Datenstrukturen und effiziente Algorithmen

Markus Vieth David Klopp

19. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Sortieren

1. Vorlesung

1.1. Bubblesort

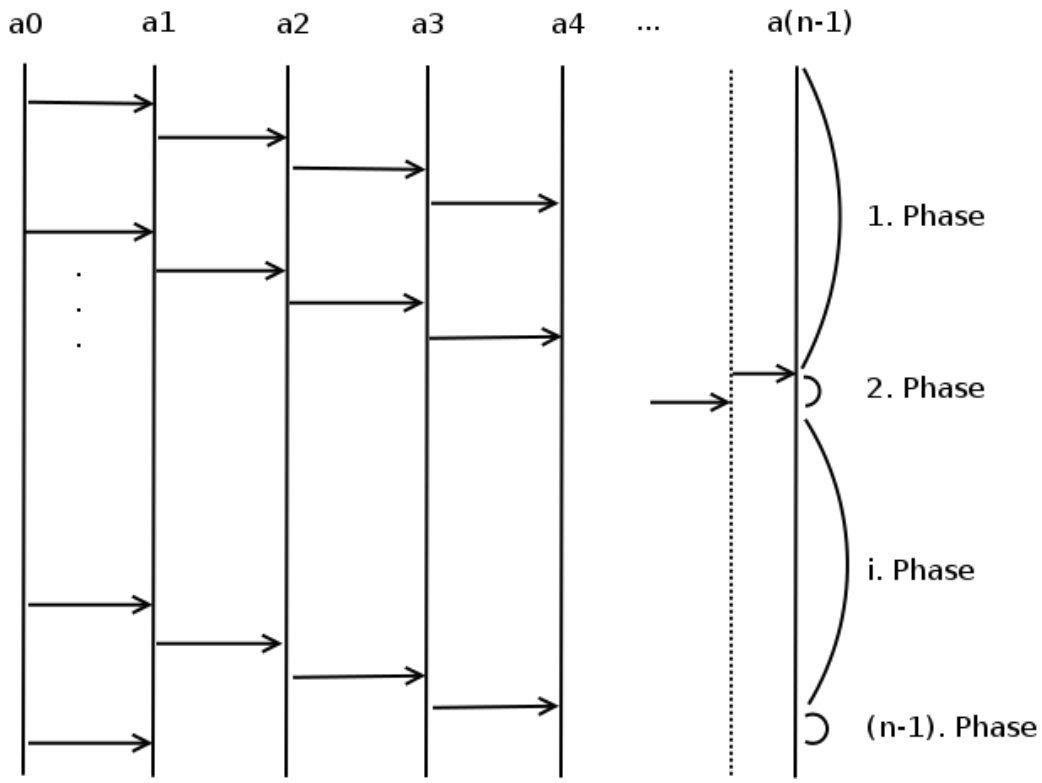


Abbildung 1.1.: Bubblesort

1.1.1. Pseudocode

```
1 void bubblesort (int[] a) {
2   int n = a.length;
3   for (int i = 1; i < n; i++) {
4     for (int j = 0; j < n-i; j++) {
5       if (a[j] < a[j+1])
6         swap (a, j, j+1);
7     }
8   }
9 }
```

Schleifen-Invariante: Nach dem Ablauf der i-ten Phase gilt:

Die Feldpositionen n-i,...,n enthalten die korrekt sortierten Feldelemente

Beweis durch Induktion nach i $\overset{i=n-1}{\Longrightarrow}$ Sortierung am Ende korrekt.

1.1.2. Laufzeitanalyse

$T(n)$ = Zahl der durchgeführten Elementvergleiche für eine Eingabemenge von n Elementen

1.	Phase	n-1
2.	Phase	n-1
3.	Phase	n-1
	⋮	
i.	Phase	n-1
	⋮	
(n-1).	Phase	n-1
$1+2+3+\ldots+(n+1)$		

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \in O(n^2)$$

n	T_{real}
2^{10}	8ms
2^{11}	11ms
2^{12}	26ms
⋮	
2^{16}	5,819s
2^{17}	23,381s
⋮	
2^{20}	16min
⋮	
2^{26}	52d

$$T_{real}(n) \approx cn^2 \quad c \approx 10^{-6}$$

$$T_{real}(2n) \approx c \cdot (2n)^2 = 4cn^2 = 4T_{real}(n)$$

$$\frac{T_{real}(2n)}{T_{real}(n)} = 4$$

1.2. Heapsort

z.B. 21 6 4 7 12 5 3 11 14 17 19 8 9 10 42

Skizze

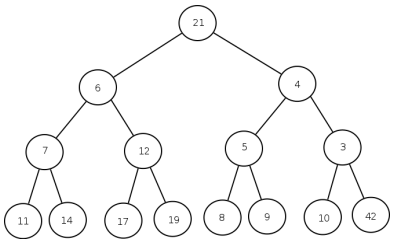


Abbildung 1.2. Heapsort (Ausgangssituation)

Indices innerhalb der Baumstruktur

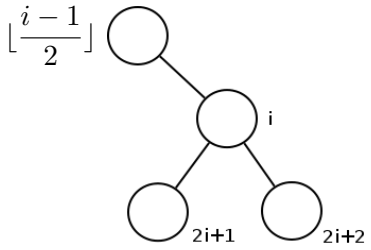
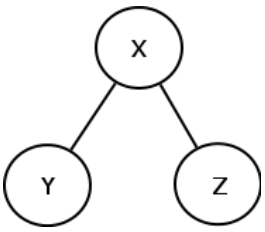


Abbildung 1.3.: Indices

Heap-Eigenschaft



$x \geq y$
$x \geq z$

Abbildung 1.4.: Heap-Eigenschaft

1.2.1. Idee

Phase 1 Stelle die Heap-Eigenschaft überall her
$\Rightarrow$ größtes Element steht in der Wurzel

Phase 2 Tausche Wurzel mit letztem Feldelement
(z.B. 42 mit 3)
- Entferne letztes Feldelement aus dem Baum
- Gehe erneut zu Phase 1

2. Vorlesung

Heapsort (Fortsetzung)

2.1. Pseudocode

```
1  void heapify (int[] a, int i, int n) {
2    while (2i + 1 < n) {       //linkes Kind von i existiert
3      int j = 2i + 1;
4      if (2i + 2 < n)          //rechtes Kind von i existiert
5        if (a[j] < a[j+1])
6          j = j + 1;           //j steht für Index des größten Kindes
7      if (a[i] > a[j])         //Vater größer als Kind
8        break;              //Abbruch, weil heap bereits erfüllt
9      swap(a,i,j);          //Tausch zwischen Vater und Kind
10     i = j;
11   }
12 }
```

2.1.1. Phase: Bottom-up Strategie zum Heapaufbau

```
1  for (int i = n/2; i ≥ 0; i--)
2    heapify(a,i,n);
```

2.1.2. Phase: Sortierphase

```
1  for (int i = n-1; i ≥ 0; i--) {
2    swap(a,0,i);
3    heapify(a,0,i);
4  }
```

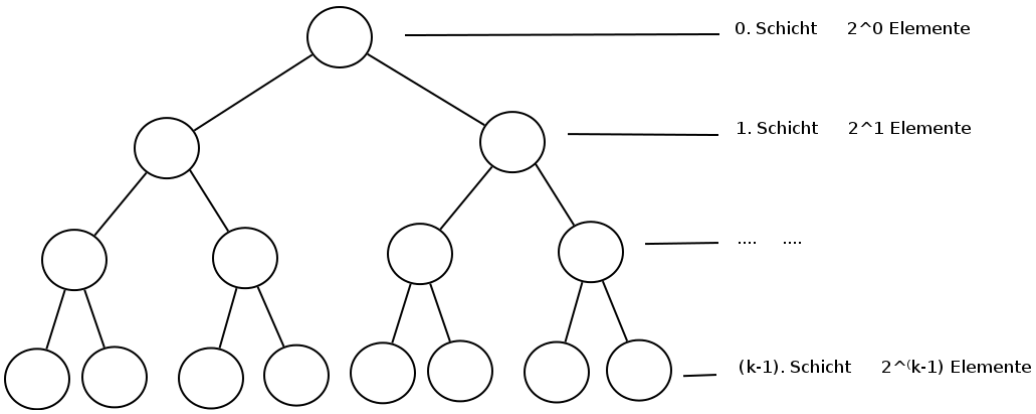
2.2. Korrektheitsbetrachtung

Invariante beim Heapaufbau: Beim Durchlauf der for-Schleife wird die Heapeigenschaft vom unteren Baumlevel bis zur Wurzel hergestellt.

Invariante für Sortierphase: Nach jedem weiteren Durchlauf der for-Schleife findet ein weiteres Element am Feldende seinen „richtigen Platz“.

2.3. Laufzeitanalyse

$T(n)$ = Zahl der Elementvergleiche.



$n :=$ Zahl der Elemente
$k :=$ Zahl der Schichten

2.3.1. Zusammenhang von n und k

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$$

Merke: Geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{k-1} x^i = \frac{1 - x^k}{1 - x} \quad \text{mit } x \neq 1$$

2.3.2. Analyse Heapaufbau

$$\sum_{l=0}^{k-1} 2^l(k-1-l)$$

$2^l :=$ Anzahl Knoten auf Level l
$(k-1-l) :=$ Leveldifferenz zwischen l und der Blattebene

$$\sum_{l=0}^{k-1}(k-1-l)\cdot 2^l = \sum_{l=0}^{k-1}(k-1)\cdot 2^l - \sum_{l=0}^{k-1} l\cdot 2^l = (k-1)(2^k-1) - 2\sum_{l=1}^{k-1} l2^{l-1}$$

Nebenrechnung

$$\sum_{i=1}^{k-1} i\cdot x^{i-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^k-1}{x-1}\right)$$
$$= \frac{kx^{k-1}(x-1)-(x^k-1)}{(x-1)^2}$$
mit $x=2$ folgt: $\quad k\cdot 2^{k-1} - 2^k + 1$

$$= (k-1)(2^k-1) - k2^k + 2^{k+1} - 2$$
$$= k2^k - 2^k - k + 1 - k2^k + 2^{k+1} - 2$$
$$= -2^k - k - 1 + 2^{k+1} \leq 2^{k+1} \approx 2\cdot n$$

$\Rightarrow$ Heapaufbau in lineare Zeit

2.3.3. Sortierphase

1. Versuch $n\cdot k \quad$ mit $n = 2^k - 1 \Leftrightarrow k = \log_2(n+1) \approx n\cdot\log_2(n)$

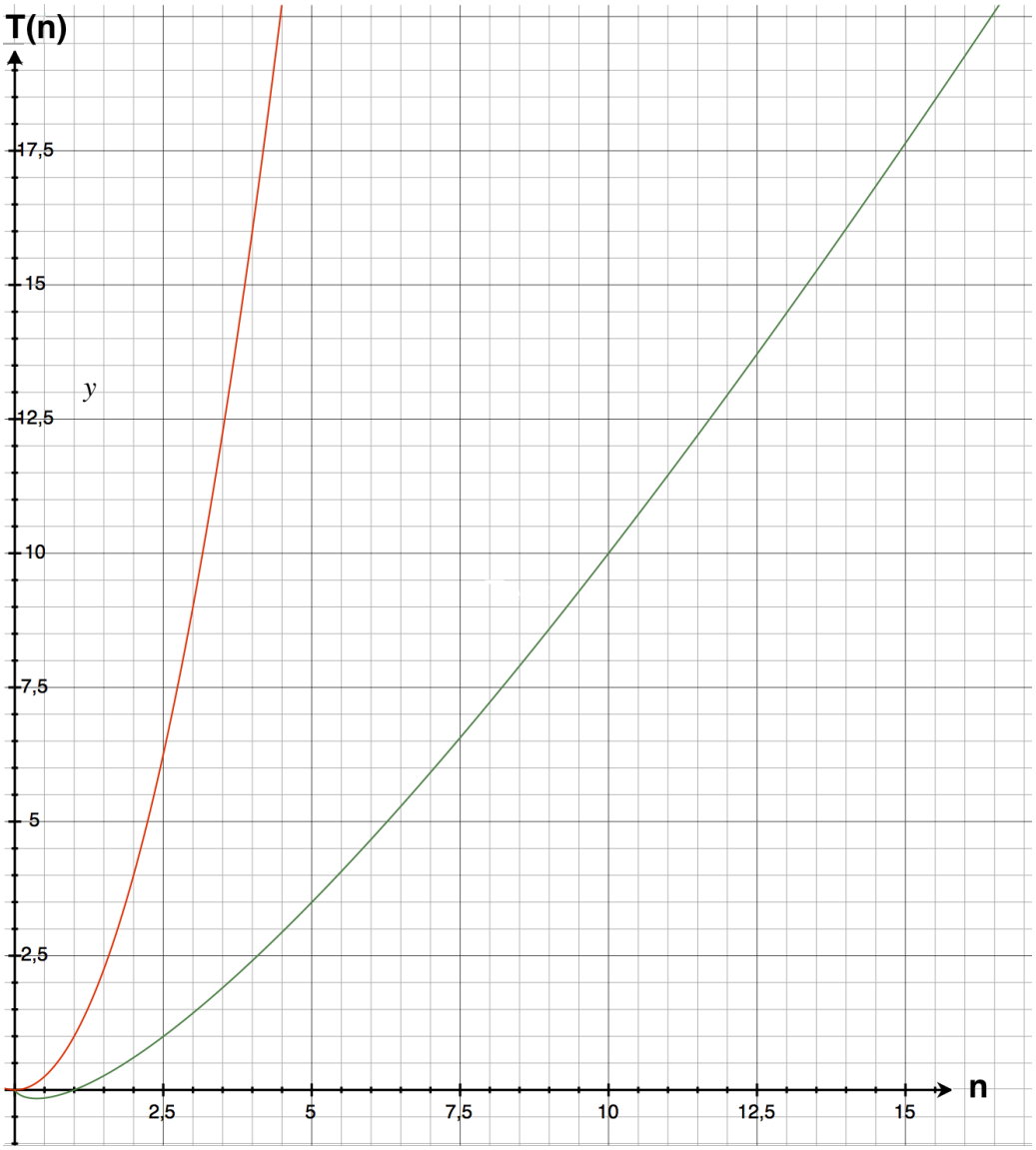
2. Versuch (mit Verkleinerung der Liste)

$$\sum_{l=0}^{k-1} 2^l\cdot l = 2\sum_{l=1}^{k-1} l\cdot 2^{l-1} = 2\cdot(k\cdot 2^{k-1} - 2^k + 1) \geq k\cdot 2^{k-1} \approx n\cdot\log_2(n)$$

2.3.4. Fazit

Laufzeit $c \cdot n \cdot \log_2(n)$ wobei $c \in \mathbb{R}$

Vergleich Bubblesort $\leftrightarrow$ Heapsort



3. Vorlesung

3.1. Landau-Notation

$g, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

3.1.1. $O(n)$

$$g(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow c > 0 \wedge n_0 \in \mathbb{N}, \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} g(n) \leq c \cdot f(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} sup \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log_2(n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{log_2(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{\ln(2)}}{n} \overset{\text{L' Hopital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\ln(2)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

3.1.2. $\Omega(n)$

$$g(n) \in \Omega(f(n)) \Leftrightarrow c > 0 \wedge n_0 \in \mathbb{N}, \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} g(n) \geq c \cdot f(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} inf \frac{g(n)}{f(n)} > 0$$

Beispiel $g(n) = n^p \quad f(n) = n^q \quad p \geq q$

Behauptung $g(n) \in \Omega(f(n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^q} = \infty > 0$$

3.1.3. $\Theta(n)$

$$g(n) \in \Theta(f(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n)) \wedge g(n) \in \Omega(f(n))$$

Beispiel $g(n) = n^p + n^{p-1} + c \cdot n^2 \qquad f(n) = n^p$

Behauptung $g(n) \in \Theta(f(n))$
.... Rechnung

3.1.4. $o(n)$

$$g(n) \in o(f(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

Beispiel $g(n) = n \cdot \log_2(n) \quad f(n) = n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \quad \text{siehe oben}$$

Erklärung "g ist asymptotisch gesehen vernachlässigbar gegenüber f."

3.1.5. Notation

Häufig wird:

$$O(n) = O(n^2) = O(n^2 \cdot \log_2(n))$$

geschrieben, anstelle von:

$$O(n) \subset O(n^2) \subset O(n^2 \cdot \log_2(n))$$

Missbrauch der Notation !!!

3.2. Mergesort (Divide and Conquer)

3.2.1. Pseudo-Code

```
1  int[] a; //Eingabefeld
2  int[] b; //Hilfsfeld
3
4  void mergesort(int links, int rechts) {
5      if (links ≥ rechts) return;
6      int mitte = (links+rechts)/2;
7      mergesort(links, mitte);
8      mergesort(mitte, rechts);
9      merge(links, mitte, rechts);
10 }
11
12 void merge(int links, int mitte int rechts) {
13     int i = links;
14     int j = mitte+1;
15     int k = links;
16     while (i ≤ mitte && j ≤ rechts) {
17         if (a[i] < a[j])
18             b[k++] = a[i++];
19         else
20             b[k++] = a[j++];
21     }
22     while (i ≤ mitte)
23         b[k++] = a[i++];
24     while (j ≤ rechts)
25         b[k++] = a[j++];
26     for (k=links; k ≤ rechts; k++)
27         a[k] = b[k];
28 }
```

3.2.2. Laufzeitanalyse

$T(n)$ = Zahl der von Mergesort durchgeführten Elementarvergleiche $\approx$ Laufzeit

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n - 1 \approx 2T(\frac{n}{2}) + n \quad \text{mit } T(1) = 0$$

Korrekter wäre $T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n - 1$ Für ungerade Zahlen

$$T(n) = 2 \cdot 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \overset{(1)}{=} 2\left(\text{I}\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right) + n\right) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n$$
$$\overset{(2)}{=} 4 \cdot \left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right) + 2n = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 3n = ... = 2^i \cdot T\left(\frac{n}{2^i}\right) + in$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2} \qquad (1)$$
$$T\left(\frac{n}{4}\right) = 2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4} \qquad (2)$$
....
$T(1) = 0$

Rekursionsende $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow 2^i = n \Leftrightarrow i = \log_2(n)$

$$T(n) = 2^{\log_2(n)} T\left(\frac{n}{2^{\log_2(n)}}\right) + n\log_2(n) = nT(1) + \log_2(n) = \log_2(n)$$

Abstraktion
$T(n)$ = Laufzeit eines Divide & Conquer Algorithmus der ein Problem dadurch löst, das es in a Teilprobleme der Größe $\frac{n}{b}$ zerlegt wird, die rekursiv gelöst werden und anschließend kombiniert werden.

$$T(n) = a \cdot T\left(\tfrac{n}{b}\right) + n^\alpha \qquad \alpha > 0 \qquad \text{mit } T(1) = 0$$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + n^\alpha \overset{(1)}{=} a^2 T\left(\frac{n}{b^2}\right) + a\left(\frac{n}{b}\right)^\alpha + n^\alpha$$
$$(1) \quad T\left(\frac{n}{b}\right) = aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + \left(\frac{n}{b}\right)^\alpha \overset{(2)}{=} a^3 T\left(\frac{n}{b^3}\right) + a^2\left(\frac{n}{b^2}\right)^\alpha + a^1\left(\frac{n}{b^1}\right)^\alpha + a^0\left(\frac{n}{b^0}\right)^\alpha$$
$$(2) \quad T\left(\frac{n}{b^2}\right) = aT\left(\frac{n}{b^3}\right) + \left(\frac{n}{b^2}\right)^\alpha = a^i T\left(\frac{n}{b^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^\alpha = a^i T\left(\frac{n}{b^i}\right) + n^\alpha \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^j$$

mit $i = \log_b(n) \wedge x = \frac{a}{b^\alpha}$

...
$T(1) = 0$

4. Vorlesung

4.1. Master-Theorem

$T(n) = T\left(\frac{n}{b} \cdot a + n^\alpha\right)$
$T(1) = 0$
$T(n) = a^i T\left(\frac{n}{b^i}\right) + n^\alpha \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^j$

o.B.d.A
$n = b^k \Leftrightarrow k = \log_b(n)$

4.1.1. Fall 1

$(\frac{a}{b^\alpha}) < 1 \Leftrightarrow a < b^\alpha \Leftrightarrow \log_b(a) < \alpha$

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^j = \frac{x^k - 1}{x - 1} \quad \text{für } x \neq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^j \leq \frac{1}{1 - \frac{a}{b^\alpha}} = c'$$

$T(n) = a^k T(1) + n^\alpha \cdot c'$
$\quad = c \cdot n^{\log_b(a)} + c' \cdot n^\alpha = \Theta(n^\alpha)$

Nebenbedingung $\quad a^{\log_b(n)} = \left(b^{\log_b(a)}\right)^{\log_b(n)} = \left(b^{\log_b(n)}\right)^{\log_b(a)} = n^{\log_b(a)}$

4.1.2. Fall 2

$(\frac{a}{b^\alpha}) > 1 \Leftrightarrow \log_b(a) > \alpha$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^j = \left(\frac{\left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^{\log_b(n)} - 1}{\left(\frac{a}{b^\alpha}\right) - 1}\right) \leq \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^{\log_b(n)} \cdot c'' = \frac{a^{\log_b(n)}}{b^{\alpha \log_b(n)}} = \frac{n^{\log_b(\alpha)}}{n^\alpha}$$

$$T(n) = c \cdot n^{\log_b(a)} + n^\alpha \cdot \frac{n^{\log_b(a)}}{n^\alpha} \cdot c'' = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

4.1.3. Fall 3

$\left(\frac{a}{b^\alpha}\right) = 1 \Leftrightarrow a = b^\alpha \Leftrightarrow \log_b(a) = \alpha$

$$T(n) = c \cdot n^{\log_b(a)} + n^\alpha \cdot \log_b(n) = \Theta\left(n^\alpha \cdot \log(n)\right)$$

4.1.4. Beispiel: Mergesort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2^{\,1}}\right) + n$$

$T(1) = 0$

Ermittle a $= 2$ b $= 2$ $\alpha = 1$

$\log_2(2) = 1 = \alpha \Rightarrow$ 3. Fall $\Rightarrow \Theta(n \cdot \log(n))$

4.2. Schnelle Multiplikation langer Zahlen

A $=$ | a_{n-1} | ... | a_i | ... | a_2 | a_1 | a_0 | $a_i \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$$

B $=$ | b_{n-1} | ... | b_2 | b_1 | b_0 |

$$= \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

Frage Wie schnell können wir zwei n-stellige Binärzahlen addieren/subtrahieren/multiplizieren ?

Addition $\Theta(n)$

4.2.1. Schulmethode zur Multiplikation

Beispiel

1	0	1	1	0	1	·	0	1	0	1	1	1
		0	0	0	0	0	0					
			1	0	1	1	0	1				
				0	0	0	0	0	0			
					1	0	1	1	0	1		
						1	0	1	1	0	1	
						$_1$	1	0	1_1	1	0	1
		1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1

n-Partialprodukte mit höchstens 2n Ziffern

n^2 Aufwand zur Ermittlung der Partialprodukte + $n \cdot$ Kosten für die Addition von Zahlen der Länge $2n \quad \Rightarrow \Theta(n^2)$

Ziel $o(n^2) \quad O(n^{1,58})$

4.2.2. Karazuba Ofman

A = | a_{n-1} | ... | $a_{\frac{n}{2}}$ | | $a_{\frac{n}{2}-1}$ | ... | a_0 |

$= A_1 \qquad\qquad = A_0$

$A = A_0 + A_1 2^{\frac{n}{2}}$

$$A \cdot B = (A_0 + A_1 2^{\frac{n}{2}})(B_0 + B_1 2^{\frac{n}{2}})$$
$$= A_0B_0 + A_0B_1\, 2^{\frac{n}{2}} + A_1B_0\, 2^{\frac{n}{2}} + A_1B_1\, 2^n$$

Legende markierte Elemente haben die Länge $\frac{n}{2}$

Anmerkung Addition von Zahlen der Länge $2n$

Sei $T(n)$ die Laufzeit dieser rekursiven Methode zur Multiplikation zweier n-stelliger Zahlen:

$$T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot n \qquad T(1) = c$$

Mastertheoreme

$a = 4 \quad b = 2 \quad \alpha = 1 \quad \log_2(4) = 2 > \alpha$
$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$
$\Rightarrow$ kein Gewinn bisher!!!

4. Vorlesung

Ziel Ermittle Partialprodukte auf anderem Weg

1.) $(A_0 + A_1) \cdot (B_0 + B_1) = A_0B_0 + A_0B_1 + A_1B_0 + A_1B_1 = P$
2.) $A_0 \cdot B_0$
3.) $A_1 \cdot B_1$
$\Rightarrow (A_0B_1 + A_1B_0) = (P - (A_0B_0) - (A_1B_1))$

Es verbleiben 3 Multiplikationen und _ Additionen

$AB = A_0B_0 + (P - (A_0B_0) - (A_1B_1)) + A_1B_1 2^n$

Mastertheoreme

$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
$a = 3, \quad b = 2, \quad \alpha = 1$
$\log_2(3) > 1 \quad \Rightarrow 2.$ Fall
$\Rightarrow \Theta\left(n^{\log_2(3)}\right) = \Theta\left(n^{1{,}5849625}\right)$

4.2.3. Akra-Bazzi Theorem

Beispiel $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2(n)$

$$T(n) = \begin{cases} aT\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) & n > n_0 \\ h(n) & 1 \leq n \leq n_0 \end{cases}$$

$T(n) = \Theta\left(n^\alpha \left(1 + \int_1^n \frac{g(x)}{x^{\alpha+1}} dx\right)\right)$ mit α, so dass gilt: $\frac{a}{b^\alpha} = 1$

5. Vorlesung

5.1. Akra-Bazzi

$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + g(n)$

$T(1) = c$

$T(n) = \Theta\left(n^{\alpha}\left(1 + \int_1^n \frac{g(x)}{x^{1+\infty}} dx\right)\right) \quad \text{mit } \frac{a}{b^{\alpha}} = 1 \quad \alpha = \log_b(a)$

z.B. $T(n) = 2 + \frac{n}{2} + \log(n)$

Beweisidee

$T(\frac{n}{b}) = aT(\frac{n}{b^2}) + g(\frac{n}{b})$

$T(n) = a\left(aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + g\left(\frac{n}{b}\right)\right) + g(n) = a^2 + \frac{n}{b^2} + a^1 g\left(\frac{n}{b^1}\right) + a^0 g\left(\frac{n}{b^0}\right)$

$\Rightarrow a^i T\left(\frac{n}{b^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-1} a^i g\left(\frac{n}{b^2}\right) \quad \text{Rekursionsende für r} = \log_b(b)$

$\Theta(a^{\log_b(n)}) = \Theta(n^{\alpha})$

$\sum_{j=0}^{\log(n)-1} a^j g\left(\frac{n}{b^{\alpha}}\right) \approx \int_0^{\log_b(n)} a^j g\left(\frac{n}{b^j}\right) dj$

Substitution

$x = \frac{n}{b^j} = n \cdot b^{-j} = n \cdot e^{-j\ln(b)} \qquad \frac{dx}{d_j} = n\left(-\ln(b)\right) e^{-j\ln(b)} = -n\ln(b)\, b^j = -ln(b)\, x$

$\Rightarrow d_j = \frac{1}{-\ln(b)x} dx$

$a^j = b^{\log_b(a) j} = b^{\alpha j} = \left(b^j\right)^{\alpha} = \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha}$

$= \int_n^1 \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha} g(x) \left(\frac{1}{-\ln(b)x}\right) dx = \frac{n^{\alpha}}{\ln(b)} \cdot \int_1^n \frac{g(x)}{x^{1+\infty}} dx$

q.e.d

5.2. Lineare Rekursionsgleichungen

5.2.1. Fibonacci-Zahlen

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
$f_0 = 0$
$f_1 = 1$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
f(n)	0	1	1	2	3	5	8	13	...

Abbildung 5.1.: Fibonacci-Zahlen

5.2.2. Methode der erzeugenden Funktionen

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n Z^n = f_0 \cdot Z^0 + f_1 \cdot Z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) \cdot Z^n$$

$$= Z + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} Z^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} Z^n$$

$$= Z + Z \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} Z^{n-1} + Z^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} Z^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow F(Z) = Z + Z \cdot F(Z) + Z^2 \cdot F(Z)$$

$$\Leftrightarrow -Z = Z^2 F(Z) + ZF(Z) - F(Z) = F(Z)(Z^2 + Z - 1)$$

$$F(Z) = -\frac{Z}{Z^2 + Z + 1}$$

5.2.3. Einschub: Beispiel Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1-Z} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n$$

$$\Rightarrow F(Z) = -\frac{Z}{Z^2 + Z + 1}$$

5.2.4. Nullstellen des Nennerpolynoms

$Z^2 + Z = 1 \quad | + (\frac{1}{2})^2$
$\Leftrightarrow (Z + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$
$\Leftrightarrow Z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$
$\Rightarrow Z^2 + Z + 1 = (Z + \phi)(Z + \overline{\phi})$

Goldener Schnitt

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

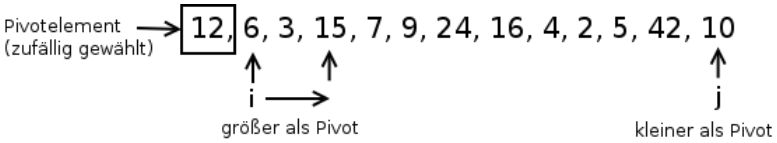
5.2.5. Partialbruchzerlegung

$$\frac{A}{Z+\phi}+\frac{B}{Z+\overline{\phi}}=\frac{A\cdot(Z+\overline{\phi})+B(Z+\phi)}{(Z+\phi)(Z+\overline{\phi})}$$
$$\Rightarrow AZ+BZ=-Z\Leftrightarrow A+B=1\quad(1)$$
$$A\overline{\phi}+B\phi=0\Leftrightarrow B=-\frac{A\overline{\phi}}{\phi}\quad(2)$$
$$(2)\text{ in }(1)\quad A-\frac{A\overline{\phi}}{\phi}=-1\Leftrightarrow A\left(1-\frac{\overline{\phi}}{\phi}\right)=-1$$
$$\Leftrightarrow A=-\frac{1}{\sqrt{5}}\phi$$
$$\Rightarrow B=\frac{1}{\sqrt{5}}\overline{\phi}$$

5.2.6. Lösung

$$F(Z)=\frac{-Z}{Z^2+Z+1}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\phi}{Z+\phi}+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\overline{\phi}}{Z+\overline{\phi}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1+\frac{Z}{\phi}}-\frac{1}{1+\frac{Z}{\overline{\phi}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi Z}-\frac{1}{1-\overline{\phi}Z}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\phi Z)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\overline{\phi}Z\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n-\overline{\phi}^n\right)\cdot Z^n$$
$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n-\overline{\phi}^n\right)\quad\text{mit }\phi=1,681...\quad\overline{\phi}=-0,681...$$

5.3. Quicksort (Divide and Conquer)



⇒ Tausche 15 mit 10
- Bewege Zeiger erneut
⇒ Tausche 5 und 24
- Bewege Zeiger erneut
⇒ Tausche 16 und 2
- Bewege Zeiger erneut
⇒ i wird größer als j ⇒ Abbruch (tausche Pivotelement mit letztem Element in Teilliste 1)
⇒ es ergeben sich zwei Teillisten

4, 6, 3, 10, 7, 9 , 5, 2 |12| 16, 24, 42, 15

best-case $T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+n=\Theta(n\log n)$

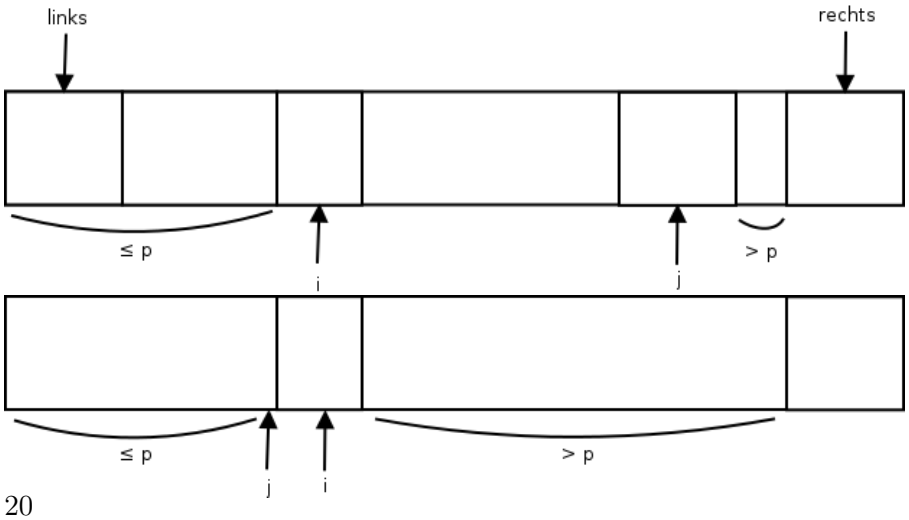
worst-case $T(n)=T(n-1)+n=\Theta(n^2)$

6. Vorlesung

6.1. Quicksort

6.1.1. Pseudo-Code

```
1  void quicksort(int[] a, int links, int rechts) {
2      if (links ≥ rechts) return;
3      int mitte = partition(a, links, rechts);
4      quicksort(a, links, mitte-1);
5      quicksort(a, mitte+1, rechts);
6  }
7
8  int partition(int[] a, int links, int rechts) {
9      int r = random(links, rechts);
10     swap(a, r, rechts);
11     int pivot = a[rechts];
12     int i = links;
13     int j = rechts-1;
14     while (i ≤ j) {
15         if (a[i] > pivot) {
16             swap(a, i, j);
17             j--;
18         } else {
19             i++;
20         }
21     }
22     swap(a, i, rechts);
23     return i;
24 }
```



Schleifen-Invariante:
$a[k] > p$ für $j < k < rechts$
$a[k] \leq p$ für $links < k < i$

Abbildung 6.1.

6.1.2. Zufallspermutation

```
1  void randomPermutation(int[] a) {
2      int n = a.length;
3      for (int i = n-1); i > 0; i--) {
4          int r = random(0,i); // gleichverteilte Zufallszahl im Intervall [0,i)
5          swap(a,r,i);
6      }
7  }
```

6.1.3. Einschub: Stochastik

Fairer Würfel (Erwartungswert):

X sei Zufallsvariable $\hat{=}$ Anzahl Augen

$$Pr(X = x_i) \quad x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot Pr(X = x_i) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 3,5$$

Fairer Würfel (Erste Sechs):

X sei Zufallsvariable $\hat{=}$ Zahl der benötigten Würfe bis zum Auftreten der ersten 6.

$$x_i \in N$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot Pr(X = i) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

Mit der Ableitung der geometrischen Reihe, $\frac{1}{(1-x)^2}$ folgt:

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2}\right) = 6$$

6.1.4. Laufzeitanalyse

$T(n)$ = Erwartungswert der Laufzeit von Quicksort bei zufällig gleichverteilter Eingabe-Partition.

$$T(n) = n + \sum_{i=1}^{n} (T(i-1) + T(n-i)) \cdot \frac{1}{n}$$

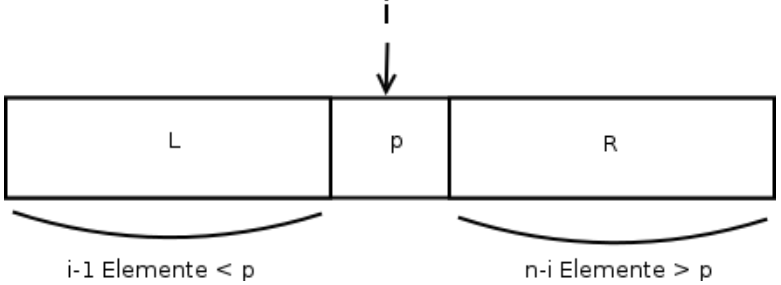


Abbildung 6.2.

Unter der Annahme, dass keine gleich großen Elemente existieren.

$T(1) = 0$

Lösen durch Einsetzten

$$T(n) = n + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} T(i-1) = n + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

$$\Leftrightarrow n \cdot T(n) = n^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

$$\Leftrightarrow 2(n-1) \cdot T(n-1) = (n-1)^2 + 2\sum_{i=0}^{n-2} T(i)$$

$$\Leftrightarrow (1) - (2) nT(1) - (n-1)T(n-1) = n2 - (n-1)^2 + 2T(n-1)$$

$$\Leftrightarrow nT(n) = (n+1)T(n-1) + 2n - 1$$

$$\Leftrightarrow T(n) \leq \frac{n+1}{n} T(n-1) + 2 \leq \frac{n+1}{2}\left(\frac{n}{n+1} \cdot T(n-2) + 2\right) + 2$$

$$= \frac{n+1}{n-1} T(n-2) + \frac{n+1}{n} \cdot 2 + 2$$

$$\leq \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n-2} T(n-3) + 2\right) + \frac{n+1}{n} \cdot 2 + 2 \cdot 1$$

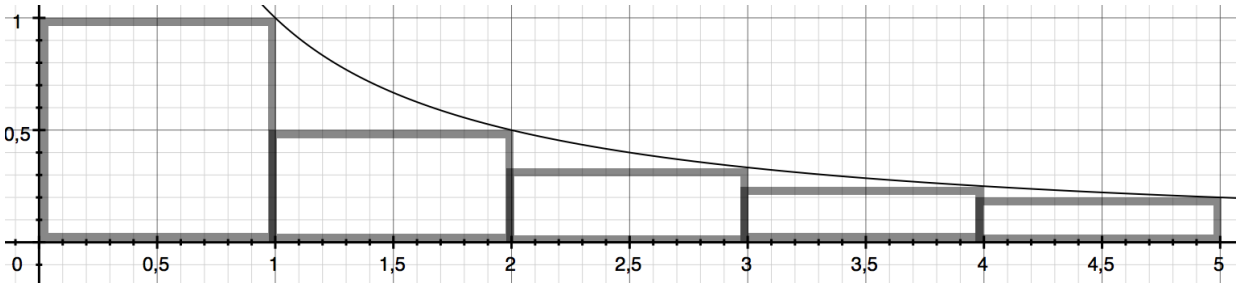
$$= \frac{n+1}{n-2} T(n-3) + 2 \cdot \frac{n+1}{n-1} + 2 \cdot \frac{n+1}{n} + 2 \cdot \frac{n+1}{n+1}$$

$$\Rightarrow T(n) \leq \frac{n+1}{n-(k-1)} T(n-k) + 2(n+1)\sum_{i=1}^{k-2} \frac{1}{n-i} \quad \text{endet für k = n-1}$$

$$T(n) = 2(n+1)\sum_{i=-1}^{n-3} \frac{1}{n-i} = 2(n+1)\sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j} \leq 2(n+1) H_{n+1} \in O(n \log n) \quad \text{mit j=n-i}$$

Einschub: Harmonische Reihe

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$



$$H_n \leq \int \frac{1}{x} dx + 1 = 1 + [\ln x]_1^n = \ln(n) + 1$$

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

6.2. Median in Linearzeit

Median $\hat{=} \frac{n}{2}$-kleinste Element in einer Folge von n Elementen

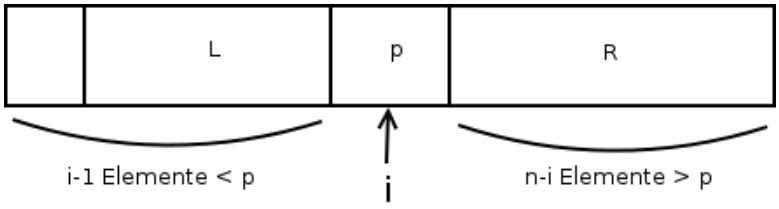
Verallgemeinerung

Finde das k-t kleinste Elemente in der Folge

Naive Strategie: $O(k \cdot n)$

Idee

```
1 select(int[] a, int k) {}
```



Aufruf von Partition

Abbildung 6.3.

1. Fall $k = i \Rightarrow$ Pivotelement war gesucht

2. Fall $k < i \Rightarrow$ suche rekursiv das k-t kleinste Element in L

3. Fall $k > i \Rightarrow$ suche rekursiv das (k-i)-t kleinste Element in R

7. Vorlesung

7.1. Quicksort

$$T(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(i-1) + T(n-i) + n \quad \in O(n \log(n))$$

7.2. Quickselect

$$T(n) = n + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} max(T(i-1), T(n-i))$$

Behauptung Select $\in O(n)$, also $T(n) = c \cdot n$

Beweis Induktion

$$T(n) = n + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} max(c(i-1), c(n-i))$$

$$= n + \frac{1}{n} \cdot c \sum_{i=1}^{n} max((i-1), (n-i))$$

$$= n + \frac{1}{n} \cdot c \cdot 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{\frac{n}{c}-1} i \right)$$

$$= n + \frac{1}{n} \cdot c \cdot Z \left(\frac{(n-1)\,n}{Z} - \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{1}{2}}{Z} \right)$$

$$= n + \frac{1}{n} c \left(n(n-1) - \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\right) = n + \frac{1}{n} \cdot c \left(n^2 - n - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} \right)$$

$$= n + \frac{1}{n} c \left(\frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{2}n \right) = n + c \left(\frac{3}{4}n - \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow cn = n + c \left(\frac{3}{4}n - \frac{1}{2} \right) = n + \frac{3}{4}cn - \frac{1}{2}c$$

$$\Rightarrow cn \geq n + \frac{3}{4}cn \Leftrightarrow c \geq 4$$

$$q.e.d$$

8. Vorlesung

8.1. Verallgemeinerung von Akra-Bazzi

$$T_n = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i T(\frac{n}{b_i})\right] + g(n)$$

Beispiel

$$T_n = 1 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \cdot T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

$$T_n = \theta\left(n^{\alpha}\left(1 + \int_1^n \frac{g\,(x)}{x^{1+\alpha}} dx\right)\right)$$

Klassisch $\alpha = \log_b(a)$, $\frac{a}{b^{\alpha}} = 1$

Jetzt Bestimmte α so, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^{\alpha}} = 1$$

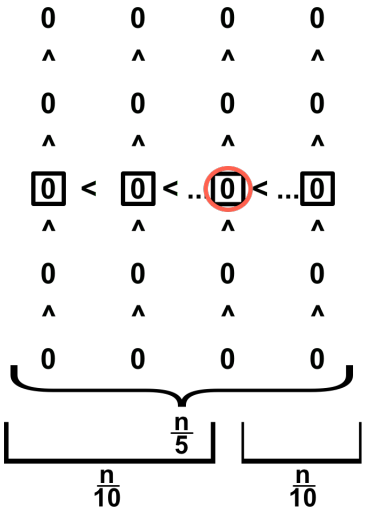
$$a_1 = a_2 = 1, \quad b_1 = 3, \quad b_2 = \frac{3}{2}, \quad g(n) = n$$

$$\frac{1}{3}^{\alpha} + \frac{2}{3}^{\alpha} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$T(n) = \Theta\left(n\left(1 + \int_1^n \frac{x}{x^{1+1}} dx\right)\right) = \Theta(n \ln(n))$$

8.2. Median der Mediane

Gruppierung in 5er Päckchen



Median der Mediane

Abbildung 8.1.

Wortlaut Teile die n Elemente in 5-er Gruppen. Bestimme innerhalb jeder Gruppe den Median. Bestimme nun den Median der Mediane. Wähle diesen Median als Pivotelement.

$$\exists \frac{3n}{10} \text{ Elemente } \leq p \geq \exists \frac{3n}{10} \text{ Elemente } (\pm 1 \text{ wegen p})$$

8.2.1. Deterministische Variante für k-Select

Wähle zu Beginn den Median der Mediane als Pivot Elemente. Unterteile nun die Folge anhand von p in zwei Teilfolgen und verfahre von nun an analog zur randomisierten Variante von k-Select.

8.2.2. Laufzeitanalyse für den worst-case

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + n + T\left(\frac{7n}{10}\right)$$

$$A_1 = \frac{n}{5}, \quad A_2 = n, \quad A_3 = \frac{7n}{10}$$

A_1 = Laufzeit zur rekursiven Bestimmung des Medians der Mediane
A_2 = Laufzeit zur Aufteilung in Teilfolgen
A_3 = Laufzeit für den Aufruf von k-Select für größere Teilfolgen, die aber sicher $\leq n - \frac{3n}{10} - \frac{7n}{10}$ hat.

Wende die verallgemeinerte Form von Akra-Bazzi an:
$g(n) = n, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad b_1 = 5, \quad b_2 = \frac{10}{7}$

Bestimme

$$\alpha = \left(\frac{1}{5}\right)^{\alpha} + \left(\frac{7}{10}\right)^{\alpha} = 1$$

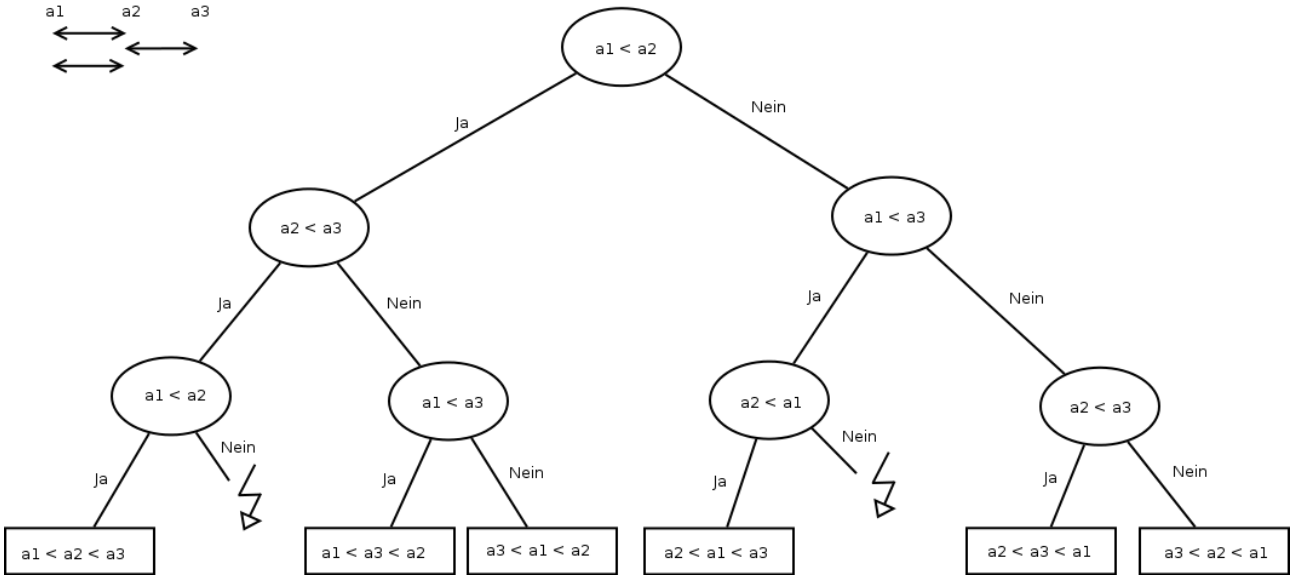
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{10}\right)^{\alpha} + \left(\frac{7}{10}\right)^{\alpha} = 1$$

$$\Rightarrow 0 < \alpha < 1$$

$$n^{\alpha}\left(1 + \int_1^n \frac{x}{x^{1+\alpha}}dx\right) = n^{\alpha}\left(1 + \int_1^n x^{-\alpha}dx\right) = n^{\alpha}\left(1 + \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha+1}\right]_1^n\right) = n^{\alpha}\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{-\alpha+1} - 1\right)\right)$$

8.3. Untere Schranke für vergleichsbasierte Sortierverfahren

Entscheidungsproblem: (Bubbelsort)



Ein Entscheidungsbaum für einen vergleichsbasierten Sortieralgorithmus besteht aus inneren Knoten, die mit der Vergleichsoperation $a_i < a_j$ beschriftet sind, wobei sich die Indizes i, j auf die Position der Elemente in der Eingabefolge beziehen.
Die Blätter des Entscheidungsbaums sind mit den Permutationen beschriftet, die sich nach korrekter Sortierung ergeben.
Jeder korrekte Sortieralgorithmus muss zu einem Entscheidungsbaum mit mindestens $n!$ Blättern korrespondieren.

maximale Baumtiefe $\hat{=}$ maximale Anzahl durchgeführter Vergleichsoperationen

mittlere Baumtiefe $\hat{=}$ average-case Laufzeit

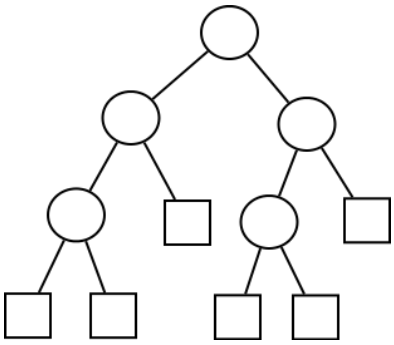
9. Vorlesung

9.1. Vergleichsbasierte Sortieralgorithmen

9.1.1. Worst-case Laufzeit

eines vergleichsbasierten Sortieralgorithmus
$\hat{=}$ maximale Tiefe des zugehörigen Entscheidungsbaums
$\hat{=}$ mittlere Tiefe der Blätter im zugehörigen Entscheidungsbaums

Sei T_{max} die maximale Baumtiefe in einem binären Baum. Betrachte nun zunächst den vollständigen binären Baum mit #Blätter ≤ 2.



Untere Schranke $t_{max} \geq \log_2(n!) = \Omega(n \log n) = \log_2(n!) \leq t_{mean}$

Abbildung 9.1.

Herleitung

$$\ln(n!) = \ln(n(n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1) = \ln(n) + \ln(n-1) + ... + 1$$
$$= \sum_{i=1}^{n} ln(i) \geq \int_1^n \ln(x)dx = [x \ln(x) - x]_1^n = n \ln(n) - n + 1$$

$$\Rightarrow n! \geq e^{n \ln(n) - n + 1} = e \cdot e^{-n} \cdot \left(e^{\ln(n)}\right)^n = e \cdot e^{-n} \cdot n = e \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

9.1.2. Lemma: Mittlere Tiefe der Blätter in einem Entscheidungsbaum $> \log_2(n)n$

Beweis Induktion nach m (Blattanzahl)

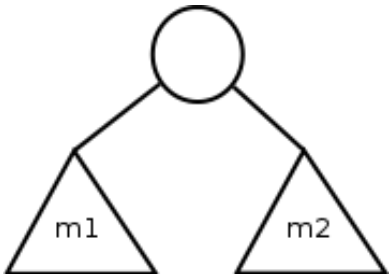


Abbildung 9.2.

Untere Schranke $m_1, m_2 \mathrel{\hat{=}}$ Blattanzahl im linken bzw. rechten Teilbaum der Wurzel

Induktions Anfang: $m = 1 \quad t_{mean} = \log_2(1) = 0$

Induktions Behauptung: $t_{mean} \geq \log_2(m)$

Induktions Schritt: Sei $m_1 < m, m_2 < m \quad (1)$ und $m_1 + m_2 = m \quad (2)$

b $\mathrel{\hat{=}}$ Blatt im Entscheidungsbaum T_b
l $\mathrel{\hat{=}}$ Blatt im linken Teilbaum T_l
r $\mathrel{\hat{=}}$ Blatt im rechten Teilbaum T_r

$$t_{mean}^{links} \geq \log_2(m_1) \text{ und } t_{mean}^{rechts} \geq \log_2(m_2)$$

$$\frac{1}{m} \sum_l \cdot t_l = t_{mean}^{links} \geq \log_2(m_1)$$

Verfahre analog für rechts.

$$\sum_b T_b = \sum_l (T_l + 1) + \sum_r (T_r + 1) \geq m_1 + m_2 + m_1 \log_2(m_1) + m_2 \log_2(m_2)$$

Unter der Annahme, dass das Minimum bei $\frac{m}{2}$ liegt:

$$m_1 \log_2(m_1) + m_2 \log_2(m_2) \geq \frac{m}{2} \log_2\left(\frac{m}{2}\right) \cdot 2 = m \log_2\left(\frac{m}{2}\right) \quad \text{mit } (2)$$

Es folgt somit:

$$t_{mean} = \frac{1}{m} \sum_b T_b \geq \frac{1}{m} \left(m + m \log_2\left(\frac{m}{2}\right)\right) = 1 + \log_2\left(\frac{m}{2}\right) = 1 + \log_2(m) - 1 = \log_2(m)$$

$$q.e.d$$

9.2. Radix-Sort

9.2.1. Beispiel:

10 1	0 1 0	1 00 001
01 0	1 0 0	1 01 010
00 1	1 1 0	0 01 011
11 1	1 0 1	0 10 100
10 0	0 0 1	1 10 101
01 1	1 1 1	1 11 110
11 0	0 1 1	0 11 111

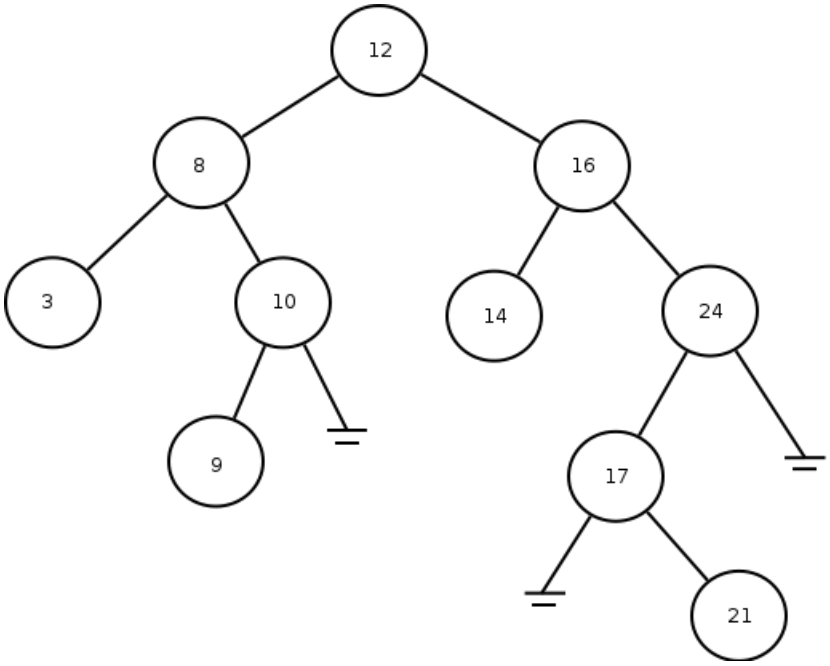
Wichtig Beginne die Sortierung mit dem niedrigsten Bit

9.2.2. Pseudo-Code

```
1  void radixsort(int[] a) { // positives Element
2      int n = a.length;
3      int[] b0 = new int[n];
4      int[] b1 = new int[n];
5      int n0, n1;
6
7      for (int i=0; i<32; i++) {
8          n0 = n1 = 0;
9          for (int j=0; j<n; j++) {
10             if (a[j] & (1<<i)) { // i-tes Bit von a[j]
11                 b1[n1] = a[j];
12                 n1 = n1+1;
13             } else {
14                 b0[n0] = a[j];
15                 n0 = n0+1;
16             }
17         }
18     }
19     for (int j=0; j<n0; j++)
20         a[j] = b0[j];
21     for (int j=0; j<n1; j++)
22         a[n0+j] = b1[j];
23 }
```

9.3. Binäre Suchbäume

Zahlen 12, 8, 3, 16, 24, 17, 10, 21, 14, 9



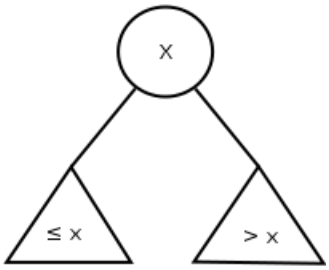


Abbildung 9.3.: Knotenorientierte Speicherung

10. Vorlesung

10.1. Binärer Suchbaum

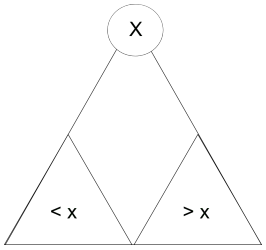


Abbildung 10.1.: Binärer Suchbaum

10.2. Pseudo-Code

```
1
2  class Node {
3      int key, info;             // info ist optional
4      Node left, right, parent; // parent ist optional
5  }
6
7  int height(Node node) {
8      if (node = NULL) return 0;
9      return height;
10 }
11
12 Node insert(Node node, int x) {
13     if (node == NULL)
14         return new Node(x, NULL, NULL);
15
16     if (node.key > x)
17         node.left = insert(node.left, x);
18     else
19         node.right = insert(node.right, x);
20     return node;
21 }
22
23 void inorder(Node node) {
24     if (node == NULL) return;
25     inorder(node.left) // linke Hälfte
26     print(node)
27     inorder(node.right) // rechte Hälfte
28 }
```

10.3. AVL-Bäume

Ziel Binärer Suchbaum mit garantierter Such-, Einfüge- und Löschzeit $O(\log n)$

Idee Definiere eine Balancebedingung, die dafür sorgt, dass die Baumstruktur möglichst nahe an der Idealstruktur eines vollständigen binären Baumes liegt.
Aber gleichzeitig soll es möglich sein "schnell" Strukturänderungen beim Einfügen und Löschen vorzunehmen.

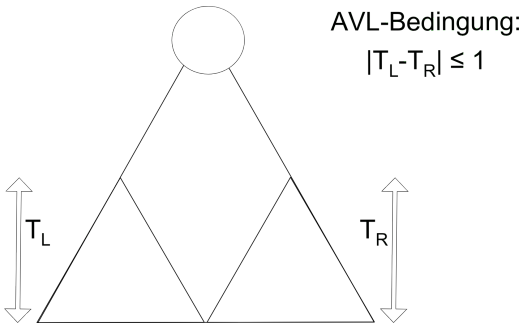
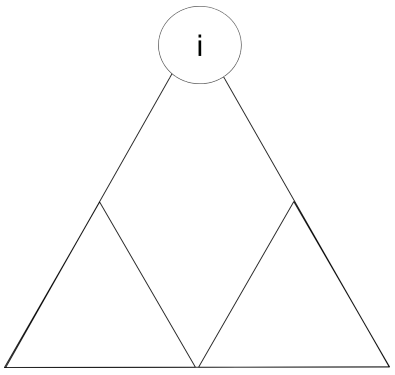


Abbildung 10.2.: AVL-Baum

10.4. Laufzeitanalyse

Ziel Analyse der erwarteten maximalen Tiefe randomisierter binärer Suchbäume

Sei der Schlüssel der Wurzel das i-kleinste Element



$T_n \hat{=}$ maximale Tiefe eines randomisierten Suchbaums mit $\{1, ..., n\}$ Elementen

i-1 Elemente m-i Elemente

Abbildung 10.3.

Für den Fall, dass i als Wurzelknoten gewählt wird gilt:

$$T_n = max\{T_{i-1}, T_{n-i}\} + 1$$

$$X_n = 2^{T_n} \text{ exponentielle Tiefe}$$

$$2^{T_n} = 2^{1+max\{T_{i-1},T_{n-1}\}} = 2 \cdot 2^{max\{T_{i-1},T_{n-1}\}} = 2 \cdot max\{2^{T_{i-1}}, 2^{T_{n-1}}\}$$

$$\Rightarrow X_n = 2 \cdot max\{X_{i-1}, X_{n-1}\}$$

Mit der Abschätzung: $\boldsymbol{max\{2^{T_1}, 2^{T_2}\} \leq 2^{T_1} + 2^{T_2}}$ folgt:

$$E(X_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot 2 \cdot max\{X_{i-1}, X_{n-1}\}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(max\{X_{i-1}, X_{n-1}\}\right) \leq \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_{i-1} + X_{n-1}\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[E(X_{i-1}) + E(X_{n-i})\right] \leq \frac{4}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E(X_i)$$

$$n \cdot E(X_n) = 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i) \quad (1)$$

$$(n-1) \cdot E(X_{n-1}) = 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} E(X_i) \quad (2)$$

$$nE(X_n) - (n-1)E(X_{n-1}) = 4E(X_n) \quad (1) - (2)$$

$$\Leftrightarrow nE(X_n) = (n+3)E(X_{n-1})$$

$$E(X_n) = \frac{n+3}{n}E(X_{n-1}) = \frac{n+3}{n}\cdot\frac{n+2}{n-1}E(X_{n-2}) = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{n+3-i}{n-i} = \frac{n+3}{n}\cdot\frac{n+2}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n-2}\cdot\frac{n}{n-3}\cdot\ldots\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{8}{2}\cdot\frac{4}{1}$$

Mit der "Jensenschen Ungleichung" folgt:

$$\sum_i Pr(T = t_i) \cdot f(t_i) \geq f\left(\sum_i Pr(T = t_i) \cdot t_i\right) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} \cdot c \Rightarrow E(X_n) \in O(n^3)$$

$$X_n = 2^{T_n}, E(X_n) = E(2^{T_n})$$

$$E(f(T)) \geq f(E(T)) \Leftrightarrow fkonvex$$

$$c \cdot n^3 \geq 2^{E(T_n)}, E(T_n) \leq \log_2(c \cdot n^3) \in O(\log n)$$

11. Vorlesung

11.1. AVL-Bäume von Adelson-Velsky and Landis

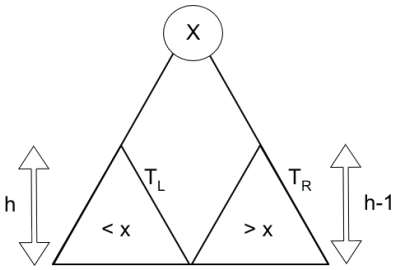


Abbildung 11.1.

Ziel: Zeige, dass die maximale Tiefe eines AVL-Baums mit n Knoten ($\hat{=}$ n gespeicherten Schlüsseln) $O(\log(n))$ beträgt.

11.1.1. AVL-Eigenschaft:

$|h(T_L) - h(T_R)| \leq 1$ muss für jeden Knoten des Baums gelten. $\Rightarrow$ Suchzeit $O(\log(n))$ im worst-case.

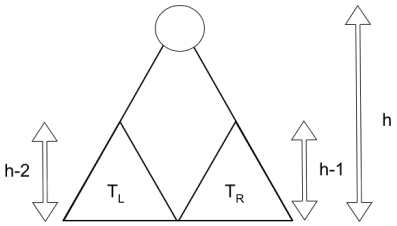


Abbildung 11.2.

$n(h) =$ minimale Anzahl von Knoten in AVL-Baum der Tiefe h

$$n(h) \geq 1 + n(h-2) + n(h-1) \text{ mit } n(0) = 0 \text{ und } n(1) = 1$$

$$n \geq f(h)^{\text{I}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^h - \phi^{-h}) \text{ mit}$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61\ldots$$

$$\Rightarrow n \geq c \cdot \phi^h$$

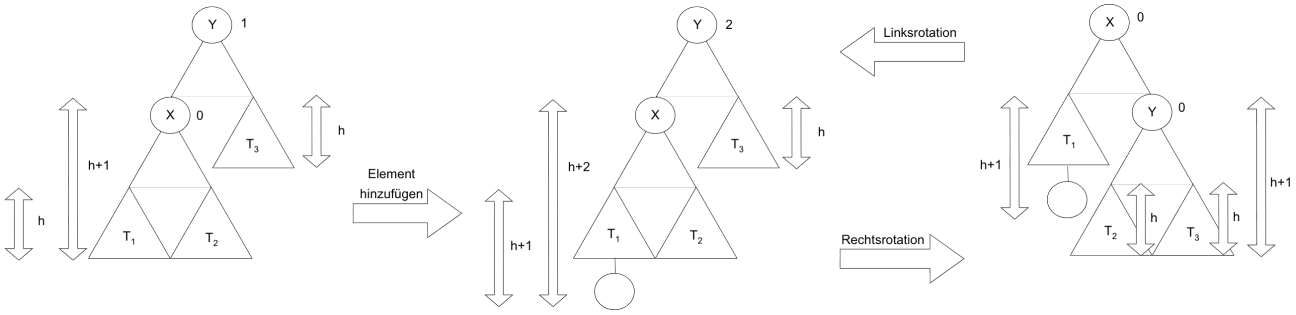
$$\Leftrightarrow h \leq \log(\frac{n}{c})$$

$$\Rightarrow h \in O(\log n)$$

q.e.d.

[I] $f(h)$ meint hierbei die h-te Fibonacci-Zahl

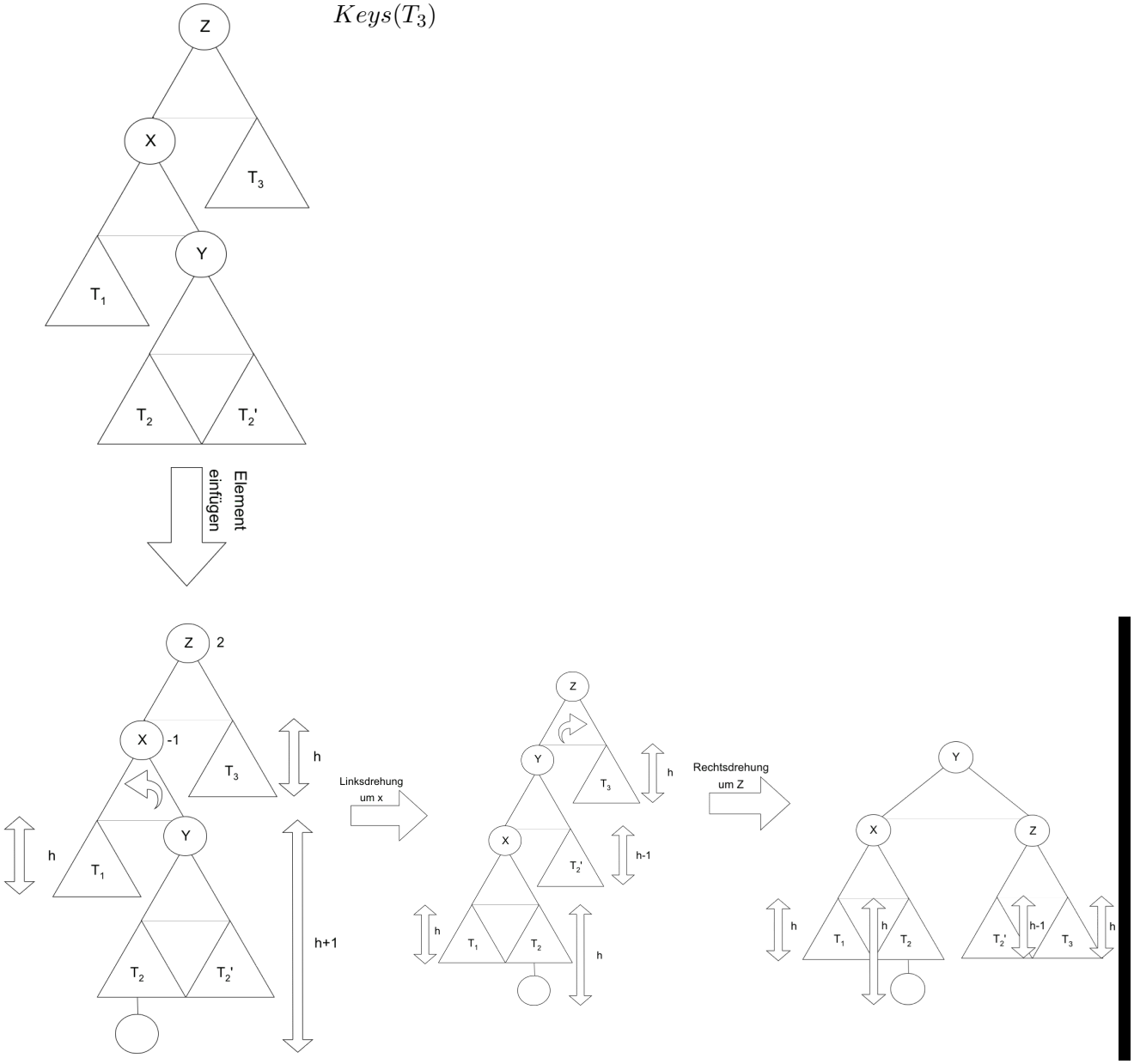
11.2. Rotationen



$Keys(T_1) < Key(X) < Keys(T_2) < Key(Y) < Keys(T_3)$

```
balance(Y) = height(Y.left)-height(Y.right)
```

$Keys(T_1) < Key(X) < Keys(T_2) < Key(Y) < Keys(T_2') < Key(Z) < Keys(T_3)$



11.3. Pseudo-Code

```
1
2  class Node {
3      int key;
4      Node left, right;
5      int height;
6  }
7
8  int height(Node node) {
9      if (node = null) return 0;
10     return height;
11 }
12
13 Node rotateRight(Node y) {
14     Node x = y.left;
15     Node T2 = x.right;
16     y.left = T2;
17     T2.right = y;
18     y.height = 1+max(height(y.left), height(y.right));
19     x.height = 1+max(height(x.left), height(x.right));
20     return x;
21 }
22
23 Node rotateLeft(Node y) {
24     //analog
25 }
26
27 Node insert(Node node, int key) {
28     if (node == null) return new Node(key);
29     if (key < node.key)
30         node.left = insert(node.left, key);
31     else
32         node.right = insert(node.right, key);
33
34     if (balance(node)>1 && key < node.left.key)
35         return rotateRight(node);
36     if (balance(node)<-1 && key > node.right.key)
37         return rotateLeft(node);
38     if (balance(node)>1 && key > node.left.key) {
39         node.left = rotateLeft(node.left);
40         return rotateRight(node);
41     }
42     if (balance(node)<-1 && key < node.right.key) {
43         node.right = rotateRight(node.right);
44         return rotateLeft(node);
45     }
46     return node;
47 }
```

Anmerkung: Die Laufzeit des Einfügens bleibt in $O(\text{Baumtiefe}) = O(\log n)$. Nur einer der vier Fälle ist notwendig, um die Balance herzustellen.

12. Vorlesung

12.1. (a,b)-Suchbäume

Blattorientierte Speicherung der Elemente
Innere Knoten haben mindestens a und höchstens b Kinder und tragen entsprechende Schlüsselwerte, um die Suche zu leiten.

Beispiel:

$$h \hat{=} \text{Tiefe} \Rightarrow \quad a^h \leq n \leq b^h \;\Rightarrow\; \log_b n \leq h \leq \log_a n$$

12.1.1. Aufspaltung bei Einfügen

12.1.2. Verschmelzen von Knoten beim Löschen

Aufspalte- und Verschmelze-Operationen können sich von der Blattebene bis zur Wurzel kaskadenartig fortpflanzen. Sie bleiben aber auf den Suchpfad begrenzt.
$\Rightarrow$ Umbaukosten sind beschränkt durch die Baumtiefe $= O(\log n)$

12.2. Amortisierte Analyse

Beispiel: Binärzähler

000		
001	Kosten(1)	$= 1$
010		$= 2$
011		$= 1$
100		$= 3$
101		$= 1$
110		$= 2$
111		$= 1$
		$\overline{11}$

Kosten der Inkrement-Operation $\hat{=}$ Zahl der Bit-Flips

Naive Analyse $2^k = n$

$$1 \cdot \frac{n}{2} + 2 \cdot \frac{n}{4} + 3 \cdot \frac{n}{8} + \ldots + k \cdot \frac{n}{2^k} = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{k} i(\frac{1}{2})^{i-1} = 2^{k+1} - k - 2 = 2n - k - 2$$

Von 0 bis n im Binärsystem zu zählen kostet $\leq 2n$ Bit-Flips

Sprechweise: amortisierte Kosten einer Inkrement-Operation sind 2
Folge von n-Ops kostet $2n$

12.2.1. Bankkonto-Methode

$$\text{Konto}(i+1) = \text{Konto}(i) - \text{Kosten}(i) + \text{Einzahlung}(i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \text{Kosten}(i) = \text{tatsächliche Gesamtkosten} = \sum_{i=1}^{n} (\text{Einzahlung}(i) + \text{Konto}(i - \text{Konto}(i+1))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \text{Einzahlung}(i) + \text{Konto}(1) - \text{Konto}(n+1)$$

000		
$001_{€}$	Kosten(1)	$= 1$
$01_{€}0$		$= 2$
$01_{€}1_{€}$		$= 1$
$1_{€}00$		$= 3$
$1_{€}01_{€}$		$= 1$
$1_{€}1_{€}0$		$= 2$
$1_{€}1_{€}1_{€}$		$= 1$
		$\overline{11}$

Kontoführungsschema: für Binärzähler

1€ pro 1 in der Binärdarstellung
Jeder Übergang $1_{€} \to 0$ kann dann mit dem entsprechenden Euro Betrag auf dieser 1 bezahlt werden.
Es gibt pro Inkrement Operation nur einen $0 \to 1$ Übergang
2€ Einzahlung für jede Inc-Operation reichen aus um:

1. diesen $0 \to 1$ Übergang zu bezahlen
2. die neu entstandene $1_{€}$ mit einem Euro zu besparen.

$$\text{GK} = 2(2^k - 1) + 0^{\text{I}} - k^{\text{II}} = 2n - k - 2$$

[I] Zählerstand(000)

[II] Zählerstand($\overbrace{111\ldots1}^{k}$)

13. Vorlesung

Satz: Ausgehend von einem leeren 2-5-Baum betrachten wir die Rebalancierungskosten C (Split- und Fusionsoperationen) für eine Folge von m Einfüge- oder Löschoperationen. Dann gilt: $C \in O(m)$
d.h. Amortisierte Kosten der Split- und Fusionsoperationen sind konstant.
! Dies bezieht sich nicht auf die Suchkosten, die in $O(\log n)$ liegen.

Beweisidee:

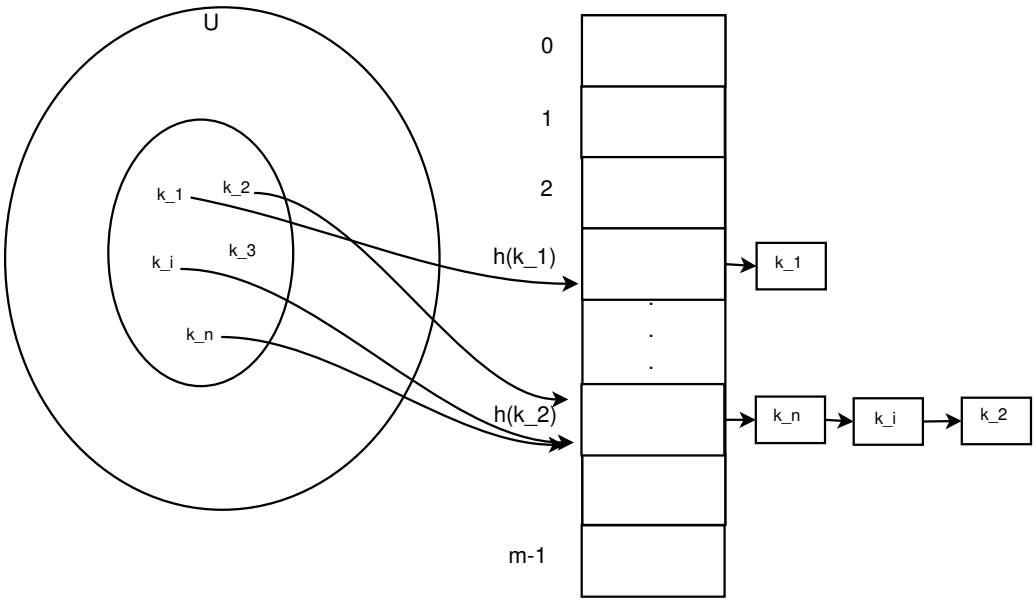
Kontoführung:

1	2	3	4	5	6
2€	1€	0€	0€	1€	2€

regelmäßige Einzahlung: 1€
Durch eine Einfüge- oder Löschoperation steigt oder fällt der Knotengrad des direkt betroffenen Knotens um höchstens 1. ⇒ 1€ Einzahlung reicht zur Aufrechterhaltung dieses Sparplanes.
Jetzt Beseitigung der temporären 1- und 6-Knoten:
Ein 6-Knoten nutzt 1€ um seinen Split zu bezahlen. Die beiden neu entstehenden 3-Knoten benötigen kein Kapital. Der Vaterknoten des gesplitteten 6-Knotens benötigt ggf. den zweiten verfügbaren €.
Analoge Betrachtung für Fusion eines temp. 1-Knotens.

13.1. Hashing

Abbildung 13.1.: Universum und Hashtabelle der Größe m



$U \subseteq \mathbb{N}$ z.B. 64-Bit-Integer
n = Zahl dr zu verwaltenden Schlüssel

$$|U| >> n$$

Hashfunktion h:

$$h : U \to [0, \ldots, m-1]$$

$$\text{z.B. } k \mapsto k \mod m$$

Einfache Annahme: (einfaches uniformes Hashing)

$$\forall\ k_i, k_j \in U : Pr(h(k_i) = h(k_j)) = \frac{1}{m}$$

Analyse der Laufzeit zum Einfügen eines neuen Elementes k

- $h(k)$ berechnen $\longrightarrow O(1)$
- Einfügen am Listenanfang in Fach $h(k)$. $\longrightarrow O(1)$

Analyse der Suchzeit für einen Schlüssel *k*

- $h(k) \longrightarrow O(1)$
- Listenlänge zum Fach $h(k)$ sei $n_{h(k)}$ also beim Durchlauf der kompletten Liste $\longrightarrow O(n_{h(k)})$

$$E(n_{h(k)}) = \frac{n}{m} = \alpha^{\text{I}}$$

$$\text{Suchzeit(Einfügen)} \in O(1 + \alpha)$$

Laufzeit beim Löschen von Schlüssel *k*

- $h(k) \longrightarrow O(1)$
- Durchlaufen der Liste $\longrightarrow 0(n_{h(k)})$
- Löschen durch „Pointer-Umbiegen“ $\longrightarrow O(1)$

13.1.1. Universelles Hashing

Idee Arbeite nicht mit einer festen Hashfunktion sondern wähle am Anfang eine zufällige Hashfunktion aus einer Klasse von Hashfunktionen aus.

z.B.

$$h_{a,b}(k) = ((a \cdot k + b) mod p) mod m$$

p sei eine hinreichend große Primzahl $\quad 0 < a < p, 0 \leq b < p$

$$\mathcal{H}_{p,m} = \{h_{a,b}(k) | 0 < a < p,\ 0 \leq b < p\}$$

$$|\mathcal{H}_{p,m}| = p(p-1)$$

Definition $\mathcal{H}$ heißt universell $\Leftrightarrow \quad \forall\ k, l \in U :\ Pr(h(k) = h(l)) \leq \frac{1}{m}$

[I] Belegungsfaktor

Suchzeit

$$\chi_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{für } h(k) = h(l) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E(n_{h(k)}) = E\left(\sum_{l \in T, l \neq k}\right) = \sum_{l \in T, l \neq k} E(X_{k,l}) = \sum_{l \in T, l \neq k} Pr(h(k) = h(l)) = \sum_{l \in T, l \neq k} \frac{1}{m} = \frac{n-1}{m} = \alpha$$

14. Vorlesung

Universelles Hashing (Fortsetzung)

Könnte ein boshafter Mitspieler n Schlüssel bei gegebener fester Hashfunktion wählen, so würde er solche wählen, die auf den gleichen Slot unter gegebener Hashfunktion abgebildet werden. $\rightsquigarrow$ Durchschnittliche Ablaufzeit von $O(n)$

Idee zufällige Wahl der Hashfunktion aus einer Familie von Funktionen derart, dass die Wahl unabhängig von den zu speichernden Schlüssel ist (universelles Hashing).

14.0.1. Definition

Sei $\mathcal{H}$ eine endliche Menge von Hashfunktionen, welche ein gegebenes Universum U von Schlüsseln auf $\{0, \ldots, m-1\}$ abbildet. Sie heißt universell, wenn für jedes Paar von Schlüsseln $k, l \in U \quad l \neq k$ die Anzahl der Hashfunktionen $h \in \mathcal{H}$ mit $h(l) = h(k)$ höchstens $\frac{|\mathcal{H}|}{m}$. Anders: Für ein zufälliges $h \in \mathcal{H}$ beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei unterschiedliche Schlüssel k, l kollidieren nicht mehr als $\frac{1}{m}$ ist.

14.0.2. Beispiel

p Primzahl, so groß, dass alle möglichen Schlüssel $k \in U$ im $0, \ldots, p-1$ liegen. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bezeichnet den Restklassenring $\mod p$ (weil p prim, ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper). $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ ist die Einheitengruppe.

Annahme: Die Menge der Schlüssel im Universum U ist größer als die Anzahl der Slots in der Hashtabelle. Für $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ und $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ betrachte:

$$h_{a,b}(k) := (a \cdot k + b \mod p) \mod m \quad (*)$$

Damit ergibt sich die Familie

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* = \{1, \ldots, p-1\} \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, \ldots, p-1\} \quad \mathcal{H}_{p,m} = \{h_{a,b} | a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^{(*)} \quad |\mathcal{H}| = p(p-1)\}$$

Satz Die in $(*)$ eingeführte Klasse von Hashfunktionen ist universell.

Beweis Seien k, l Schlüssel auf $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $k \neq l$
Für $h_{a,b} \in \mathcal{H}_{p,m}$ betrachten wir

$$r = (a \cdot k + b) \mod p$$

$$s = (a \cdot l + b) \mod p$$

Es ist $r \neq s$
Dazu:

$$r - s = a \cdot (k - l) \mod p \quad (*2)$$

14. Vorlesung

Angenommen $r - s = 0$

$$0 = a \cdot (k - l) \mod p, \text{ aber } a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \Rightarrow a \neq 0 \text{ und } k \neq l \Rightarrow k - l \neq 0$$

Da p prim ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper $\Rightarrow$ kein Nullteiler $\Rightarrow a \cdot (k - l) \neq 0 \Rightarrow r \neq s$
Daher bilden $h_{a,b} \in \mathcal{H}_{p,m}$ unterschiedliche Schlüssel k, l auf unterschiedliche Elemente ab. („Auf dem level $\mod p$“ gibt es keine Kollisionen).
Aus $(*2)$ folgt:

$$(r - s)(k - l)^{-1} = a \mod p$$

$$r - a \cdot k = b \mod p \text{ Bijektion zwischen (k,l) und (a,b)}$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schlüssel $h \neq l$ kollidieren, gerade die Wahrscheinlichkeit, dass $r \equiv s \mod m$, falls $r \neq S$ zufällig gewählt (aus $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).
Für gegebenes r gibt es unter den übrigen $p-1$ Werten für s höchstens $\lceil \frac{p-1}{m} \rceil \leq \lceil \frac{p}{m} \rceil - 1$ Möglichkeiten, sodass $s \neq r \mod p$ aber $r = s \mod m$

14.0.3. Abschätzung nach oben

$$\lceil \frac{p}{m} \rceil - 1 \leq \frac{(p + m - 1)}{m} - 1 = \frac{p - 1}{m} \text{ Kollisionsmöglichkeiten}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass r und s kollidieren $\mod m$ Kollisionsmöglichkeiten / Gesamtzahl der Werte

$$= \frac{p - 1}{m} \cdot \frac{1}{p - 1} = \frac{1}{m}$$

$\Rightarrow$ Für ein Paar von Schlüsseln $k, l \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $k \neq l$

$$P[h_{a,b}(k) = h_{a,b}(l)] \leq \frac{1}{m} \Rightarrow \mathcal{H}_{p,m} \text{ universell!}$$

14.1. Perfektes Hashing

Wichtig Menge der Schlüssel ist im Vorhinein bekannt und ändert sich nicht mehr.

Beispiele reserved words bei Programmiersprachen, Dateinamen auf einer CD

14.1.1. Definition

Eine Hashmethode heißt perfektes Hashing, falls $O(1)$ Speicherzugriffe benötigt werden, um die Suche nach einem Element durchzuführen.

Idee Zweistufiges Hashing mit universellen Hashfunktionen.

1. Schritt n Schlüssel, m Slots durch Verwendung der Hashfunktion h, welche aus einer Familie universeller Hashfunktionen stammt.

2. Schritt Statt einer Linkedlist im Slot anzulegen, benutzen wir eine kleine zweite Hashtabelle S_j mit Hashfunktion h_j

Bild Schlüssel $k = \{10, 22, 37, 49, 52, 60, 72, 75\}$
Äußere Hashfunktion $h(k) = ((a \cdot b) \mod p) \mod m$

$$a = 3, \quad b = 42, \quad p = 101, \quad m = 9$$

$$h(10) = \underbrace{(3 \cdot 10 + 42 \mod 101)}_{=72} \mod 9 = 0$$

Um zu garantieren, dass keine Kollision auf der zweiten Ebene auftreten, lassen wir die Größe von S_j

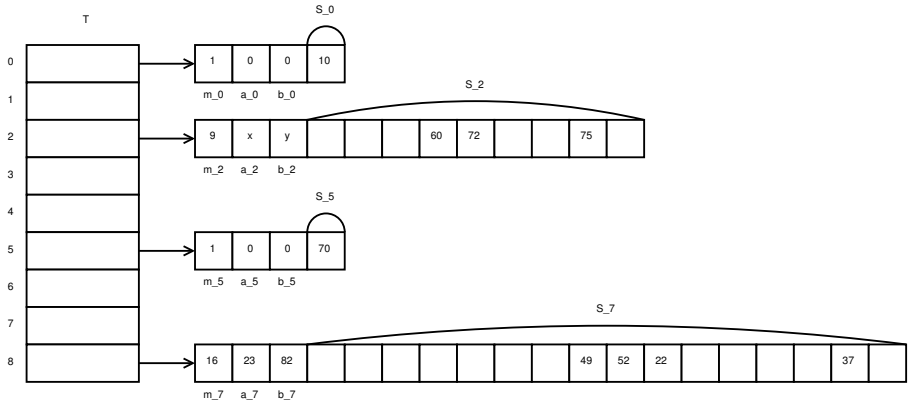


Abbildung 14.1.: Perfekte Hashtabelle

gerade n_j^2 sein ($n_j \neq$ #Schlüssel$\mapsto j$Slot).
Wir verwenden für die Hashfunktion der ersten Ebene eine Funktion aus $\mathcal{H}_{p,m}$. Schlüssel die im j-ten Slot werden in der sekundären Hashtabelle S_j der Größe m_j mittels h_j gehasht. $h_j \in \mathcal{H}_{p,m}$

Wir zeigen: 2 Dinge:

1. Wie versichern wir, dass die zweite Hashfunktion keine Kollision hat.
2. Der erwartete Speicherbedarf ist $O(n)$

zu 1.

Satz Beim Speichern von n Schlüsseln in einer Hashtabelle der Größe $m = n^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kollision auftritt $< \frac{1}{2}$

Beweis: Es gibt $\binom{n}{2}$ mögliche Paare, die kollidieren können. Jedes kollidiert mit der Wahrscheinlichkeit $\leq \frac{1}{m}$, falls $h \in \mathcal{H}$ zufällig gewählt wurde.
Sei X eine zufallsvariable(ZV), X zählt Kollisionen:
Für $m = n^2$ ist die erwartete Zahl der Kollisionen:

$$E[X] = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{m} = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n!}{2!(n-2)!n^2} = \frac{(n-1)}{2n} \leq \frac{1}{2}$$

Anwenden der Markow-Ungleichung (a=1):

$$P[X \geq 1] \leq \frac{E[X]}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ Wahrscheinlichkeit für irgendeine Kollision ist } < \frac{1}{2}$$

q.e.d

14.1.2. Nachteil

Für große n ist $m = n^2$ nicht haltbar!

zu 2. Wenn die Größe der primären Hashtabelle $m = n$ ist, dann ist der Platzverbrauch in $O(n)$ $\curvearrowright$ Betrachte Platzverbrauch der sekundären Hashtabellen.

Satz Angenommen wir wollen n Schlüssel in einer Hashtabelle der Größe $m = n$ mit Hashfunktion $h \in \mathcal{H}$. Dann gilt:

$$E\left[\sum_{j=0}^{m-1} n_j^2\right] < 2n$$

Beweis

Betrachte

$$a^2 = a + 2 \cdot \binom{a}{n} = a + 2 \cdot \frac{a^2 - a}{2} \quad (*3)$$

Betrachte

$$E\left[\sum_{j=0}^{m-1} n_j^2\right] \overset{(*3)}{=} E\left[\sum_{j=0}^{m-1} \left(n_j + 2\binom{n_j}{2}\right)\right]$$

$$\overset{lini.desEW}{=} E\left[\underbrace{\sum_{j=0}^{m-1} n_j}_{=n}\right] + 2E\left[\sum_{j=0}^{m-1} \binom{n_j}{2}\right] = n + 2E\left[\sum_{j=0}^{m-1} \binom{n_j}{2}\right] \# \text{ der Kollisionen}$$

Da unsere Hashfunktion universell ist, ist die erwartete Zahl dieser Paare:

$$\binom{n}{2}\frac{1}{m} = \frac{n(n-1)}{2m} = \frac{n-1}{2}, \text{ da } m = n$$

Somit

$$E\left[\sum_{j=0}^{m-1} n_j^2\right] \leq n + 2\frac{n-1}{2} = 2n - 1 < 2n$$

Korollar Speichern wir n Schlüssel in einer Hashtabelle der Größe $m = n$ mit einer zufälligen universellen Hashfunktion und setzen die Größe der Hashtabellen der zweiten Ebene auf $m_j = n_j^2$ für $j = 0, m = 1$, so ist der Platzverbrauch des perfekten Hashings weniger als $2n$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Platzverbrauch der zweiten Hashtabellen $\geq 4n$ ist, ist $\leq \frac{1}{2}$ ohne Beweis.

15. Vorlesung

Bei n Elementen sollte die Hashtabelle $m = n^2$ groß sein.
Für die universellen Hashfunktionen

$$\mathcal{H}_{p,m} = \{h_{a,b}(k) = (a \cdot k + b) \mod p \mod m | 0 < a < p,\ 0 \leq b < p\}$$

$\binom{n}{1}$ Schlüsselpaare (k, l) mit $k \neq l$

$$E(\#\text{Kollisionen}) \leq \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{m}^{\text{I}} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2}$$

Idee Zweistufiges Verfahren:

- primäre Hashfunktion für Tabelle der Größe $m = n$

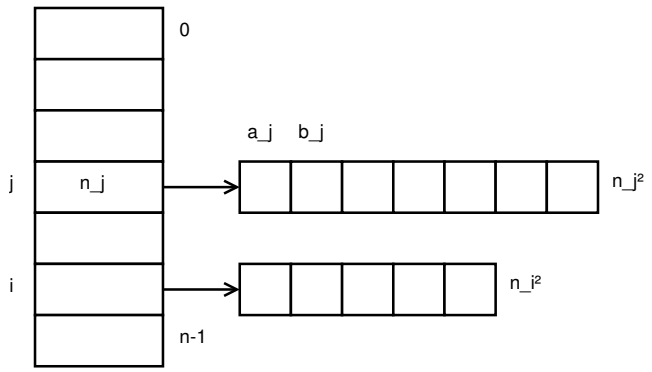


Abbildung 15.1.: Perfektes Hashing

[I] Universalität von $\mathcal{H}$

Teil II.

Graphen-Algorithmen

15.0.1. Einführung

$$G = (V, E) \quad V \text{ vertices, } E \text{ edges} \quad E \subseteq V \times V$$

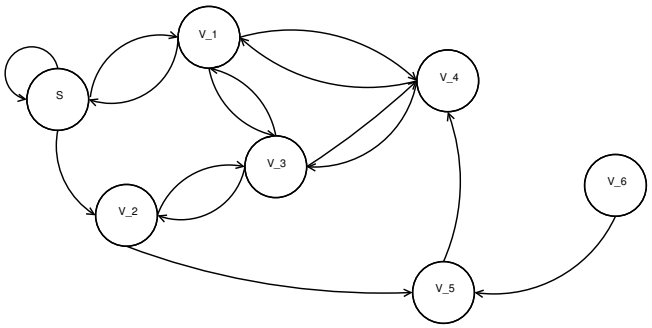


Abbildung 15.2.: Gerichteter Graph

Planare Graphen können ohne Überkreuzung der Kanten in die Ebene eingebettet werden.

Eulerische Polyederformel

$$|V| + |F| = |E| + 2$$

$$8 + 6 = 12 + 2$$

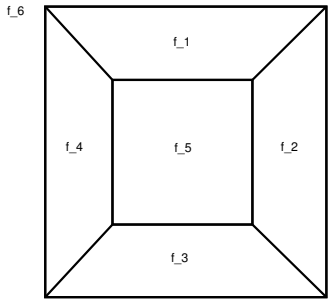


Abbildung 15.3.: Würfel

Es gilt:

$$2 \cdot |E| \geq 3 \cdot |F|$$

$$\#\text{gerichtete Kanten} = 2 \cdot |E| = \sum_{i=1}^{|F|} \#\text{Kanten}(f_i)^{\text{II}} \geq 3 \cdot |F|$$

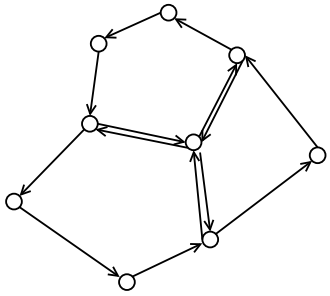


Abbildung 15.4.: Placeholder

$$|F| \leq \frac{2}{3}|E|, \quad |V| + |F| = |E| + 2 \leq |V| + \frac{2}{3}|E| \Rightarrow \frac{1}{3}|E| + 2 \leq |V|$$

$$\boxed{\Rightarrow |E| \leq 3 \cdot |V| - 6}$$

[II] Jedes f_i hat mindestens 3 Kanten

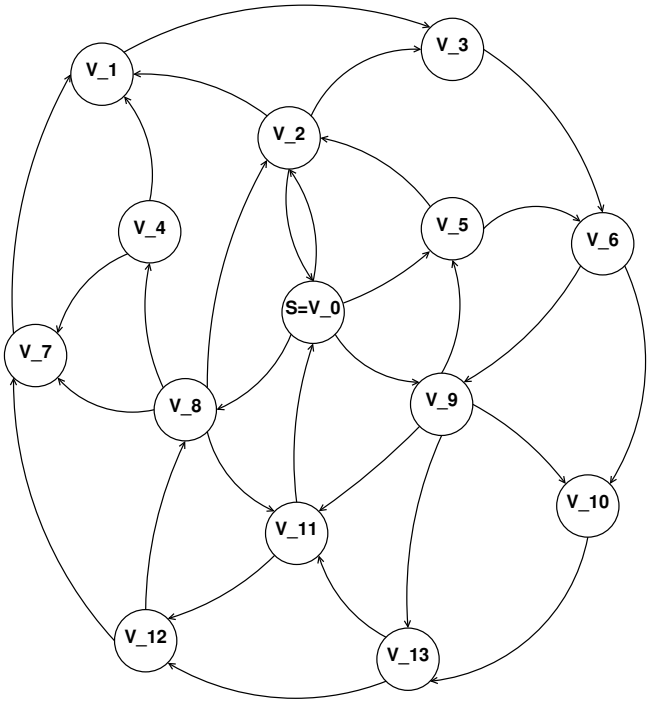


Abbildung 15.5.: Beispiel

Adjazenzmatrix

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

$= A$

$$a \in B^{|V| \times |V|}$$

falls G ungerichtet $\Rightarrow A = A^T$

Adjazenzlisten Repräsentation

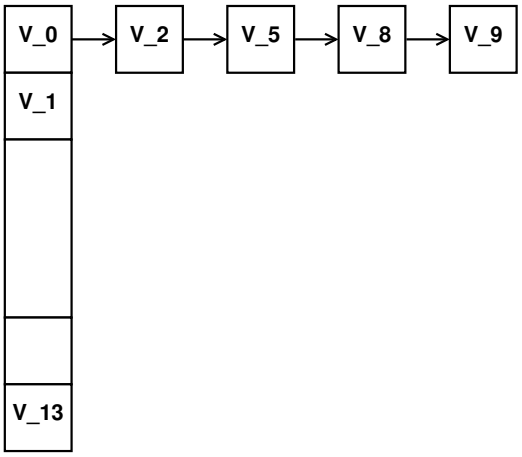


Abbildung 15.6.: Adjazenzliste

Platzbedarf

$$\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}\left(|V| + \sum_{i=0}^{|V|-1} \text{outdeg}(v_i)\right)$$

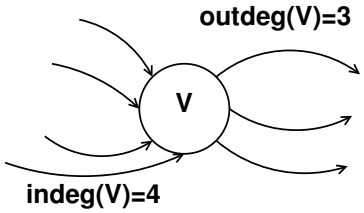


Abbildung 15.7.: indeg und outdeg

15.0.2. BFS (Breadth-First Search) Breitensuche

```
1  forall (v in V\{S}) {
2    col[v]=white;     // Farbe  weiß = unbekannt, grau = bekannt, schwarz = vollkommen bekannt
3    d[v] = infinity; // Distanz
4    pi[v] = NULL;     // pi ist Vorgänger
5  }
6  col[s] = grey;      // s ist Startknoten
7  d[s] = 0;
8  pi[s] = NULL;
```

Queue	vs	Stack
Schlange		Stapel
empty()		”
push()		”
pop()		
FIFO		FILO
First-In-First-Out		First-In-First-Out

```
1  Queue Q;
2  Q.push(s);
3  while(!Q.empty()) {
4    u = Q.pop();
5    forall( (u,v) in E) {
6      if (col[v] == white) {
7        col[v] == grey;
8        d[v] = d[u]+1;
9        pi[v] = u;
10       Q.push(v);
11     }
12   }
13   col[u] = black;
14 }
```

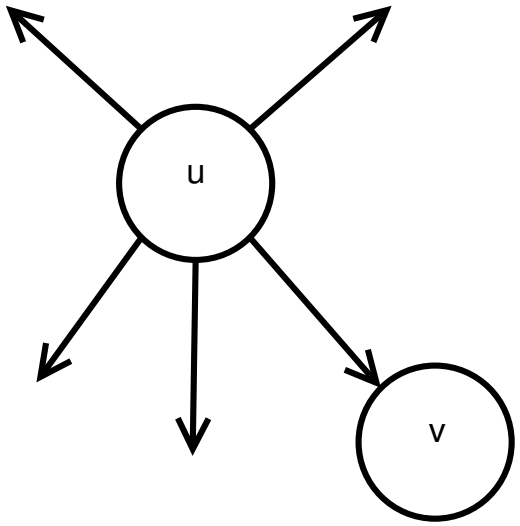


Abbildung 15.8.: Grafik zum Beispielcode

Laufzeit

$$\mathcal{O}(|V| + |E|)$$

Begründung: Jeder von s aus erreichbare Knoten wird nur einmal in die Queue aufgenommen und auch ihr entfernt. Für jeden Knoten muss nur einmal seine Adjazenzliste durchlaufen werden.

$$\Rightarrow \mathcal{O}\left(|V| + \sum_{v \in V} \text{outdeg}(v)\right)$$

16. Vorlesung

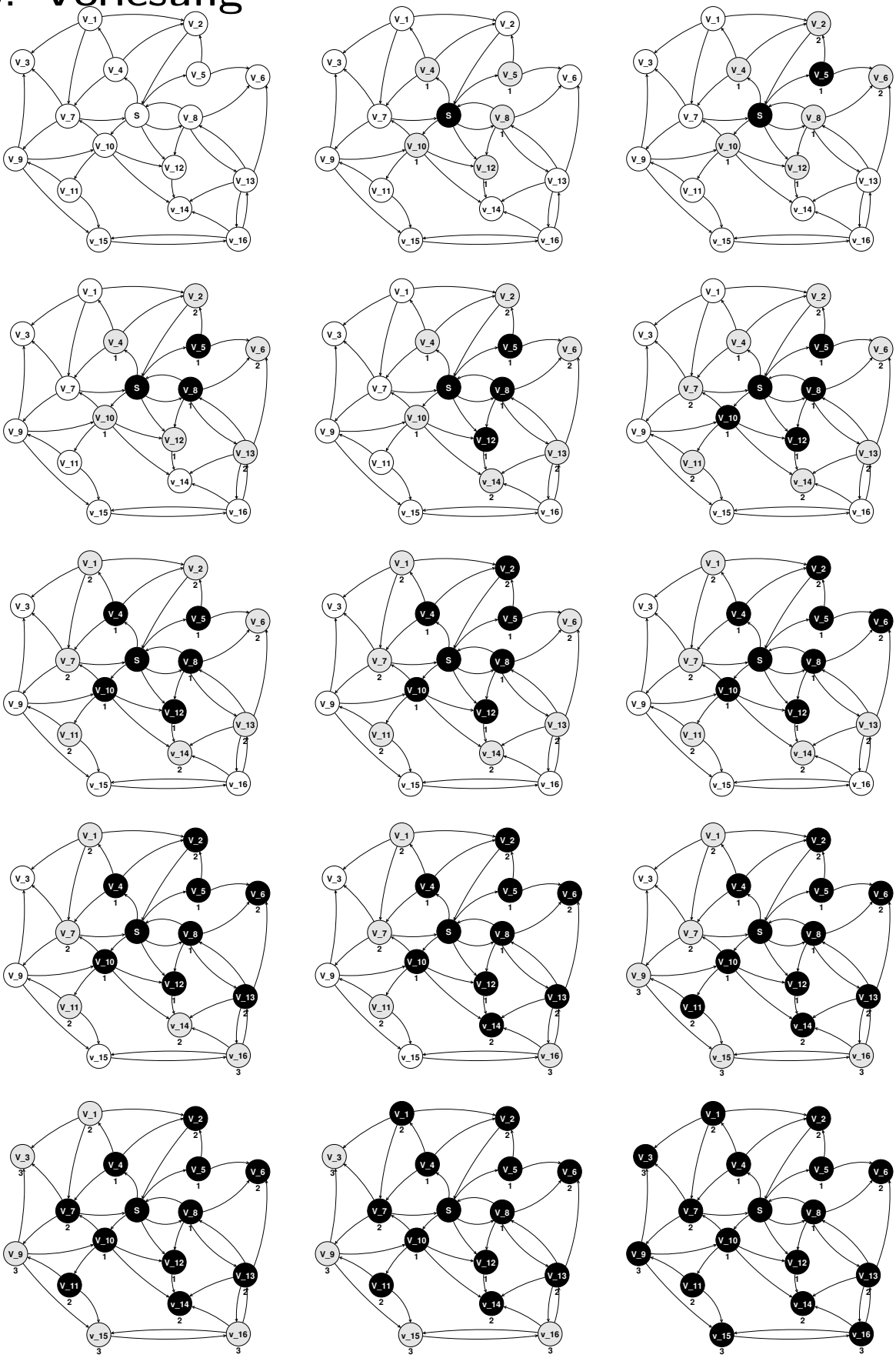


Abbildung 16.1.: Beispiel

16. Vorlesung

Definition: Länge kürzesten Weges

$\delta(s, v)$ = Länge eines kürzesten Weges vom Startknoten s zum Knoten v.
Setze $\delta(s, v) = \infty$, falls v nicht erreichbar von s aus.

Satz: Richtigkeit des Algorithmus

Nach Ablauf von BFS[I] gilt

$$\forall v \in V : \ d[v] = \delta(s, v)$$

Lemma 1: Dreiecksungleichung für kürzeste Wege

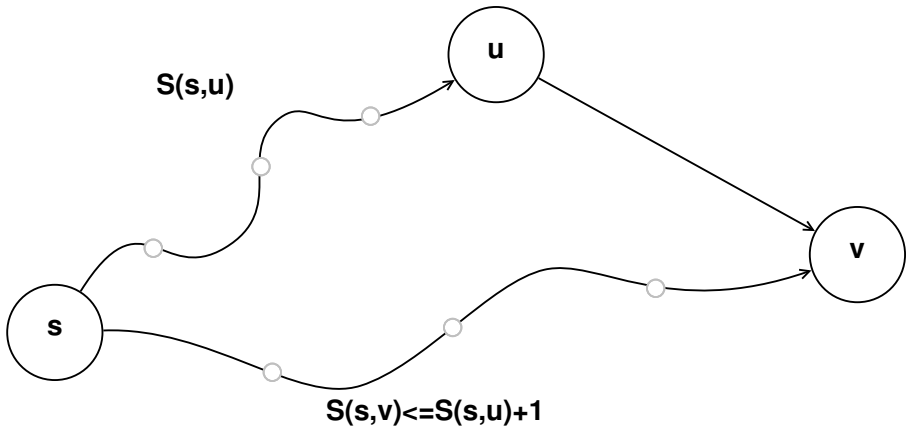


Abbildung 16.2.

Lemma 2

Zu jedem Zeitpunkt im Verlauf von BFS gilt:

$$\forall v \in V : \ d[v] \geq \delta(s, v)$$

Beweis (induktiv über Zahl der Operationen, die d-Wert verändern)

Induktions-Anfang

$$d[s] = 0 \surd$$

Induktions-Schritt Knoten v wird von u aus neu entdeckt

$$d[u] \geq \delta(s, u)$$

$$d[v] = d[u] + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \overset{D.U.}{\geq} \delta(s, v)$$

Lemma 3

Sei $Q = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ eine Queue, dann gilt stets:

$$d[v_1] \leq d[v_2] \leq \ldots \leq d[v_k] \leq d[v_1] + 1$$

[I] Breitensuche

Beweis (induktiv über die Zahl der push- und pop-Operationen)

Induktions-Anfang

$$d[s] = 0 \surd$$

Induktions-Schritt

pop

$$\cancel{d[v_1]} \leq d[v_2] \leq \ldots \leq d[v_k] \leq d[v_1] + 1 \overset{!}{\leq} d[v_2] + 1$$

push

$$d[u] = d[v_1] \leq d[v_2] \leq \ldots \leq d[v_k] \leq d[u] + 1$$

Beachte Kante (u, v) v ist weiß

$$v = v_{k+1} \text{ wird gepusht}$$

$$d[v_{k+1}] = d[v_1] + 1$$

Zustand von Q nach push

$$d[v_2 \leq d[v_3] \leq \ldots \leq d[v_k] \leq d[v_1] + 1 = d[v_{k+1}] \quad \surd$$

Satz: Richtigkeit des Algorithmus

Nach Ablauf von BFS[II] gilt

$$\forall v \in V : \; d[v] = \delta(s, v)$$

Beweis durch Widerspruch

Sei $v \in V$, so dass $d[v] \neq \delta(s, v)$ am Ende des Algorithmus $\overset{Lemma2}{\Longrightarrow} d[v] > \delta(s, V)$
Sei v so gewählt, dass es der erste Knoten ist mit der Eigenschaft, dass sein d-Wert falsch gesetzt wird.
d.h. Alle d-Werte bis zu diesem Zeitpunkt sind korrekt.
Sei $s \mapsto u' \to v$ ein kürzester Weg s ui v
Betrachte die Situation bei Bearbeitung von u':

1. Fall v ist in diesem Moment schwarz.

$$d[v] > \delta(s, v) = \delta(s; u') + 1 \geq {}^{\text{III}} d[v] \lightning$$

2. Fall v ist in diesem Moment weiß.

$$d[v] > \delta(s, u') + 1 = d[u'] + 1 = {}^{\text{IV}} d[v] \lightning$$

[II] Breitensuche
[III] v vor u' aus Q entfernt und Lemma 3.
[IV] wegen Wahl von v; d-Wert von u' muss also korrekt sein

3. Fall v ist grau.

$$d[v] > \delta(s, u') + 1 = d[u'] + 1 \geq d[u] + 1 = d[v]$$

$d[u] \leq d[u']$, weil u vor u' aus Q entfernt $\lightning$

q.e.d.

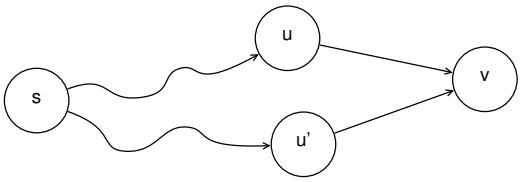


Abbildung 16.3.

16.1. Kürzeste Wege Algorithmen

16.2. Dijkstra-Algorithmus

$$G = (V, E) \quad w : E \to \mathbb{R}_0^+$$

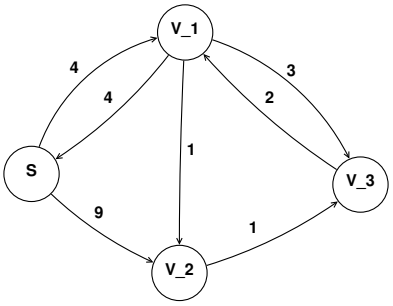


Abbildung 16.4.

Sei $p = (s = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$

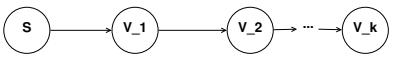


Abbildung 16.5.

$$w(p) = \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) = \delta(s, v_k)$$

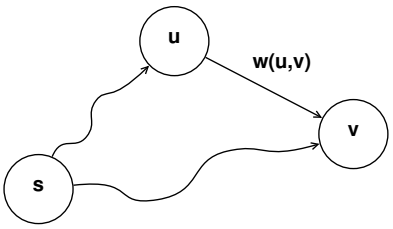


Abbildung 16.6.

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, U) + w(u, v)$$

```
1 relax(u,v,w) {
2   if(d[v] > d[u]+w(u,v) ) {
3     d[v] = d[u] + w(u,v);
4     Π[v] = u;
5   }
6 }
```

Betrachte Algorithmen zur kürzesten Wege Berechnung, die Distanzwerte nur mit Hilfe dieser relax-Funktion verändern, dann gilt:

$$d[v] \geq \delta(s, v) \quad \forall v \in V$$

Beweis

$$d[v] = d[u] + w(u, v) \overset{I.A.}{\geq} \delta(s, u) + w(u, v) \geq \delta(s, v)$$

Induktion über Zahl der reflex-Aufrufe

17. Vorlesung

Dijkstra Algorithmus (Fortsetzung)

$$G = (V, E) \quad w : E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

```
1  forall (v ∈ V) {
2    d[v] = ∞;
3    Π[v] = NULL;
4  }
5  d[s] = 0;
6  S = ∅;
7  PriorityQueue PQ;
8  forall (v ∈ V)
9    PQ.insert((d[v],v));
10 while(!PQ.empty()) {
11   u = PQ.deleteMin();
12   forall( (u,v) ∈ E) {
13     if ( d[v] > d[u] + w(u,v)) {
14       d[v] = d[u] + w(u,v);
15       Π[v] = u;
16       PQ.decreaseKey((d[v],v));
17     }
18   }
19   S = S∪{u};
20 }
```

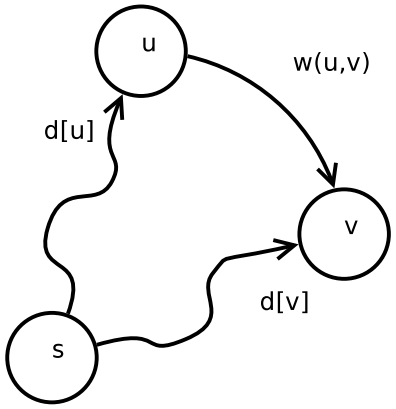


Abbildung 17.1.

Satz: Der Dijkstra Algorithmus berechnet alle d-Werte, so dass nach Ablauf des Algorithmus $\forall\, v \in V$ gilt: $d[v] = \delta(s, v)$.

Beweis:

Annahme:

$$\exists v \in V : \ d[v] \neq \delta(s,v)$$

$$\overset{LemmaRelax}{\Longrightarrow} \ d[v] > \delta(s,v)$$

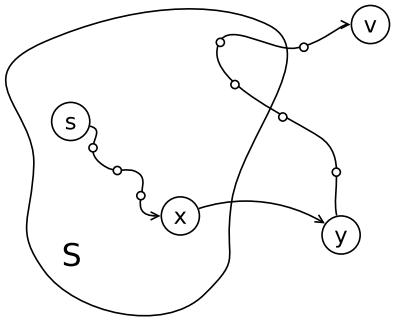


Abbildung 17.2.: Skizze

Sei v so gewählt, dass v der erste Knoten mit der Eigenschaft ist, der mit deleteMin der PQ entnommen wird und nach Relaxation aller von ihm ausgehenden Kanten der Menge S hinzugefügt wird.
Betrachte einen kürzesten Weg $s \rightsquigarrow v$

$$d[v] > \delta(s,v) \geq {}^{\text{I}}\delta(s,y) = d[y] = {}^{\text{II}}d[x] + w(x,y) = d[y] \geq {}^{\text{III}}d[v] \quad \lightning$$

17.0.1. Vorläufige Laufzeitanalyse von Dijkstra

PQ.insert	x	$\|V\|$
PQ.empty	x	$\|V\|$
PQ.deleteMin	x	$\|V\|$
PQ.decreaseKey	x	$\|E\|$

Mit balanciertem Suchbaum oder mit binärem Heap (siehe 1.2) können diese Operationen alle in Zeit $\mathcal{O}(\log|V|)$ realisiert werden. $\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}((|V|+|E|)\log|V|)$
Wir werden später zeigen, dass eine Laufzeit von $\mathcal{O}(|V|\log|V|+|E|)$ möglich ist.

17.1. Bellman-Ford-Algorithmus

$$G = (V,E) \quad w: \ E \to \mathbb{R}$$

Voraussetzung G enthält keine negativen Zyklen

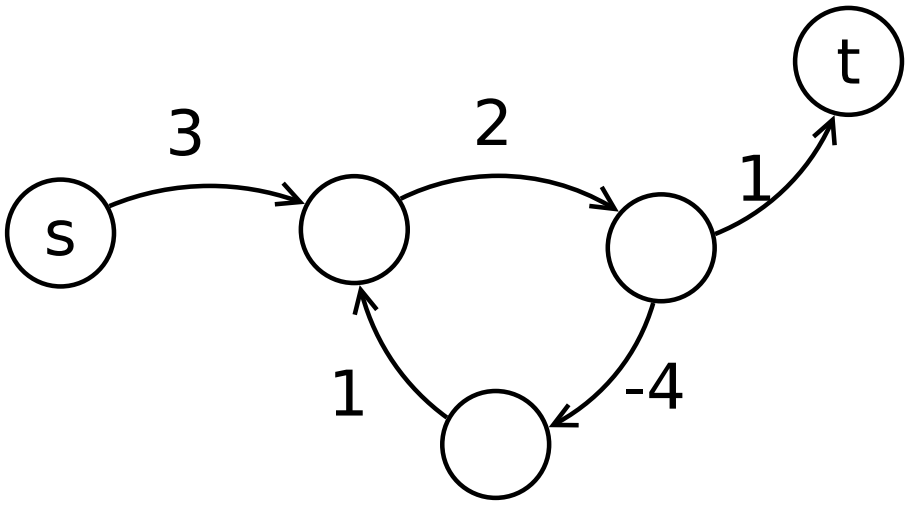


Abbildung 17.3.: Ein verbotener, negativer Zyklus

[I] weil Kantengewichte nicht negativ sein dürfen
[II] x wurde schon zu S hinzugefügt, hat also korrekten d-Wert $d[x] = \delta(s,x)$
[III] weil v vor y aus der PQ entnommen wird.

17.1.1. Pseudocode

```
forall(v ∈ V) {
  d[v] = ∞;
  Π[v] = NULL;
}
d[s] = 0;
for(i = 1; i < |V|; i++ )
  forall((u,v) ∈ E)
    if( d[v] > d[u] + w(u,v)) {
      d[v] = d[u] + w(u,v);
      Π[v] = u;
    }
```

17.1.2. Laufzeit: Bellman-Ford

$$\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$$

17.1.3. Korrektheitsbeweis: Bellman-Ford

Invariante: Nach den i-ten Schleifendurchlauf sind alle Kürzesten Wege korrekt berechnet, die $\leq i$ Kanten benutzen.

Beweis: Induktion über i

Induktionsanfang

$\boldsymbol{i = 0}$ $d[s] = 0 = \delta(s, s)$, da keine negativen Zyklen vorliegen.

17.1.4. Induktionsschritt: $i \to i + 1$

Betrachte kürzesten Weg mit $i + 1$ Kanten:

$$s = v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_i \to v_{i+1}$$

Aufgrund der Induktionsannahme[IV] gilt: $d[v_i] = \delta(s, v_i)$, weil $s = v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_i$ ein kürzester Weg $s \rightsquigarrow v_i$ mit i Kanten ist. Da alle Kanten in der inneren Schleife einmal relaxiert werden, trifft dies insbesondere auf die Kante (v_i, v_{i+1}) zu:

$$d[v_{i+1}] = d[v_i] + w(v_i, v_{i+1}) = \delta(s, v_i) + w(v_i, v_{i+1}) = \delta(s, v_{i+1})$$

Frage: Warum folgt aus der Gültigkeit dieser Invariante die Korrektheit des Algorithmus?

Antwort Alle kürzesten Wege benutzen höchstens $|V| - 1$ Kanten, ansonsten hätten sie einen Zyklus mit Gewicht ≥ 0, den man auch weglassen kann.

```
//Erkennung der Existenz negativer Zyklen
forall((u,v) ∈ E)
  if(d[v] > d[u] + w(u,v))
    negativer Zyklus
```

[IV] Die Invariante

18. Vorlesung

18.1. All-Pairs-Shortest Path Algorithmen

Distanzmatrix D für einen Graphen $G = (V, E)$ $V = v_1, v_2, \ldots, v_n$, $w : E \mapsto \mathbb{R}$

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ w(v_i, v_j) & \text{für } (v_i, v_j) \in E \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$D = (d_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

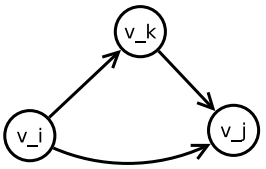


Abbildung 18.1.: Grafik

$$d_{ij}^{(2)} = \min(d_i^{(1)} j,\ \min_{k=1,\ldots,n}(d_{ik}^{(1)} + d_k^{(1)} j))$$

$$D^{(2)} = D^{(1)} \circ D^{(1)} \qquad = \min(d_{ik}^{(1)} + d_k^{(1)} j)$$

Vergleich zu Matrixmultiplikation

$$C = A \circ B \quad \text{, mit } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

im Ring $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$$C_{ij} = \min_{k=1,\ldots,n}(\quad A_{ik} + B_{kj})$$

Kommutativgesetz

$$\min(\min(a, b), c) = \min(a, b, c)$$

im „Ring“[I] $(\mathbb{R}, \min, +)$

Distributivgesetz

$$a + \min(b, c) = \min(a + b, a + c)$$

[I] der keiner ist

18. Vorlesung

Assoziativgesetz

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$$

Ziel: $D^{(n)\text{II}} = D^{(1)} \circ D^{(1)} \circ \ldots \circ D^{(1)}$

Es gilt: $D^{(n)} = D^{(n+m)}$ für $m \geq 1$

18.1.1. Laufzeit zur Berechnung von $D^{(n)}$

Naiv: $\mathcal{O}(n^4)$

$$D^{(2)} = D^{(1)} \circ D^{(1)}$$

$$D^{(4)} = D^{(2)} \circ D^{(2)}$$

$$D^{(8)} = D^{(4)} \circ D^{(4)}$$

$$\vdots$$

$$D^{(2^i)} = D^{(2^{i-1})} \circ D^{(2^{i-1})}$$

Schrittzahl i so wählen, dass $2^i \geq n$

sukzessives Quadrieren: $\mathcal{O}(n^3 \log n)$

18.2. Floyd-Warshall-Algorithmus

```
1 for (k = 1; k ≤ n; k++)
2   for(i = 1; i ≤ n; i++)
3     for (j = 1; j ≤ n; j++)
4       d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k]+d[k][j])
```

Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$

18.2.1. Korrektheitsbeweis:

Invariante Nach dem k-ten Schleifendurchlauf entspricht d_{ij} der Weglänge eines kürzesten Weges p von v_i nach v_j, wobei nur Zwischenknoten erlaubt sind, mit Index $\leq k$

$$p : v_i \to v_{l_1} \to v_{l_2} \to \ldots \to v_{l_m} \to v_j$$

d.h. $1 \leq l_1, l_2, \ldots, l_m \leq k$

[II] In der Potenz stehen die Anzahl der betrachteten Kanten. n entspricht allen Kanten

18.2.2. Beweis der Invariante durch Induktion nach k

$k = 0$: Nach der Initialisierung von D, also vor dem 1. Schleifendurchlauf, gilt obige Invariante.

$k - 1 \to k$:

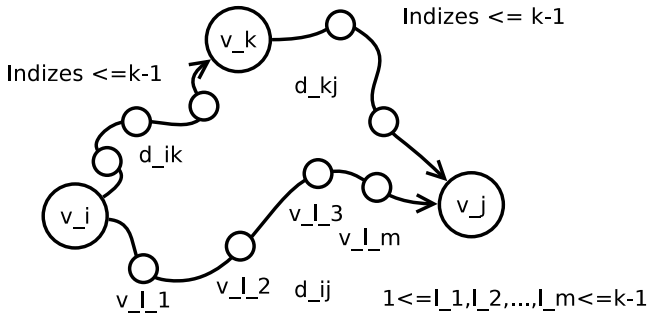


Abbildung 18.2.: Beweis der Invariante

Durch die Operation $d_{ij} = \min(d_{ij}, d_{ik} + d_{kj})$ wird die Invariante sichergestellt.

18.3. Naive Lösung des All-Pairs Problems durch $|V|$-malige Anwendung von Bellman-Ford oder Dijkstra-Algorithmus

Bellman-Ford $\mathcal{O}(|V| \cdot |V| \cdot |E|) = \mathcal{O}(|V|^2 \cdot |E|)$

Dijkstra $\mathcal{O}(|V| \cdot (|V| \cdot \log |V| + |E|)) = \mathcal{O}(|V| \cdot |E| + |V|^2 \cdot \log |V|)$

18.4. Johnson-Algorithmus

Idee: Neugewichtung der Kanten, so dass keine negativen Kantengewichte mehr vorhanden sind. Anschließend $|V|$-mal Dijkstra-Algorithmus ausführen.

Naiver Ansatz

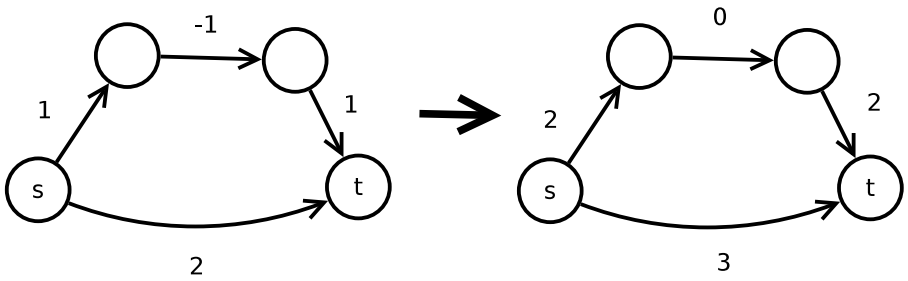


Abbildung 18.3.: Naiver Ansatz, kürzester Weg wird zerstört

Neuer Ansatz

$$w'(u,v) = \text{pot}^{\text{III}}(u) - \text{pot}(v) + w(u,v) \geq 0$$

Mit dieser Neugewichtung gilt, dass kürzeste Wege bzgl. w den kürzesten Wegen bzgl. w' entsprechen.

$$p : s = v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots v_i \to v_{i+1} \to \ldots v_k = t$$

$$w'(p) = \sum_{i=0}^{k-1} w'(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} [\text{pot}(v_i) - 1\text{pot}(v_{i+1}) + w(v_i, v_{i+1})]$$

$$\overset{Teleskopsumme}{=} \text{pot}(v_0) - \text{pot}(v_k) + \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) = \text{pot}(s) - \text{pot}(t) + w(p)$$

d.h. Alle kürzesten Wege $s \rightsquigarrow t$ unterscheiden sich bzgl. w' im Vergleich zu w nur um eine feste additive Konstante $\text{pot}(s) - \text{pot}(t)$

$$\text{pot}(u) - \text{pot}(v) + w(u,v) \geq 0$$

$$\text{pot}(v) \leq \text{pot}(u) + w(u,v)^{\text{IV}}$$

$$\text{pot}(v) = \delta(z,v)$$

$$G' = (V', E') \quad V' = V \cup z, E' = E \cup (z,v) | v \in V \quad \text{mit } w'(z,v) = 0$$

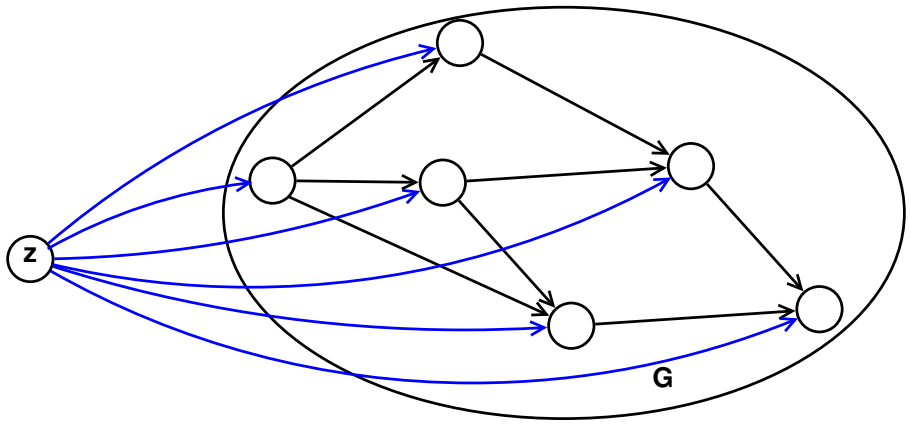


Abbildung 18.4.: Die blau markierten Kanten haben die Länge 0

- Löse single-source-shortest-Path Problem in G' mit z als Startknoten
- setze $\text{pot}(v) = \delta_{G'}(z,v)^{\text{V}}$
- Neugewichtung
- $|V|$-mal Dijkstra

18.4.1. Laufzeit des Johnson-Algorithmus

$$\mathcal{O}(|V| \cdot |E| + |V| \cdot (|V| \cdot \log|V| + |E|)) = \mathcal{O}(|V| \cdot |E| + |V|^2 \cdot |V|)$$

[III] Potentialfunktion
[IV] Dreiecksungleichung
[V] berechnet mit Bellman-Ford

19. Vorlesung

19.1. Minimal aufspannende Bäume MST

Eingabe

$$G = (V, E) \quad E \text{ ungerichtet} \quad (u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \in E \text{ mögliche Notation } \{u, v\}$$

$w : E \to \mathbb{R}$

Gesucht

$$\text{Baum } T \subseteq E$$

$$G_T = (V, T) \text{zusammenhängend (zykelfrei)}$$

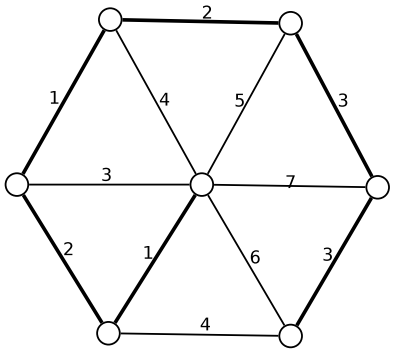
$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e) \text{minimal}$$

Frage $|T| = ?$

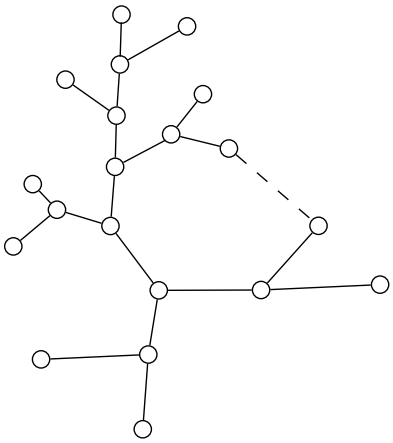
Antwort $|T| = |V| - 1$

19.1.1. Greedy-Algorithmen zur Lösung des MST-Problems:

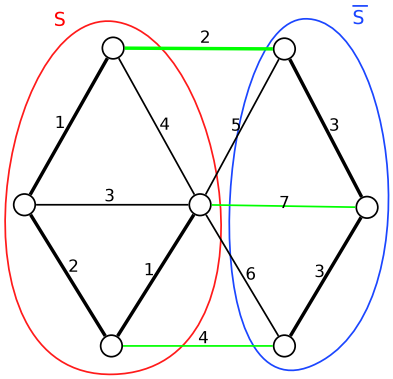
Starte mit $T = \emptyset$, nehme sukzessive Kanten zu T hinzu, so dass nach $|V| - 1$ Schritten der gesuchte MST entstanden ist. Dabei benötigen wir ein Kriterium, das sicherstellt, dass gewählte Kanten zur Gesamtlösung dazugehören.



(a) Beispiel für einen Spannbaum in einem Graphen



(b) Beispiel für einen Spannbaum



(c) Grün markiert sind alle Kanten, die von S nach $\overline{S}$ verlaufen. Wähle die Kante mit dem kleinsten Gewicht, also 2, aus.

19.1.2. Schnitt-Lemma:

Betrachte eine Aufteilung (Schnitt) der Knotenmenge V in V und $\overline{S} = V \setminus S$
und Kanten $(u, v) \in E \cap S \times \overline{S}$
Sei $e \in E \cap S \times \overline{S}$ mit $w(e) \leq w(e')\ \forall\ e' \in E \cap S \times \overline{S}$ dann gibt es einen MST mit $e \in$ MST

19.1.3. Beweis für das Schnitt-Lemma

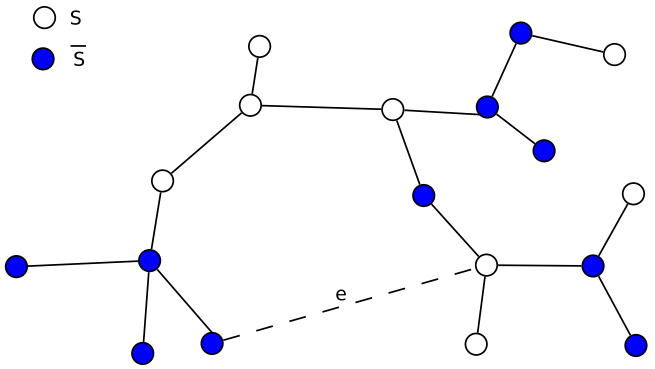


Abbildung 19.2.

Sei e eine „sichere“ Kante aus dem Schnitt-Lemma.
o.B.d.A. $u \in S$ und $v \in \overline{S}$.
Es gibt eine Zykel in $T \cup \{e\}$ und darin eine Kante $e' \in S \times \overline{S}$ mit $w(e') \geq w(e)$.
Ersetze $T' = T \cup \{e\} \setminus \{e'\}$
$w(T') \leq w(T) \Rightarrow w(T') = w(T)$ weil T ein MST.

q.e.d.

19.1.4. Algorithmus von Kruskal

sortiere Kanten nach ihrem Gewicht aufsteigend
$T = \emptyset$

```
1 forall (u,v) ∈ E in sortierter Reihenfolge {
2     if (find(u) == find(v)) continue;
3     T = T∪{(u,v)};
4     union(u,v);
5 }
```

Effizienz von Kruskal

Sortieren: $\mathcal{O}(|E| \cdot \log |E|) = \mathcal{O}(|E| \log |V|)$
$2|E|$ viele find-Operationen $\mathcal{O}(1)$
$|V| - 1$ viele union-Operationen $\mathcal{O}(|V|)$ naiv
$\mathcal{O}(|E| \log |V| + |E| \cdot 1 + (|V| - 1)|V|) =$
$\mathcal{O}(|E| \log |V| + \cancel{|V|^2})$

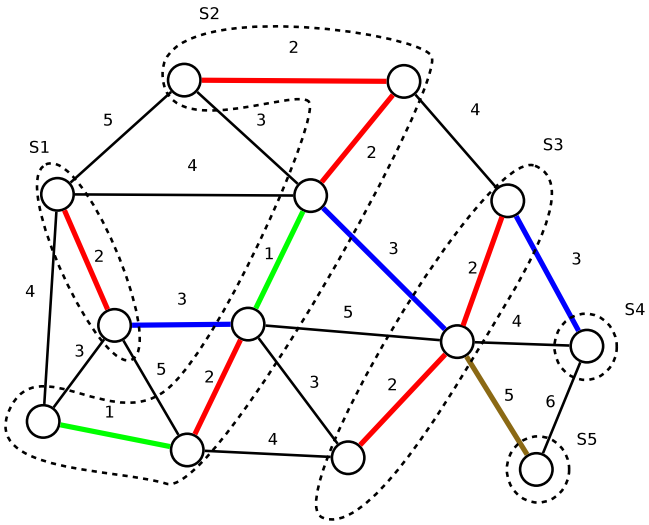


Abbildung 19.3.: Reihenfolge
grün→rot→blau→braun

Idee zum Aufbau einer Union-Find-Datnstruktur

Jeder Knoten trägt eine Komponentennummer, die in einem Feld vermerkt ist. Die find-Operation ist durch einen Feld-Zugriff realisierbar. Um die union-Operation zu realisieren, verwalten wir die Knoten einer Komponente in einer einfach verketteten Liste und merken uns die Listenlänge. Wenn zwei Komponenten fusionieren, benennen wir die Komponente mit der kleineren Knotenzahl um, indem wir die zugehörige Liste durchlaufen und die Umbenennung im Feld vornehmen. Und die beiden betroffenen Listen müssen konkateniert werden.

Beobachtung: Ein einzelner Knoten erfährt höchstens $\log |V|$ viele Umbenennungen seiner Komponentennummer, da sich bei jeder Umbenennung die Größe der Komponente zu der er gehört, verdoppelt.

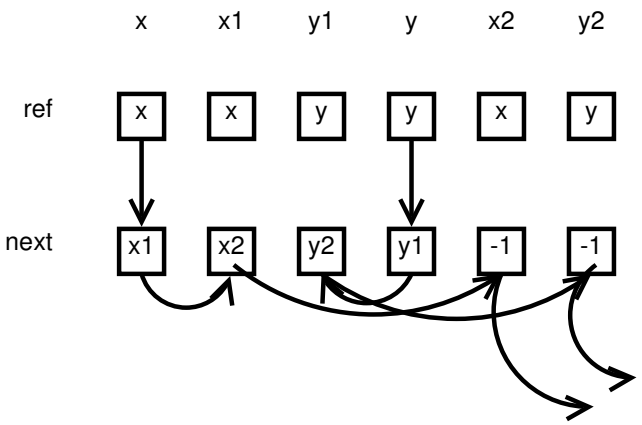
20. Vorlesung

20.0.1. Einfache Union-Find-Datenstruktur

	0	1	2		$n-1$
ref	0	1	2	...	$n-1$
size	1	1	1	...	1
next	-1	-1	-1	...	-1

$n = |V|$

```
1  class Partition
2      int[] ref,size,next;
3      Partiotion(int n) {
4          ref = new int[n];
5          size = new int[n];
6          next = new int [n];
7          for (int i = 0; i < n; i++) {
8              ref[i] = i;
9              size[i] = 1;
10             next[i] = -1;
11         }
12     }
13     int find(int v) {
14         return ref[v];
15     }
16     void union(int u, int v) {
17         int x = ref[u];
18         int y = ref[v];
19
20         if (size[x] > size[y]) {
21             x = ref[v];
22             y = ref[u];
23         }
24         int h = next[y];
25         next[y] = x;
26         int z = y;
27         while( next[z] ≥ 0) {
28             z = next[z];
29             ref[z] = y;
30         }
31         next[z] = h;
32         size[y] = size[y] + size[x];
33     }
```

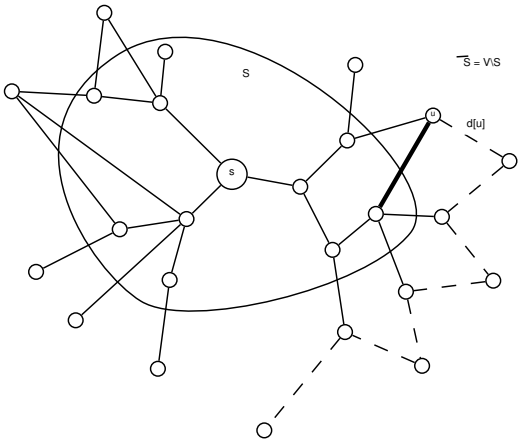


Laufzeit Kruskal

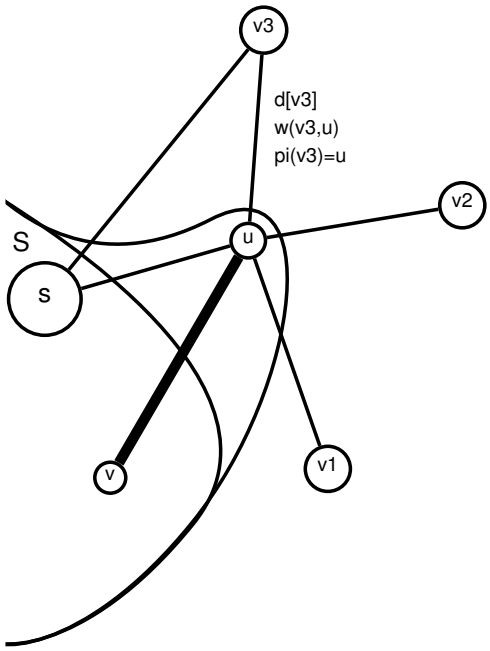
$$\mathcal{O}(|E| \cdot \log |V| + |E| + |V| \cdot \log |V|)$$

$$\mathcal{O}(|E| \cdot \log |V|)$$

20.0.2. Prim-Algorithmus zur Berechnung eines MST



$\overline{S} = V \setminus S$



$T = T \cup \{(u, v)\}$

$T_{MST} = \{(v, \pi(v)) \mid v \in V \setminus \{s\}$

```
1  PriotityQueue PQ;
2  forall(v ∈ V) {
3      d[v] = ∞;
4      π[v] = NULL;
5      inTree[v] = false;
6      PQ.insert(v, d[v]);
7  }
8  d[s] = 0;
9  PQ.decreaseKey(s,d[s]);      //S̄≙PQ
10 T = ∅                  //S≙{v ∈ V|inTree[v] = true}
11 while(!PQ.empty()) {
12     u = PQ.deleteMin();
13     forall((u,v)∈E) {
14         if(inTree[v] == true) continue;
15         if(d[v] > w(u,v)) {
16             d[v] = w(u,v);
17             π[v] = u;
18             PQ.derceaseKey(v, d[v]);
19         }
20     }
21     inTree[u] = true;
22     T = T ∪ (u,v);  //T = T ∪ {(u,π[u])} u ≠ s
23 }
```

Korrektheit des Prim-Algorithmus

Korrektheit von Prim folgt unmittelbar aus dem Schnitt-Lemma, denn der Algorithmus stellt sicher, dass stets eine Kante gewählt wird, die mit minimalem Gewicht über den Schnitt $(S, \overline{S})$ führt. ∎

Laufzeit des Prim-Algoritmus

$\|V\|\times$`PQ.insert`	$\mathcal{O}(1)$	In Summe $\mathcal{O}(\|E\| + \|V\| \cdot \log \|V\|)$
$\|V\|\times$`PQ.empty`	$\mathcal{O}(1)$	
$\|V\|\times$`PQ.deleteMin`	$\mathcal{O}(\log \|V\|)$	
$\|E\|\times$`PQ.decreaseKey`	$\mathcal{O}(1)$	

20.0.3. Beispiel des Prim-Algorithmus:

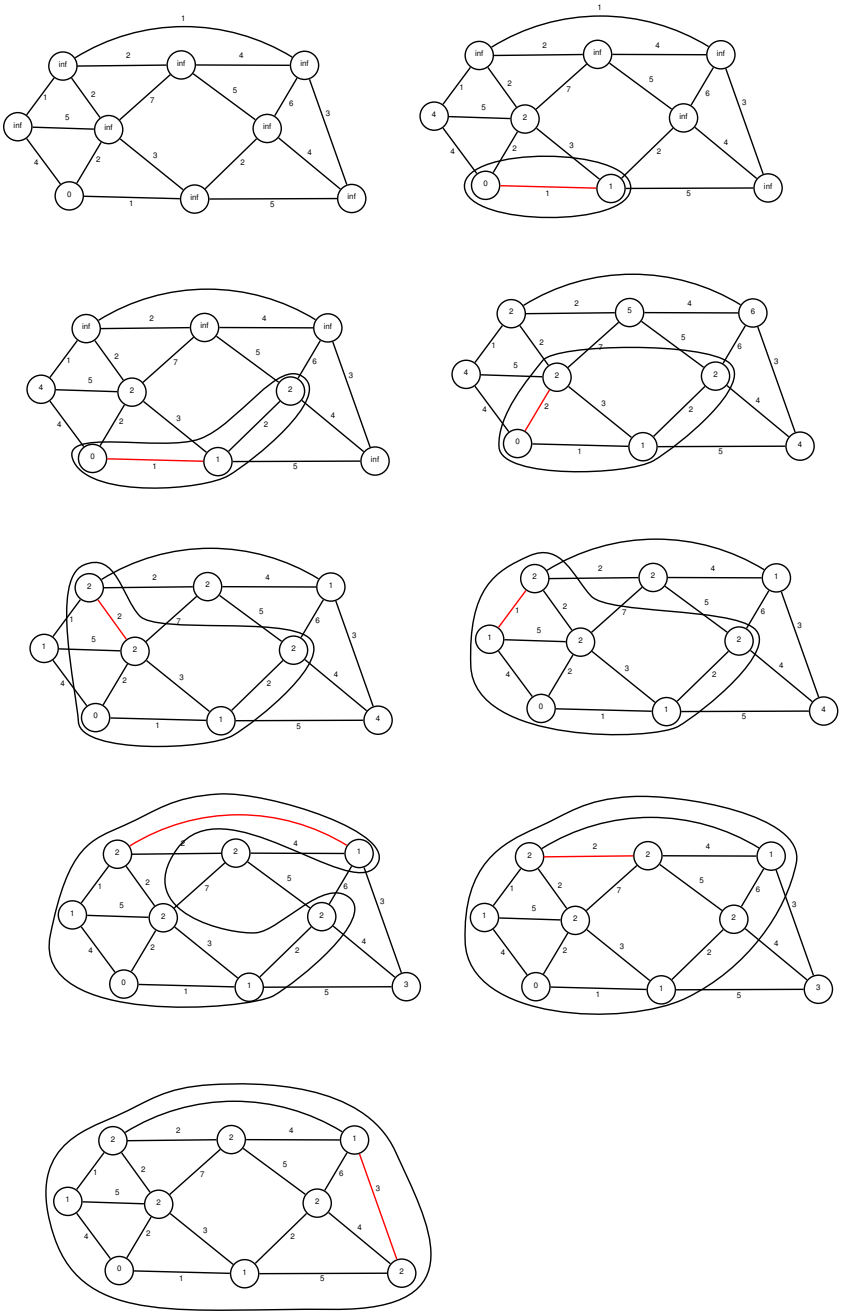


Abbildung 20.2.

21. Vorlesung

21.1. Priority-Queue mittels Fibonacci-Heaps

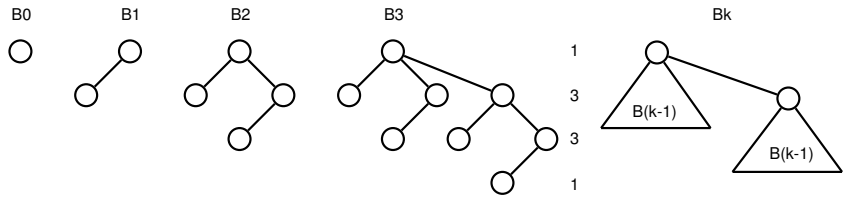


Abbildung 21.1.: Binomial-Bäume

Es gilt:
Zahl der Knoten auf Level i ist $\binom{k}{i}$

$$\binom{k}{i} = \binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1}$$

Gesamtzahl aller Knoten $= 2^k$

$n = 0$:				1					
$n = 1$:			1		1				
$n = 2$:		1		2		1			
$n = 3$:	1		3		3		1		
$n = 4$:	1		4		6		4		1

21.1.1. Operationen eines Binomial-Heaps

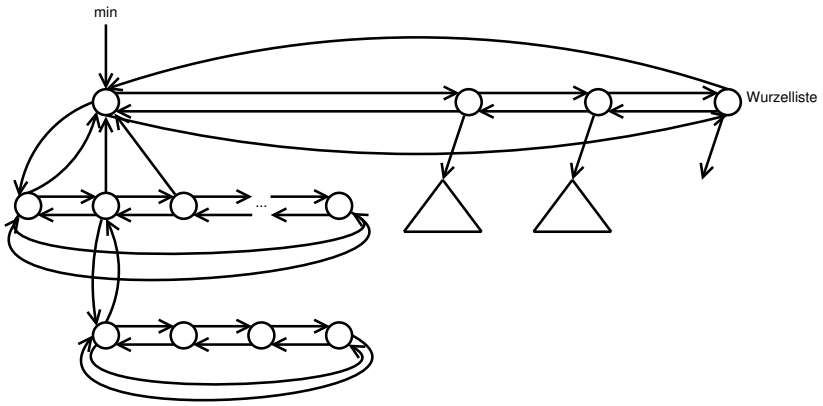


Abbildung 21.2.: Aufbau

- `insert`
- `deleteMin`
- `decreaseKey`

Idee Für jeden Knoten wird gelten, dass die Zahl aller Nachfahren $\geq \Phi^k$ k =Knotengrad

`Insert`

Einzelner Knoten wird einfach in die Wurzelliste gehängt und Minimum wird aktualisiert.

`DeleteMin`

Lösche den Minimumsknoten und übernehme alle seine Kindknoten in die Wurzelliste. Konsolidiere anschließend die Wurzelliste. Nach dem Konsolidieren hat die Wurzelliste nur noch eine „kleine“ Länge und wir bestimmen das neue Minimum durch einen Durchlauf durch diese Liste.

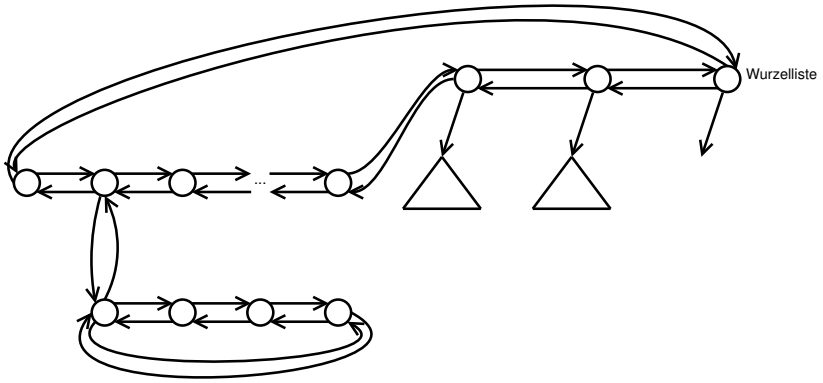


Abbildung 21.3.: DeleteMin-Operation

`decreaseKey`

Wir können davon ausgehen, dass wir den betroffenen Knoten kennen. Falls der erniedrigte Schlüssel des Knotens kleiner als der Schlüssel des Vaterknotens wird, lösen wir den Knoten aus der Kindliste des Vaters und setzen ihn in die Wurzelliste. Wir markieren den Vater, dass er einen Kindknoten verloren hat. Sollte der Vater schon eine Markierung tragen, so wird auch der Vater Knoten abgelöst und in die Wurzelliste gesetzt. Dieser Prozess kann sich kaskadenartig bis zur jeweiligen Wurzel fortsetzen. Bei Aufnahme eines abgelösten Knotens in die Wurzelliste, muss auch das Minimum aktualisiert werden.

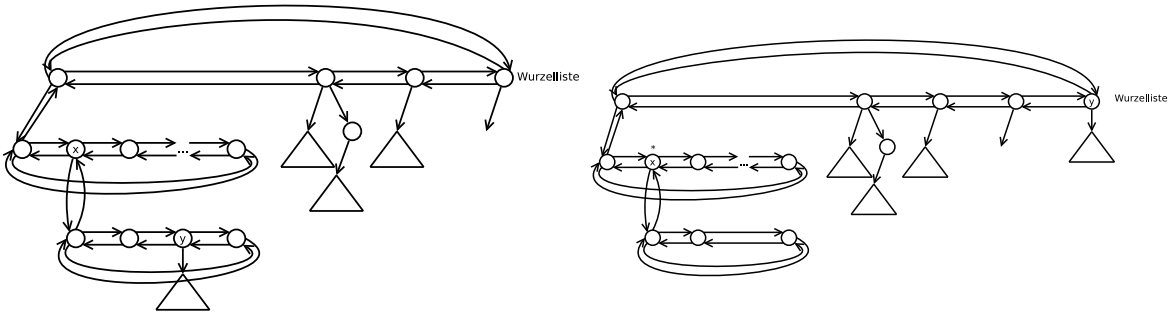


Abbildung 21.4.: decreaseKey-Operation

Konsolidierung der Wurzelliste

Nach dem „Lazy Evaluation“-Prinzip wird dieser Vorgang nur nach einem `deleteMin` angestoßen, um die Wurzelliste zu verkürzen. Wir nutzen ein einfaches Feld hinreichender Größe, um temporär Knoten, entsprechend ihren Grades, zu verwalten. Wir durchlaufen die Wurzelliste. Wenn wir einen Knoten vom Grad k antreffen, schreiben wir ihn in das Feld an Position k bzw. verschmelzen ihn mit dem Knoten von Grad k, den wir dort antreffen. Dadurch entsteht gegebenenfalls ein neuer Knoten vom Grad $k+1$ der an Position $k+1$ im Feld zu setzen ist. Es kann also zu weiteren Fusionsoperationen kommen. Analogie zu der Übertragungsfortpflanzung beim Binärzähler.

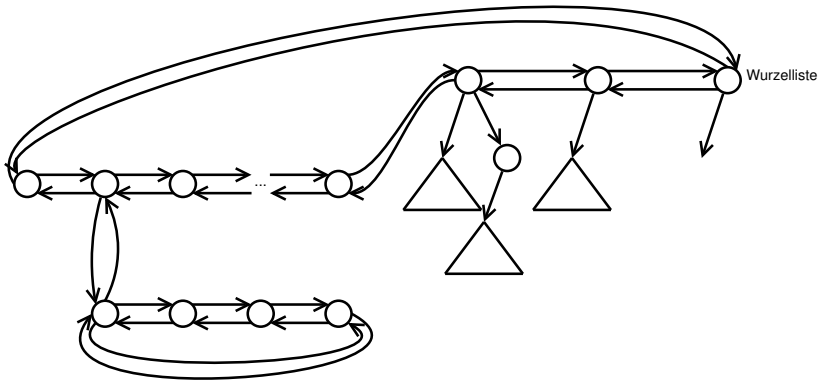


Abbildung 21.5.: Konsolidierungs-Operation

22. Vorlesung

22.1. Priority-Queue mittels Fibonacci-Heaps (Fortsetzung)

22.1.1. Lemma

Für jeden Knoten x in einem Fibonacci-Heap gilt, dass die Zahl aller Knoten im Unterbaum von x mindestens Φ^k beträgt, wobei $k = \text{grad}(x)$.

22.1.2. Beweis

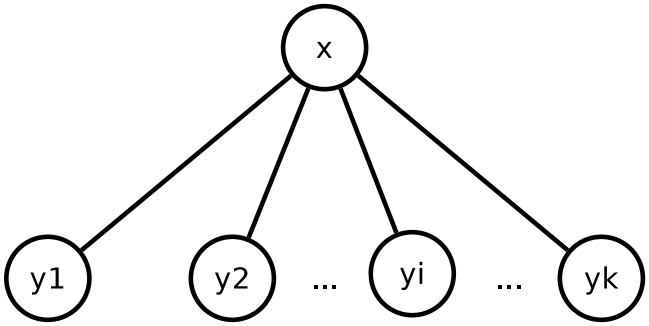


Abbildung 22.1.: Schaubild zum Beweis

Seien $y_1, y_2, \ldots, y_k$ die aktuellen Kindknoten von x, nummeriert in der Reihenfolge, wie sie (letztmalig) Kindknoten von x geworden sind. Zum Zeitpunk, zu dem y_i Kindknoten von x geworden ist, existieren bereits die $i-1$ Kindknoten $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$. $\Rightarrow \text{grad}(x) \geq i-1$
y_i kann nur Kind von x werden, wenn x und y_i gleichen Grad haben. $\Rightarrow \text{grad}(y_i) \geq i-1$
Da y_i im Folgenden höchstens einen Kindknoten verlieren kann, gilt:

$$\text{grad}(y_i) \geq i-2$$

Sei S_k die Mindestanzahl von Knoten in einem Unterbaum eines Knoten x vom Grad k

$$S_k \geq 1 + 1 + \sum_{i=2}^{k} S_{i-2}$$

Wir zeigen

$$S_k \overset{(2)}{\geq} f_{k+2}{}^{\text{I}} \overset{(1)}{\geq} \Phi^k$$

(1)

$$f_{k+2} \geq \Phi^k$$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	$\ldots$
0	1	1	2	3	5	

$$k = 0 \ : \ f_2 = 1 \geq \Phi^0 = 1$$

$$k = 1 \ : \ f_3 = 2 \geq \Phi^1 = 1,6181\ldots$$

$$f_{k+2} = f_{k+1} + f_k \geq \Phi^{k-1} + \Phi k - 2 = {}^{\text{II}}\Phi k - 2(\Phi + 1) = \Phi k - 2 \cdots \Phi^2 = \Phi^k$$

[I] $k-2$-te Fibonacci Zahl
[II] $\Phi^2 = \Phi + 1$

(2)

$$S_k \geq f_{k+2}?$$

$$S_k \geq 2 + \sum_{i=2}^{k} S_{i-2}$$

$$k = 0 \ : \ S_0 \geq f_2 = 1 \ \checkmark$$

$$k = 1 \ : \ S_1 \geq f_3 = 2 \ \checkmark$$

$$S_k \geq 2 + \sum_{i=2}^{k} f_i, \text{ da wegen Induktions-Annahme } S_{i-2} \geq f_{(i-2+2)} = f_i \text{ für } i < k$$

Zu zeigen:

$$2 + \sum_{i=2}^{k} f_i \geq f_{k+2}$$

Es gilt:

$$1 + \sum_{i=1}^{k} f_i = f_{k+2}$$

$$k = 0 \ : \ 1 = f_2 \ \checkmark$$

$$k = 1 \ : \ 1 + f_1 = f_3 = 2 \ \checkmark$$

$$1 + \sum_{i=1}^{k+1} = (1 + \sum_{i=1}^{k} f_i) + f_{k+1} = f_{k+2} + f_{k+1} = f_{k+3}$$

q.e.d.

Aus dem Lemma folgt, dass in einem Fibonacci-Heap für n[III] Elemente zu keinem Zeitpunkt ein Knoten vom Grad $\log_\phi n = k$ auftauchen kann. Insbesondere ist die Wurzelliste nach einer Konsolidierung auch nur $\log_\Phi n$ lang, weil dort nur Knoten unterschiedlichen Grades auftauchen.

[III] $\Phi^k \leq n$

22.1.3. Satz

Mit einem Fibonacci-Heap lassen sich die Operationen `insert`, `deleteMin` und `decreaseKey` mit folgenden amortisierten Kosten realisieren:

`insert`	$\mathcal{O}(1)$
`deletemin`	$\mathcal{O}(\log n)$
`decreaseKey`	$\mathcal{O}(1)$

22.1.4. Beweis

Wir verwenden die Bankkonto-Methode zur amortisierten Analyse nach folgendem Schema:
Jeder Knoten in der Wurzelliste wird mit einer RE[IV] bespart und jeder markierte Knoten der einen Kindknoten verloren hat wird mit 2 RE bespart.

Bemerkung Wurzelknoten tragen keine Markierung, obwohl sie eventuell Kindknoten verloren haben.

Wir zeigen nun, dass die oben genannten Kosten für die einzelnen Operationen ausreichen, damit im gesamten Verlauf das Kontoführungsschema, ohne Schulden machen zu müssen, aufrecht erhalten werden kann.

`insert` Einfügen in Wurzelliste +1RE Investition $\in \mathcal{O}(1)$

`deleteMin` Alle Kindknoten des gelöschten Knotens wandern in die Wurzelliste.
Dafür müssen wir $\log_\Phi n$ viele RE investieren. Die Konkatenation der doppelt verketteten Listen kostet nur konstante Zeit. Der ganze Konsolidierungsprozess kann bezahlt werden durch die RE auf den Wurzelknoten. Die anschließende Minimumsuche kostet nur $\mathcal{O}(\log n)$, weil die Wurzelliste höchstens $\log_\Phi n$ viele Elemente hat.

`decreaseKey`

Behauptung Es genügen 4 RE pro Operation
Vorgehensweise:

- 1RE für die Aufnahme eines abgelösten Knotens in die Wurzelliste
- 2RE für die Markierung des Vaterknotens
- 1RE für „sonstige“ konstante Kosten(Pointeraktualisierungen).

Ein Vaterknoten, der schon markiert ist, hat aufgrund der Gültigkeit der Bankkontoführung schon 2RE und bekommt vom abgelösten Kindknoten noch 2 RE. Damit hat er 4RE für seine eigene Ablösung zur Verfügung. Dieses Schema lässt sich also fortsetzen und die Kosten einer Ablösekaskade lassen sich damit decken.

q.e.d.

[IV] Rechen Einheit

23. Vorlesung

23.1. Das Heiratsproblem - Maximum cardinality matching in bipartiten Graphen

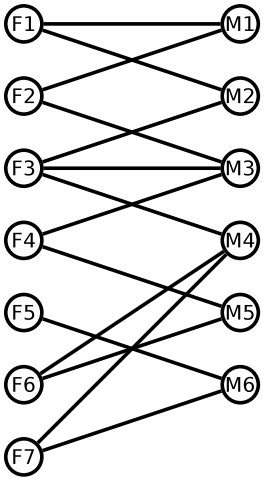


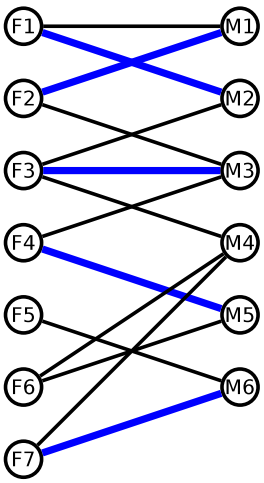
Abbildung 23.1.: Ausgangsproblem

$$G = (V_1 \dot{\cup} V_2, E)$$

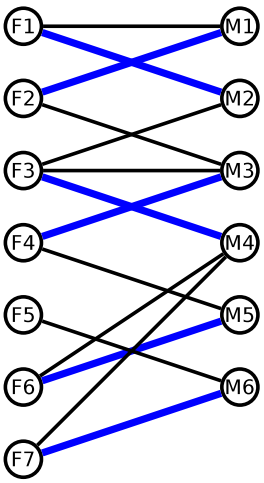
$E \subseteq E$ heißt Matching, wenn jeder Knoten zu höchstens einer Kante aus M inzident ist. Freie Knoten sind an keiner Matching-Kante beteiligt.

M heißt maximales Matching, wenn M durch Hinzunahme einer weiteren Kante nicht vergrößert werden kann.

Gesucht ist ein maximum-Matching M^* mit $|M^*| \geq |M| \; \forall \; M$ Matching.



(a) Nicht optimales Matching



(b) optimales Matching

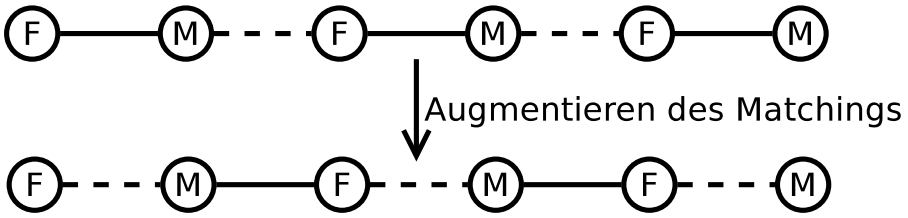


Abbildung 23.3.: Alternierender Pfad

Alternierender Graph, der mit einem Singleknoten startet und endet, nennt man einen augmentierten Pfad.

Zum finden eines augmentierten Pfades verwenden wir folgenden Graphen
$G_M = (V_1 \cup V_2 \cup \{s\}, E')$

$$E' = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, (v_1, v_2) \in E \setminus M\}$$
$$\cup \{(v_2, v_1) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, (v_1, v_2) \in M\} \cup \{(s, v_1) | v_1 \in V_1 \text{ frei}\}$$

Mit Hilfe von BFS oder DFS können wir in G_M augmentierende Pfade leicht finden. Also

$$\text{Zei } \mathcal{O}(|V| + |E|)$$

23.1.1. Lemma: (Berge)

Ein Matching M ist ein maximum-Matching $\Leftrightarrow$ Es gibt keinen M-augmentierenden Pfad.

23.1.2. Beweis:

"$\boldsymbol{A \Rightarrow B}$"

$\boldsymbol{\neg B \Rightarrow \neg A}$ Es gibt M-augm. Pfad $\Rightarrow$ M ist kein maximum Matching

"$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$"

$\boldsymbol{\neg A \Rightarrow \neg B}$ Sei M noch kein maximum Matching.

z.z. Es gibt ein M-augm. Pfad
M^* sei ein maximum Matching, d.h. $|M^*| > |M|$.
Betrachte den Graphen $\tilde{G} = (V_1 \cup V_2, M \oplus M^*)$
Alle Knoten in $\tilde{G}$ haben höchstens Grad 2, ansonsten wäre ein Knoten inzident zu zwei Kanten aus dem Gleichen Matching M oder M^*.
$\tilde{G}$ besteht aus einzelnen Knoten, Pfaden gerader oder ungerader Länge und Zyklen gerader Länge.

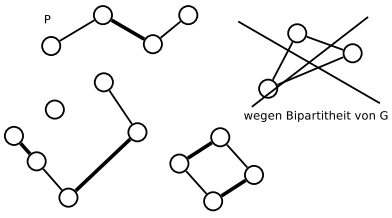


Abbildung 23.4.: Beispiel

z.z. Es gibt in $\tilde{G}$ mindestens einen M-augment. Pfad p, der mehr Kanten aus M^* als aus M besitzt. Dies gilt, weil ansonsten $|M^*| \leq |M|$

q.e.d.

23.1.3. Pseudo-Code

```
1  M = ∅;
2  do {
3       P = findAugmPath(G_M);
4       if (P = = NULL) break;
5       M = M ⊕ P;
6  } while(true);
```

Wiederholung: Symmetrische Differenz

$$A \oplus B = A \setminus B \cup B \setminus A$$

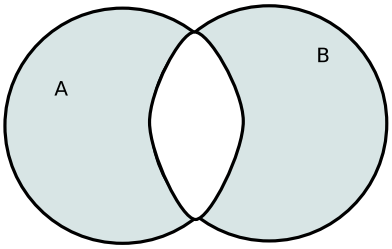


Abbildung 23.5.: Symmetrische Differenz

23.2. Laufzeit

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}(\min(|V_1|, |V_2|) \cdot (|V| + |E|) \\ &= \mathcal{O}(|V| \cdot |E|) \end{aligned}$$

23.3. Hopcroft-Karp-Algorithmus

erzielt Laufzeit von $\mathcal{O}(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$

```
1  M = ∅;
2  do {
3       G_L = buildLevelGraph(G_M);        //Knotendisjunkte M-augm. Pfade
4       𝒫 = findAugmPath(G_L);             //𝒫 = P_1 ∪̇ P_2 ∪̇ ... ∪̇ P_k
5       M = M ⊕ \mathcal{P};
6  } while(𝒫 ≠ ∅);
```

G_L kann mittels BFS in Zeit $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ konstruiert werden. Zum Auffinden einer maximalen Menge von M-augmentierenden Pfaden in G_L verwenden wir DFS und entfernen jedes mal den gefunden PfadP_i aus G_L. DFS sorgt dafür, dass P_i in Zeit $\mathcal{O}(|P_i|)$ gefunden und gelöscht werden kann.
$\Rightarrow$ `findAugmPaths(`G_L`)` hat nur Laufzeit $\mathcal{O}(|E|)$

Abbildungsverzeichnis