

# Datenstrukturen und effiziente Algorithmen

Markus Vieth      David Klopp

22. Januar 2016



# Inhaltsverzeichnis

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Vorlesung</b>                                      | <b>1</b> |
| 1.0.1    | Gesamtzahl der Schleifendurchläufe . . . . .          | 1        |
| 1.1      | Algorithmen zur Berechnung maximaler Flüsse . . . . . | 1        |
| 1.1.1    | Flusserhaltung . . . . .                              | 1        |
| 1.1.2    | Definition . . . . .                                  | 2        |
| 1.1.3    | Definition: Schnitt $(S, T)$ . . . . .                | 3        |
| 1.1.4    | Konstruktion des Restnetzwerk $G_f$ . . . . .         | 3        |
| 1.2      | Ford-Fulkerson-Algorithmus . . . . .                  | 3        |



# 1 Vorlesung

Ohne Beweis (siehe später Edmonds-Krap-Algorithmus) gilt:

Die Zeit der Schichten im Levelnetzgraph des Hopcraft-Karp-Algorithmus steigt mindestens um eins von Durchlauf zu Durchlauf.

$$|M^*| - |M| \leq \frac{|V|}{k} \quad \tilde{G} = (V_1 \cup V_2, M \oplus M^*)$$

$k$  Mindestlänge der  $M$ -augm. Pfade

**Ziel** Laufzeit von Hopcraft-Karp =  $\mathcal{O}(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$

**1. Phase**  $k$  Schleifendurchläufe  $\Rightarrow$  Danach haben  $M$ -augm. Pfade mindestens die Länge  $k$

**2. Phase** Weitere  $\frac{|V|}{k}$  Schleifendurchläufe genügen, um zum Maximum-Matching  $M^*$  zu gelangen.

## 1.0.1 Gesamtzahl der Schleifendurchläufe

$$S(k) = k + \frac{|V|}{k} \quad S'(k) = 1 - \frac{|V|}{k^2} = 0 \Rightarrow k = \sqrt{|V|}$$

$\Rightarrow$  Zahl der Schleifendurchläufe  $\leq \sqrt{|V|}$

## 1.1 Algorithmen zur Berechnung maximaler Flüsse

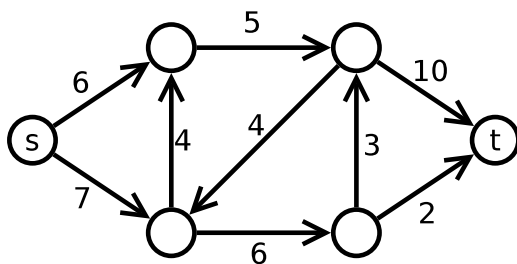


Abbildung 1.1: ...

Gesucht:

$$c^{\text{II}} : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$\forall (u, v) \in E$  : Kapazitätsbedingung:  $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$

### 1.1.1 Flusserhaltung

---

<sup>I</sup>Lemma von Berge

<sup>II</sup>Kapazität

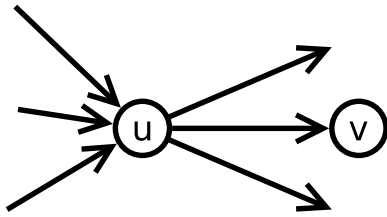


Abbildung 1.2: ...

$$\forall u \in V \setminus \{s, t\}$$

$$\underbrace{\sum_{v \in V} f(u, v)}_{\text{Fluss aus } u \text{ heraus}} = \underbrace{\sum_{v \in V} f(v, u)}_{\text{Fluss in } u \text{ herein}}$$

$$(u, v) \notin E \Rightarrow c(u, v) = 0 \Rightarrow f(u, v) = 0$$

$$(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \notin E \quad \text{Konventionen}$$

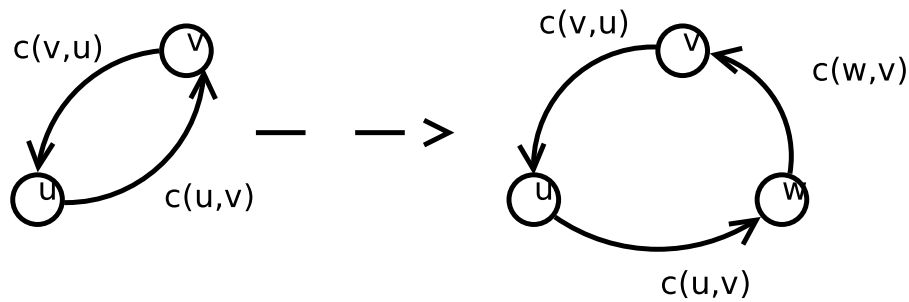


Abbildung 1.3: ...

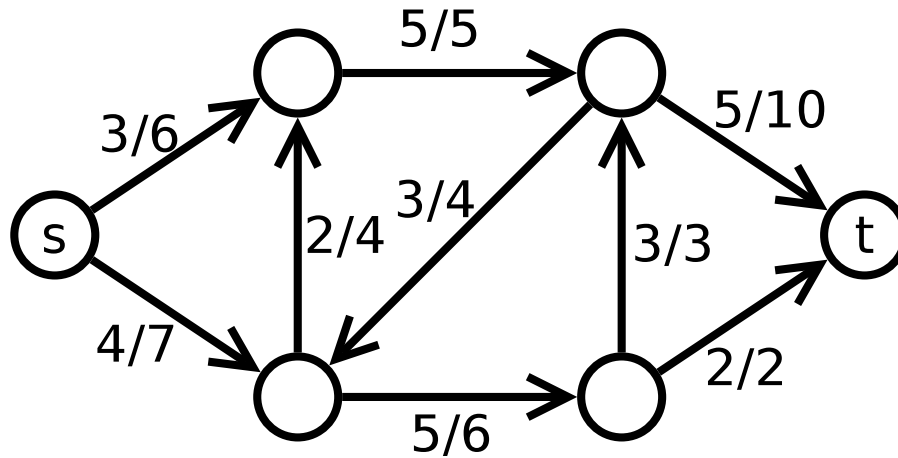


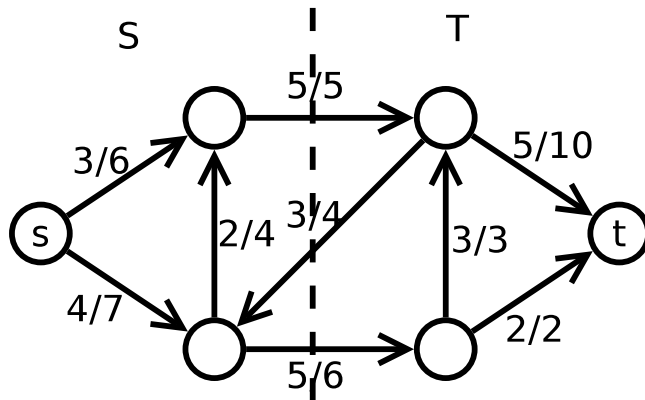
Abbildung 1.4: Beispiel für einen Fluss

### 1.1.2 Definition

$|f| \triangleq$  Fluss, der von  $s$  nach  $t$  transportiert wird.

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s) = \sum_{v \in V} f(v, t) - \sum_{v \in V} f(t, v)$$

**Gesucht:** maximaler Fluss  $|f|$

1.1.3 Definition: Schnitt  $(S, T)$ 

$$S \cup T = V \quad s \in S, t \in T$$

Schnittkapazität

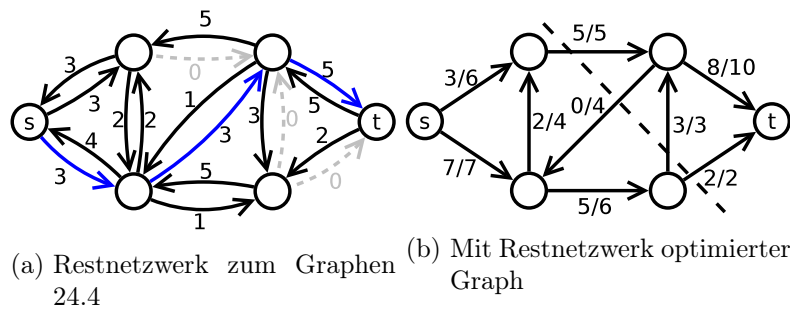
$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) = c(S, T)$$

Fluss über Schnitt

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u) \leq c(S, T)$$

Abbildung 1.5: Beispiel Schnitt

$$\begin{aligned}
 |f| &= \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s) + \overbrace{\sum_{u \in S \setminus \{s\}} \left( \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) \right)}^{=0} = \sum_{u \in S} \left( \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) \right) \\
 &= \sum_{u \in S} \left( \sum_{v \in S} f(u, v) + \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{v \in S} f(v, u) - \sum_{v \in T} f(v, u) \right) \\
 &= \left( \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u) \right) + \overbrace{\left( \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(v, u) \right)}^{=0} = f(S, T)
 \end{aligned}$$

1.1.4 Konstruktion des Restnetzwerk  $G_f$ 

$$|f| = f(S, T) \leq c(S, T)$$

## 1.2 Ford-Fulkerson-Algorithmus

```

1  f = 0;
2  do {
3      p = flussverbessernder Pfad im Restnetzwerk  $G_f$ ;
4       $c_{min}$  = kleinste Restkapazität der kanten von p;
5      erhöhe den Fluss  $f$  entlang von p um  $c_{min}$ 
6  } while (p  $\neq$  NULL);

```

# Abbildungsverzeichnis

|     |                                    |   |
|-----|------------------------------------|---|
| 1.1 | .....                              | 1 |
| 1.2 | .....                              | 2 |
| 1.3 | .....                              | 2 |
| 1.4 | Beispiel für einen Fluss . . . . . | 2 |
| 1.5 | Beispiel Schnitt . . . . .         | 3 |