# Datenstrukturen und effiziente Algorithmen
# Blatt 4

Markus Vieth, David Klopp, Christian Stricker

16. November 2015

## Nr.1

## Nr.3

### a)

| $x$ | Ergebnisse: |
|---|---|
| 0 | 18 |
| 1 | 15 |
| 2 | 14 |
| 3 | 13 |
| 4 | 14 |
| 5 | 15 |
| 6 | 16 |
| 7 | 17 |
| 8 | 18 |
| 9 | 19 |
| 10 | 20 |
| 11 | 21 |
| 12 | 22 |
| 13 | 23 |

Für $x = x_2 = 3$, also dem Median der Menge $\{x_1, x_2, x_3\}$, wird die Summe minimal.

## b)

Beh:
$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x|$ wird minimal für $x = x_{k+1}$, d.h x := Median $\{x_1, ..., x_n\}$

Bew:
Sei die Menge aller $x_i$ sortiert. Teile die Summe in zwei gleich große Teilsummen, wobei Summe 1 kleiner als $x_{k+1}$ und Summe 2 größer als $x_{k+1}$ ist:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} |x_i - x|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |x_i - x| + \sum_{i=k+2}^{2k+1} |x_i - x| + |x_{k+1} - x|$$

$$= kx - \sum_{i=1}^{k} x_i - kx + \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i + |x_{k+1} - x|$$

$$= \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^{k} x_i + |x_{k+1} - x|$$

<u>Für $x = x_k$:</u>

$$= \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^{k} x_i$$

<u>Für $x \neq x_k$:</u>
Der Term $|x_{k+1} - x|$ wird immer $> 0$ und somit größer als der Fall $x = x_k$, d.h $\sum_{i=1}^{n} |x_i - x|$ ist genau dann minimal, wenn $x = x_{k+1}$ ist.

## c)

Beh:
$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2$ wird minimal für $x = x_{k+1}$, d.h x := Median $\{x_1, ..., x_n\}$

Bew:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2$$

$$f'(x) = -\sum_{i=1}^{n} 2(x_i - x)$$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^{n} 2$$

$\underline{f'(x) = 0:}$

$$-\sum_{i=1}^{n} 2(x_i - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2nx + \sum_{i=1}^{n} 2x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{n} x_i = 2nx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = x$$

$x$ ist offensichtlich der Median. Da $f''(x)$ immer größer als Null ist, handelt es sich bei $x = x_{k+1}$ um ein Minimum.
*q.e.d*