

Datenstrukturen und effiziente Algorithmen

Blatt 4

Markus Vieth, David Klopp, Christian Stricker

25. November 2015

Nr.1**Erklärung:**

Eingabe: Integer k für Anzahl an Farben, Integer l für Anzahl an Muster. Ein $2 \times 2n$ Array. In der ersten Zeile stehen die Farben in Integer codiert, in der zweiten Zeile analog für die Muster (bei 5 verschiedenen Muster/Farben gibt es die Integerwerte 0-4, jeder Wert steht für eine Farbe).

Algorithmus: Man iteriert über das Eingabearray und speichert die Anzahl der jeweiligen Farben in ein Array. Dann wird nochmal über das Array iteriert, wenn an der i-ten Stelle, die Socke mit falsche Farbe n steht, wird diese mit einer anderen Socke im n Bereich vertauscht.

Danach wird für jeden Farbbereich analog zum Farbensortieren nach Muster sortiert (Anzahl der Muster bestimmen, an die richtige Stelle tauschen).

Damit kommt eine Laufzeit von $O(n+k+k \cdot l)$. Im Worst Case, wenn $k=l=n$ wäre, beträgt die Laufzeit $O(n^2)$.

$O(4 \cdot n)$, da man 2 mal über das ganze Array iteriert, um die Anzahl (an Farben/Muster) zu bestimmen

$O(8 \cdot n)$, da höchstens n-mal vertauscht wird, 2n Zugriffe zum Zwischenspeichern, 4n Zugriffe zum Überschreiben und 2n Zugriffe für die Zwischenspeicherungen wieder zu speichern.

Analog beim Mustertauschen.

Der Platzverbrauch ist $4n$ (Für das Eingabe $2 \times 2n$ Array) + $2k$ (für sockenarray) + $2l$ (musteranzahl-array) \Rightarrow höchstens $8n$ (Bei n verschiedenen Farben und n verschiedene Muster)

Code:

```
public class Suche1 {

    static int[][] schrank = {{2,2,1,2,1,0,2,0,1,2,2,1,0,0,0,0},
                              {2,1,0,2,0,2,1,0,0,1,0,2,0,2,0,2}};
    static int l = 3;          //Anzahl der Muster
    static int k = 3;          //Anzahl der Farben
    static int n = 8;          //Anzahl der Sockenpaare

    public static void main(String[] args){
        //Erstelle 2xk Array, erste Zeile kommen die Anzahl der einzelnen
        //Farben rein, zweite Zeile der Index vom Pointer
        int[][] socke = new int[2][k];

        //Die Anzahl der Farben werden ermittelt
        for(int i = 0; i < 2*n; i++){
            socke[0][schrank[0][i]]++;

            //Die Anfangsindexe der Farben für das Hauptarray werden
            //berechnet und abgespeichert
            for(int i = 1; i < k; i++){
                socke[1][i] = socke[0][i-1]+socke[1][i-1];
            }

            int i = 0;
            int farbe = 0;      //Die Farbe 0 wird ausgewählt
            int index = socke[1][farbe+1]; //Der Anfangsindex für die
            //nächste Farbe/Endindex für die erste Farbe wird ausgewählt
        }
    }
}
```

```

int var = schrank[0][i];           //derzeitige Farbe aus dem
    Schrank, die verglichen und einsortiert wird

//Die Farben werden von 0-k in der richtigen Reihenfolge
    sortiert.
while(i < n){

    //Wenn die Socken für die eine Farbe schon eingeordnet
        sind, geht es weiter zur nächsten Farbe
    if(i >= index){
        farbe++;
        index = index + socke[0][farbe];
    }

    //Wenn die Farben schon an der richtigen stelle stehen,
        wird der Laufindex erhöht
    while(i < 2*n && var == farbe){
        i++;
        var = schrank[0][i];
    }

    //Solange der Laufindex nicht bei der nächsten Farbe
        ankommt, wird getauscht. Die Farben, die nicht zur
        (wenn farbe = 0 ausgewählt ist) 0-ten Farbe gehören,
        werden in den richtige Farbenteil getauscht
    if(i < index && i<n){
        swap(i, socke[1][var], schrank);    //
            Tauscht farbe an der Position i mit einer
            Farbe im Zielbereich
        socke[1][var]++;
                                           //Pointer wird
            erhöht
        var = schrank[0][i];
                                           //die Farbe, auf die der Pointer
            zeigt, wird aktualisiert
    }
}

//Anzeige des Arrays
System.out.println("Nur nach Farben sortiert:");
for(int b = 0; b < 4*n; b++){
    if(b<2*n) System.out.print(schrank[0][b]+" ");
    if(b == 2*n) System.out.println("");
    if(b>=2*n) System.out.print(schrank[1][b % (2*n)
        ]+" ");
}
System.out.println("");

```

```

//Die Anfangsindizes der Farben für das Hauptarray werden
    berechnet und abgespeichert
for( i = 1; i < k; i++)
    socke[1][i] = socke[0][i-1]+socke[1][i-1];

//in dem Array wird in der ersten Spalte die Anzahl der
    jeweiligen Muster in einer Farbe gespeichert, in der zweiten
    Spalte die Anfangspointer im Gesamtarray
int[][] musteranzahl;
int j = 0;          //äußerer Schleifenzähler

while(j < k){      //Wie viele Farben es gibt, so oft wird die
    Schleife durchlaufen

        int muster = 0;
        musteranzahl = new int[2][1];

        //Bestimme die Anzahl der jeweiligen Muster
        for(i = socke[1][j]; i < socke[1][j] + socke
            [0][j]; i++){
            int o = schrank[1][i];
            musteranzahl[0][o]++;
        }

        //Ende des Teilarrays des (ersten) Musters in der
            (ersten) Farbe
        index = musteranzahl[0][0] + socke[1][j];

        i = socke[1][j];          //Es wird einmal durch den
            Bereich des Arrays einer Farbe durchiteriert
        musteranzahl[1][0] = i;

        //Bestimme die Laufindizes der Einzelnen Muster in dem
            Teilarray von Schrank
        for(int m = 0; m < l-1; m ++ ){
            musteranzahl[1][m+1] = musteranzahl[0][
                m] + musteranzahl[1][m];
        }

        while(i < socke[1][j] + socke[0][j]){
            if(i >= index){
                muster++;
                index = index + musteranzahl
                    [0][muster];
            }

            //Wenn das Muster schon an der richtigen
                stelle stehen, wird der Laufindex erhöht

```

```

        while(i < socke[1][j] + socke[0][j] &&
               schrank[1][i] == muster)
            i++;

        //Solange der Laufindex nicht bei dem nächsten
        //Muster ankommt, wird getauscht. Das Muster,
        //das nicht zur (wenn muster = 0 ausgewählt
        //ist) 0-ten Muster gehören, werden in das
        //richtige Musterteil getauscht
        if(i < index){
            int musterindex = schrank[1][i];
            swap(i,musteranzahl[1][
                musterindex],schrank);
            musteranzahl[1][musterindex]++;
        }
    }
    j++;
    if(j==2)
        System.out.println("h");
}

//Anzeige des Arrays
System.out.println("");
System.out.println("nach_Farben_und_Muster_sortiert:");
;
for(int b = 0; b < 4*n; b++){
    if(b<2*n)System.out.print(schrnk[0][b]+" ");
    if(b == 2*n) System.out.println("");
    if(b>=2*n)System.out.print(schrnk[1][b % (2*n)
        ]+" ");
}

}

//Vertauschung der Elemente vom Indize i mit j
private static void swap(int i, int j, int[][] schrank2) {
    int a = schrank2[0][i]; //Werte zwischenspeichern
    int b = schrank2[1][i];
    schrank2[0][i] = schrank2[0][j];
    schrank2[1][i] = schrank2[1][j];
    schrank2[0][j] = a;
    schrank2[1][j] = b;
}
}

```

Nr.2**a)**

Überlegung analog zur Vorlesung:

m=3

$$\exists \frac{2n}{6} \text{ Elemente} \leq p \Rightarrow \text{Es existieren maximal } \frac{4n}{6} \text{ Elemente} \geq p$$

$$\exists \frac{2n}{6} \text{ Elemente} \geq p \Rightarrow \text{Es existieren maximal } \frac{4n}{6} \text{ Elemente} \leq p$$

m=7

$$\exists \frac{4n}{14} \text{ Elemente} \leq p \Rightarrow \text{Es existieren maximal } \frac{10n}{14} \text{ Elemente} \geq p$$

$$\exists \frac{4n}{14} \text{ Elemente} \geq p \Rightarrow \text{Es existieren maximal } \frac{10n}{14} \text{ Elemente} \leq p$$

b)

Überlegung analog zur Vorlesung:

m=3

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + n + T\left(\frac{2n}{3}\right)$$

Akra-Bazzi:

$$g(n) = n, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad b_1 = 3 \quad b_2 = \frac{3}{2}$$

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$T(n) = n \left(1 + \int_1^n \frac{x}{x^2} dx\right) = n \left(1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx\right) = n(1 + [\ln(x)]_1^n) = n + n \ln(n) \in O(n \log(n)) \neq O(n)$$

Somit ist die Laufzeit für $m = 3$ nicht linear.**m=7**

$$T(n) = T\left(\frac{n}{7}\right) + n + T\left(\frac{5n}{7}\right)$$

Zu zeigen:

$$\exists c > 0 : T(n) \leq c \cdot n$$

Beweis:

$$T(n) \leq c \cdot \frac{n}{7} + n + c \cdot \frac{5n}{7} \leq c \cdot n$$

$$c = 7 \Leftrightarrow n + n + 5n \leq 7n \Rightarrow \exists c > 0 : T(n) \leq c \cdot n \Rightarrow T(n) \in O(n)$$

Somit ist die Laufzeit für $m = 7$ linear.

Nr.3**a)**

x	Ergebnisse:
0	18
1	15
2	14
3	13
4	14
5	15
6	16
7	17
8	18
9	19
10	20
11	21
12	22
13	23

Für $x = x_2 = 3$, also dem Median der Menge $\{x_1, x_2, x_3\}$, wird die Summe minimal.

b)

Beh:

$\sum_{i=1}^n |x_i - x|$ wird minimal für $x = x_{k+1}$, d.h $x := \text{Median } \{x_1, \dots, x_n\}$

Bew:

Sei die Menge aller x_i sortiert, sonst führe eine Permutation aus, so das die Menge aller x_i sortiert ist.

1. Fall $x \neq x_i \forall i \in [1, n]$:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} |x_i - x| = \sum_{i=1}^{j-1} |x_i - x| + \sum_{i=j+1}^{2k+1} |x_i - x| + |x_j - x|, \quad j \in [1, n]$$

2. Fall $\exists j \in [1, n] \setminus \{k\} : x = x_j$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2k+1} |x_i - x| &= \sum_{i=1}^{j-1} |x_i - x| + \sum_{i=j+1}^{2k+1} |x_i - x| + |x_j - x| = \sum_{i=1}^{j-1} |x_i - x| + \sum_{i=j+1}^{2k+1} |x_i - x| \\ &= (j-1)x - \sum_{i=1}^{j-1} x_i - (2k+2-j-1)x + \sum_{i=j+1}^{2k+1} x_i = (j-1)x - (2k-j+1)x + \sum_{i=j+1}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^{j-1} x_i \\ &= (2j-2k-2)x + \sum_{i=j+1}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^{j-1} x_i = 2(j-1-k)x + \sum_{i=j+1}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^{j-1} x_i \leq 1. \text{ Fall} \end{aligned}$$

2. Fall ist minimal, wenn $(j-1-k) = 0 \Leftrightarrow j = k+1$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} |x_i - x| = 2(k+1-1-k)x + \sum_{i=k+1+1}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^{k+1-1} x_i = 2(0)x + \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=k+2}^{2k+1} x_i - \sum_{i=1}^k x_i$$

c)

Beh:

 $\sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$ wird minimal für $x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$, d.h. $x :=$ arithmetisches Mittel von $\{x_1, \dots, x_n\}$

Bew:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$$

$$f'(x) = - \sum_{i=1}^n 2(x_i - x)$$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^n 2$$

$$\underline{f'(x) = 0 :}$$

$$- \sum_{i=1}^n 2(x_i - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2nx + \sum_{i=1}^n 2x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n x_i = 2nx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = x$$

Da $f''(x)$ immer größer als Null ist, handelt es sich bei $x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$ um ein Minimum.
q.e.d