

# Datenstrukturen und effiziente Algorithmen

## Blatt 4

Markus Vieth, David Klopp, Christian Stricker

17. November 2015



**Nr.1****Nr.2****a)**

Überlegung analog zur Vorlesung:

**m=3**

$$\begin{aligned} \exists \frac{2n}{6} \text{ Elemente} \leq p &\Rightarrow \text{Es existieren maximal } \frac{4n}{6} \text{ Elemente} \geq p \\ \exists \frac{2n}{6} \text{ Elemente} \geq p &\Rightarrow \text{Es existieren maximal } \frac{4n}{6} \text{ Elemente} \leq p \end{aligned}$$

**m=7**

$$\begin{aligned} \exists \frac{4n}{14} \text{ Elemente} \leq p &\Rightarrow \text{Es existieren maximal } \frac{10n}{14} \text{ Elemente} \geq p \\ \exists \frac{4n}{14} \text{ Elemente} \geq p &\Rightarrow \text{Es existieren maximal } \frac{10n}{14} \text{ Elemente} \leq p \end{aligned}$$

**b)**

Überlegung analog zur Vorlesung:

**m=3**

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + n + T\left(\frac{2n}{3}\right)$$

Akra-Bazzi:

$$g(n) = n, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad b_1 = 3 \quad b_2 = \frac{3}{2}$$

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$T(n) = n \left(1 + \int_1^n \frac{x}{x^2} dx\right) = n \left(1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx\right) = n (1 + [\ln(x)]_1^n) = n + n \ln(n) \in O(n \log(n)) \neq O(n)$$

Somit ist die Laufzeit für  $m = 3$  nicht linear.**m=7**

$$T(n) = T\left(\frac{n}{7}\right) + n + T\left(\frac{5n}{7}\right)$$

**Zu zeigen:**

$$\exists c > 0 : T(n) \leq c \cdot n$$

**Beweis:**

$$T(n) \leq c \cdot \frac{n}{7} + n + c \cdot \frac{5n}{7} \leq c \cdot n$$

$$c = 7 \Leftrightarrow n + n + 5n \leq 7n \Rightarrow \exists c > 0 : T(n) \leq c \cdot n \Rightarrow T(n) \in O(n)$$

Somit ist die Laufzeit für  $m = 7$  linear.

**Nr.3****a)**

$x$	Ergebnisse:
0	18
1	15
2	14
3	13
4	14
5	15
6	16
7	17
8	18
9	19
10	20
11	21
12	22
13	23

Für  $x = x_2 = 3$ , also dem Median der Menge  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , wird die Summe minimal.

**b)**

Beh:

 $\sum_{i=1}^n |x_i - x|$  wird minimal für  $x = x_{k+1}$ , d.h.  $x := \text{Median} \{x_1, \dots, x_n\}$ 

Bew:

Sei die Menge aller  $x_i$  sortiert. Teile die Summe in zwei gleich große Teilsummen, wobei Summe 1 kleiner als  $x_{k+1}$  und Summe 2 größer als  $x_{k+1}$  ist:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{2k+1} |x_i - x| \\
 &= \sum_{i=1}^k |x_i - x| + \sum_{i=k+2}^{2k+1} |x_i - x| + |x_{k+1} - x| \\
 &= kx - \sum_{i=1}^k x_i - kx + \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i + |x_{k+1} - x| \\
 &= \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^k x_i + |x_{k+1} - x|
 \end{aligned}$$

Für  $x = x_{k+1}$ :

$$= \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^k x_i$$

Für  $x \neq x_{k+1}$ :

Der Term  $|x_{k+1} - x|$  wird immer  $> 0$  und somit größer als der Fall  $x = x_k$ , d.h.  $\sum_{i=1}^n |x_i - x|$  ist genau dann minimal, wenn  $x = x_{k+1}$  ist.

**c)**

Beh:

 $\sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$  wird minimal für  $x = x_{k+1}$ , d.h.  $x := \text{Median} \{x_1, \dots, x_n\}$ 

Bew:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$$

$$f'(x) = - \sum_{i=1}^n 2(x_i - x)$$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^n 2$$

$f'(x) = 0 :$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n 2(x_i - x) = 0 \\ \Leftrightarrow & -2nx + \sum_{i=1}^n 2x_i = 0 \\ \Leftrightarrow & 2 \sum_{i=1}^n x_i = 2nx \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = x \end{aligned}$$

$x$  ist offensichtlich der Median. Da  $f''(x)$  immer größer als Null ist, handelt es sich bei  $x = x_{k+1}$  um ein Minimum.

*q.e.d*