



# Rapport De Projet de Traitement du Signal

Nouha Lahyen et Benjamin Schlögel

Département Sciences du Numérique - Première année  
2022-2023

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Information binaire à transmettre.</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Modem en fréquence</b>	<b>5</b>
3.1	Génération du signal NRZ . . . . .	5
3.2	Génération du signal en fréquence . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Démodulation par filtrage</b>	<b>11</b>
5.1	Synthèse du filtre passe-bas . . . . .	11
5.2	Synthèse du filtre passe-haut . . . . .	11
5.3	Filtrage . . . . .	12
5.4	Tracés à réaliser . . . . .	12
5.5	Détection d'énergie . . . . .	14
5.6	Modification du démodulateur . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21</b>	<b>16</b>
6.1	Contexte de synchronisation idéale . . . . .	16
6.2	Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>
<b>8</b>	<b>Remerciements</b>	<b>21</b>

# 1 Introduction

L'objectif de ce projet est de modéliser simplement un modem sous matlab. Nous rappelons qu'un modem est chargé de transmettre et de recevoir des signaux. Le signal initial est un flux de bits (donc un signal numérique) et le modem convertit ce signal pour qu'il puisse se propager dans un canal de transmission, puis récupéré et démodulé pour retrouver le flux binaire initial. Il faut noter qu'un bruit est susceptible de s'ajouter avec notre signal lors de la transmission, et il est impératif de le minimiser. Nous verrons les différentes étapes citées précédemment au cours du projet.

### 2 Information binaire à transmettre.

Un des objectifs de ce projet est de démoduler des signaux contenus dans les fichiers *fichieri.mat* pour retrouver une figure connue. Pour cela, il est nécessaire de comprendre comment s'opère la modulation d'un signal numérique vers un signal en fréquence, comprendre les effets du canal de propagation sur le signal, puis être capable de démoduler notre signal en utilisant des filtres.

### 3 Modem en fréquence

Notre signal numérique est un flux de bits généré aléatoirement grâce à la fonction *randi*. Pour transformer ce signal numérique en signal modulé en fréquence, il est nécessaire de faire correspondre les bits valant 0 à une certaine fréquence de cosinus et les Bits 1 à une autre fréquence. Notre signal modulé en fréquence s'écrit donc :

$$x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \quad (1)$$

Dans cette partie nous allons construire ce signal.

#### 3.1 Génération du signal NRZ

1. On construit notre signal NRZ avec *randi* pour générer un vecteur ligne de 0 et de 1 tirés aléatoirement. De plus, il est nécessaire d'échantillonner notre signal, en dupliquant chaque bit  $N_s$  fois, cela en utilisant la fonction *kron*. On l'utilise sur notre vecteur ligne précédant et sur un vecteur ligne de 1, de taille  $N_s$ . On obtient ainsi notre signal échantillonné NRZ.
2. Voici la représentation du signal NRZ calculé précédemment :

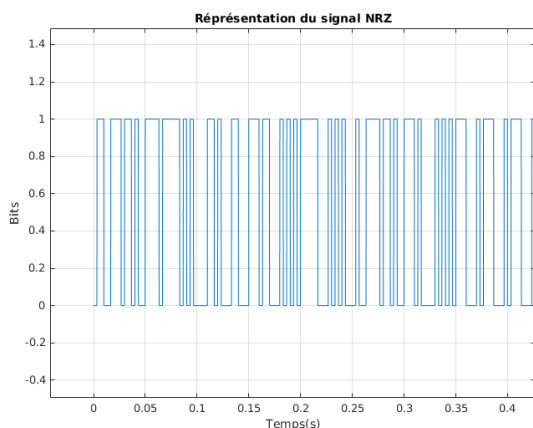


FIGURE 1 – Portion du signal

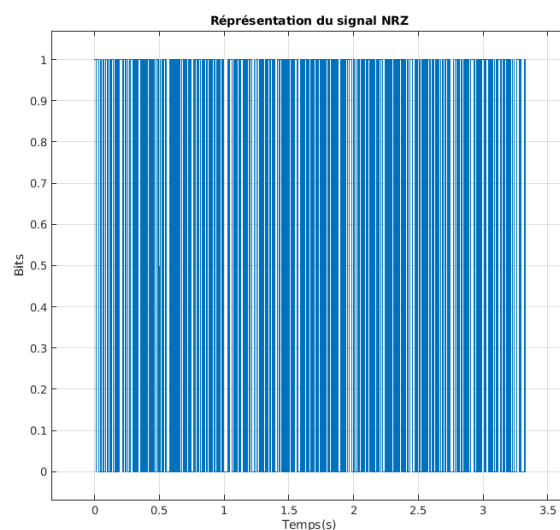


FIGURE 2 – Totalité du signal

Nous voyons bien que notre signal est bien composé de bits : il vaut soit 0, soit 1. Les fronts montants et descendants ne génèrent pas de valeurs intermédiaires. On constate sur la figure 2 que le signal a pris 3,3 secondes à se transmettre pour un total de 1000 bits à transmettre. En faisant le rapport, nous tombons sur 303 bits transmis par seconde. Ce qui correspond aux attentes.

3. À l'aide de la fonction *pwelch* en matlab, nous sommes en mesure de calculer la densité spectrale de puissance (DSP) de notre signal NRZ :

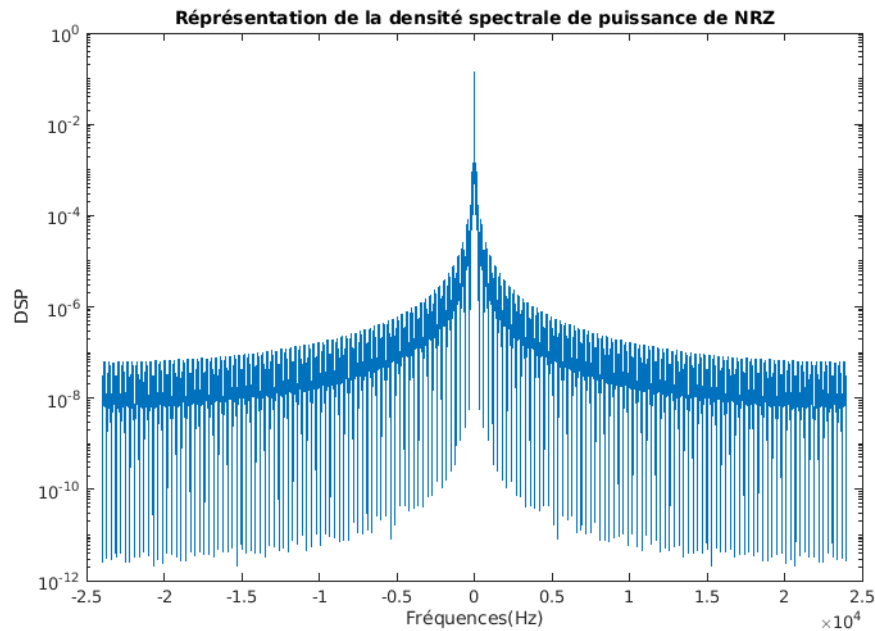


FIGURE 3 – DSP de NRZ

4. Avec l'expression de la DSP du signal théorique donnée par l'expression :

$$S_{NRZ}(f) = \frac{1}{4}T_s \text{sinc}^2(\pi f T_s) + \frac{1}{4}\delta(f) \quad (2)$$

Nous pouvons comparer la DSP de notre signal NRZ avec la DSP NRZ théorique.

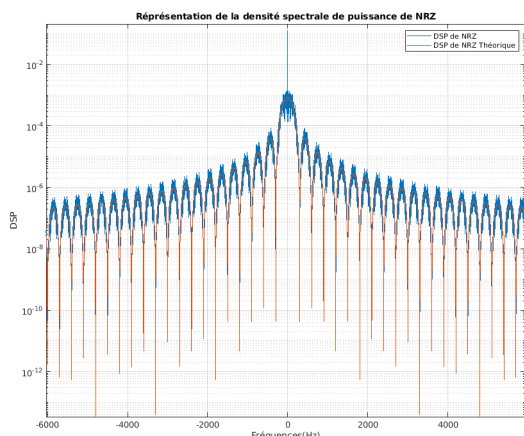


FIGURE 4 – Portion du signal

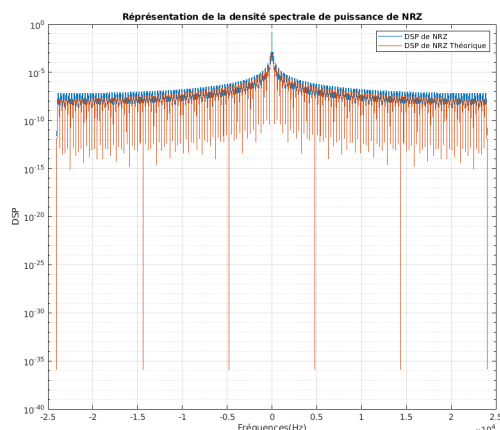


FIGURE 5 – Totalité du signal

On constate que notre DSP de NRZ suit la DSP de NRZ théorique, mais oscille légèrement autour de ses valeurs.

## 3.2 Génération du signal en fréquence

Dans cette partie, nous avons construit un signal échantillonné à une fréquence  $F_e$  qui constitué de morceaux de 2 cosinus. Mon signal modulé est alors la somme de 2 cosinus aux fréquences  $F_0$  et  $F_1$ , échantillonnés et de fréquence d'échantillonnage valant  $F_e=48000$ .

1. Avec l'équation (1), nous avons pu calculer  $x(t)$ . Ce signal fait correspondre aux bits, de NRZ, de valeurs 0 des cosinus de fréquence  $F_0$  et aux valeurs 1 des cosinus de fréquence  $F_1$ . Ainsi notre signal  $x(t)$  est un signal modulé fréquence, c'est-à-dire une succession de cosinus de fréquences différentes et sur des durées différentes.
2. La représentation du signal  $x(t)$  est  
Les fréquences des cosinus qui construisent notre signal modulé en fréquence sont définies par les relations :

$$\begin{aligned} F_c &= 1080Hz \\ \Delta f &= 100Hz \\ F_0 &= F_c + \Delta f \\ F_1 &= F_c - \Delta f \end{aligned}$$

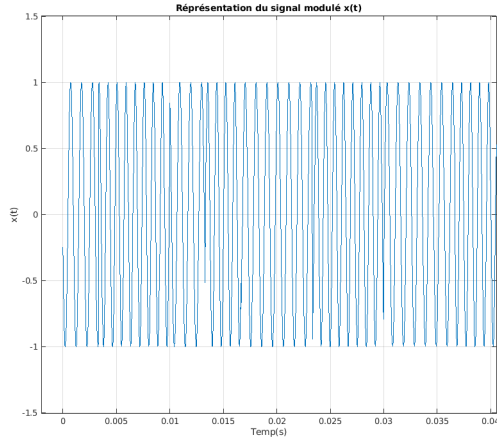


FIGURE 6 – Portion du signal

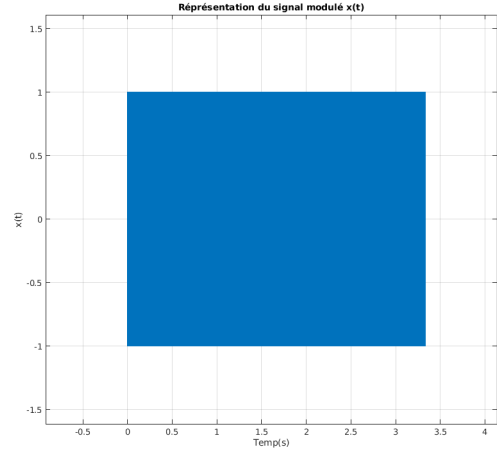


FIGURE 7 – Totalité du signal

Sur la figure 6, il est difficile de distinguer les différents cosinus, car  $F_0$  et  $F_1$  sont respectivement définies à 1180 Hz et 980 Hz (imposé par l'énoncé).

3. Calcule théorique de la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence  $x(t)$ . D'après (1), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \\ &= \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) - NRZ(t) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \end{aligned}$$

On constate qu'il s'agit d'un moment d'ordre 2 donc nous pouvons déduire la fonction d'autocorrélation de  $x$  :

$$\begin{aligned} R_x(t) &= R_{NRZ}(\tau) \times R_{\cos(2\pi F_0 t + \phi_0)}(\tau) + R_{NRZ}(\tau) \times R_{\cos(2\pi F_1 t + \phi_1)}(\tau) \\ &= R_{NRZ}(\tau) \times \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 t) + R_{NRZ}(\tau) \times \frac{1}{2} \cos(2\pi F_1 t) \end{aligned}$$

Nous en déduisons la densité spectrale de puissance de  $x$  :

$$\begin{aligned} S_{NRZ}(f) &= \frac{1}{2} \times SNRZ(f) * TF(\cos(2\pi F_0 \tau)) + \frac{1}{2} \times SNRZ(f) * TF(\cos(2\pi F_1 \tau)) \\ &= \frac{1}{2} \times SNRZ(f) * \left( \frac{1}{2} (\delta(f - F_0) + \delta(f + F_0)) \right) + \frac{1}{2} \times SNRZ(f) * \left( \frac{1}{2} (\delta(f - F_1) + \delta(f + F_1)) \right) \\ &= \frac{1}{4} \times SNRZ(f) * (\delta(f - F_0) + \delta(f + F_0)) + \frac{1}{4} \times SNRZ(f) * (\delta(f - F_1) + \delta(f + F_1)) \\ &= \frac{1}{4} \times (SNRZ(f - F_0) + SNRZ(f + F_0)) + \frac{1}{4} \times (SNRZ(f - F_1) + SNRZ(f + F_1)) \\ &= \frac{1}{4} (SNRZ(f - F_0) + SNRZ(f + F_0) + SNRZ(f - F_1) + SNRZ(f + F_1)) \end{aligned}$$

Donc :



$$S_x(f) \propto SNRZ(f - F_0) + SNRZ(f + F_0) + SNRZ(f - F_1) + SNRZ(f + F_1) \quad (3)$$

4. Voici la représentation de la DSP du signal modulé  $x(t)$  :

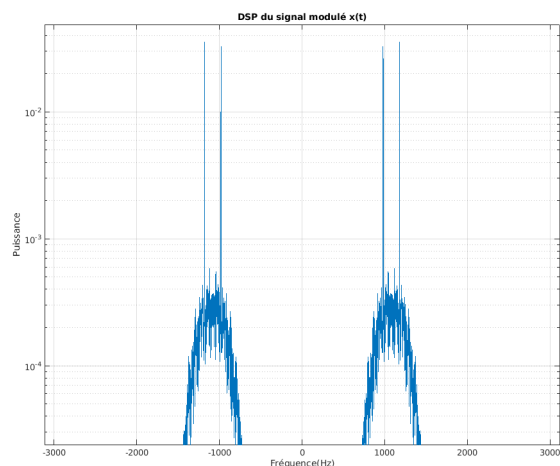


FIGURE 8 – Portion du signal

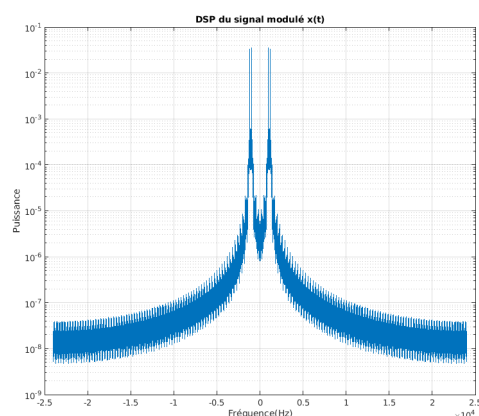


FIGURE 9 – Totalité du signal

D'après l'équation (3), nous devrions avoir quatre pics fréquentiels, symétrique autour de 0. Nous pouvons penser que nous obtenons seulement deux, mais la figure 8 nous montre qu'on a bien 4 maximums locaux sur le graphe. Pour bien distinguer ces maximums, nous pouvons augmenter la valeur de  $\Delta f$ . Mais dans ce contexte, les maximums se chevauchent, laissant croire que nous n'avons que deux pics. De la gauche vers la droite, nous retrouvons  $SNRZ(f - F_0)$ ,  $SNRZ(f - F_1)$ ,  $SNRZ(f + F_1)$  et  $SNRZ(f + F_0)$  correspondant à nos pics.

## 4 Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien

Maintenant que nous avons obtenu notre signal modulé en fréquence ( $x(t)$  c.f. équation (1)), nous nous intéressons à la transmission du signal, c'est-à-dire le parcours du signal modulé dans le canal de propagation. On le considère imparfait et donc qu'il ajoute un bruit blanc Gaussien à notre signal transmis. Nous disposons de la formule suivante :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_x}{P_b} \right) \quad (4)$$

Nous considérons dans un premier tant que  $SNR_{dB}$  vaut 50 dB. De plus :

$$P_x = E[|x(t)|^2] \quad (5)$$

Nous pouvons donc reconsidérer l'équation (4) :

$$(4) \Leftrightarrow P_b = \frac{P_x}{10^{\frac{SNR_{dB}}{10}}} \quad (6)$$

On obtient la puissance de notre bruit. Ensuite, en utilisant la fonction *randn*, nous pouvons définir notre bruit par :

$$bruit = \sqrt{P_b} \times randn(1, N) \quad (7)$$

Avec  $N$  la taille de  $x(t)$

Ainsi, le signal obtenu en sortie de canal de propagation est :

$$x_{bruitee}(t) = x(t) + bruit \quad (8)$$

## 5 Démodulation par filtrage

L'objectif de cette partie est de concevoir le récepteur du modem. Pour cela, nous allons avoir besoin de deux filtres : un filtre passe-bas et un filtre passe-haut. Pour la suite de ce projet, nous changeons les variables des fréquences à :  $F_0 = 6000Hz$  et  $F_1 = 2000Hz$

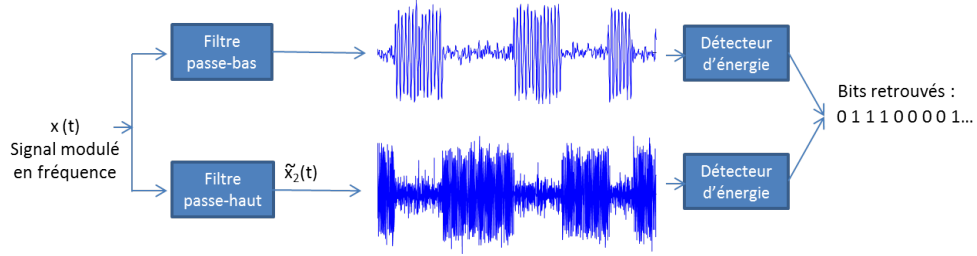


FIGURE 10 – Schéma du récepteur du modem chargé de la démodulation

### 5.1 Synthèse du filtre passe-bas

La réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas est un sinus cardinal. Dans notre cas, on fixe notre nombre d'échantillons de filtre à 61 qu'on définit de la manière suivante :  $Nb_{ech} = [-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}]$  Notre réponse impulsionnelle s'écrit :

$$h_{IPB}(k) = 2\frac{F_c}{F_e} \times \text{sinc}(2\pi\frac{F_c}{F_e}k); k \in \left[-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\right] \quad (9)$$

### 5.2 Synthèse du filtre passe-haut

1. Avec la relation :

$$H_{IPH}(f) = 1 - H_{IPB}(f) \quad (10)$$

Et en passant à la transformée de Fourier inverse, nous pouvons écrire :

$$\text{TF}^{-1}(9) \Leftrightarrow h_{IPH}(k) = \delta(k) - h_{IPB}(k)$$

Par linéarité de l'intégrale et parce que la transformée de Fourier inverse de 1 donne un Dirac.

Ainsi, nous retrouvons la réponse impulsionnelle du filtre passe-haut, avec  $\delta(k)$  le Dirac valant 1 pour  $k = 0$  et 0 partout ailleurs.

2. Notre signal  $h_{IPH}(k)$  n'étant pas centré en 0, mais en  $(\frac{N-1}{2} + 1)$  avec N le nombre de coefficients du filtre fixé précédemment (61 dans ce cas), alors le Dirac vaut 1 en  $(\frac{N-1}{2} + 1)$  et 0 partout ailleurs.

### 5.3 Filtrage

À l'aide de la fonction *filter* sous matlab, nous pouvons appliquer nos deux filtres (passe-haut et passe-bas) sur notre signal modulé. Nous obtenons les résultats suivants :

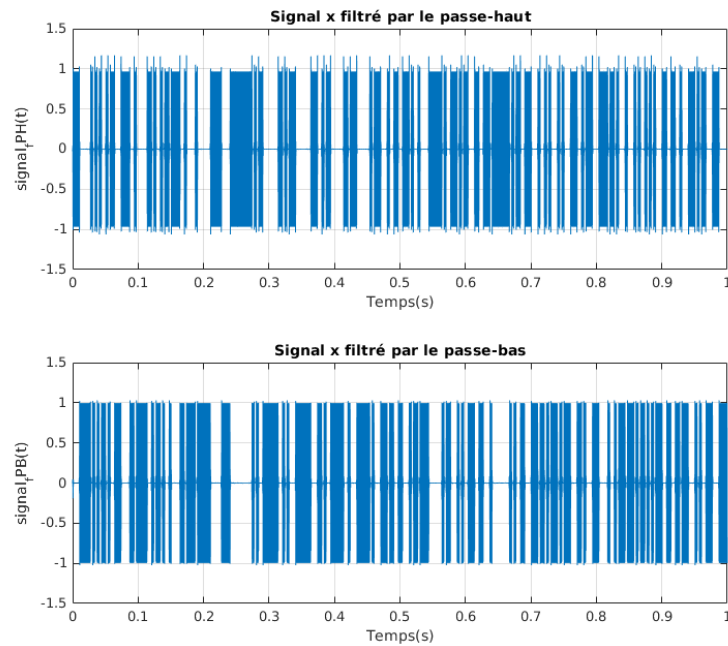


FIGURE 11 – Caption

On constate la complémentarité des deux signaux filtrés.

### 5.4 Tracés à réaliser

1. Ici, nous avons la représentation des réponses impulsionnelles des filtres passe-bas et passe-haut avec leurs transformées de Fourier en dessous :

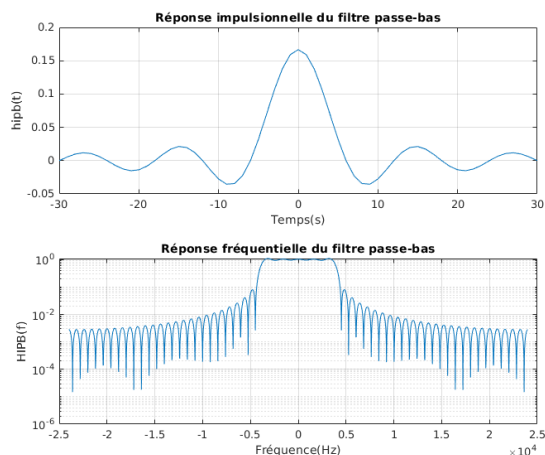


FIGURE 12 – Pour le filtre passe-bas

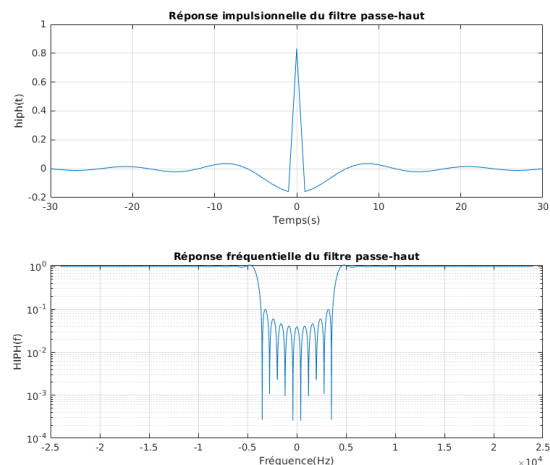


FIGURE 13 – Pour le filtre passe-haut

Comme attendue, avec les représentations centrées en 0, la TF du filtre passe-bas atteint son maximum sur la plage  $[-4000Hz; 4000Hz]$  et la TF du passe-haut à son maximum en dehors de cet intervalle.

2. Voici les représentations des TF des filtres avec notre signal modulé en fréquence :

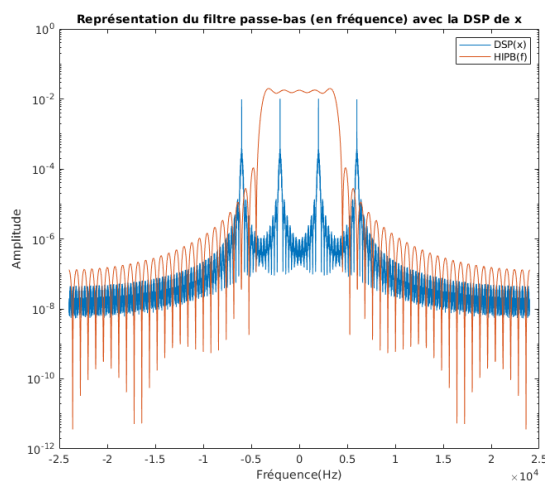


FIGURE 14 – Pour le filtre passe-bas

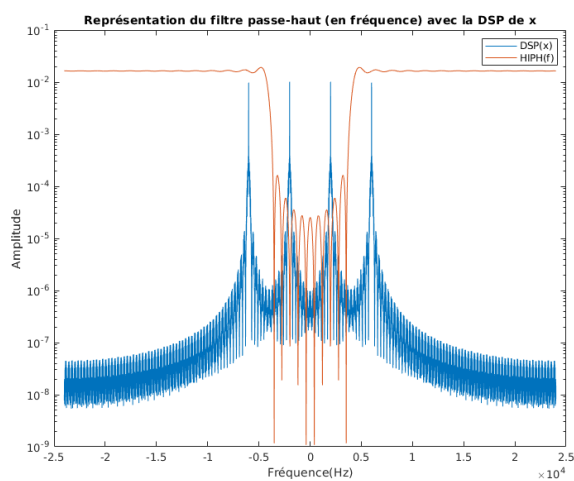


FIGURE 15 – Pour le filtre passe-haut

On voit clairement que le passe-bas conserve uniquement les fréquences dans  $[-4000Hz; 4000Hz]$  et le passe-haut conserve les fréquences en dehors de cet intervalle.

3. Le résultat du filtrage par le passe-haut sur  $x(t)$  est le suivant :

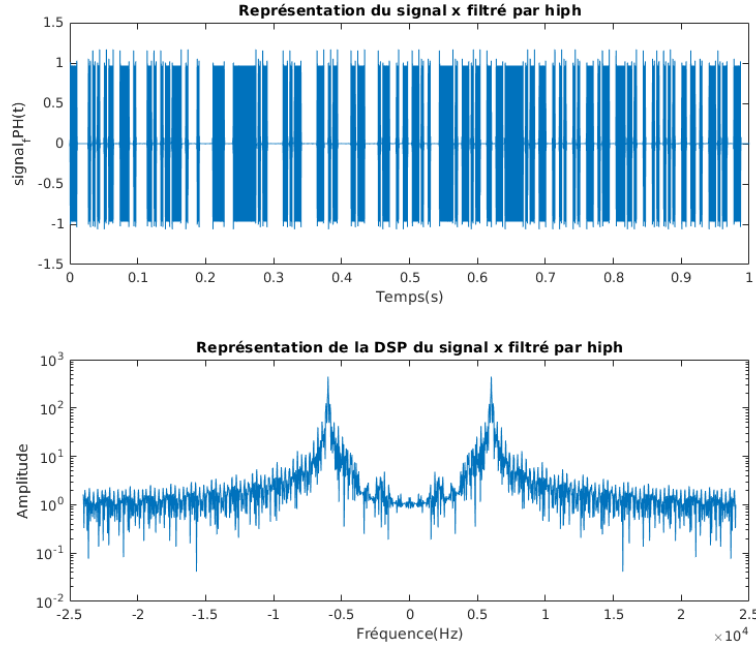


FIGURE 16 – Caption

On constate sur la DSP que les pics générés par  $F_1$  ont été réduits, laissant uniquement ceux de  $F_0$ .

### 5.5 Détection d'énergie

1. L'objectif ici est d'obtenir l'énergie de nos signaux filtrés et de retrouver les bits de notre signal de départ (modulé en fréquence). Pour cela, il faut passer au carré chaque valeur de nos deux signaux, puis déterminer le seuil permettant de savoir si on obtient des bits 1 (ou 0 si on se trouve en dessous de ce seuil). Ce seuil-là, plus grande valeur (de l'énergie calculée précédemment) sommé avec la plus petite, le tout divisé par 2, soit :

$$K = \frac{\max(Energie) - \min(Energie)}{2} \quad (11)$$

Ces calculs sont faits pour les deux signaux filtrés. À près l'obtention des seuils, nous pouvons retrouver les bits du signal de départ. Pour cela, on crée un vecteur de 0, et nous passons certaines de ses valeurs à 1 si l'énergie associée est supérieur au seuil.

2. Le taux d'erreur binaire (TEB) est le rapport du signal sur bruit. Après calcul de celui-ci, on constate qu'il est bien égale à 0 (uniquement pour TEB\_PH, nous avons un problème pour TEB\_PB qui est égale à 1).

## 5.6 Modification du démodulateur

1. Cela est à cause du retard généré lors du filtrage. Le signal en sortie du filtre est donc tronqué. Pour palier ce problème, il est nécessaire de modifier le signal en entrée du filtre en lui concaténant (à la fin) un vecteur de 0 de taille  $(\frac{N-1}{2} + 1)$ . Cela a pour but de ne pas détruire les  $(\frac{N-1}{2} + 1)$  valeurs du signal en sortie du filtre, puisque les deux signaux doivent avoir la même taille. Cela fait, le signal en sortie du filtre possède toutes les valeurs utiles, mais aussi le retard dont on a parlé précédemment. Il est représenté par un vecteur de 0 de taille  $(\frac{N-1}{2} + 1)$ . Il faut donc le supprimer pour ainsi récupérer uniquement les valeurs dont on a besoin.

## 6 Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21

Dans cette partie-là, nous avons réalisé un démodulateur sous le nom de démodulateur FSK. Cette fois-ci, nous avons modifié les valeurs des fréquences  $F_0$  et  $F_1$  pour être mieux adaptées à la norme V21.  $F_0$  est maintenant égale à 1180 HZ et  $F_1$  à 980 HZ.

### 6.1 Contexte de synchronisation idéale

Dans un premier temps, nous allons considérer qu'il n'y a pas de déphasage entre le signal modulé et le démodulateur. Aussi, nous allons prendre  $\phi_0 = 0$   $\phi_1 = 0$  pour faciliter les calculs. Aussi, nous utiliserons le démodulateur FSK défini selon le schéma qui suit :

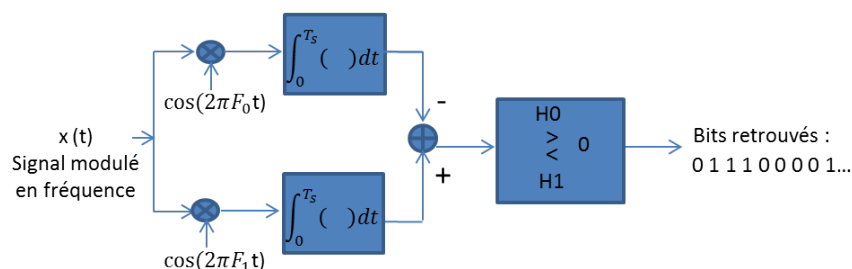


FIGURE 17 – Démodulateur FSK pour signal synchrone.

Le principe de ce démodulateur est simple : pour mon signal modulé  $x(t)$ , ce dernier sera multiplié par un cosinus de fréquence  $F_0$  et un cosinus de fréquence  $F_1$ . Des calculs théoriques présentés par la suite nous aident à affirmer que, si le bit qu'on cherche à transmettre est un 0 alors en étant multiplié par le premier cosinus, le résultat de l'intégrale vaudra  $-\frac{T_s}{2}$  et le résultat final du premier canal vaudra  $-\frac{T_s}{2}$ . De l'autre côté, une multiplication par  $\cos(2\pi F_1 t)$  vaudra, en calculant l'intégrale, un 0. À la sortie du démodulateur, nous obtenons alors pour le cas du bit 0 :  $-\frac{T_s}{2}$ .

Nous venons de décrire ce qui se passe dans le cas d'un bit 0 et on aura presque le même schéma pour les bits 1 sauf que cette fois-ci, l'on obtiendra  $\frac{T_s}{2}$ . Donc pour faire simple, si une partie du signal, suite à son passage par le démodulateur FSK, fournit un nombre négatif ; alors le bit associé à cette partie est 0. Dans le cas contraire, il vaudra 1.

1. Calculons les différentes intégrales. Pour la première intégrale, nous pouvons écrire :

$$\int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt$$



$$\begin{aligned} &= \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} (\cos(4\pi F_0 t + 2\phi_0) + 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} (\cos(4\pi F_0 t + 2\phi_0) + 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4\pi F_0} \sin(4\pi F_0 t + 2\phi_0) + t \right]_0^{T_s} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4\pi F_0} (\sin(4\pi F_0 T_s + 2\phi_0) - \sin(2\phi_0)) + T_s \right] \end{aligned}$$

Or avec les approximations  $\phi_0 = \phi_1 = 0$  et  $4\pi F_0 T_s + 2\phi_0$  très petit, les deux sinus s'annulent et nous obtenons le résultat suivant :

$$\int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt = \frac{T_s}{2} \quad (12)$$

Pour la seconde intégrale, nous retrouvons le même résultat :

$$\int_0^{T_s} \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt = \frac{T_s}{2} \quad (13)$$

Pour la troisième intégrale, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos(2\pi(F_0 - F_1)t + (\phi_0 - \phi_1)) + \cos(2\pi(F_0 + F_1)t + (\phi_0 + \phi_1)) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi(F_0 - F_1)} \sin(2\pi(F_0 - F_1)t + (\phi_0 - \phi_1)) \right]_0^{T_s} \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2\pi(F_0 + F_1)} \sin(2\pi(F_0 + F_1)t + (\phi_0 + \phi_1)) \right]_0^{T_s} \end{aligned}$$

Or, il s'agit d'une somme de sinus que nous avons considéré négligeable (comme précédemment) ainsi, nous pouvons écrire :

$$\int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt = 0 \quad (14)$$

Ainsi les résultats se somment au niveau du sommateur de la figure 17, et nous obtenons un vecteur composé de  $\frac{T_s}{2}$  et de  $\frac{-T_s}{2}$ . Nous obtenons un vecteur NRZ bipolaire. Or nous, nous souhaitons travailler avec un vecteur unipolaire (constitué des bits 0 et 1), pour cela, on applique le calcul cité plus au-dessus.

2.

## 6.2 Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse

Dans un deuxième temps, nous allons essayer d'introduire une erreur de phase à notre signal et nous constaterons que le taux d'erreur binaire devient non nul, ce qui prouve que le démodulateur FSK n'est plus adapté pour retrouver le signal.

En essayant avec un nouveau démodulateur qui prendra en compte cette erreur de phase, nous obtenons alors notre signal démodulé avec un taux d'erreur binaire nul.

1. Après avoir introduit une erreur de phase, qui correspond à un déphasage  $\theta_0$  et  $\theta_1$  respectivement dans les deux cosinus  $\cos(2\pi F_0 t)$  et  $\cos(2\pi F_1 t)$ , de telle sorte que  $\phi_0$  et  $\phi_1$  sont maintenant différentes de 0, ceci donne, non sans grande surprise, un taux d'erreur binaire non nul. Cela est dû au fait qu'à la sortie des intégrales, nous avons un résultat qui dépend de ce déphasage.

Exemple : pour la première intégrale, nous obtenons pour le bit 0 :  $\frac{-T_s}{2} * \cos(\theta_0 - \phi_0)$

Ceci va engendrer qu'on ne peut pas alors différencier le cas du bit 0 du bit 1, car le signe du  $\cos(\theta_0 - \phi_0)$  risque de varier. Ne l'oublions pas ; tous les angles sont tirés aléatoirement. Ceci prouve alors que le démodulateur choisi n'est pas disposé à retrouver le signal émis au début de manière identique.

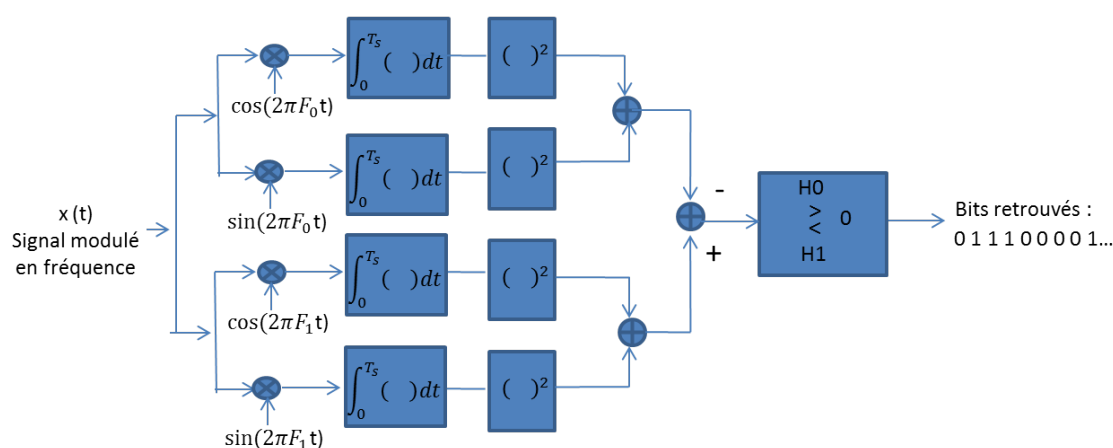


FIGURE 18 – émodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse

2. (a) En gardant la même erreur de phase, nous avons alors modifié le démodulateur en ajoutant dans chaque canal, une multiplication par un sinus et en élevant les

deux intégrales produites au carré. On se place dans le cas où :

$$x(t) = \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \quad (15)$$

Suit la démonstration de la première intégrale :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \theta_0) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos(4\pi F_0 t + \theta_0 + \phi_0) + \cos(\theta_0 - \phi_0) dt \\ &\approx \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos(\theta_0 - \phi_0) dt \\ &= \frac{T_s}{2} \cos(\theta_0 - \phi_0) \end{aligned}$$

Le calcul de la deuxième intégrale est :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{T_s} \sin(2\pi F_0 t + \theta_0) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \sin(4\pi F_0 t + \theta_0 + \phi_0) + \sin(\theta_0 - \phi_0) dt \\ &\approx \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \sin(\theta_0 - \phi_0) dt \\ &= \frac{T_s}{2} \sin(\theta_0 - \phi_0) \end{aligned}$$

Les deux autres intégrales s'écrivent :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_1 t + \theta_1) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \approx 0 \\ I_4 &= \int_0^{T_s} \sin(2\pi F_1 t + \theta_1) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \approx 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons faire cette approximation car  $I_3$   $I_4$  sont négligeables devant  $T_s$ , ainsi au niveau du sommateur de la figure 18 nous avons :

$$\begin{aligned} (I_3^2 + I_4^2) - (I_1^2 + I_2^2) &\approx -(I_1^2 + I_2^2) \\ &\approx -\frac{T_s^2}{4} [\cos^2(\theta_0 - \phi_0) + \sin^2(\theta_0 - \phi_0)] \\ &= -\frac{T_s^2}{4} < 0 \end{aligned}$$

Puis dans le cas où :

$$x(t) = \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \quad (16)$$

Et en procédant par le même raisonnement nous avons :

$$(I_3^2 + I_4^2) - (I_1^2 + I_2^2) \approx \frac{T_s^2}{4} > 0$$

Ceci donnera alors, grâce au même principe que tout à l'heure :  $-\frac{T_s^2}{4}$  dans le cas d'un bit 0 et dans le cas d'un bit 1 on obtient  $\frac{T_s^2}{4}$ .

Et nous remarquons que grâce à ce démodulateur, nous obtenons un résultat, en sortie des canaux, qui ne dépend plus de l'erreur de phase. Ceci est dû au fait qu'on a choisi de multiplier d'une part par un cosinus et d'autre part par un sinus. En élevant ceci au carré après calcul d'intégrale puis en factorisant par  $\frac{T_s^2}{2}$  nous obtenons un résultat qui ne dépend plus de  $\theta$  ni de  $\phi$ .

*In fine* , nous obtenons de nouveau un taux d'erreur binaire nul, ce qui est le résultat souhaité.

- (b) Pour afficher l'image, nous avons pensé à implémenter une fonction `Démoduler_Images` qui prend en paramètre un signal modulé et affiche sa démodulation par le démodulateur FSK pour erreur de phase. En utilisant cette fonction sur les 6 fichiers donnés, nous arrivons à obtenir l'image suivante :

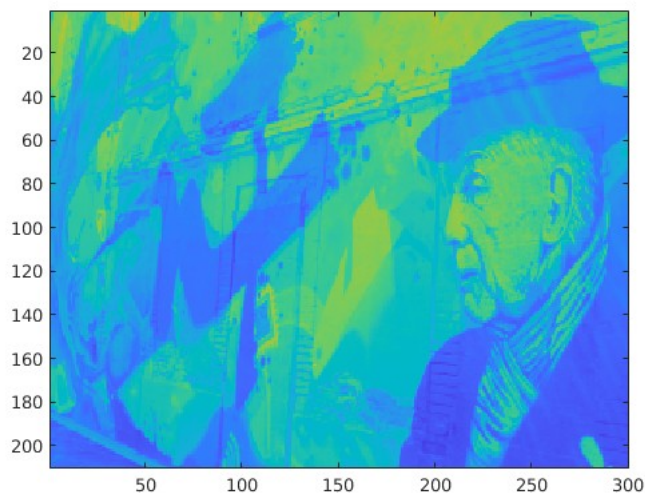


FIGURE 19 – Image Reconstituée

## 7 Conclusion

À travers ce projet, nous avons pu mettre au point un modem basique en utilisant ce que nous avons appris pendant les séances de travaux pratiques et en cours. Nous avons pu manipuler et construire des signaux modulés en fréquences et leur appliquer des filtres. Nous avons simulé le passage de nos signaux dans des canaux de propagation en leur ajoutant un bruit blanc gaussien. On a pu par la suite les démoduler, régler les problèmes liés à la démodulation tels que le retard, puis comparer les résultats en calculant les taux d'erreurs binaires. Nous avons pu aussi gérer le cas d'une erreur de synchronisation de phase porteuse.

## 8 Remerciements

Nous souhaitons remercier nos professeurs POUILLAT Charly, TOURNERET Jean-Yves et THOMAS Nathalie pour nous avoir permis d'acquérir des compétences primordiales en traitement du signal, ainsi que notre encadrante de travaux pratiques MAALAOUI Asma.