Datenstrukturen und effiziente Algorithmen

Markus Vieth David Klopp Christian Stricker

5. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Vorlesung

1.1 Minimal aufspannende Bäume MST

Eingabe

$$G = (V, E) \quad E \text{ ungerichtet} \quad (u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \in E \text{ mögliche Notation } \{u, v\}$$

$w : E \to \mathbb{R}$

Gesucht

$$\text{Baum } T \subseteq E$$

$$G_T = (V, T) \text{zusammenhängend (zykelfrei)}$$

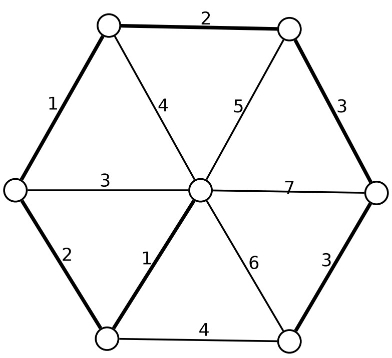
$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e) \text{minimal}$$

Frage $|T| = ?$

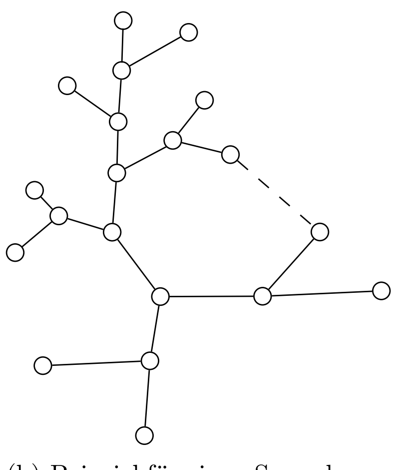
Antwort $|T| = |V| - 1$

1.1.1 Greedy-Algorithmen zur Lösung des MST-Problems:

Starte mit $T = \emptyset$, nehme sukzessive Kanten zu T hinzu, so dass nach $|V| - 1$ Schritten der gesuchte MST entstanden ist. Dabei benötigen wir ein Kriterium, das sicherstellt, dass gewählte Kanten zur Gesamtlösung dazugehören.



(a) Beispiel für einen Spannbaum in einem Graphen



(b) Beispiel für einen Spannbaum

1.1.2 Schnitt-Lemma:

Betrachte eine Aufteilung (Schnitt) der Knotenmenge V in V und $\overline{S} = V \setminus S$
und Kanten $(u, v) \in E \cap S \times \overline{S}$
Sei $e \in E \cap S \times \overline{S}$ mit $w(e) \leq w(e')$ $\forall$ $e' \in E \cap S \times \overline{S}$ dann gibt es einen MST mit $e \in$ MST

1.1.3 Beweis für das Schnitt-Lemma

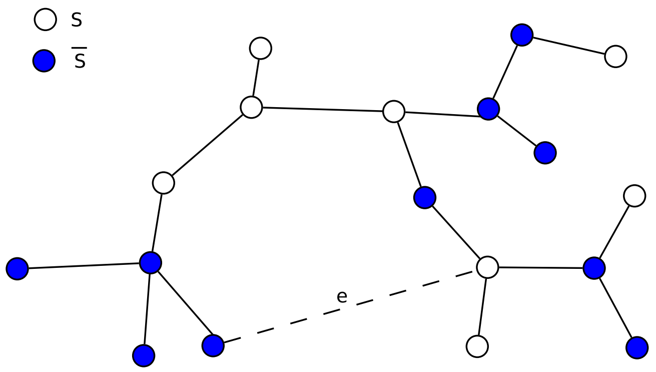


Abbildung 1.2

Sei e eine „sichere“ Kante aus dem Schnitt-Lemma.
o.B.d.A. $u \in S$ und $v \in \overline{S}$.
Es gibt eine Zykel in $T \cup \{e\}$ und darin eine Kante $e' \in S \times \overline{S}$ mit $w(e') \geq w(e)$.
Ersetze $T' = T \cup \{e\} \setminus \{e'\}$
$w(T') \leq w(T) \Rightarrow w(T') = w(T)$ weil T ein MST.

q.e.d.

Abbildungsverzeichnis