Datenstrukturen und effiziente Algorithmen
Blatt 3

Markus Vieth, David Klopp, Christian Stricker

10. November 2015

Nr.1

b)

Durch das zufällige Auswählen des Pivotelements, erreicht der Algorithmus eine durchschnittliche Laufzeit in $O(n)$ (siehe Vorlesung vom 10.11.15). Wenn immer das erste Element gewählt wird, ergibt sich:

$$T(n) = n + \frac{1}{n}T(1) + \frac{n-1}{n}T(n-1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n^2-i}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2-0}{n} + \frac{n^2-n}{n}\right)(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}(n+n-1)(n+1) = \frac{1}{2}(2n^2-n+2n+1) \in O(n^2) \supset O(n)$$

Nr.2

a)

Aufgabe: $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + 7n^3, T(1) = 1$

Mastertheoreme Fall 3: $a = b^\alpha$
$\Rightarrow a = 8, b = 2, \alpha = 3$
$\Rightarrow$ Laufzeit: $\theta(n^3 \log(n))$

b)

Aufgabe: $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + n \log n$

Akra-Bazzi
$\Rightarrow a = 2, b = 2, \alpha = \log_2(2) = 1$

$$\Rightarrow \theta(n \cdot (1 + \int_1^n \frac{x\log(x)}{x^2} dx))$$

$$= \theta(n \cdot (1 + \int_1^n \frac{\log(x)}{x} dx))$$

Nebenrechnung mit Partieller Integration: (Mit $\log(x) = \ln(x)$)

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln(x) \cdot \ln(x) - \int \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln(x) \cdot \ln(x) - \int \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)^2$$

Es ergibt sich somit:

$$= \theta(n \cdot (1 + [\frac{1}{2}\ln(x)^2]_1^n))$$

$$= \theta(n \cdot (1 + \frac{1}{2}\ln(n)^2))$$

$$= \theta(n \log(n)^2)$$

Nr.3

Gegeben: $U(n) = PU_{n-1} - QU_{n-2}$ mit $U_0 = 0, U_1 = 1$ und $P = 1, Q = -2$

Ansatz:

$$U(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n Z^n$$

$$= U_0 Z^0 + U_1 Z^1 + U(Z) + \sum_{n=2}^{\infty} (PU_{n-1} - QU_{n-2}) Z^n$$

$$= Z + \sum_{n=2}^{\infty} (U_{n-1} + 2 \cdot U_{n-2}) Z^n$$

$$= Z + \sum_{n=2}^{\infty} (U_{n-1} \cdot Z^n) + 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (U_{n-2} \cdot Z^n)$$

$$= Z + Z \sum_{n=2}^{\infty} (U_{n-1} \cdot Z^{n-1}) - 0 + 2Z^2 \sum_{n=2}^{\infty} (U_{n-2} \cdot Z^{n-2})$$

$$= Z + Z \sum_{n=0}^{\infty} (U_n \cdot Z^n) - 0 + 2Z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (U_n \cdot Z^n)$$

$$= Z + Z \cdot U(Z) + 2 \cdot Z^2 \cdot U(Z)$$

$$= \frac{-Z}{2Z^2 + Z - 1}$$

Nullstellen bestimmen:

$$2Z^2 + Z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow Z^2 + \frac{1}{2} \cdot Z - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{1}{2} \vee Z = -1$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{A}{Z-\frac{1}{2}}+\frac{B}{Z+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{A(Z+1)+B(Z-\frac{1}{2})}{(Z-\frac{1}{2})(Z+1)}$$
$$\Leftrightarrow Z(A+B)+A-\frac{1}{2}B$$

$$\Rightarrow A-\frac{1}{2}B=0$$
$$\Leftrightarrow A=\frac{1}{2}B$$

$$\Rightarrow A+B=-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}B+B=-1$$

$$\Rightarrow B=-\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow A=-\frac{1}{3}$$

Hauptrechnung:

$$U(Z)=\frac{-Z}{2Z^2+Z-1}$$
$$=(\frac{-\frac{1}{3}}{(Z-\frac{1}{2})}+\frac{-\frac{2}{3}}{(Z+1)})\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{(1-2Z)}-\frac{1}{(1+Z)})$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}(2Z)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-Z)^n)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}((2Z)^n-(-Z)^n)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot(2^n-(-1)^n)\cdot Z^n$$

$$\Rightarrow U_n=\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)$$