

Datenstrukturen und effiziente Algorithmen

Blatt 4

Markus Vieth, David Klopp, Christian Stricker

16. November 2015

Nr.1**Nr.3****a)**

x	Ergebnisse:
0	18
1	15
2	14
3	13
4	14
5	15
6	16
7	17
8	18
9	19
10	20
11	21
12	22
13	23

Für $x = x_2 = 3$, also dem Median der Menge $\{x_1, x_2, x_3\}$, wird die Summe minimal.

b)

Beh:

 $\sum_{i=1}^n |x_i - x|$ wird minimal für $x = x_{k+1}$, d.h. $x := \text{Median} \{x_1, \dots, x_n\}$

Bew:

Sei die Menge aller x_i sortiert. Teile die Summe in zwei gleich große Teilsummen, wobei Summe 1 kleiner als x_{k+1} und Summe 2 größer als x_{k+1} ist:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{2k+1} |x_i - x| \\
 &= \sum_{i=1}^k |x_i - x| + \sum_{i=k+2}^{2k+1} |x_i - x| + |x_{k+1} - x| \\
 &= kx - \sum_{i=1}^k x_i - kx + \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i + |x_{k+1} - x| \\
 &= \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^k x_i + |x_{k+1} - x|
 \end{aligned}$$

Für $x = x_{k+1}$:

$$= \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^k x_i$$

Für $x \neq x_{k+1}$:

Der Term $|x_{k+1} - x|$ wird immer > 0 und somit größer als der Fall $x = x_k$, d.h. $\sum_{i=1}^n |x_i - x|$ ist genau dann minimal, wenn $x = x_{k+1}$ ist.

c)

Beh:

 $\sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$ wird minimal für $x = x_{k+1}$, d.h. $x := \text{Median} \{x_1, \dots, x_n\}$

Bew:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 \\
 f'(x) &= -\sum_{i=1}^n 2(x_i - x) \\
 f''(x) &= \sum_{i=1}^n 2
 \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 :$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n 2(x_i - x) = 0 \\ \Leftrightarrow & -2nx + \sum_{i=1}^n 2x_i = 0 \\ \Leftrightarrow & 2 \sum_{i=1}^n x_i = 2nx \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = x \end{aligned}$$

x ist offensichtlich der Median. Da $f''(x)$ immer größer als Null ist, handelt es sich bei $x = x_{k+1}$ um ein Minimum.

q.e.d