Datenstrukturen und effiziente Algorithmen
Blatt 1

Markus Vieth, David Klopp, Christian Stricker

29. Oktober 2015

Nr.1

a)

1.) Invariante: Verschiebe jede Zahl solange nach hinten im Array, wie der Nachfolger kleiner ist als die aktuelle Zahl.

2.) Schleifenbedingung: Solange mindestens eine Vertauschung stattgefunden hat, wiederhole die Schleife.

b)

<u>Worst-Case:</u> Liste in umgekehrter Reihenfolge
=> 1. Verschiebe erstes Element um n-1 Stellen
=> 2. Verschiebe zweites Element um n-2 Stellen
=> ....
Hieraus ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = (n-1) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} \in O(n^2)$$

c)

Kleine Elemente am Ende werden automatisch an den Anfang des Arrays bewegt, wenn die großen Elemente aufsteigen.
=> große Elemente am Anfang sind schlimmer, da diese den gesamten Array durchlaufen müssen.

d)

Da der Algorithmus eine "größer" und keine "größergleich" Operation durchführt, ist dieser stabil.

Nr.2

a)

<u>I.A.:</u> n = 0

$$\sum_{k=1}^{0} 2^k \cdot (k+1) = 0 \cdot 2^1$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

<u>I.B.:</u>

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot (k+1) = n \cdot 2^{n+1}$$

<u>I.V.:</u>
Die Behauptung gelte für ein festes n.

<u>I.S.:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k \cdot (k+1) = \sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot (k+1) + 2^{n+1}(n+2)$$

$$= 2^{n+1}(n+n+2)$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1}(n+1)$$

$$= 2^{n+2}(n+1)$$

$$q.e.d$$

b)

<u>I.A.:</u> n = 0

$$0 = 3 \cdot 0^2 + 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

<u>I.B.:</u>

$$\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = 3n^2 + n$$

<u>I.V.:</u>
Die Behauptung gelte für ein festes n.

<u>I.S.:</u>

$$\sum_{k=n+2}^{2n+2} 2k = \sum_{k=n+1}^{2n} 2k - 2(n+1) + 2(2n+1) + 2(2n+2)$$

$$= 3n^2 + n + 2(3n+2)$$

$$= 3(n^2 + 2n + 1) + (n+1)$$

$$= 3(n+1)^2 + (n+1)$$

$$q.e.d$$

c)

I.A.: Vermutung: m = 1, wähle n = 0

$$0 = 0! - 1$$
$$\Leftrightarrow 0 = 1 - 1$$
$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

I.B.:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

I.V.:
Die Behauptung gelte für ein festes n.

I.S.:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)!$$
$$= (n+1)! \cdot (1 + n + 1) - 1$$
$$= (n+1)! \cdot (n+2) - 1$$
$$= (n+2)! - 1$$
$$q.e.d$$

Nr. 3

a)

$$\log_b a \cdot \log_c b - \log_c a = \log_c b^{\log_b a} - \log_c a = \log_c a - \log_c a = 0$$

b)

$$\log_b \left(\frac{a}{b}\right)^c - c \cdot \log_b a = c \cdot \log_b a - c \cdot \log_b b - c \cdot \log_b a = -c \log_b b = -c$$

c)

$$2 \log_b \sqrt{ab} + \log_2 \frac{1}{\sqrt{a}} \log_b 4 = 2 \log_b (ab)^{\frac{1}{2}} + \log_2 a^{-\frac{1}{2}} \log_b 2^2 = \log_b(ab) - \log_2 a \cdot \log_b 2$$
$$= \log_b a + \log_b b - \log_b 2^{\log_2 a} = \log_b a + 1 - \log_b a = 1$$

d)

$$\left(b^{\frac{1}{d} \cdot \log_b c}\right)^d \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \left(b^{\log_b c}\right) \cdot \frac{1}{c} - \frac{1}{2} = c \cdot \frac{1}{c} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$