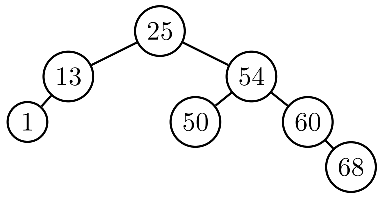
Beispiel-Klausuraufgaben

Aufgabe 1: Ja-Nein-Fragen (0 Punkte)

Prüfen Sie die Behauptungen oder beantworten Sie die Fragen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort (ohne Begründung 0 Punkte).

1. Ist $f \in \Omega(n)$ und $f(n) > 0\,\forall n$, dann $\frac{n^3}{f} \in O(n^2)$.
2. Mit Hilfe von Radixsort kann eine Menge $S \subset \mathbb{N}$ in $O(|S| \log(\max S))$ sortiert werden, wobei mit $\max S$ das größte Element in der Menge S bezeichnet wird.
3. In einer Skiplist mit n Elementen ist die erwartete Laufzeit der Suche $O(\log n)$, dafür ist der erwartete Speicherbedarf dieser Datenstruktur $\Omega(n \log n)$.
4. Ist h eine 2-universelle Hashingfunktion, m - die Größe der Hashtabelle, $n < m$ - die Anzahl der Elemente in der Tabelle, so wird die Suche nach einem Element auch in worst-case nur $O(1)$ brauchen.
5. Dieser AVL-Baum benötigt keine Rebalancierung.



Johannes Gutenberg-Universität Mainz · Staudingerweg 9 · D-55099 Mainz

Internet: http://www.informatik.uni-mainz.de/lehre/cg/

E-Mail:

Aufgabe 2: O-Notation und Rekurrenzen (0 Punkte)

(a) (3P) Beweisen oder widerlegen Sie:

$$2^{n+1} \in O(2^n) \qquad 2^{2n} \in O(2^n) \qquad \log(n!) \in O(n \log n)$$

(b) (3P) Geben Sie jeweils eine optimale, explizite Abschätzung des Wachstumsverhaltens (bzgl. O-Notation) der folgenden Rekurrenzen an (wobei $n \geq 1$ gilt) und begründen Sie diese:

$$T_1(n) = 2\,T_1(\tfrac{n}{2}) + n \lg n, \quad T_1(1) = 1 \qquad\qquad T_2(n) = 16\,T_2(\tfrac{n}{4}) + 3\,n^2, \quad T_2(1) = 0$$

Johannes Gutenberg-Universität Mainz · Staudingerweg 9 · D-55099 Mainz
Internet: http://www.informatik.uni-mainz.de/lehre/cg/
E-Mail:

Aufgabe 3: Summen auflösen (0 Punkte)

Berechnen Sie folgende Summen:

1. $\sum_{i=1}^{n} i$
2. $\sum_{i=0}^{n} 2^i$
3. $\sum_{i=1}^{n} i2^{n-i}$

Johannes Gutenberg-Universität Mainz · Staudingerweg 9 · D-55099 Mainz
Internet: http://www.informatik.uni-mainz.de/lehre/cg/
E-Mail:

Aufgabe 4: DSEA sucht den Superstar! (0 Punkte)

Ein Star ist eine Person, die jeder kennt, aber die selbst keinen kennt.

Sie gehen auf eine Party, auf der auch ein Star zu Gast ist. Bei der Party sind genau n Personen. Ihre Aufgabe ist es, den Star zu finden. Sie dürfen nur Fragen der Form "Kennt die Person A die Person B?" stellen. Darauf erhalten Sie die Antworten "ja" oder "nein". Entwickeln Sie eine Strategie, den Star mit nur $O(n)$ Fragen herauszufinden!

Johannes Gutenberg-Universität Mainz · Staudingerweg 9 · D-55099 Mainz
Internet: http://www.informatik.uni-mainz.de/lehre/cg/
E-Mail:

Aufgabe 5: Amortisierte Analyse (0 Punkte)

Eine Queue mit den Operationen **add** und **del** lässt sich auch mit zwei Stacks S und T implementieren. Die Operationen der Queue werden dann mit den Operationen der beiden Stacks wie folgt implementiert:

add(k):
  S.**push**(k)

del:
  if (T.is_empty)
    while (S.not_empty)
      T.**push**(S.**pop**)
  return(T.**pop**)

(a) Verdeutlichen Sie die Funktionsweise dieser Implementierung, indem Sie angeben, wie sich die beiden Stacks bei der Ausführung dieser Operationenfolge verändern:

add(1), **add**(2), **del**, **add**(3), **add**(4), **del**, **del**, **add**(5), **del**, **del**

(b) Wir nehmen an, dass **push** und **pop** jeweils den Aufwand 1 haben. Zeigen Sie, dass die Operationen **add** und **del** konstanten amortisierten Aufwand haben.

Johannes Gutenberg-Universität Mainz · Staudingerweg 9 · D-55099 Mainz
Internet: http://www.informatik.uni-mainz.de/lehre/cg/
E-Mail:

Aufgabe 6: Stochastische Überlegungen zum Thema „Klausuren“ (0 Punkte)

Wir betrachten einen Test, bei dem Fragen mit „ja“ oder „nein“ zu beantworten sind. Bei diesem Test werden 8 Fragen gestellt und die Antworten nach dem folgenden Schema bewertet:

Für jede richtige Antwort gibt es +1 Punkt, für jede falsche -1 Punkt, für eine nicht oder ungültig beantwortete Frage 0 Punkte. Insgesamt kann man bei diesem Test jedoch nicht weniger als 0 Punkte erhalten, so erhält man für 6 falsche und 2 richtige Antworten also 0 Punkte und nicht -4.

1. Ein Teilnehmer beantwortet alle Fragen, indem er zufällig „ja“ oder „nein“ nein ankreuzt, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Die Zufallsvariable X gebe die erreichte Punktzahl an. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$!

2. Eine Teilnehmerin hat vier Fragen richtig beantwortet und beantwortet nun die restlichen vier zufällig, mit gleicher Wahrscheinlichkeit für „ja“ und „nein“. Bestimmen Sie auch hier den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariable X der erreichten Punkte!

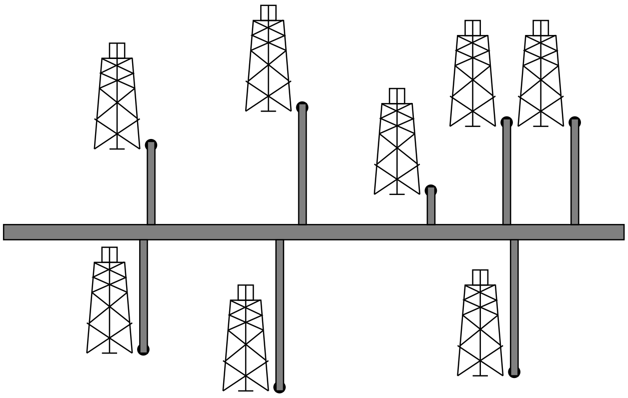
Hinweis: Eine Aufgabe mit so viel Rechnen mit Zahlen wird in der Klausur nicht vorkommen, da keine Taschenrechner als Hilfsmittel zugelassen sind.

Johannes Gutenberg-Universität Mainz · Staudingerweg 9 · D-55099 Mainz
Internet: http://www.informatik.uni-mainz.de/lehre/cg/
E-Mail:

Aufgabe 7: Suchen (0 Punkte)

(a) Sei m der Median des Arrays `A` mit n reellen Zahlen. Zeigen Sie: $\sum_{i=1}^{n} |\texttt{A}[i] - x|$, $x \in \mathbb{R}$ ist für $x = m$ minimal.

(b) Eine Ölgesellschaft möchte ein neues Fördergebiet erschließen. Inzwischen sind die Standorte der Ölquellen schon festgelegt und es muss nun noch eine Verbindungspipeline gebaut werden. Dabei soll die Hauptpipeline von Westen nach Osten verlaufen (horizontal) und jede Quelle mit einer Nord-Süd-Pipeline an diese angeschlossen werden.



Wir nehmen an, dass die Koordinaten der n Ölquellen als Array gegeben sind. Wie kann man in erwarteter $O(n)$ Laufzeit die Lage der Hauptpipeline in Ost-West-Richtung bestimmen, so dass die gesamte Länge der Nord-Süd-Pipelines minimal wird?

Johannes Gutenberg-Universität Mainz · Staudingerweg 9 · D-55099 Mainz

Internet: http://www.informatik.uni-mainz.de/lehre/cg/

E-Mail: