

Datenstrukturen und effiziente Algorithmen

Blatt 5

Markus Vieth, David Klopp, Christian Stricker

27. November 2015

Teil I

Vorlesung 12

1 (a,b)-Suchbäume

Blattorientierte Speicherung der Elemente

Innere Knoten haben mindestens a und höchstens b Kinder und tragen entsprechende Schlüsselwerte, um die Suche zu leiten.

Beispiel:

$$h \hat{=} \text{Tiefe} \Rightarrow a^h \leq n \leq b^h \Rightarrow \log_b n \leq h \leq \log_a n$$

1.1 Aufspaltung bei Einfügen

1.2 Verschmelzen von Knoten beim Löschen

Aufspalte- und Verschmelze-Operationen können sich von der Blattebene bis zur Wurzel kaskadenartig fortpflanzen. Sie bleiben aber auf den Suchpfad begrenzt.

\Rightarrow Umbaukosten sind beschränkt durch die Baumtiefe $= O(\log n)$

2 Amortisierte Analyse

	000	
	001	Kosten(1) = 1
	010	= 2
	011	= 1
Beispiel: Binärzähler	100	= 3
	101	= 1
	110	= 2
	111	= 1
		$\overline{11}$

Naive Analyse $2^k = n$

$$1 \cdot \frac{n}{2} + 2 \cdot \frac{n}{4} + 3 \cdot \frac{n}{8} + \dots + k \cdot \frac{n}{2^k} = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^k i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = 2^{k+1} - k - 2 = 2n - k - 2$$

Von 0 bis n im Binärsystem zu zählen kostet $\leq 2n$ Bit-Flips

Sprechweise: amortisierte Kosten einer Inkrement-Operation sind 2

Folge von n -Ops kostet $2n$

2.1 Bankkonto-Methode

$$\text{Konto}(i+1) = \text{Konto}(i) - \text{Kosten}(i) + \text{Einzahlung}(i)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{Kosten}(i) &= \text{tatsächliche Gesamtkosten} = \sum_{i=1}^n (\text{Einzahlung}(i) + \text{Konto}(i) - \text{Konto}(i+1)) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Einzahlung}(i) + \text{Konto}(1) - \text{Konto}(n+1) \end{aligned}$$

000	
001€	Kosten(1) = 1
01€0	= 2
01€1€	= 1
1€00	= 3
1€01€	= 1
1€1€0	= 2
1€1€1€	= 1
	$\overline{11}$

2.1.1 Kontoführungsschema: für Binärzähler

1 € pro 1 in der Binärdarstellung

Jeder Übergang $1€ \rightarrow 0$ kann dann mit dem entsprechenden Euro Betrag auf dieser 1 bezahlt werden.

Es gibt pro Inkrement Operation nur einen $0 \rightarrow 1$ Übergang

2 € Einzahlung für jede Inc-Operation reichen aus um:

1. diesen $0 \rightarrow 1$ Übergang zu bezahlen
2. die neu entstandene 1 € mit einem Euro zu besparen.

$$\text{GK} = 2(2^k - 1) + 0^1 - k^2 = 2n - k - 2$$

¹Zählerstand(000)

²Zählerstand($\overbrace{111 \dots 1}^k$)