;
7      mergesort(links, mitte);
8      mergesort(mitte, rechts);
9      merge(links, mitte, rechts);
10 }
11
12 void merge(int links, int mitte, int rechts) {
13     int i = links;
14     int j = mitte+1;
15     int k = links;
16     while (i ≤ mitte && j ≤ rechts) {
17         if (a[i] < a[j])
18             b[k++] = a[i++];
19         else
20             b[k++] = a[j++];
21     }
22     while (i ≤ mitte)
23         b[k++] = a[i++];
24     while (j ≤ rechts)
25         b[k++] = a[j++];
26     for (k=links; k ≤ rechts; k++)
27         a[k] = b[k];
28 }
```



### 3.2.2. Laufzeitanalyse

$T(n)$  = Zahl der von Mergesort durchgeführten Elementarvergleiche  $\approx$  Laufzeit

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n - 1 \approx 2T(\frac{n}{2}) + n \quad \text{mit } T(1) = 0$$

$$\text{Korrekt wäre } T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n - 1$$

Für ungerade Zahlen

$$\begin{aligned} T(n) &= 2 \cdot 2T(\frac{n}{2}) + n \stackrel{(1)}{=} 2(2T(\frac{n}{4}) + \frac{n}{2}) + n = 4T(\frac{n}{4}) + 2n \\ &\stackrel{(2)}{=} 4 \cdot (2T(\frac{n}{8}) + \frac{n}{4}) + 2n = 8T(\frac{n}{8}) + 3n = \dots = 2^i \cdot T(\frac{n}{2^i}) + in \end{aligned}$$

$$T(\frac{n}{2}) = 2T(\frac{n}{4}) + \frac{n}{2} \quad (1)$$

$$T(\frac{n}{4}) = 2T(\frac{n}{8}) + \frac{n}{4} \quad (2)$$

...

$$T(1) = 0$$

$$\text{Rekursionsende } \frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow 2^i = n \Leftrightarrow i = \log_2(n)$$

$$T(n) = 2^{\log_2(n)} T(\frac{n}{2^{\log_2(n)}}) + n \log_2(n) = nT(1) + \log_2(n) = \log_2(n)$$

#### Abstraktion

$T(n)$  = Laufzeit eines Divide & Conquer Algorithmus der ein Problem dadurch löst, das es in  $a$  Teilprobleme der Größe  $\frac{n}{b}$  zerlegt wird, die rekursiv gelöst werden und anschließend kombiniert werden.

$$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + n^\alpha \quad \alpha > 0 \quad \text{mit } T(1) = 0$$

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + n^\alpha \stackrel{(1)}{=} a^2T(\frac{n}{b^2}) + a(\frac{n}{b})^\alpha + n^\alpha$$

$$(1) \quad T(\frac{n}{b}) = aT(\frac{n}{b^2}) + (\frac{n}{b})^\alpha \stackrel{(2)}{=} a^3T(\frac{n}{b^3}) + a^2(\frac{n}{b^2})^\alpha + a^1(\frac{n}{b^1})^\alpha + a^0(\frac{n}{b^0})^\alpha$$

$$(2) \quad T(\frac{n}{b^2}) = aT(\frac{n}{b^3}) + (\frac{n}{b^2})^\alpha = a^iT(\frac{n}{b^i}) + \sum_{j=0}^{i-1} a^j(\frac{n}{b^j})^\alpha = a^iT(\frac{n}{b^i}) + n^\alpha \sum_{j=0}^{i-1} (\frac{a}{b^\alpha})^j \quad \text{mit } i = \log_b(n) \wedge x = \frac{a}{b^\alpha}$$

...

$$T(1) = 0$$

## 4. Vorlesung 4

### 4.1. Master-Theorem

$$T(n) = T\left(\frac{n}{b}\right) \cdot a + n^\alpha$$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = a^i T\left(\frac{n}{b^i}\right) + n^\alpha \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^j$$

o.B.d.A

$$n = b^k \Leftrightarrow k = \log_b(n)$$

#### 4.1.1. Fall 1

$$\left(\frac{a}{b^\alpha}\right) < 1 \Leftrightarrow a < b^\alpha \Leftrightarrow \log_b(a) < \alpha$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^j = \frac{x^k - 1}{x - 1} \quad \text{für } x \neq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^j \leq \frac{1}{1 - \frac{a}{b^\alpha}} = c'$$

$$\begin{aligned} T(n) &= a^k T(1) + n^\alpha \cdot c' \\ &= c \cdot n^{\log_b(a)} + c' \cdot n^\alpha = \Theta(n^\alpha) \end{aligned}$$

**Nebenbedingung**  $a^{\log_b(n)} = (b^{\log_b(a)})^{\log_b(n)} = (b^{\log_b(n)})^{\log_b(a)} = n^{\log_b(a)}$

#### 4.1.2. Fall 2

$$\left(\frac{a}{b^\alpha}\right) > 1 \Leftrightarrow \log_b(a) > \alpha$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^j = \left(\frac{\left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^{\log_b(n)} - 1}{\left(\frac{a}{b^\alpha}\right) - 1}\right) \leq \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^{\log_b(n)} \cdot c'' = \frac{a^{\log_b(n)}}{b^{\alpha \log_b(n)}} = \frac{n^{\log_b(\alpha)}}{n^\alpha}$$

$$T(n) = c \cdot n^{\log_b(a)} + n^\alpha \cdot \frac{n^{\log_b(a)}}{n^\alpha} \cdot c'' = \Theta(n^{\log_b(a)})$$

#### 4.1.3. Fall 3

$$\left(\frac{a}{b^\alpha}\right) = 1 \Leftrightarrow a = b^\alpha \Leftrightarrow \log_b(a) = \alpha$$

$$T(n) = c \cdot n^{\log_b(a)} + n^\alpha \cdot \log_b(n) = \Theta(n^\alpha \cdot \log(n))$$

#### 4.1.4. Beispiel: Mergesort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$T(1) = 0$$

Ermittle  $a = 2$   $b = 2$   $\alpha = 1$

$$\log_2(2) = 1 = \alpha \Rightarrow 3.Fall \Rightarrow \Theta(n \cdot \log(n))$$

## 4.2. Schnelle Multiplikation langer Zahlen

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_{n-1} & \dots & a_i & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline \end{array} \quad a_i \in B = \{0, 1\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline \end{array}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

**Frage** Wie schnell können wir zwei n-stellige Binärzahlen addieren/subtrahieren/multiplizieren ?

**Addition**  $\Theta(n)$

### 4.2.1. Schulmethode zur Multiplikation

|          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Beispiel | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | · | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |   |
|          |   |   | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |   |   |
|          |   |   |   | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |   |   |   |   |   |
|          |   |   |   |   | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |
|          |   |   |   |   |   | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |   |   |   |
|          |   |   |   |   |   |   | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |   |   |
|          |   |   |   |   |   |   |   | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
|          | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |   |   |

n-Partialprodukte  
mit höchstens  
2n Ziffern

$n^2$  Aufwand zur Ermittlung der Partialprodukte +  $n \cdot$  Kosten für die Addition von Zahlen der Länge  $2n \Rightarrow \Theta(n^2)$

**Ziel**  $o(n^2)$   $O(n^{1,58})$

### 4.2.2. Karazuba Ofman

$$A = \boxed{a_{n-1}} \boxed{\dots} \boxed{a_{\frac{n}{2}}} \quad \boxed{a_{\frac{n}{2}-1}} \boxed{\dots} \boxed{a_0}$$

$$= A_1 \quad = A_0$$

$$A = A_0 + A_1 2^{\frac{n}{2}}$$

$$A \cdot B = (A_0 + A_1 2^{\frac{n}{2}})(B_0 + B_1 2^{\frac{n}{2}})$$

$$= \boxed{A_0 B_0} + \boxed{A_0 B_1} 2^{\frac{n}{2}} + \boxed{A_1 B_0} 2^{\frac{n}{2}} + \boxed{A_1 B_1} 2^n$$

**Legende**   markierte Elemente haben die Länge    $\frac{n}{2}$

**Anmerkung** Addition von Zahlen der Länge  $2n$

Sei  $T(n)$  die Laufzeit dieser rekursiven Methode zur Multiplikation zweier  $n$ -stelliger Zahlen:

$$T(n) = \boxed{4} \cdot T(\boxed{\frac{n}{2}}) + c \cdot n \quad T(1) = c$$

### Mastertheoreme

$$a = 4 \quad b = 2 \quad \alpha = 1 \quad \log_2(4) = 2 > \alpha$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$$

$\Rightarrow$  kein Gewinn bisher!!!

**Ziel** Ermittle Partialprodukte auf anderem Weg

$$1.) (A_0 \text{ + } A_1) \cdot (B_0 \text{ + } B_1) = A_0B_0 + A_0B_1 + A_1B_0 + A_1B_1 = P$$

$$2.) A_0 \cdot B_0$$

$$3.) A_1 \cdot B_1$$

$$\Rightarrow (A_0B_1 + A_1B_0) = (P - (A_0B_0) - (A_1B_1))$$

Es verbleiben 3 Multiplikationen und 2 Additionen

$$AB = A_0B_0 \text{ + } (P - (A_0B_0) - (A_1B_1)) \text{ + } A_1B_1 2^n$$

### Mastertheoreme

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$a = 3, \quad b = 2, \quad \alpha = 1$$

$$\log_2(3) > 1 \Rightarrow 2. \text{ Fall}$$

$$\Rightarrow \Theta(n^{\log_2(3)}) = \Theta(n^{1,5849625})$$

### 4.2.3. Akra-Brazzi Theorem

**Beispiel**  $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2(n)$

$$T(n) = \begin{cases} aT\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) & n > n_0 \\ h(n) & 1 \leq n \leq n_0 \end{cases}$$

$$T(n) = \Theta\left(n^\alpha \left(1 + \int_1^n \frac{g(x)}{x^{\alpha+1}} dx\right)\right) \quad \text{mit } \alpha, \text{ so dass gilt: } \frac{a}{b^\alpha} = 1$$

## 5. Vorlesung 5

### 5.1. Akra-Brazzi

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + g(n)$$

$$T(1) = c$$

$$T(n) = \Theta\left(n^\alpha \left(1 + \int_1^n \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}} dx\right)\right) \quad \text{mit } \frac{a}{b^\alpha} = 1 \quad \alpha = \log_b(a)$$

$$\text{z.B. } T(n) = 2 + \frac{n}{2} + \log(n)$$

#### Beweisidee

$$T\left(\frac{n}{b}\right) = aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + g\left(\frac{n}{b}\right)$$

$$T(n) = a\left(aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + g\left(\frac{n}{b}\right)\right) + g(n) = a^2 + \frac{n}{b^2} + a^1 g\left(\frac{n}{b^1}\right) + a^0 g\left(\frac{n}{b^0}\right)$$

$$\Rightarrow a^i T\left(\frac{n}{b^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-1} a^j g\left(\frac{n}{b^j}\right) \quad \text{Rekursionsende f\"ur } r = \log_b(n)$$

$$\Theta(a^{\log_b(n)}) = \Theta(n^\alpha)$$

$$\sum_{j=0}^{\log(n)-1} a^j g\left(\frac{n}{b^j}\right) \approx \int_0^{\log_b(n)} a^j g\left(\frac{n}{b^j}\right) dj$$

#### Substitution

$$x = \frac{n}{b^j} = n \cdot b^{-j} = n \cdot e^{-j \ln(b)}$$

$$\frac{dx}{dj} = n(-\ln(b))e^{-j \ln(b)} = -n \ln(b) b^j = -\ln(b)x$$

$$\Rightarrow dj = \frac{1}{-\ln(b)x} dx$$

$$a^j = b^{\log_b(a)j} = b^{\alpha j} = (b^j)^\alpha = \left(\frac{n}{x}\right)^\alpha$$

$$= \int_n^1 \left(\frac{n}{x}\right)^\alpha g(x) \left(\frac{1}{-\ln(b)x}\right) dx = \frac{n^\alpha}{\ln(b)} \cdot \int_1^n \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}} dx$$

q.e.d

## 5.2. Lineare Rekursionsgleichungen

### 5.2.1. Fibonacci-Zahlen

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

| n    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | ... |
|------|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|
| f(n) | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | ... |

Abbildung 5.1.: Fibonacci-Zahlen

### 5.2.2. Methode der erzeugenden Funktionen

$$\begin{aligned}
 F(Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n Z^n = f_0 \cdot Z^0 + f_1 \cdot Z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) \cdot Z^n \\
 &= Z + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} Z^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} Z^n \\
 &= Z + Z \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} Z^{n-1} + Z^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} Z^{n-2} \\
 &\Leftrightarrow F(Z) = Z + Z \cdot F(Z) + Z^2 \cdot F(Z) \\
 &\Leftrightarrow -Z = Z^2 F(Z) + Z F(Z) - F(Z) = F(Z)(Z^2 + Z - 1) \\
 &F(Z) = -\frac{Z}{Z^2 + Z + 1}
 \end{aligned}$$

### 5.2.3. Einschub: Beispiel Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1-Z} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n$$

$$\Rightarrow F(Z) = -\frac{Z}{Z^2 + Z + 1}$$

### 5.2.4. Nullstellen des Nennerpolynoms

$$Z^2 + Z = 1 \quad | + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(Z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow Z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow Z^2 + Z + 1 = (Z + \phi)(Z + \bar{\phi})$$

**Goldener Schnitt**

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

### 5.2.5. Partialbruchzerlegung

$$\frac{A}{Z+\phi} + \frac{B}{Z+\bar{\phi}} = \frac{A \cdot (Z+\bar{\phi}) + B(Z+\phi)}{(Z+\phi)(Z+\bar{\phi})}$$

$$\Rightarrow AZ + BZ = -Z \Leftrightarrow A + B = 1 \quad (1)$$

$$A\bar{\phi} + B\phi = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{A\bar{\phi}}{\phi} \quad (2)$$

$$(2) \text{ in (1) } A - \frac{A\bar{\phi}}{\phi} = -1 \Leftrightarrow A(1 - \frac{\bar{\phi}}{\phi}) = -1$$

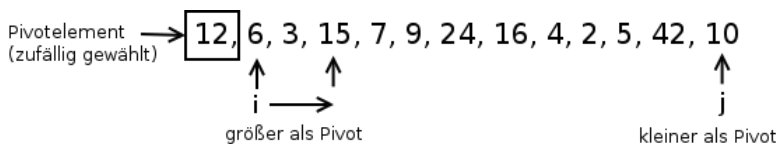
$$\Leftrightarrow A = -\frac{1}{\sqrt{5}}\phi$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{\phi}$$

### 5.2.6. Lösung

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{-Z}{Z^2 + Z + 1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\phi}{Z + \phi} + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\bar{\phi}}{Z + \bar{\phi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1 + \frac{Z}{\phi}} - \frac{1}{1 + \frac{Z}{\bar{\phi}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1 - \phi Z} - \frac{1}{1 - \bar{\phi} Z} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (\phi Z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\phi} Z)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \bar{\phi}^n) \cdot Z^n \\ f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \bar{\phi}^n) \quad \text{mit } \phi = 1,681\dots \quad \bar{\phi} = -0,681\dots \end{aligned}$$

### 5.3. Quicksort (Divide and Conquer)



$\Rightarrow$  Tausche 15 mit 10

- Bewege Zeiger erneut

$\Rightarrow$  Tausche 5 und 24

- Bewege Zeiger erneut

$\Rightarrow$  Tausche 16 und 2

- Bewege Zeiger erneut

$\Rightarrow i$  wird größer als  $j \Rightarrow$  Abbruch (tausche Pivotelement mit letztem Element in Teilliste 1)

⇒ es ergeben sich zwei Teillisten

4, 6, 3, 10, 7, 9 , 5, 2 |12| 16, 24, 42, 15

**best-case**  $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n = \Theta(n \log n)$

**worst-case**  $T(n) = T(n - 1) + n = \Theta(n^2)$

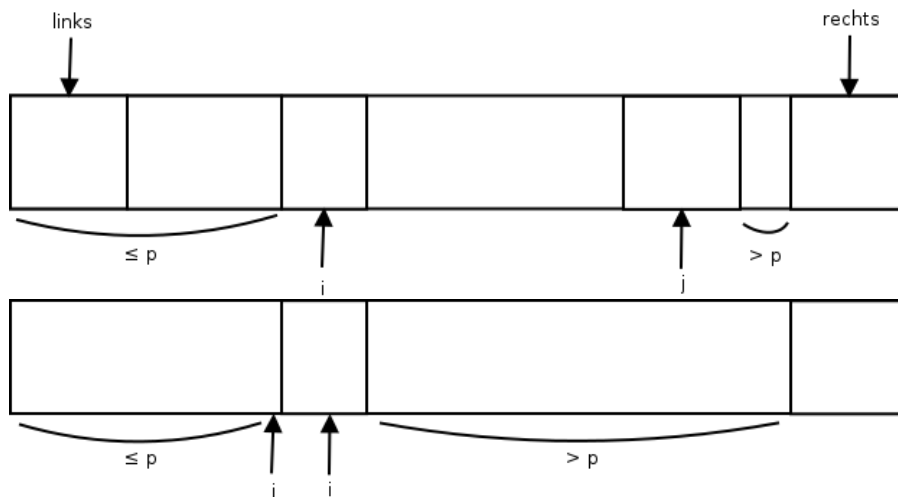


## 6. Vorlesung 6

### 6.1. Quicksort

#### 6.1.1. Pseudo-Code

```
1 void quicksort(int[] a, int links, int rechts) {
2     if (links ≥ rechts) return;
3     int mitte = partition(a, links, rechts);
4     quicksort(a, links, mitte-1);
5     quicksort(a, mitte+1, rechts);
6 }
7
8 int partition(int[] a, int links, int rechts) {
9     int r = random(links, rechts);
10    swap(a, r, rechts);
11    int pivot = a[rechts];
12    int i = links;
13    int j = rechts-1;
14    while (i ≤ j) {
15        if (a[i] > pivot) {
16            swap(a, i, j);
17            j--;
18        } else {
19            i++;
20        }
21    }
22    swap(a, i, rechts);
23    return i;
24 }
```



**Schleifen-Invariante:**  
 $a[k] > p$  für  $j < k < rechts$   
 $a[k] \leq p$  für  $links < k < i$

Abbildung 6.1.

### 6.1.2. Zufallspermutation

```
1 void randomPermutation(int[] a) {
2     int n = a.length;
3     for (int i = n-1; i > 0; i--) {
4         int r = random(0,i); // gleichverteilte Zufallszahl im Intervall [0,i)
5         swap(a,r,i);
6     }
7 }
```

### 6.1.3. Einschub: Stochastik

#### Fairer Würfel (Erwartungswert):

X sei Zufallsvariable  $\hat{=}$  Anzahl Augen

$$Pr(X = x_i) \quad x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot Pr(X = x_i) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 x_i = \frac{1}{6} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 3,5$$

#### Fairer Würfel (Erste Sechs):

X sei Zufallsvariable  $\hat{=}$  Zahl der benötigten Würfe bis zum Auftreten der ersten 6.

$$x_i \in \mathbb{N}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot Pr(X = i) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

Mit der Ableitung der geometrischen Reihe,  $\frac{1}{(1-x)^2}$  folgt:

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2}\right) = 6$$

### 6.1.4. Laufzeitanalyse

$T(n)$  = Erwartungswert der Laufzeit von Quicksort bei zufällig gleichverteilter Eingabe-Partition.

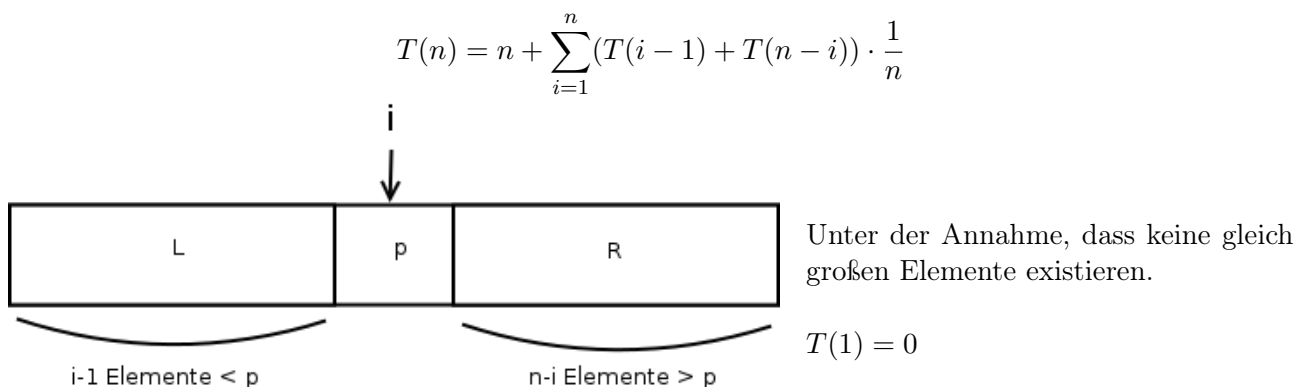


Abbildung 6.2.

## Lösen durch Einsetzen

$$T(n) = n + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n T(i-1)$$

$$\Leftrightarrow T(n) = n + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

$$\Leftrightarrow n \cdot T(n) = n^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

$$\Leftrightarrow 2(n-1) \cdot T(n-1) = (n-1)^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-2} T(i)$$

$$\Leftrightarrow (1) - (2) nT(1) - (n-1)T(n-1) = n^2 - (n-1)^2 + 2T(n-1)$$

$$\Leftrightarrow nT(n) = (n+1)T(n-1) + 2n-1$$

$$\Leftrightarrow T(n) \leq \frac{n+1}{n} T(n-1) + 2 \leq \frac{n+1}{2} \left( \frac{n}{n+1} \cdot T(n-2) + 2 \right) + 2$$

$$= \frac{n+1}{n-1} T(n-2) + \frac{n+1}{n} \cdot 2 + 2$$

$$\leq \frac{n+1}{n-1} \left( \frac{n-1}{n-2} T(n-3) + 2 \right) + \frac{n+1}{n} \cdot 2 + 2 \cdot 1$$

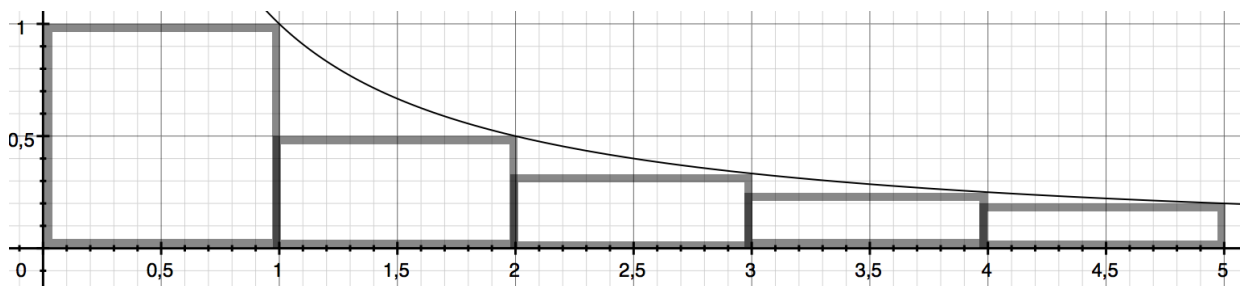
$$= \frac{n+1}{n-2} T(n-3) + 2 \cdot \frac{n+1}{n-1} + 2 \cdot \frac{n+1}{n} + 2 \cdot \frac{n+1}{n+1}$$

$$\Rightarrow T(n) \leq \frac{n+1}{n-(k-1)} T(n-k) + 2(n+1) \sum_{i=1}^{k-2} \frac{1}{n-i} \quad \text{endet für } k = n-1$$

$$T(n) = 2(n+1) \sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{n-i} = 2(n+1) \sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j} \leq 2(n+1) H_{n+1} \in O(n \log n) \quad \text{mit } j=n-i$$

### Einschub: Harmonische Reihe

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$



$$H_n \leq \int \frac{1}{x} dx + 1 = 1 + [\ln x]_1^n = \ln(n) + 1$$

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

## 6.2. Median in Linearzeit

Median  $\hat{=}$   $\frac{n}{2}$ -kleinste Element in einer Folge von n Elementen

### Verallgemeinerung

Finde das k-t kleinste Elemente in der Folge

Naive Strategie:  $O(k \cdot n)$

### Idee

```
1 select(int[] a, int k) {}
```

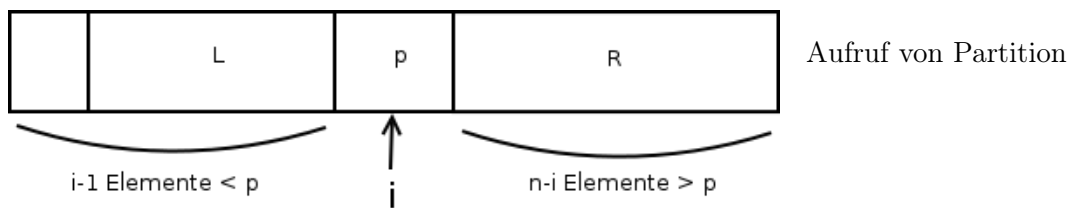


Abbildung 6.3.

1. Fall  $k = i \Rightarrow$  Pivot Element war gesucht
2. Fall  $k < i \Rightarrow$  suche rekursiv das k-t kleinste Element in L
3. Fall  $k > i \Rightarrow$  suche rekursiv das (k-i)-t kleinste Element in R

## 7. Vorlesung 7

### 7.1. Quicksort

$$T(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(i-1) + T(n-i) + n \in O(n \log(n))$$

### 7.2. Quickselect

$$T(n) = n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(T(i-1), T(n-i))$$

**Behauptung** Select  $\in O(n)$ , also  $T(n) = c \cdot n$

**Beweis** Induktion

$$\begin{aligned} T(n) &= n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(c(i-1), c(n-i)) \\ &= n + \frac{1}{n} \cdot c \sum_{i=1}^n \max((i-1), (n-i)) \\ &= n + \frac{1}{n} \cdot c \cdot 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{\frac{n}{c}-1} i \right) \\ &= n + \frac{1}{n} \cdot c \cdot Z \left( \frac{(n-1)n}{Z} - \frac{(\frac{n}{c}-1)\frac{1}{2}}{Z} \right) \\ &= n + \frac{1}{n} c \left( n(n-1) - \frac{n}{2} \left( \frac{n}{c} - 1 \right) \right) = n + \frac{1}{n} \cdot c \left( n^2 - n - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} \right) \\ &= n + \frac{1}{n} c \left( \frac{3}{4} n^2 - \frac{1}{2} n \right) = n + c \left( \frac{3}{4} n - \frac{1}{2} \right) \\ &\Rightarrow cn = n + c \left( \frac{3}{4} n - \frac{1}{2} \right) = n + \frac{3}{4} cn - \frac{1}{2} c \\ &\Rightarrow cn \geq n + \frac{3}{4} cn \Leftrightarrow c \geq 4 \\ &\quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

## 8. Vorlesung 8

### 8.1. Verallgemeinerung von Akra-Brazzi

$$T_n = \left[ \sum_{i=1}^k a_i T\left(\frac{n}{b_i}\right) \right] + g(n)$$

Beispiel

$$T_n = 1 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \cdot T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

$$T_n = \theta\left(n^\alpha \left(1 + \int_1^n \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}} dx\right)\right)$$

Klassisch  $\alpha = \log_b(a)$ ,  $\frac{a}{b^\alpha} = 1$

Jetzt Bestimme  $\alpha$  so, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{b_i^\alpha} = 1$$

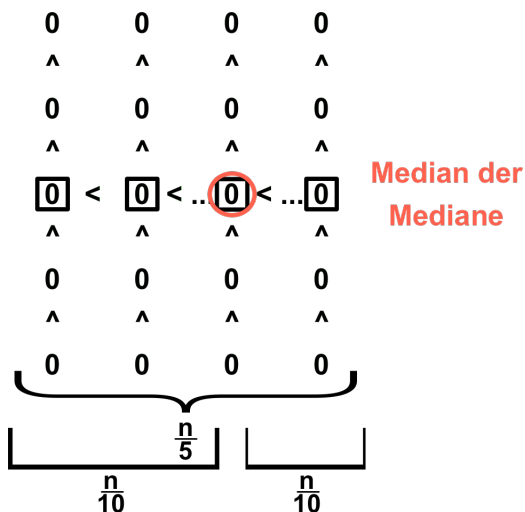
$$a_1 = a_2 = 1, \quad b_1 = 3, \quad b_2 = \frac{3}{2}, \quad g(n) = n$$

$$\frac{1^\alpha}{3} + \frac{2^\alpha}{3} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$T(n) = \Theta\left(n\left(1 + \int_1^n \frac{x}{x^{1+1}} dx\right)\right) = \Theta(n \ln(n))$$

### 8.2. Median der Mediane

Gruppierung in 5er Päckchen



**Wortlaut** Teile die  $n$  Elemente in 5-er Gruppen. Bestimme innerhalb jeder Gruppe den Median. Bestimme nun den Median der Mediane. Wähle diesen Median als Pivot Element.

$$\exists \frac{3n}{10} \text{ Elemente} \leq p \leq \exists \frac{3n}{10} \text{ Elemente } (\pm 1 \text{ wegen } p)$$

Abbildung 8.1.

### 8.2.1. Deterministische Variante für k-Select

Wähle zu Beginn den Median der Mediane als Pivot Elemente. Unterteile nun die Folge anhand von  $p$  in zwei Teilfolgen und verfähre von nun an analog zur randomisierten Variante von k-Select.

### 8.2.2. Laufzeitanalyse für den worst-case

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + n + T\left(\frac{7n}{10}\right)$$

$$A_1 = \frac{n}{5}, \quad A_2 = n, \quad A_3 = \frac{7n}{10}$$

$A_1$  = Laufzeit zur rekursiven Bestimmung des Medians der Mediane

$A_2$  = Laufzeit zur Aufteilung in Teilfolgen

$A_3$  = Laufzeit für den Aufruf von k-Select für größere Teilfolgen, die aber sicher  $\leq n - \frac{3n}{10} - \frac{7n}{10}$  hat.

Wende die verallgemeinerte Form von Akra-Brazzi an:

$$g(n) = n, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad b_1 = 5, \quad b_2 = \frac{10}{7}$$

**Bestimme**

$$\alpha = \left(\frac{1}{5}\right)^\alpha + \left(\frac{7}{10}\right)^\alpha = 1$$

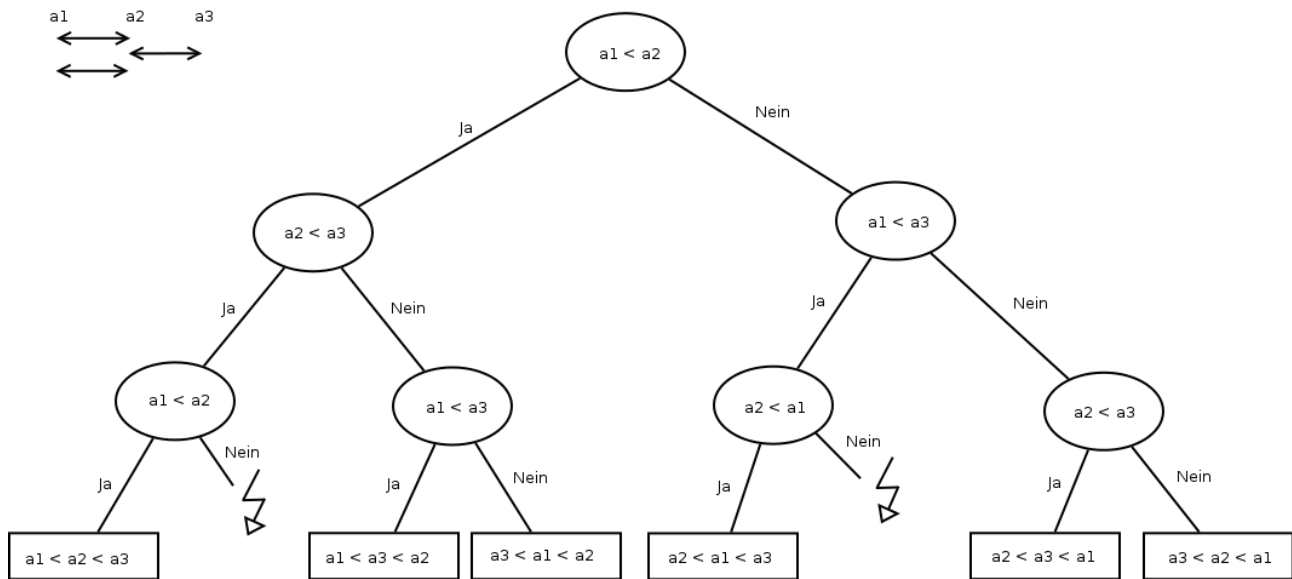
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{10}\right)^\alpha + \left(\frac{7}{10}\right)^\alpha = 1$$

$$\Rightarrow 0 < \alpha < 1$$

$$n^\alpha \left(1 + \int_1^n \frac{x}{x^{1+\alpha}} dx\right) = n^\alpha \left(1 + \int_1^n x^{-\alpha} dx\right) = n^\alpha \left(1 + \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha+1}\right]_1^n\right) = n^\alpha \left(1 + \frac{1}{1-\alpha} (n^{-\alpha+1} - 1)\right)$$

### 8.3. Untere Schranke für vergleichsbasierte Sortierverfahren

Entscheidungsproblem: (Bubblesort)



Ein Entscheidungsbaum für einen vergleichsbasierten Sortieralgorithmus besteht aus inneren Knoten, die mit der Vergleichsoperation  $a_i < a_j$  beschriftet sind, wobei sich die Indizes  $i, j$  auf die Position der Elemente in der Eingabefolge beziehen.

Die Blätter des Entscheidungsbaums sind mit den Permutationen beschriftet, die sich nach korrekter Sortierung ergeben.

Jeder korrekte Sortieralgorithmus muss zu einem Entscheidungsbaum mit mindestens  $n!$  Blättern korrespondieren.

**maximale Baumtiefe**  $\hat{=}$  maximale Anzahl durchgeführter Vergleichsoperationen

**mittlere Baumtiefe**  $\hat{=}$  average-case Laufzeit



## 9. Vorlesung 9

### 9.1. Vergleichsbasierte Sortialgorithmen

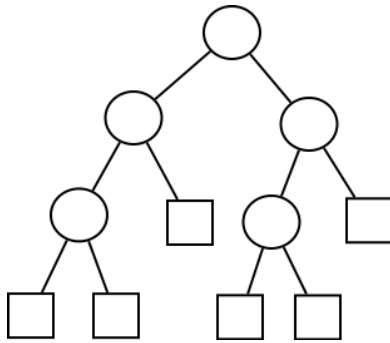
#### 9.1.1. Worst-case Laufzeit

eines vergleichsbasierten Sortialgorithmus

$\hat{=}$  maximale Tiefe des zugehörigen Entscheidungsbaums

$\hat{=}$  mittlere Tiefe der Blätter im zugehörigen Entscheidungsbaums

Sei  $T_{max}$  die maximale Baumtiefe in einem binären Baum. Betrachte nun zunächst den vollständigen binären Baum mit  $\#Blätter \leq 2^n$ .



**Untere Schranke**  $t_{max} \geq \log_2(n!) = \Omega(n \log n) = \log_2(n!) \leq t_{mean}$

Abbildung 9.1.

#### Herleitung

$$\ln(n!) = \ln(n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1) = \ln(n) + \ln(n-1) + \dots + 1$$

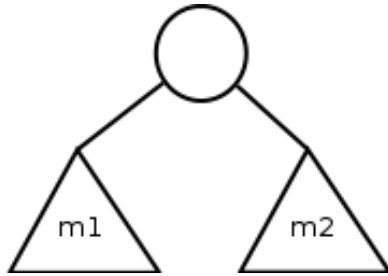
$$= \sum_{i=1}^n \ln(i) \geq \int_1^n \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^n = n \ln(n) - n + 1$$

$$\Rightarrow n! \geq e^{n \ln(n) - n + 1} = e \cdot e^{-n} \cdot (e^{\ln(n)})^n = e \cdot e^{-n} \cdot n^n = e \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Stirling  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

### 9.1.2. Lemma: Mittlere Tiefe der Blätter in einem Entscheidungsbaum $> \log_2(n)n$

**Beweis** Induktion nach  $m$  (Blattanzahl)



**Untere Schranke**  $m_1, m_2 \hat{=}$  Blattanzahl im linken bzw. rechten Teilbaum der Wurzel

Abbildung 9.2.

**Induktions Anfang:**  $m = 1 \quad t_{mean} = \log_2(1) = 0$

**Induktions Behauptung:**  $t_{mean} \geq \log_2(m)$

**Induktions Schritt:** Sei  $m_1 < m, m_2 < m$  (1) und  $m_1 + m_2 = m$  (2)

$b \hat{=}$  Blatt im Entscheidungsbaum  $T_b$

$l \hat{=}$  Blatt im linken Teilbaum  $T_l$

$r \hat{=}$  Blatt im rechten Teilbaum  $T_r$

$$t_{mean}^{links} \geq \log_2(m_1) \quad \text{und} \quad t_{mean}^{rechts} \geq \log_2(m_2)$$

$$\frac{1}{m} \sum_l \cdot t_l = t_{mean}^{links} \geq \log_2(m_1)$$

Verfahre analog für rechts.

$$\sum_b T_b = \sum_l (T_l + 1) + \sum_r (T_r + 1) \geq m_1 + m_2 + m_1 \log_2(m_1) + m_2 \log_2(m_2)$$

Unter der Annahme, dass das Minimum bei  $\frac{m}{2}$  liegt:

$$m_1 \log_2(m_1) + m_2 \log_2(m_2) \geq \frac{m}{2} \log_2\left(\frac{m}{2}\right) \cdot 2 = m \log_2\left(\frac{m}{2}\right) \quad \text{mit (2)}$$

Es folgt somit:

$$t_{mean} = \frac{1}{m} \sum_b T_b \geq \frac{1}{m} (m + m \log_2\left(\frac{m}{2}\right)) = 1 + \log_2\left(\frac{m}{2}\right) = 1 + \log_2(m) - 1 = \log_2(m)$$

*q.e.d*

## 9.2. Radix-Sort

### 9.2.1. Beispiel:

|    |   |   |   |   |   |    |     |
|----|---|---|---|---|---|----|-----|
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 00 | 001 |
| 01 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 01 | 010 |
| 00 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 01 | 011 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 10 | 100 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 10 | 101 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 11 | 110 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 11 | 111 |

**Wichtig** Beginne die Sortierung mit dem niedrigsten Bit

### 9.2.2. Pseudo-Code

```
1 void radixsort(int[] a) { // positives Element
2     int n = a.length;
3     int[] b0 = new int[n];
4     int[] b1 = new int[n];
5     int n0, n1;
6
7     for (int i=0; i<32; i++) {
8         n0 = n1 = 0;
9         for (int j=0; j<n; j++) {
10             if (a[j] & (1<<i)) { // i-tes Bit von a[j]
11                 b1[n1] = a[j];
12                 n1 = n1+1;
13             } else {
14                 b0[n0] = a[j];
15                 n0 = n0+1;
16             }
17         }
18     }
19     for (int j=0; j<n0; j++)
20         a[j] = b0[j];
21     for (int j=0; j<n1; j++)
22         a[n0+j] = b1[j];
23 }
```

### 9.3. Binäre Suchbäume

**Zahlen** 12, 8, 3, 16, 24, 17, 10, 21, 14, 9

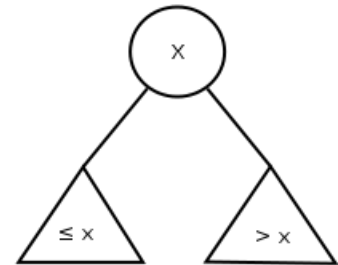
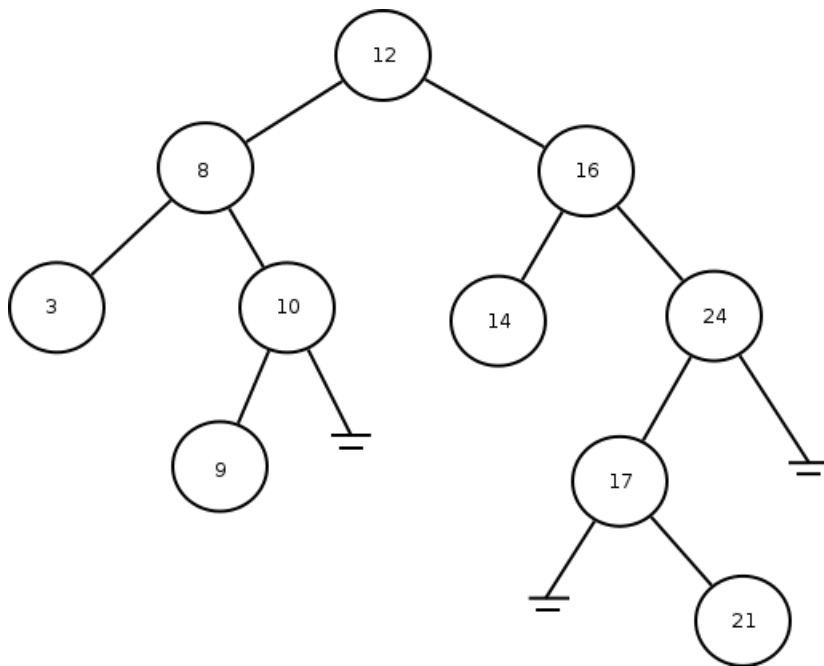


Abbildung 9.3.: Knotenorientierte Speicherung

# 10. Vorlesung 10

## 10.1. Binärer Suchbaum

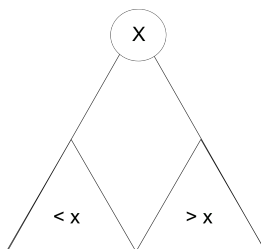


Abbildung 10.1.: Binärer Suchbaum

## 10.2. Pseudo-Code

```
1
2 class Node {
3     int key, info;           // info ist optional
4     Node left, right, parent; // parent ist optional
5 }
6
7 int height(Node node) {
8     if (node == NULL) return 0;
9     return height;
10 }
11
12 Node insert(Node node, int x) {
13     if (node == NULL)
14         return new Node(x, NULL, NULL);
15
16     if (node.key > x)
17         node.left = insert(node.left, x);
18     else
19         node.right = insert(node.right, x);
20     return node;
21 }
22
23 void inorder(Node node) {
24     if (node == NULL) return;
25     inorder(node.left) // linke Hälfte
26     print(node)
27     inorder(node.right) // rechte Hälfte
28 }
```

### 10.3. AVL-Bäume

**Ziel** Binärer Suchbaum mit garantierter Such-, Einfüge- und Löszeit  $O(\log n)$

**Idee** Definiere eine Balancebedingung, die dafür sorgt, dass die Baumstruktur möglichst nahe an der Idealstruktur eines vollständigen binären Baumes liegt.  
Aber gleichzeitig soll es möglich sein "schnell" Strukturänderungen beim Einfügen und Löschen vorzunehmen.

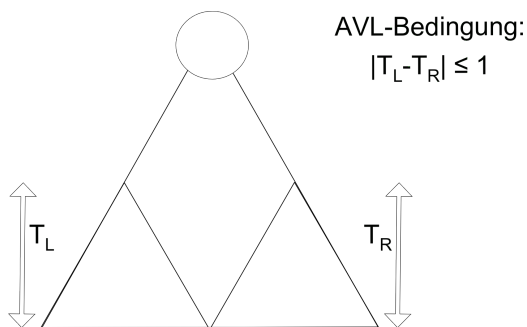
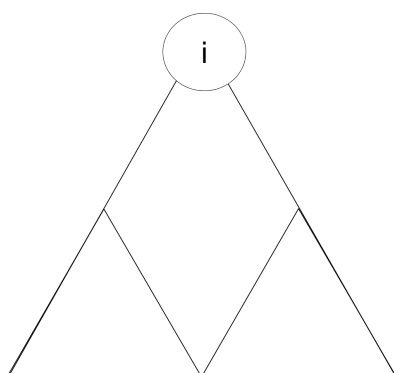


Abbildung 10.2.: AVL-Baum

### 10.4. Laufzeitanalyse

**Ziel** Analyse der erwarteten maximalen Tiefe randomisierter binärer Suchbäume

Sei der Schlüssel der Wurzel das  $i$ -kleinste Element



$T_n \hat{=}$  maximale Tiefe eines randomisierten Suchbaums mit  $\{1, \dots, n\}$  Elementen

Abbildung 10.3.

Für den Fall, dass  $i$  als Wurzelknoten gewählt wird gilt:

$$\begin{aligned} T_n &= \max\{T_{i-1}, T_{n-i}\} + 1 \\ X_n &= 2^{T_n} \text{ exponentielle Tiefe} \\ 2^{T_n} &= 2^{1+\max\{T_{i-1}, T_{n-1}\}} = 2 \cdot 2^{\max\{T_{i-1}, T_{n-1}\}} = 2 \cdot \max\{2^{T_{i-1}}, 2^{T_{n-1}}\} \\ &\Rightarrow X_n = 2 \cdot \max\{X_{i-1}, X_{n-1}\} \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung:  $\max\{2^{T_1}, 2^{T_2}\} \leq 2^{T_1} + 2^{T_2}$  folgt:

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot 2 \cdot \max\{X_{i-1}, X_{n-1}\}\right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E(\max\{X_{i-1}, X_{n-1}\}) \leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E(X_{i-1} + X_{n-1}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n [E(X_{i-1}) + E(X_{n-i})] \leq \frac{4}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i) \\ n \cdot E(X_n) &= 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i) \quad (1) \\ (n-1) \cdot E(X_{n-1}) &= 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} E(X_i) \quad (2) \\ nE(X_n) - (n-1)E(X_{n-1}) &= 4E(X_n) \quad (1) - (2) \\ &\Leftrightarrow nE(X_n) = (n+3)E(X_{n-1}) \\ E(X_n) &= \frac{n+3}{n} E(X_{n-1}) = \frac{n+3}{n} \cdot \frac{n+2}{n-1} E(X_{n-2}) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{n+3-i}{n-i} = \frac{n+3}{n} \cdot \frac{n+2}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-3} \cdots \frac{6}{3} \cdot \frac{8}{2} \cdot \frac{4}{1} \end{aligned}$$

Mit der "Jensenschen Ungleichung" folgt:

$$\sum_i \Pr(T = t_i) \cdot f(t_i) \geq f\left(\sum_i \Pr(T = t_i) \cdot t_i\right) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} \cdot c \Rightarrow E(X_n) \in O(n^3)$$

$$\begin{aligned} X_n &= 2^{T_n}, E(X_n) = E(2^{T_n}) \\ E(f(T)) &\geq f(E(T)) \Leftrightarrow f \text{ konvex} \\ c \cdot n^3 &\geq 2^{E(T_n)}, E(T_n) \leq \log_2(c \cdot n^3) \in O(\log n) \end{aligned}$$

# 11. Vorlesung 11

## 11.1. AVL-Bäume von Adelson-Velskii and Landis

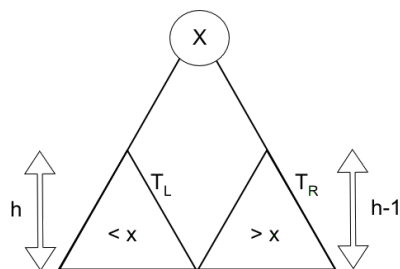


Abbildung 11.1.

**Ziel:** Zeige, dass die maximale Tiefe eines AVL-Baums mit  $n$  Knoten ( $\hat{=}$   $n$  gespeicherten Schlüsseln)  $O(\log(n))$  beträgt.

### 11.1.1. AVL-Eigenschaft:

$|h(T_L) - h(T_R)| \leq 1$  muss für jeden Knoten des Baums gelten.  $\Rightarrow$  Suchzeit  $O(\log(n))$  im worst case.

$n(h)$  = minimale Anzahl von Knoten in AVL-Baum der Tiefe  $h$

$n(h) \geq 1 + n(h-2) + n(h-1)$  mit  $n(0) = 0$  und  $n(1) = 1$

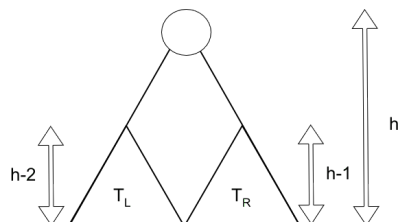


Abbildung 11.2.

$$n \geq f(h)^I = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^h - \phi^{-h}) \text{ mit}$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61 \dots$$

$$\Rightarrow n \geq c \cdot \phi^h$$

$$\Leftrightarrow h \leq \log\left(\frac{n}{c}\right)$$

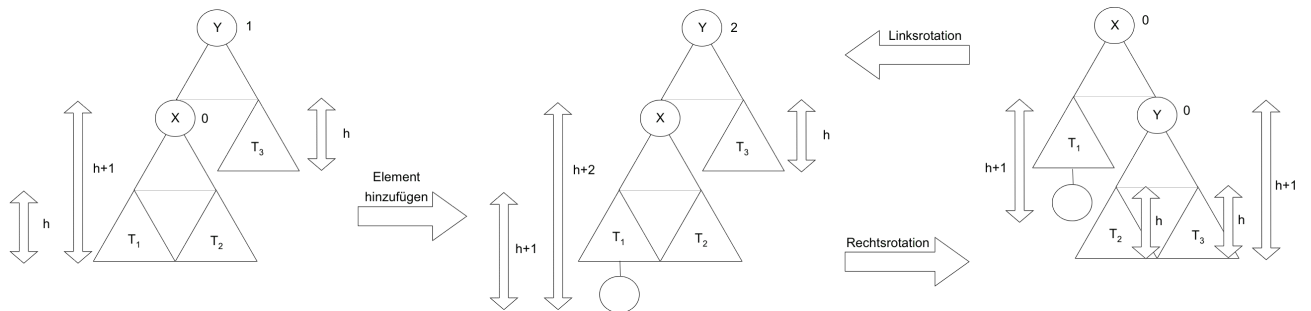
$$\Rightarrow h \in O(\log n)$$

q.e.d.

<sup>I</sup> $f(h)$  meint hierbei die  $h$ -te Fibonacci-Zahl



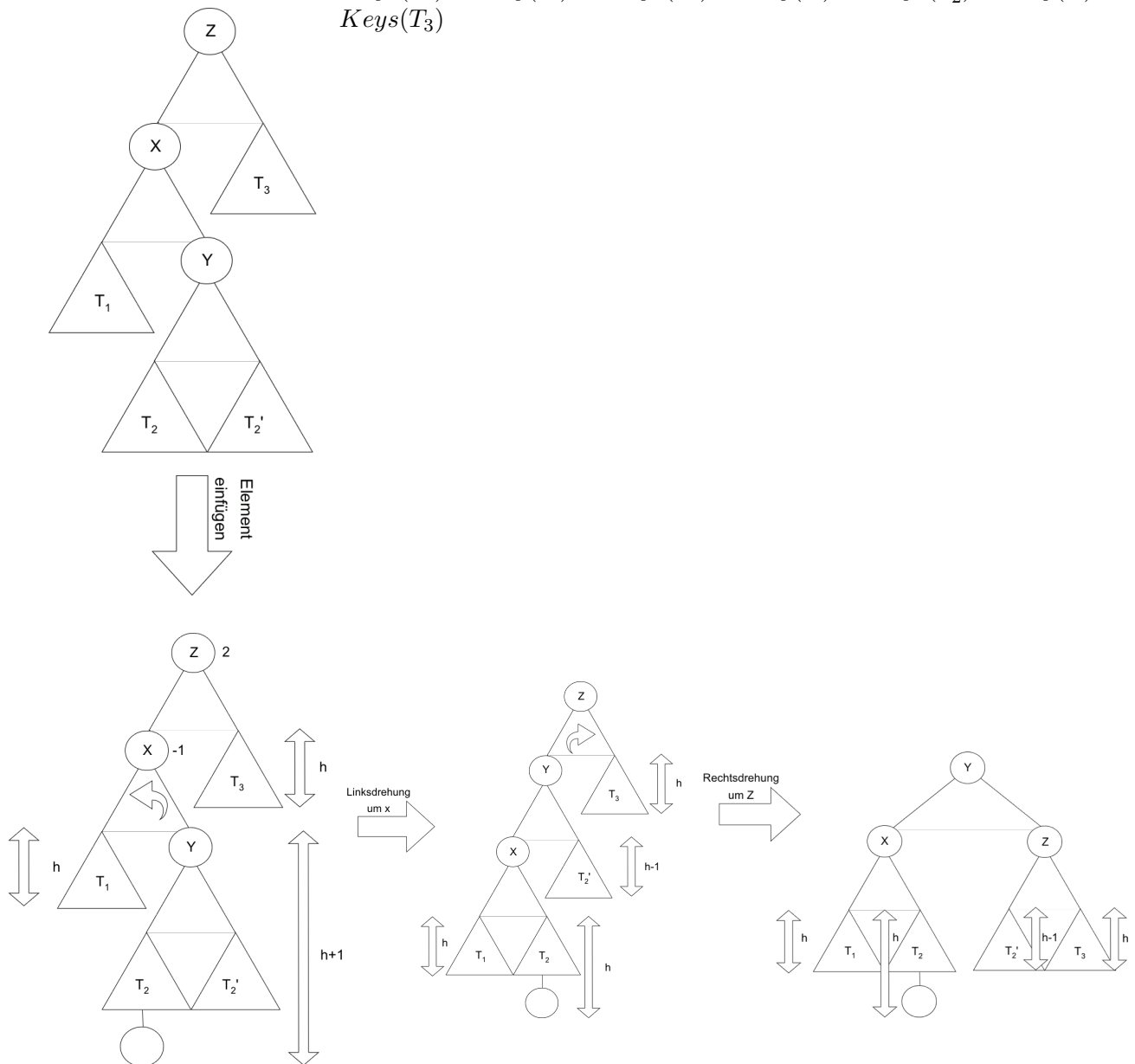
## 11.2. Rotationen



$Keys(T_1) < Key(X) < Keys(T_2) < Key(Y) < Keys(T_3)$

$balance(Y) = height(Y.left) - height(Y.right)$

$Keys(T_1) < Key(X) < Keys(T_2) < Key(Y) < Keys(T'_2) < Key(Z) < Keys(T_3)$



## 11.3. Pseudo-Code

```
1
2  class Node {
3      int key;
4      Node left, right;
5      int height;
6  }
7
8  int height(Node node) {
9      if (node == null) return 0;
10     return height;
11 }
12
13 Node rotateRight(Node y) {
14     Node x = y.left;
15     Node T2 = x.right;
16     y.left = T2;
17     T2.right = y;
18     y.height = 1+max(height(y.left), height(y.right));
19     x.height = 1+max(height(x.left), height(x.right));
20     return x;
21 }
22
23 Node rotateLeft(Node y) {
24     //analog
25 }
26
27 Node insert(Node node, int key) {
28     if (node == null) return new Node(key);
29     if (key < node.key)
30         node.left = insert(node.left, key);
31     else
32         node.right = insert(node.right, key);
33
34     if (balance(node)>1 && key < node.left.key)
35         return rotateRight(node);
36     if (balance(node)<-1 && key > node.right.key)
37         return rotateLeft(node);
38     if (balance(node)>1 && key > node.left.key) {
39         node.left = rotateLeft(node.left);
40         return rotateRight(node);
41     }
42     if (balance(node)<-1 && key < node.right.key) {
43         node.right = rotateRight(node.right);
44         return rotateLeft(node);
45     }
46     return node;
47 }
```

**Anmerkung:** Die Laufzeit des Einfügens bleibt in  $O(\text{Baumtiefe}) = O(\log n)$ . Nur einer der vier Fälle ist notwendig, um die Balance herzustellen.

# 12. Vorlesung 12

## 12.1. (a,b)-Suchbäume

Blattorientierte Speicherung der Elemente

Innere Knoten haben mindestens a und höchstens b Kinder und tragen entsprechende Schlüsselwerte, um die Suche zu leiten.

**Beispiel:**

$$h \hat{=} \text{Tiefe} \Rightarrow a^h \leq n \leq b^h \Rightarrow \log_b n \leq h \leq \log_a n$$

### 12.1.1. Aufspaltung bei Einfügen

### 12.1.2. Verschmelzen von Knoten beim Löschen

Aufspalte- und Verschmelze-Operationen können sich von der Blattebene bis zur Wurzel kaskadenartig fortpflanzen. Sie bleiben aber auf den Suchpfad begrenzt.

$\Rightarrow$  Umbaukosten sind beschränkt durch die Baumtiefe  $= O(\log n)$

## 12.2. Amortisierte Analyse

|                              |     |                 |
|------------------------------|-----|-----------------|
|                              | 000 |                 |
|                              | 001 | Kosten(1) = 1   |
|                              | 010 | = 2             |
|                              | 011 | = 1             |
| <b>Beispiel: Binärzähler</b> | 100 | = 3             |
|                              | 101 | = 1             |
|                              | 110 | = 2             |
|                              | 111 | = 1             |
|                              |     | $\overline{11}$ |

Kosten der Inkrement-Operation  $\hat{=}$  Zahl der Bit-Flips

Naive Analyse  $2^k = n$

$$1 \cdot \frac{n}{2} + 2 \cdot \frac{n}{4} + 3 \cdot \frac{n}{8} + \dots + k \cdot \frac{n}{2^k} = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^k i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = 2^{k+1} - k - 2 = 2n - k - 2$$

Von 0 bis  $n$  im Binärsystem zu zählen kostet  $\leq 2n$  Bit-Flips

**Sprechweise:** amortisierte Kosten einer Inkrement-Operation sind 2

Folge von  $n$ -Ops kostet  $2n$

### 12.2.1. Bankkonto-Methode

$$\text{Konto}(i+1) = \text{Konto}(i) - \text{Kosten}(i) + \text{Einzahlung}(i)$$

$$\sum_{i=1}^n \text{Kosten}(i) = \text{tatsächliche Gesamtkosten} = \sum_{i=1}^n (\text{Einzahlung}(i) + \text{Konto}(i) - \text{Konto}(i+1))$$

$$= \sum_{i=1}^n \text{Einzahlung}(i) + \text{Konto}(1) - \text{Konto}(n+1)$$

|        |                 |
|--------|-----------------|
| 000    |                 |
| 001€   | Kosten(1) = 1   |
| 01€0   | = 2             |
| 01€1€  | = 1             |
| 1€00   | = 3             |
| 1€01€  | = 1             |
| 1€1€0  | = 2             |
| 1€1€1€ | = 1             |
|        | $\overline{11}$ |

### Kontoführungsschema: für Binärzähler

1€ pro 1 in der Binärdarstellung

Jeder Übergang  $1€ \rightarrow 0$  kann dann mit dem entsprechenden Euro Betrag auf dieser 1 bezahlt werden.

Es gibt pro Inkrement Operation nur einen  $0 \rightarrow 1$  Übergang

2€ Einzahlung für jede Inc-Operation reichen aus um:

1. diesen  $0 \rightarrow 1$  Übergang zu bezahlen
2. die neu entstandene 1€ mit einem Euro zu besparen.

$$\text{GK} = 2(2^k - 1) + 0^{\text{I}} - k^{\text{II}} = 2n - k - 2$$

---

<sup>I</sup>Zählerstand(000)

<sup>II</sup>Zählerstand( $\overbrace{111 \dots 1}^k$ )

# 13. Vorlesung 13

**Satz:** Ausgehend von einem leeren 2-5-Baum betrachten wir die Rebalancierungskosten  $C$  (Split- und Fusionsoperationen) für eine Folge von  $m$  Einfüge- oder Löschooperationen. Dann gilt:  $C \in O(m)$  d.h. Amortisierte Kosten der Split- und Fusionsoperationen sind konstant.  
! Dies bezieht sich nicht auf die Suchkosten, die in  $O(\log n)$  liegen.

**Beweisidee:**

**Kontoführung:**

| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|----|----|----|----|----|----|
| 2€ | 1€ | 0€ | 0€ | 1€ | 2€ |

regelmäßige Einzahlung: 1€

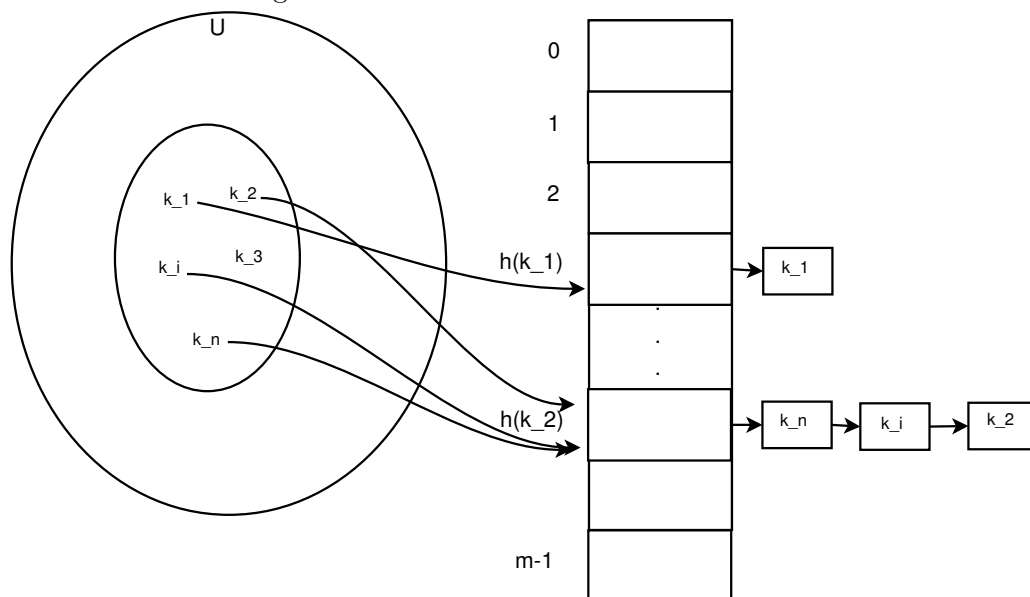
Durch eine Einfüge- oder Löschooperation steigt oder fällt der Knotengrad des direkt betroffenen Knotens um höchstens 1.  $\Rightarrow$  1€ Einzahlung reicht zur Aufrechterhaltung dieses Sparplanes.

Jetzt Beseitigung der temporären 1- und 6-Knoten:

Ein 6-Knoten nutzt 1€ um seinen Split zu bezahlen. Die beiden neu entstehenden 3-Knoten benötigen kein Kapital. Der Vaterknoten des gesplitteten 6-Knotens benötigt ggf. den zweiten verfügbaren €. Analoge Betrachtung für Fusion eines temp. 1-Knotens.

## 13.1. Hashing

Abbildung 13.1.: Universum und Hashtabelle der Größe  $m$



$U \subseteq \mathbb{N}$  z.B. 64-Bit-Integer

$n$  = Zahl der zu verwaltenden Schlüssel

$$|U| \gg n$$

Hashfunktion  $h$ :

$$h : U \rightarrow [0, \dots, m-1]$$

$$\text{z.B. } k \mapsto k \bmod m$$

Einfache Annahme: (einfaches uniformes Hashing)

$$\forall k_i, k_j \in U : Pr(h(k_i) = h(k_j)) = \frac{1}{m}$$

### Analyse der Laufzeit zum Einfügen eines neuen Elementes $k$

- $h(k)$  berechnen  $\rightarrow O(1)$
- Einfügen am Listenanfang in Fach  $h(k)$ .  $\rightarrow O(1)$

### Analyse der Suchzeit für einen Schlüssel $k$

- $h(k) \rightarrow O(1)$
- Listenlänge zum Fach  $h(k)$  sei  $n_{h(k)}$  also beim Durchlauf der kompletten Liste  $\rightarrow O(n_{h(k)})$

$$E(n_{h(k)}) = \frac{n}{m} = \alpha^I$$

$$\text{Suchzeit(Einfügen)} \in O(1 + \alpha)$$

### Laufzeit beim Löschen von Schlüssel $k$

- $h(k) \rightarrow O(1)$
- Durchlaufen der Liste  $\rightarrow O(n_{h(k)})$
- Löschen durch „Pointer-Umbiegen“  $\rightarrow O(1)$

### 13.1.1. Universelles Hashing

**Idee** Arbeite nicht mit einer festen Hashfunktion sondern wähle am Anfang eine zufällige Hashfunktion aus einer Klasse von Hashfunktionen aus.

**z.B.**

$$h_{a,b}(k) = ((a \cdot k + b) \bmod p) \bmod m$$

$p$  sei eine hinreichend große Primzahl  $0 < a < p, 0 \leq b < p$

$$\mathcal{H}_{p,m} = \{h_{a,b}(k) | 0 < a < p, 0 \leq b < p\}$$

$$|\mathcal{H}_{p,m}| = p(p-1)$$

**Definition**  $\mathcal{H}$  heißt universell  $\Leftrightarrow \forall k, l \in U : Pr(h(k) = h(l)) \leq \frac{1}{m}$

---

<sup>I</sup>Belegungsfaktor

**Suchzeit**

$$\mathcal{X}_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{für } h(k) = h(l) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E(n_{h(k)}) = E\left(\sum_{l \in T, l \neq k}\right) = \sum_{l \in T, l \neq k} E(X_{k,l}) = \sum_{l \in T, l \neq k} Pr(h(k) = h(l)) = \sum_{l \in T, l \neq k} \frac{1}{m} = \frac{n-1}{m} = \alpha$$

# 14. Vorlesung 14

## Universelles Hashing (Fortsetzung)

Könnte ein boshafter Mitspieler  $n$  Schlüssel bei gegebener fester Hashfunktion wählen, so würde er solche wählen, die auf den gleichen Slot unter gegebener Hashfunktion abgebildet werden.  $\leadsto$  Durchschnittliche Ablaufzeit von  $O(n)$

**Idee** zufällige Wahl der Hashfunktion aus einer Familie von Funktionen derart, dass die Wahl unabhängig von den zu speichernden Schlüssel ist (universelles Hashing).

### 14.0.1. Definition

Sei  $\mathcal{H}$  eine endliche Menge von Hashfunktionen, welche ein gegebenes Universum  $U$  von Schlüssel auf  $\{0, \dots, m-1\}$  abbildet. Sie heißt universell, wenn für jedes Paar von Schlüssel  $k, l \in U$   $l \neq k$  die Anzahl der Hashfunktionen  $h \in \mathcal{H}$  mit  $h(l) = h(k)$  höchstens  $\frac{|\mathcal{H}|}{m}$ . Anders: Für ein zufälliges  $h \in \mathcal{H}$  beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei unterschiedliche Schlüssel  $k, l$  kollidieren nicht mehr als  $\frac{1}{m}$  ist.

### 14.0.2. Beispiel

$p$  Primzahl, so groß, dass alle möglichen Schlüssel  $k \in U$  im  $0, \dots, p-1$  liegen.  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  bezeichnet den Restklassenring  $\bmod p$  (weil  $p$  prim, ist  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ein Körper).  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$  ist die Einheitengruppe.

**Annahme:** Die Menge der Schlüssel im Universum  $U$  ist größer als die Anzahl der Slots in der Hashtabelle. Für  $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$  und  $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  betrachte:

$$h_{a,b}(k) := (a \cdot k + b \bmod p) \bmod m \quad (*)$$

Damit ergibt sich die Familie

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* = \{1, \dots, p-1\} \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, \dots, p-1\} \quad \mathcal{H}_{p,m} = \{h_{a,b} | a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad |\mathcal{H}| = p(p-1)\}$$

**Satz** Die in  $(*)$  eingeführte Klasse von Hashfunktionen ist universell.

**Beweis** Seien  $k, l$  Schlüssel auf  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  mit  $k \neq l$

Für  $h_{a,b} \in \mathcal{H}_{p,m}$  betrachten wir

$$r = (a \cdot k + b) \bmod p$$

$$s = (a \cdot l + b) \bmod p$$

Es ist  $r \neq s$

Dazu:

$$r - s = a \cdot (k - l) \bmod p \quad (*2)$$



**Angenommen  $r - s = 0$**

$$0 = a \cdot (k - l) \pmod{p}, \text{ aber } a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \Rightarrow a \neq 0 \text{ und } k \neq l \Rightarrow k - l \neq 0$$

Da  $p$  prim ist  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ein Körper  $\Rightarrow$  kein Nullteiler  $\Rightarrow a \cdot (k - l) \neq 0 \Rightarrow r \neq s$

Daher bilden  $h_{a,b} \in \mathcal{H}_{p,m}$  unterschiedliche Schlüssel  $k, l$  auf unterschiedliche Elemente ab. („Auf dem level  $\pmod{p}$  gibt es keine Kollisionen).

Aus (\*2) folgt:

$$(r - s)(k - l)^{-1} = a \pmod{p}$$

$$r - a \cdot k = b \pmod{p} \text{ Bijektion zwischen } (k, l) \text{ und } (a, b)$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schlüssel  $h \neq l$  kollidieren, gerade die Wahrscheinlichkeit, dass  $r \equiv s \pmod{m}$ , falls  $r \neq s$  zufällig gewählt (aus  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ).

Für gegebenes  $r$  gibt es unter den übrigen  $p - 1$  Werten für  $s$  höchstens  $\lceil \frac{p-1}{m} \rceil \leq \lceil \frac{p}{m} \rceil - 1$  Möglichkeiten, sodass  $s \neq r \pmod{p}$  aber  $r = s \pmod{m}$

### 14.0.3. Abschätzung nach oben

$$\lceil \frac{p}{m} \rceil - 1 \leq \frac{(p + m - 1)}{m} - 1 = \frac{p - 1}{m} \text{ Kollisionsmöglichkeiten}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $r$  und  $s$  kollidieren  $\pmod{m}$  Kollisionsmöglichkeiten / Gesamtzahl der Werte

$$= \frac{p - 1}{m} \cdot \frac{1}{p - 1} = \frac{1}{m}$$

$\Rightarrow$  Für ein Paar von Schlüsseln  $k, l \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  mit  $k \neq l$

$$P[h_{a,b}(k) = h_{a,b}(l)] \leq \frac{1}{m} \Rightarrow \mathcal{H}_{p,m} \text{ universell!}$$

## 14.1. Perfektes Hashing

**Wichtig** Menge der Schlüssel ist im Vorhinein bekannt und ändert sich nicht mehr.

**Beispiele** reserved words bei Programmiersprachen, Dateinamen auf einer CD

### 14.1.1. Definition

Eine Hashmethode heißt perfektes Hashing, falls  $O(1)$  Speicherzugriffe benötigt werden, um die Suche nach einem Element durchzuführen.

**Idee** Zweistufiges Hashing mit universellen Hashfunktionen.

1. Schritt  $n$  Schlüssel,  $m$  Slots durch Verwendung der Hashfunktion  $h$ , welche aus einer Familie universeller Hashfunktionen stammt.
2. Schritt Statt einer Linkedlist im Slot anzulegen, benutzen wir eine kleine zweite Hashtabelle  $S_j$  mit Hashfunktion  $h_j$

**Bild** Schlüssel  $k = \{10, 22, 37, 49, 52, 60, 72, 75\}$

Äußere Hashfunktion  $h(k) = ((a \cdot b) \bmod p) \bmod m$

$$a = 3, \quad b = 42, \quad p = 101, \quad m = 9$$

$$h(10) = \underbrace{(3 \cdot 10 + 42 \bmod 101)}_{=72} \bmod 9 = 0$$

Um zu garantieren, dass keine Kollision auf der zweiten Ebene auftreten, lassen wir die Größe von  $S_j$

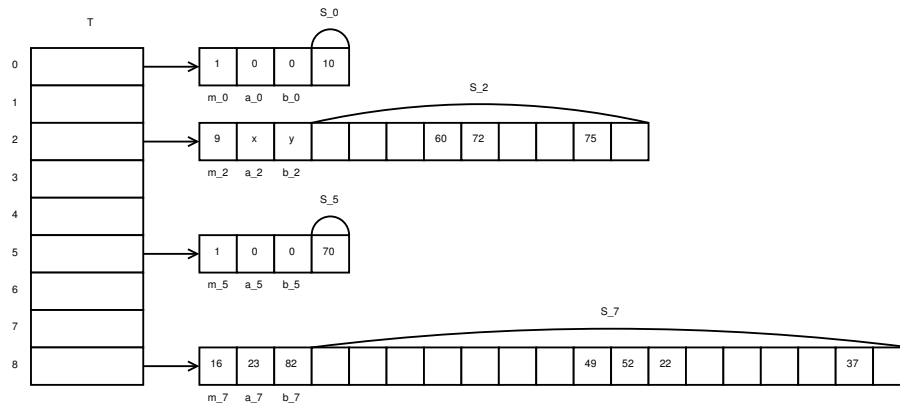


Abbildung 14.1.: Perfekte Hashtabelle

gerade  $n_j^2$  sein ( $n_j \neq \# \text{Schlüssel} \mapsto j \text{Slot}$ ).

Wir verwenden für die Hashfunktion der ersten Ebene eine Funktion aus  $\mathcal{H}_{p,m}$ . Schlüssel die im j-ten Slot werden in der sekundären Hashtabelle  $S_j$  der Größe  $m_j$  mittels  $h_j$  gehasht.  $h_j \in \mathcal{H}_{p,m}$

**Wir zeigen:** 2 Dinge:

1. Wie versichern wir, dass die zweite Hashfunktion keine Kollision hat.
2. Der erwartete Speicherbedarf ist  $O(n)$

**zu 1.**

**Satz** Beim Speichern von  $n$  Schlüsseln in einer Hashtabelle der Größe  $m = n^2$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kollision auftritt  $< \frac{1}{2}$

**Beweis:** Es gibt  $\binom{n}{2}$  mögliche Paare, die kollidieren können. Jedes kollidiert mit der Wahrscheinlichkeit  $\leq \frac{1}{m}$ , falls  $h \in \mathcal{H}$  zufällig gewählt wurde.

Sei  $X$  eine Zufallsvariable (ZV),  $X$  zählt Kollisionen:

Für  $m = n^2$  ist die erwartete Zahl der Kollisionen:

$$E[X] = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{m} = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n!}{2!(n-2)!n^2} = \frac{(n-1)}{2n} \leq \frac{1}{2}$$

Anwenden der Markow-Ungleichung ( $a=1$ ):

$$P[X \geq 1] \leq \frac{E[X]}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Wahrscheinlichkeit für irgendeine Kollision ist } < \frac{1}{2}$$

q.e.d

### 14.1.2. Nachteil

Für große  $n$  ist  $m = n^2$  nicht haltbar!

**zu 2.** Wenn die Größe der primären Hashtabelle  $m = n$  ist, dann ist der Platzverbrauch in  $O(n) \curvearrowright$ . Betrachte Platzverbrauch der sekundären Hashtabellen.

**Satz** Angenommen wir wollen  $n$  Schlüssel in einer Hashtabelle der Größe  $m = n$  mit Hashfunktion  $h \in \mathcal{H}$ . Dann gilt:

$$E \left[ \sum_{j=0}^{m-1} n_j^2 \right] < 2n$$

**Beweis**

**Betrachte**

$$a^2 = a + 2 \cdot \binom{a}{2} = a + 2 \cdot \frac{a^2 - a}{2} \quad (*3)$$

**Betrachte**

$$\begin{aligned} E \left[ \sum_{j=0}^{m-1} n_j^2 \right] &\stackrel{(*3)}{=} E \left[ \sum_{j=0}^{m-1} \left( n_j + 2 \binom{n_j}{2} \right) \right] \\ &\stackrel{\text{lini. des EW}}{=} E \left[ \underbrace{\sum_{j=0}^{m-1} n_j}_{=n} \right] + 2 E \left[ \sum_{j=0}^{m-1} \binom{n_j}{2} \right] = n + 2 E \left[ \sum_{j=0}^{m-1} \binom{n_j}{2} \right] \# \text{ der Kollisionen} \end{aligned}$$

Da unsere Hashfunktion universell ist, ist die erwartete Zahl dieser Paare:

$$\binom{n}{2} \frac{1}{m} = \frac{n(n-1)}{2m} = \frac{n-1}{2}, \text{ da } m = n$$

Somit

$$E \left[ \sum_{j=0}^{m-1} n_j^2 \right] \leq n + 2 \frac{n-1}{2} = 2n - 1 < 2n$$

**Korollar** Speichern wir  $n$  Schlüssel in einer Hashtabelle der Größe  $m = n$  mit einer zufälligen universellen Hashfunktion und setzen die Größe der Hashtabellen der zweiten Ebene auf  $m_j = n_j^2$  für  $j = 0, m = 1$ , so ist der Platzverbrauch des perfekten Hashings weniger als  $2n$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass der Platzverbrauch der zweiten Hashtabellen  $\geq 4n$  ist, ist  $\leq \frac{1}{2}$  ohne Beweis.

# 15. Vorlesung 15

Bei  $n$  Elementen sollte die Hashtabelle  $m = n^2$  groß sein.  
Für die universellen Hashfunktionen

$$\mathcal{H}_{p,m} = \{h_{a,b}(k) = (a \cdot k + b) \bmod p \bmod m \mid 0 < a < p, 0 \leq b < p\}$$

$\binom{n}{1}$  Schlüsselpaare  $(k, l)$  mit  $k \neq l$

$$E(\# \text{Kollisionen}) \leq \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{m} \stackrel{\text{I}}{=} \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2}$$

**Idee** Zweistufiges Verfahren:

- primäre Hashfunktion für Tabelle der Größe  $m = n$

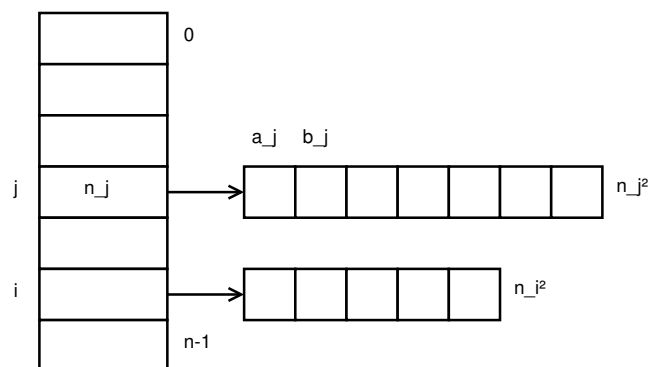


Abbildung 15.1.: Perfektes Hashing

---

<sup>I</sup>Universalität von  $\mathcal{H}$

Teil II.

# Graphen-Algorithmen

### 15.0.1. Einführung

$$G = (V, E) \quad V \text{ vertices, } E \text{ edges} \quad E \subseteq V \times V$$

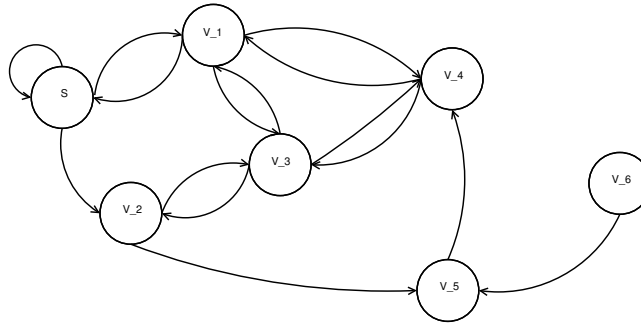


Abbildung 15.2.: Gerichteter Graph

Planare Graphen können ohne Überkreuzung der Kanten in die Ebene eingebettet werden.

### Eulerische Polyederformel

$$|V| + |F| = |E| + 2$$

$$8 + 6 = 12 + 2$$

Es gilt:

$$2 \cdot |E| \geq 3 \cdot |F|$$

$$\# \text{gerichtete Kanten} = 2 \cdot |E| = \sum_{i=1}^{|F|} \# \text{Kanten}(f_i)^{\text{II}} \geq 3 \cdot |F|$$

$$|F| \leq \frac{2}{3}|E|, \quad |V| + |F| = |E| + 2 \leq |V| + \frac{2}{3}|E| \Rightarrow \frac{1}{3}|E| + 2 \leq |V|$$

$$\Rightarrow |E| \leq 3 \cdot |V| - 6$$

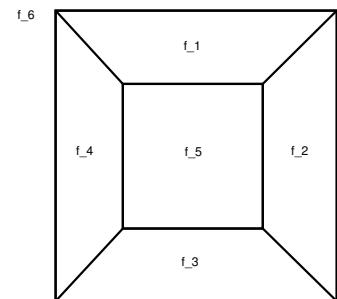


Abbildung 15.3.: Würfel

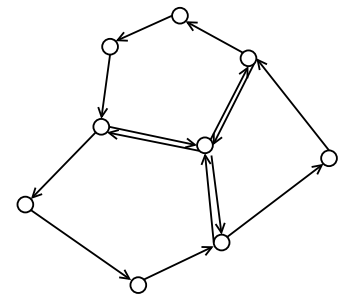


Abbildung 15.4.: Placeholder

<sup>II</sup>Jedes  $f_i$  hat mindestens 3 Kanten



## Adjazenzlisten Repräsentation

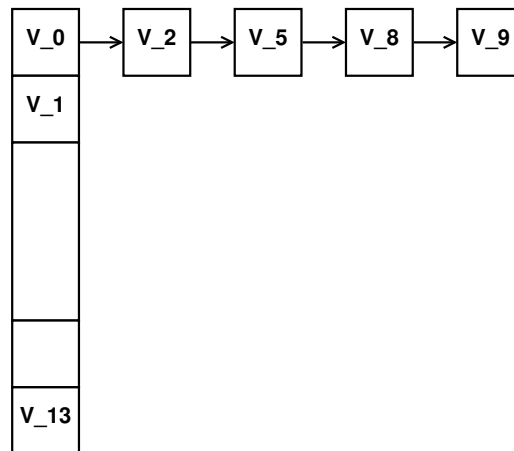


Abbildung 15.6.: Adjazenzliste

## Platzbedarf

$$\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O} \left( |V| + \sum_{i=0}^{|V|-1} \text{outdeg}(v_i) \right)$$

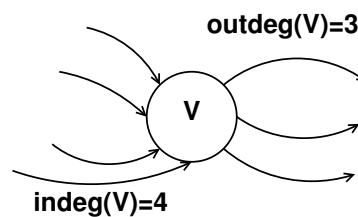


Abbildung 15.7.: indeg und outdeg

## 15.0.2. BFS (Breadth-First Search) Breitensuche

```

1 forall ( v in V \ {s} ) {
2   col[v]=white;    // Farbe weiß = unbekannt, grau = bekannt, schwarz = vollkommen bekannt
3   d[v] = infinity; // Distanz
4   pi[v] = NULL;   // pi ist Vorgänger
5 }
6 col[s] = grey;    // s ist Startknoten
7 d[s] = 0;
8 pi[s] = NULL;
  
```

|                    |    |                    |
|--------------------|----|--------------------|
| Queue              | vs | Stack              |
| Schlange           |    | Stapel             |
| empty()            |    | „                  |
| push()             |    | „                  |
| pop()              |    |                    |
| FIFO               |    | FILO               |
| First-In-First-Out |    | First-In-First-Out |



```

1 Queue Q;
2 Q.push(s);
3 while(!Q.empty()) {
4     u = Q.pop();
5     forall( (u,v) in E) {
6         if (col[v] == white) {
7             col[v] == grey;
8             d[v] = d[u]+1;
9             pi[v] = u;
10            Q.push(v);
11        }
12    }
13    col[u] = black;
14 }

```

### Laufzeit

$$\mathcal{O}(|V| + |E|)$$

**Begründung:** Jeder von  $s$  aus erreichbare Knoten wird nur einmal in die Queue aufgenommen und auch ihr entfernt. Für jeden Knoten muss nur einmal seine Adjazenzliste durchlaufen werden.

$$\Rightarrow \mathcal{O} \left( |V| + \sum_{v \in V} \text{outdeg}(v) \right)$$

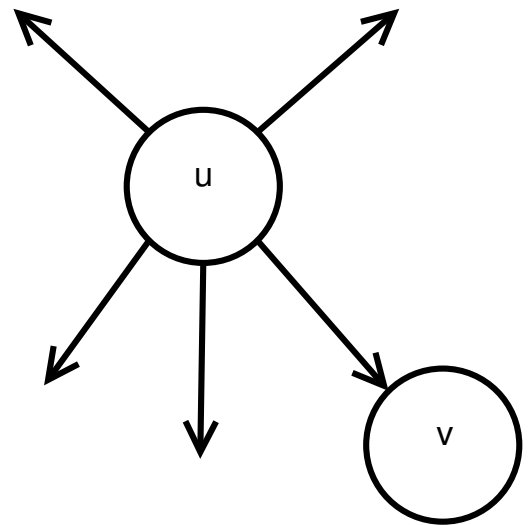


Abbildung 15.8.: Grafik zum Beispielcode





# 16. Vorlesung 16

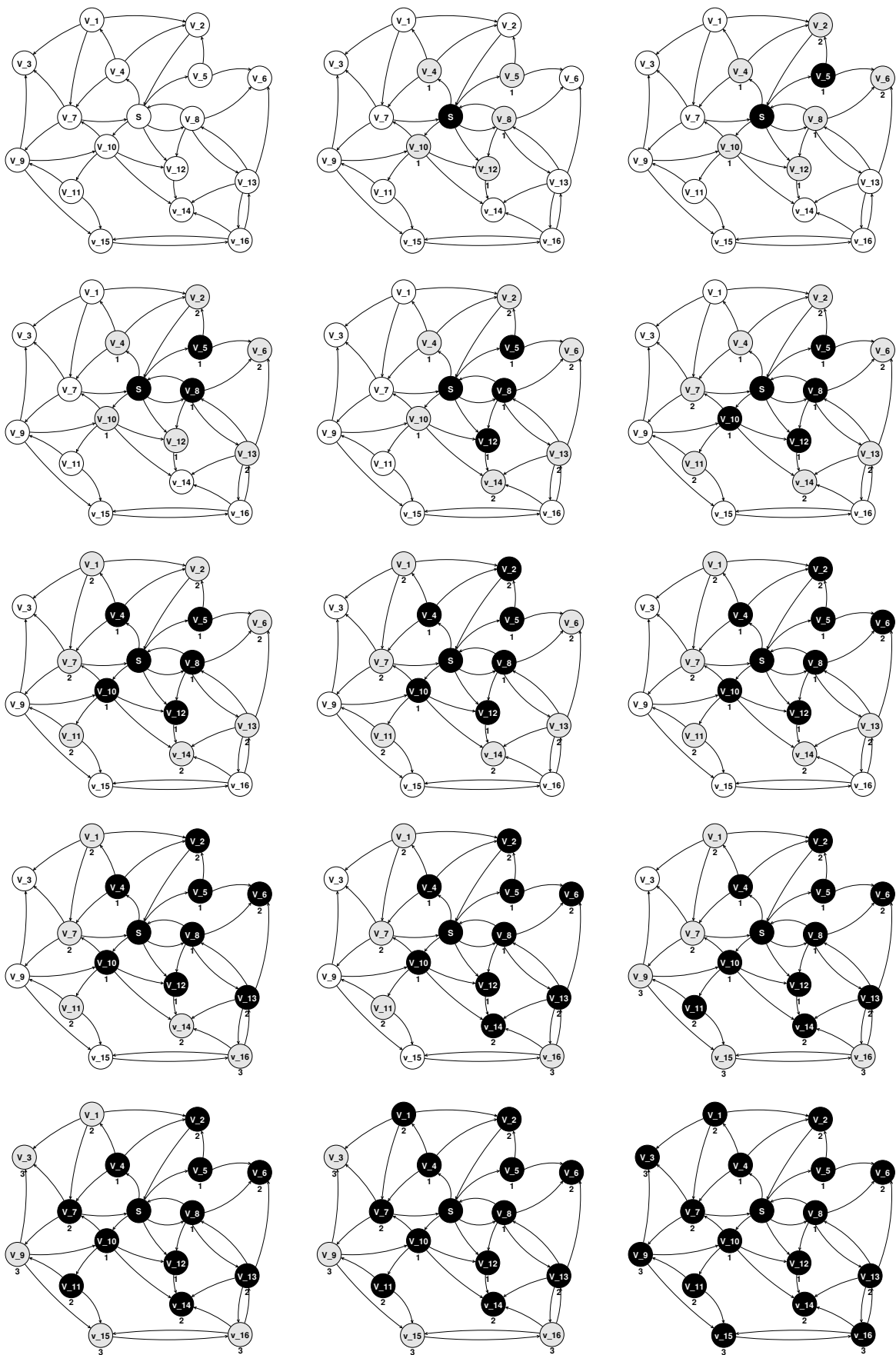


Abbildung 16.1.: Beispiel

### Definition: Länge kürzesten Weges

$\delta(s, v)$  = Länge eines kürzesten Weges vom Startknoten  $s$  zum Knoten  $v$ .  
Setze  $\delta(s, v) = \infty$ , falls  $v$  nicht erreichbar von  $s$  aus.

### Satz: Richtigkeit des Algorithmus

Nach Ablauf von BFS<sup>1</sup> gilt

$$\forall v \in V : d[v] = \delta(s, v)$$

### Lemma 1: Dreiecksungleichung für kürzeste Wege

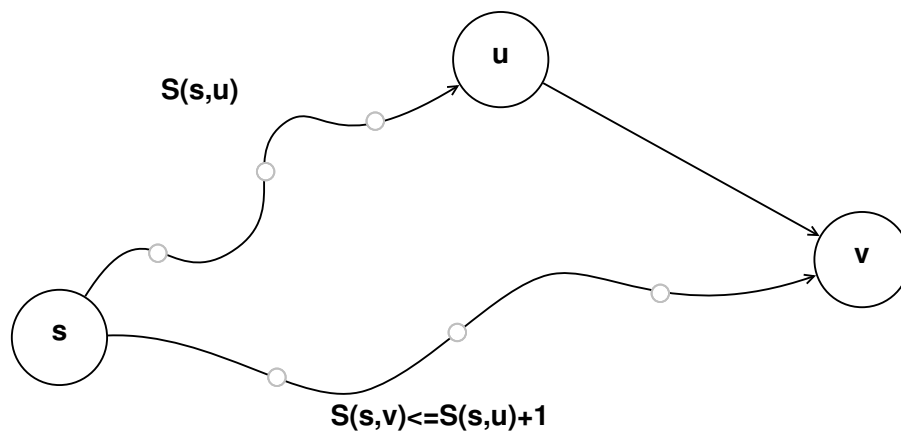


Abbildung 16.2.

### Lemma 2

Zu jedem Zeitpunkt im Verlauf von BFS gilt:

$$\forall v \in V : d[v] \geq \delta(s, v)$$

**Beweis (induktiv über Zahl der Operationen, die d-Wert verändern)**

**Induktions-Anfang**

$$d[s] = 0 \checkmark$$

**Induktions-Schritt** Knoten  $v$  wird von  $u$  aus neu entdeckt

$$d[u] \geq \delta(s, u)$$

$$d[v] = d[u] + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \stackrel{D.U.}{\geq} \delta(s, v)$$

### Lemma 3

Sei  $Q = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  eine Queue, dann gilt stets:

$$d[v_1] \leq d[v_2] \leq \dots \leq d[v_k] \leq d[v_1] + 1$$

---

<sup>1</sup>Breitensuche

## Beweis (induktiv über die Zahl der push- und pop-Operationen)

### Induktions-Anfang

$$d[s] = 0 \checkmark$$

### Induktions-Schritt

#### pop

$$d[v_1] \leq d[v_2] \leq \dots \leq d[v_k] \leq d[v_1] + 1 \stackrel{!}{\leq} d[v_2] + 1$$

#### push

$$d[u] = d[v_1] \leq d[v_2] \leq \dots \leq d[v_k] \leq d[u] + 1$$

Beachte Kante  $(u, v)$   $v$  ist weiß

$v = v_{k+1}$  wird gepushed

$$d[v_{k+1}] = d[v_1] + 1$$

Zustand von  $Q$  nach push

$$d[v_2] \leq d[v_3] \leq \dots \leq d[v_k] \leq d[v_1] + 1 = d[v_{k+1}] \quad \checkmark$$

### Satz: Richtigkeit des Algorithmus

Nach Ablauf von BFS<sup>II</sup> gilt

$$\forall v \in V : d[v] = \delta(s, v)$$

### Beweis durch Widerspruch

Sei  $v \in V$ , so dass  $d[v] \neq \delta(s, v)$  am Ende des Algorithmus  $\stackrel{\text{Lemma 2}}{\implies} d[v] > \delta(s, V)$

Sei  $v$  so gewählt, dass es der erste Knoten ist mit der Eigenschaft, dass sein d-Wert falsch gesetzt wird.

d.h. Alle d-Werte bis zu diesem Zeitpunkt sind korrekt.

Sei  $s \mapsto u' \rightarrow v$  ein kürzester Weg  $s$  zu  $v$

Betrachte die Situation bei Bearbeitung von  $u'$ :

**1. Fall**  $v$  ist in diesem Moment schwarz.

$$d[v] > \delta(s, v) = \delta(s, u') + 1 \geq \text{III} d[v] \quad \text{!}$$

**2. Fall**  $v$  ist in diesem Moment weiß.

$$d[v] > \delta(s, u') + 1 = d[u'] + 1 = \text{IV} d[v] \quad \text{!}$$

---

<sup>II</sup>Breitensuche

<sup>III</sup> $v$  vor  $u'$  aus  $Q$  entfernt und Lemma 3.

<sup>IV</sup>wegen Wahl von  $v$ ; d-Wert von  $u'$  muss also korrekt sein

**3. Fall**  $v$  ist grau.

$$d[v] > \delta(s, u') + 1 = d[u'] + 1 \geq d[u] + 1 = d[v]$$

$d[u] \leq d[u']$ , weil  $u$  vor  $u'$  aus  $Q$  entfernt  $\nmid$

q.e.d.

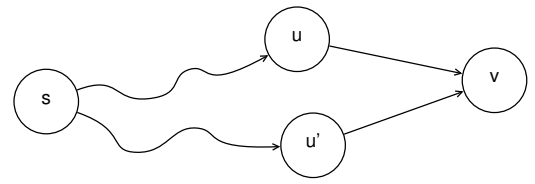


Abbildung 16.3.

## 16.1. Kürzeste Wege Algorithmen

### 16.1.1. Dijkstra-Algorithmus

$$G = (V, E) \quad w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

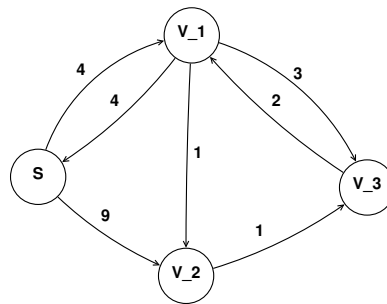


Abbildung 16.4.

Sei  $p = (s = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$



Abbildung 16.5.

$$w(p) = \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) = \delta(s, v_k)$$

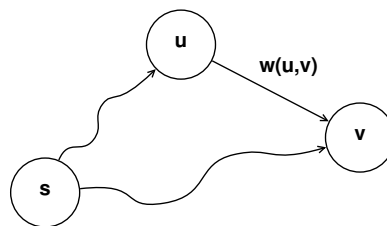


Abbildung 16.6.

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$$

```

1 relax(u, v, w) {
2   if (d[v] > d[u] + w(u, v)) {
3     d[v] = d[u] + w(u, v);
4     Π[v] = u;
5   }
6 }
```

Betrachte Algorithmen zur kürzesten Wege Berechnung, die Distanzwerte nur mit Hilfe dieser relax-Funktion verändern, dann gilt:

$$d[v] \geq \delta(s, v) \quad \forall v \in V$$

**Beweis**

$$d[v] = d[u] + w(u, v) \stackrel{I.A.}{\geq} \delta(s, u) + w(u, v) \geq \delta(s, v)$$

Induktion über Zahl der reflex-Aufrufe



# 17. Vorlesung 17

## Dijkstra Algorithmus (Fortsetzung)

$$G = (V, E) \quad w : E \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$

```
1 forall (v ∈ V) {
2   d[v] = ∞;
3   Π[v] = NULL;
4 }
5 d[s] = 0;
6 S = ∅;
7 PriorityQueue PQ;
8 forall (v ∈ V)
9   PQ.insert((d[v], v));
10 while(!PQ.empty()) {
11   u = PQ.deleteMin();
12   forall ( (u, v) ∈ E ) {
13     if ( d[v] > d[u] + w(u, v) ) {
14       d[v] = d[u] + w(u, v);
15       Π[v] = u;
16       PQ.decreaseKey((d[v], v));
17     }
18   }
19   S = S ∪ {u};
20 }
```

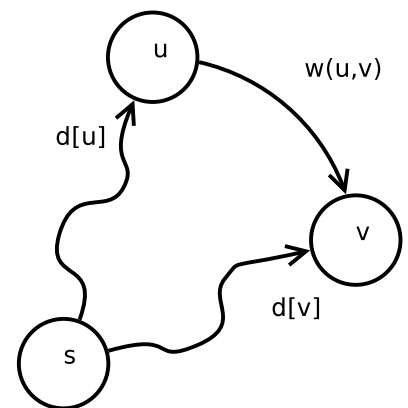


Abbildung 17.1.

**Satz:** Der Dijkstra Algorithmus berechnet alle d-Werte, so dass nach Ablauf des Algo  $\forall v \in V$  gilt:  $d[v] = \delta(s, v)$ .

**Beweis:**

**Annahme:**

$$\exists v \in V : d[v] \neq \delta(s, v)$$

$$\xRightarrow{\text{LemmaRelax}} d[v] > \delta(s, v)$$

Sei  $v$  so gewählt, dass  $v$  der erste Knoten mit der Eigenschaft ist, der mit deleteMin der PQ entnommen wird und nach Relaxation aller von ihm ausgehenden Kanten der Menge  $S$  hinzugefügt wird.

Betrachte einen kürzesten Weg  $s \rightsquigarrow v$

$$d[v] > \delta(s, v) \geq \text{I} \delta(s, y) = d[y] = \text{II} d[x] + w(x, y) = d[y] \geq \text{III} d[v] \quad \text{!}$$

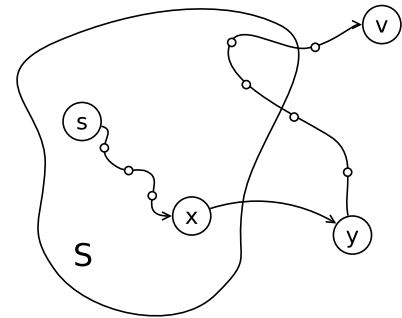


Abbildung 17.2.: Skizze

### 17.0.1. Vorläufige Laufzeitanalyse von Dijkstra

|                |   |   |  |
|----------------|---|---|--|
| PQ.insert      | x | V | Mit balanciertem Suchbaum oder mit binärem Heap (siehe Heapsort) |
| PQ.empty       | x | V |  |
| PQ.deleteMin   | x | V |  |
| PQ.decreaseKey | x | E |  |

können diese Operationen alle in Zeit  $\mathcal{O}(\log |V|)$  realisiert werden.

$\Rightarrow$  Gesamtlaufzeit:  $\mathcal{O}((|V| + |E|) \log |V|)$

Wir werden später zeigen, dass Laufzeit  $\mathcal{O}(|V| \log |V| + |E|)$  möglich ist.

## 17.1. Bellman-Ford-Algorithmus

$$G = (V, E) \quad w : E \rightarrow \mathbb{R}$$

**Voraussetzung**  $G$  enthält keine negativen Zyklen

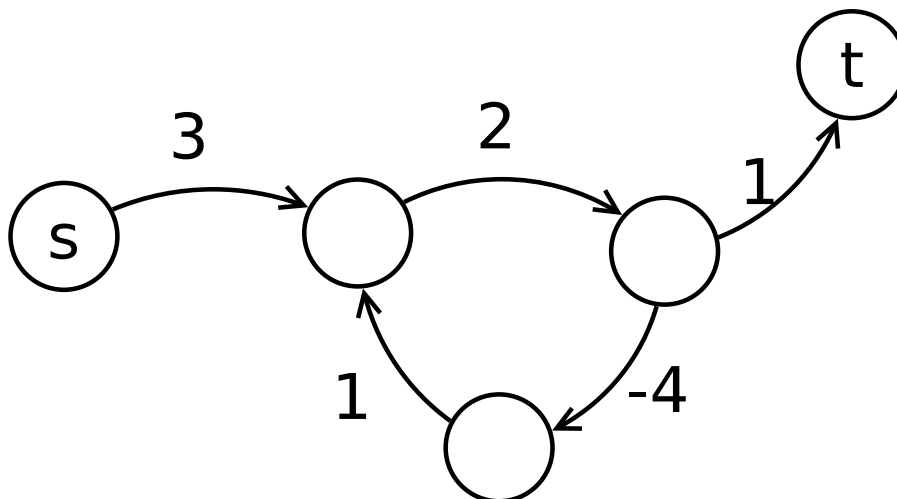


Abbildung 17.3.: Ein verbotener, negativer Zyklus

<sup>I</sup>weil Kantengewichte nicht negativ sein dürfen

<sup>II</sup> $x$  wurde schon zu  $S$  hinzugefügt, hat also Korrekten d-Wert  $d[x] = \delta(s, x)$

<sup>III</sup>weil  $v$  vor  $y$  aus der PQ entnommen wird.

### 17.1.1. Pseudocode

```
1 forall(v ∈ V) {
2   d[v] = ∞;
3   Π[v] = NULL;
4 }
5 d[s] = 0;
6 for(i = 1; i < |V|; i++)
7   forall((u,v) ∈ E)
8     if( d[v] > d[u] + w(u,v) ) {
9       d[v] = d[u] + w(u,v);
10      Π[v] = u;
11    }
```

### 17.1.2. Laufzeit: Bellman-Ford

$$\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$$

### 17.1.3. Korrektheitsbeweis: Bellman-Ford

**Invariante:** Nach den  $i$ -ten Schleifendurchlauf sind alle Kürzesten Wege korrekt berechnet, die  $\leq i$  Kanten benutzen.

**Beweis:** Induktion über  $i$

#### Induktionsanfang

$i = 0$   $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ , da keine negativen Zyklen vorliegen.

### 17.1.4. Induktionsschritt: $i \rightarrow i + 1$

Betrachte kürzesten Weg mit  $i + 1$  Kanten:

$$s = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_i \rightarrow v_{i+1}$$

Aufgrund der Induktionsannahme<sup>IV</sup> gilt:  $d[v_i] = \delta(s, v_i)$ , weil  $s = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_i$  ein kürzester Weg  $s \rightsquigarrow v_i$  mit  $i$  Kanten ist. Da alle Kanten in der inneren Schleife einmal relaxiert werden, trifft dies insbesondere auf die Kante  $(v_i, v_{i+1})$  zu:

$$d[v_{i+1}] = d[v_i] + w(v_i, v_{i+1}) = \delta(s, v_i) + w(v_i, v_{i+1}) = \delta(s, v_{i+1})$$

**Frage:** Warum folgt aus der Gültigkeit dieser Invariante die Korrektheit des Algo?

**Antwort** Alle kürzesten Wege benutzen höchstens  $|V| - 1$  Kanten, ansonsten hätten sie einen Zyklus mit Gewicht  $\geq 0$ , den man auch weglassen kann.

```
1 //Erkennung der Existenz negativer Zyklen
2 forall((u,v) ∈ E)
3   if(d[v] > d[u] + w(u,v))
4     negativer Zyklus
```

---

<sup>IV</sup>Die Invariante

# 18. Vorlesung 18

## 18.1. All-Pairs-Shortest Path Algorithmen

Distanzmatrix  $D$  für einen Graphen  $G = (V, E)$   $V = v_1, v_2, \dots, v_n$ ,  $w : E \mapsto \mathbb{R}$

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ w(v_i, v_j) & \text{für } (v_i, v_j) \in E \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$D = (d_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

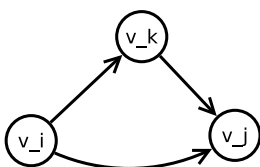


Abbildung 18.1.: Grafik

$$d_{ij}^{(2)} = \min(d_i^{(1)} j, \min_{k=1,\dots,n} (d_{ik}^{(1)} + d_k^{(1)} j))$$

$$D^{(2)} = D^{(1)} \circ D^{(1)} = \min(d_{ik}^{(1)} + d_k^{(1)} j)$$

Vergleich zu Matrixmultiplikation

$$C = A \circ B, \text{ mit } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

im Ring  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$$C_{ij} = \min_{k=1,\dots,n} (A_{ik} + B_{kj})$$

### Kommutativgesetz

$$\min(\min(a, b), c) = \min(a, b, c)$$

im „Ring“<sup>I</sup>  $(\mathbb{R}, \min, +)$

### Distributivgesetz

$$a + \min(b, c) = \min(a + b, a + c)$$

---

<sup>I</sup>der keiner ist

### Assoziativgesetz

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$$

**Ziel:**  $D^{(n)\text{II}} = D^{(1)} \circ D^{(1)} \circ \dots \circ D^{(1)}$

**Es gilt:**  $D^{(n)} = D^{(n+m)}$  für  $m \geq 1$

#### 18.1.1. Laufzeit zur Berechnung von $D^{(n)}$

**Naiv:**  $\mathcal{O}(n^4)$

$$D^{(2)} = D^{(1)} \circ D^{(1)}$$

$$D^{(4)} = D^{(2)} \circ D^{(2)}$$

$$D^{(8)} = D^{(4)} \circ D^{(4)}$$

$\vdots$

$$D^{(2^i)} = D^{(2^{i-1})} \circ D^{(2^{i-1})}$$

Schrittzahl  $i$  so wählen, dass  $2^i \geq n$

**sukzessives Quadrieren:**  $\mathcal{O}(n^3 \log n)$

## 18.2. Floyd-Warshall-Algorithmus

```
1  for ( k = 1; k ≤ n; k++)
2    for( i = 1; i ≤ n; i++)
3      for ( j = 1; j ≤ n; j++)
4        d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k]+d[k][j])
```

**Laufzeit**  $\mathcal{O}(n^3)$

#### 18.2.1. Korrektheitsbeweis:

**Invariante** Nach dem  $k$ -ten Schleifendurchlauf entspricht  $d_{ij}$  der Weglänge eines kürzesten Weges  $p$  von  $v_i$  nach  $v_j$ , wobei nur Zwischenknoten erlaubt sind, mit Index  $\leq k$

$$p : v_i \rightarrow v_{l_1} \rightarrow v_{l_2} \rightarrow \dots \rightarrow v_{l_m} \rightarrow v_j$$

d.h.  $1 \leq l_1, l_2, \dots, l_m \leq k$

---

<sup>II</sup>In der Potenz stehen die Anzahl der betrachteten Kanten.  $n$  entspricht allen Kanten

### 18.2.2. Beweis der Invariante durch Induktion nach $k$

$k = 0$ : Nach der Initialisierung von  $D$ , also vor dem 1. Schleifendurchlauf, gilt obige Invariante.

$k - 1 \rightarrow k$ :

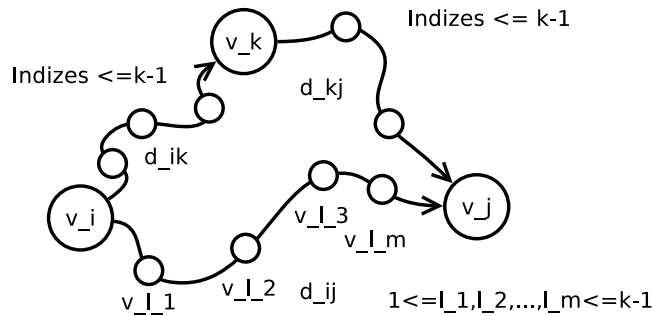


Abbildung 18.2.: Beweis der invariante

Durch die Operation  $d_{ij} = \min(d_{ij}, d_{ik} + d_{kj})$  wird die Invariante sichergestellt.

### 18.3. Naive Lösung des All-Pairs Problems durch $|V|$ -malige Anwendung von Bellman-Ford oder Dijkstra-Algorithmus

**Bellman-Ford**  $\mathcal{O}(|V| \cdot |V| \cdot |E|) = \mathcal{O}(|V|^2 \cdot |E|)$

**Dijksra**  $\mathcal{O}(|V| \cdot (|V| \cdot \log |V| + |E|)) = \mathcal{O}(|V| \cdot |E| + |V|^2 \cdot \log |V|)$

### 18.4. Johnson-Algorithmus

**Idee:** Neugewichtung der Kanten, so dass keine negativen Kantengewichte mehr vorhanden sind. Anschließend  $|V|$ -mal Dijkstra-Algorithmus ausführen.

**Naiver Ansatz**

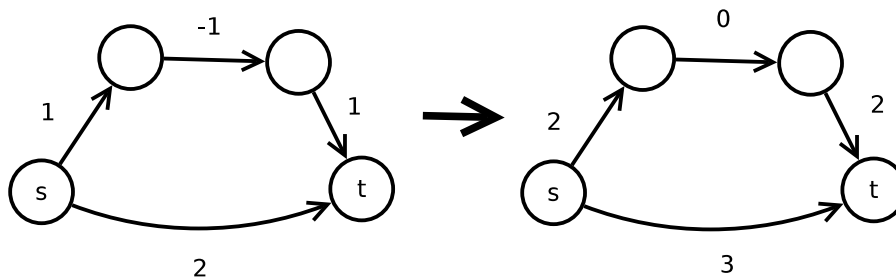


Abbildung 18.3.: Naiver Ansatz, kürzester Weg wird zerstört

## Neuer Ansatz

$$w'(u, v) = \text{pot}^{\text{III}}(u) - \text{pot}(v) + w(u, v) \geq 0$$

Mit dieser Neugewichtung gilt, dass kürzeste Wege bzgl.  $w$  den kürzesten Wegen bzgl.  $w'$  entsprechen.

$$p : s = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots v_i \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \dots v_k = t$$

$$w'(p) = \sum_{i=0}^{k-1} w'(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} [\text{pot}(v_i) - \text{pot}(v_{i+1}) + w(v_i, v_{i+1})]$$

$$\stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} \text{pot}(v_0) - \text{pot}(v_k) + \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) = \text{pot}(s) - \text{pot}(t) + w(p)$$

**d.h.** Alle kürzesten Wege  $s \rightsquigarrow t$  unterscheiden sich bzgl.  $w'$  im Vergleich zu  $w$  nur um eine feste additive Konstante  $\text{pot}(s) - \text{pot}(t)$

$$\text{pot}(u) - \text{pot}(v) + w(u, v) \geq 0$$

$$\text{pot}(v) \leq \text{pot}(u) + w(u, v)^{\text{IV}}$$

$$\text{pot}(v) = \delta(z, v)$$

$$G' = (V', E') \quad V' = V \cup z, E' = E \cup (z, v) | v \in V \quad \text{mit } w'(z, v) = 0$$

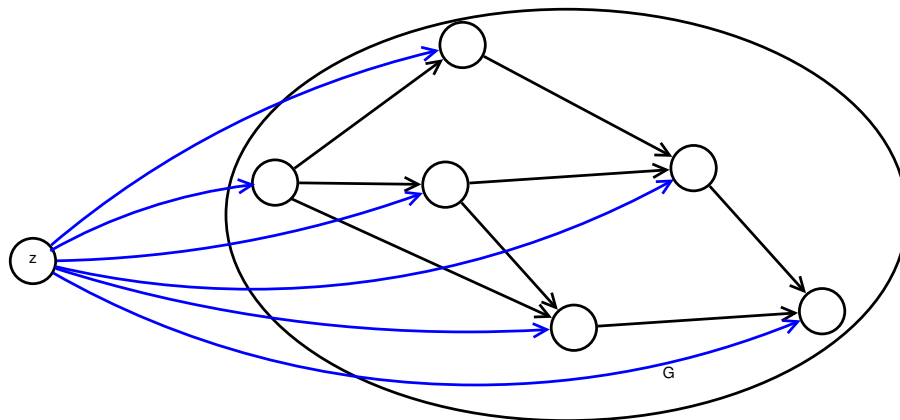


Abbildung 18.4.: Die blau markierten Kanten haben die Länge 0

- Löse single-source-shortest-Path Problem in  $G'$  mit  $z$  als Startknoten
- setze  $\text{pot}(v) = \delta_{G'}(z, v)^{\text{V}}$
- Neugewichtung
- $|V|$ -mal Dijkstra

### 18.4.1. Laufzeit des Johnson-Algorithmus

$$\mathcal{O}(|V| \cdot |E| + |V| \cdot (|V| \cdot \log |V| + |E|)) = \mathcal{O}(|V| \cdot |E| + |V|^2 \cdot |V|)$$

<sup>III</sup>Potentialfunktion

<sup>IV</sup>Dreiecksungleichung

<sup>V</sup>berechnet mit Bellman-Ford