Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Institut für Informatik
Prof. Dr. Ernst Althaus

Datenstrukturen und effiziente Algorithmen
Klausur Wintersemester 2009/2010

Angaben über den/die Teilnehmer(in):

Name: .... Vornarme: ....

Matrikel-Nr.: .... Studiengang: ....

Codewort: .... Übungsleiter: ....

Über dieses Codewort können Sie später Ihr Klausurergebnis auf der Homepage der Veranstaltung erfahren.

Bewertung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
mögliche Punkte	9	5	8	15	16	8	5	14	20	100 (80=100%)
erreichte Punkte										

○ **bestanden**
○ **nicht bestanden**

Note:

Bemerkungen:

- Bearbeitungszeit für die Klausur: 180 Minuten
- Als Hilfsmittel ist ein handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt erlaubt. Es sind keine elektronischen Hilfsmittel (wie etwa Computer, Mobiltelefone, Taschenrechner, PDAs) zugelassen. Die Aufgaben dürfen nicht in roter Farbe oder mit Bleistift bearbeitet werden.
- Kontrollieren Sie die Klausur auf Vollständigkeit (9 Aufgaben) und einwandfreies Druckbild.
- Vergessen Sie nicht, die Angaben zur Person auf diesem Deckblatt zu machen und auf jedes einzelne Blatt Ihren Namen zu schreiben.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen nach Möglichkeit jeweils auf das Blatt zur Aufgabenstellung.
- Am Ende der Klausur finden Sie drei Zusatzseiten – sollten Sie diese benutzen, so verweisen Sie bitte bei der Aufgabe darauf und schreiben Sie auch auf diese Blätter Ihren Namen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (9 Punkte) Sortieren

(a) (6P) Geben Sie einen aus der Vorlesung bekannten Sortieralgorithmus an (mit Pseudocode), dessen worst-case Laufzeit $O(n \log n)$ ist. Begründen Sie kurz die Laufzeit.

(b) (3P) Ist dieser Algorithmus stabil? (Begründung!)

Aufgabe 2 (5 Punkte) Rekurrenzen

Geben Sie eine O-Abschätzung für das Wachstum an! Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ und $T_i(1) = 1$.

(a) (1P) $T_1(n) = 9\,T_1(\frac{n}{3}) + 5n$

(b) (1P) $T_2(n) = 63\,T_2(\frac{n}{2}) + 9n^6$

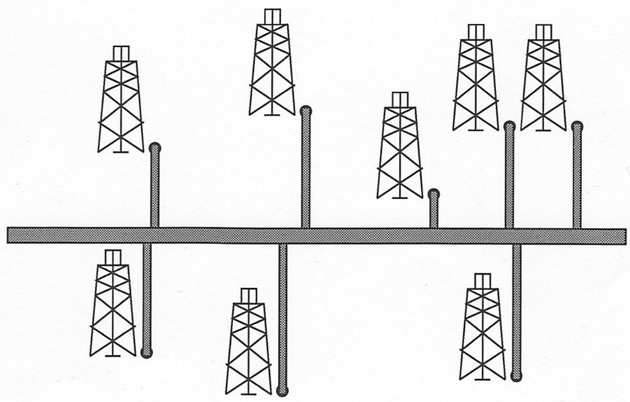
(c) (1P) $T_3(n) = 25\,T_3(\frac{n}{5}) + 13n^2$

(d) (2P) $T_4(n) = 2\,T_4(\frac{n}{4}) + 4\sqrt{n} \cdot \log n$

Aufgabe 3 (8 Punkte) Pipeline

(a) (4P) Sei m der Median des Arrays A mit n reellen Zahlen. Zeigen Sie: $\sum_{i=1}^{n} |\mathtt{A}[i] - x|$, $x \in \mathbb{R}$ ist für $x = m$ minimal.

(b) (4P) Eine Ölgesellschaft möchte ein neues Fördergebiet erschließen. Inzwischen sind die Standorte der Ölquellen schon festgelegt und es muss nun noch eine Verbindungspipeline gebaut werden. Dabei soll die Hauptpipeline von Westen nach Osten verlaufen (horizontal) und jede Quelle mit einer Nord-Süd-Pipeline an diese angeschlossen werden.



Wir nehmen an, dass die Koordinaten der n Ölquellen als Array gegeben sind. Wie kann man in erwarteter $O(n)$ Laufzeit die Lage der Hauptpipeline in Ost-West-Richtung bestimmen, so dass die gesamte Länge der Nord-Süd-Pipelines minimal wird?

Aufgabe 4 (15 Punkte) Amortisierte Analyse

Wir betrachten einen Binärzähler, der die Operationen **increment** und **reset** unterstützt, wobei **increment** den Zählerstand um 1 erhöht und **reset** den Zählerstand auf 0 setzt, indem alle Bits auf 0 gesetzt werden. Wir gehen davon aus, dass das Ändern eines Bits Aufwand 1 hat.

(a) (6P) Verwenden Sie die Potenzialmethode um zu zeigen, dass die Operationen **increment** und **reset** konstanten amortisierten Aufwand haben!

(b) (9P) Wir erweitern den Binärzähler um eine **dekrement**-Operation, die den Zählerwert um 1 verringert. Beweisen Sie, dass die Operationen **increment**, **dekrement** und **reset** keinen konstanten amortisierten Aufwand besitzen!

Aufgabe 5 (16 Punkte) MST

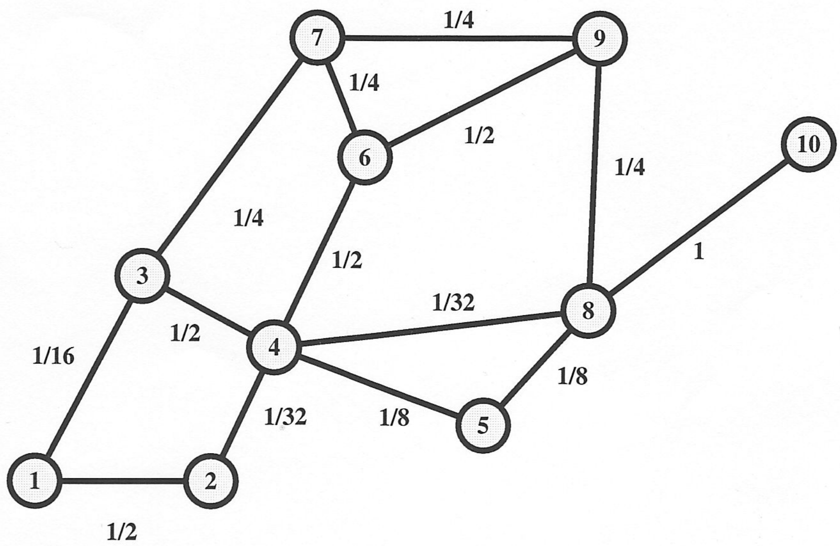
(a) (6P) Zeigen Sie: Gibt es für jeden Schnitt eines Graphen eine eindeutige Kante mit dem kleinsten Gewicht, so ist der MST dieses Graphen eindeutig.

(b) (2P) Zeigen Sie: Die Umkehrung der obigen Aussage gilt nicht.

(c) (8P) Sei T ein MST des Graphen $G = (V, E)$. Außerdem seien $V' \subset V$ und $G' := (V', E')$ mit $E' := \{\{v, u\} \in E \mid v, u \in V'\}$. Zeigen Sie: Ist der Graph (V', T') mit $T' := T \cap E'$ zusammenhängend, so ist T' ein MST des Graphen G'.

Aufgabe 6 (8 Punkte) Sicherste Übertragung

Gegeben sei das folgende Kommunikationsnetzwerk als Graph. Die Kantenbeschriftungen geben dabei die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Nachricht korrekt (ohne Fehler) über diese Leitung übertragen wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nachricht von A nach B korrekt übertragen wird, ergibt sich aus dem Produkt der Kantenwahrscheinlichkeiten, die auf dem Weg liegen.



(a) (5P) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der den sichersten Übertragungsweg für ein Paket von einem beliebigen Sender zu einem beliebigen (anderen) Empfänger findet. Zeigen Sie die Korrektheit dieses Algorithmus.

(b) (3P) Geben Sie den sichersten Übertragungsweg vom Sender 1 zum Empfänger 10 und die Wahrscheinlichkeit einer korrekten Übertragung an.

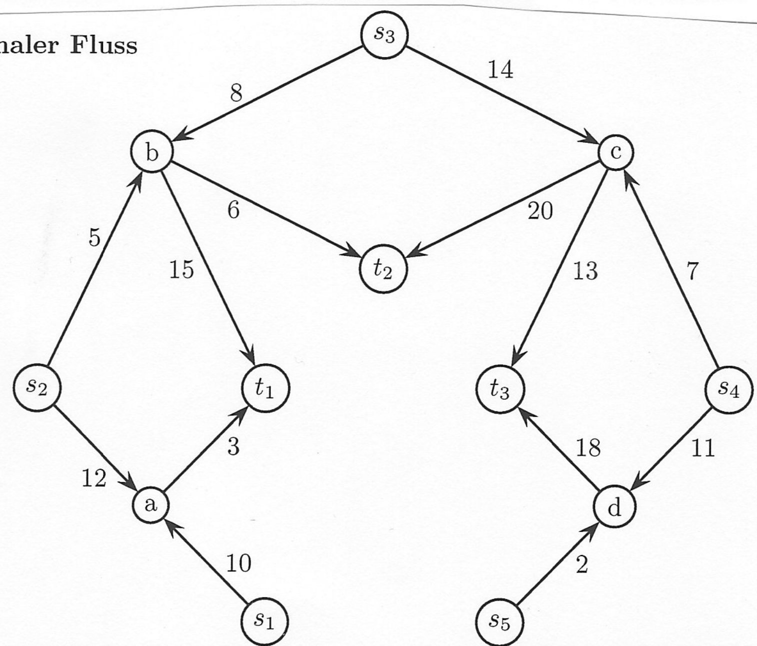
Aufgabe 7 (5 Punkte) Negative Zyklen

(a) (5P) Geben Sie einen Algorithmus an, der in einem gerichteten (nicht unbedingt stark zusammenhängenden) Graphen $G := (V, E)$ in $O(|V| \cdot |E|)$ bestimmt, ob es negative Zyklen gibt. Zeigen Sie die Korrektheit und die Laufzeitabschätzung.

Bemerkung: Es kann davon ausgegangen werden, dass $|V| \leq |E|$.

Aufgabe 8 (14 Punkte) Maximaler Fluss

Wir betrachten das abgebildete Netzwerk $G = (V, E)$ mit fünf Quellen $s_1, ..., s_5$ und drei Senken $t_1, ..., t_3$. Zu jeder Kante ist eine Kapazität angegeben.



Ein S-T-Fluss mit Quellen $S := \{s_1 \ldots, s_n\}$ und Senken $T := \{t_1 \ldots, t_k\}$ ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq f(e) \leq c(e) \, \forall e \in E$
- $\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e)$ für alle $v \in V \setminus (S \cup T)$

Der Wert eines Flusses ist $\sum_{v\in S}\left(\sum_{e\in\delta^+(v)} f(e) - \sum_{e\in\delta^-(v)} f(e)\right)$.

(a) (3P) Reduzieren Sie das Problem des maximalen Flusses in diesem Netzwerk auf das gewöhnliche Problem mit jeweils nur einer Quelle s und Senke t.

(b) (8P) Wenden Sie den Algorithmus von Ford-Fulkerson zur Bestimmung des Maximum Flow auf das neue Netzwerk an! Geben Sie den maximalen Fluss und das Restnetzwerk für den maximalen Fluss an.

(c) (3P) Bestimmen Sie einen minimalen S-T-Schnitt im vorgegebenen Netzwerk, wobei ein S-T-Schnitt eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist mit $S \subseteq U \subseteq V \setminus T$.

Aufgabe 9 (20 Punkte) Ja-Nein Fragen

Prüfen Sie die Behauptungen oder beantworten Sie die Fragen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort (ohne Begründung 0 Punkte).

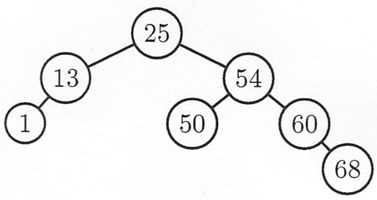
(a) (2P) Ist $f \in \Omega(n)$ und $f(n) > 0\,\forall n$, dann $\frac{n^3}{f} \in O(n^2)$.

(b) (2P) Mit Hilfe von Radixsort kann eine Menge $S \subset \mathbb{N}$ in $O(|S| \log(\max S))$ sortiert werden, wobei mit $\max S$ das größte Element in der Menge S bezeichnet wird.

(c) (2P) In einer Skiplist mit n Elementen ist die erwartete Laufzeit der Suche $O(\log n)$, dafür ist der erwartete Speicherbedarf dieser Datenstruktur $\Omega(n \log n)$.

(d) (2P) Ist h eine 2-universelle Hashingfunktion, m - die Größe der Hashtabelle, $n < m$ - die Anzahl der Elemente in der Tabelle, so wird die Suche nach einem Element auch in worst-case nur $O(1)$ brauchen.

(e) (2P) Dieser AVL-Baum benötigt keine Rebalancierung.



(f) (2P) Der Algorithmus zur Bestimmung der topologischer Sortierung kann feststellen, ob es Zyklen in einem Graphen gibt.

(g) (2P) In einem ungewichteten Graphen können die kürzesten Wege sowohl mit Hilfe von Breitensuche als auch mit Hilfe von Tiefensuche gefunden werden.

(h) (2P) Bei der Tiefensuche in einem Baum gibt es keine Vorwärtskanten.

(i) (2P) Der Kürzeste-Wege-Baum, der vom Dijkstra-Algorithmus für einen ungerichteten zusammenhängenden Graphen mit positiven Kantengewichten geliefert wird, ist ein MST.

(j) (2P) In einem bipartiten Graphen haben alle Zyklen gerade Anzahl von Kanten.