

Rapport De Projet de Télécommunication
Introduction à la synchronisation
(Partie 3)

Nouha Lahyen et Benjamin Schlögel

Département Sciences du Numérique - Première année
2022-2023

Table des matières

1	Introduction	3
2	Impact d'une erreur de phase porteuse	3
2.1	Étude théorique	3
2.1.1	Critère de Nyquist	3
2.1.2	Expression du signal en sortie de l'échantillonneur avec une erreur de phase ϕ	3
2.1.3	Calcul du TEB de liaison	3
2.1.4	Calcul de la puissance du bruit en sortie du filtre de réception . . .	4
2.1.5	Calcul de l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur	5
2.1.6	Calcul de l'expression du taux d'erreur binaire de la liaison	5
2.2	Implantation sous Matlab	5
2.2.1	Chaîne de transmission sans erreurs de phase et sans bruit	5
2.2.2	Chaîne de transmission avec erreur de phase et sans bruit	6
2.2.3	Chaîne de transmission complète avec erreur de phase et ajout de bruit	8
3	Estimation et correction de l'erreur de phase porteuse	9
3.1	Étude théorique	9
3.2	Implantation sous Matlab	9
3.2.1	Explication des erreurs de phase pour $\phi = 40^\circ$ et $\phi = 100^\circ$	9
3.2.2	Comparaison de différents TEB	10
4	Utilisation d'un codage par transition	11
4.1	Étude théorique	11
4.1.1	Affranchissement de l'ambiguïté π	11
4.1.2	Doublage du TEB	12
4.2	Implantation sous Matlab	12
4.3	Tracés des TEB pour $\phi = 40^\circ$	12
4.4	Tracés des TEB pour $\phi = 100^\circ$	13
5	Conclusion	13

1 Introduction

Dans ce TP, nous sommes menés à observer les erreurs de synchronisation qui peuvent avoir lieu dans une chaîne de transmission. Ici nous prenons pour exemple une chaîne de transmission en bande de base, avec une modulation BPSK.

2 Impact d'une erreur de phase porteuse

2.1 Étude théorique

2.1.1 Critère de Nyquist

Nos filtres de mises en formes et de réception sont de hauteur 1 et de largeur T_s , donc le produit de convolution des deux portes donne un triangle de largeur $2T_s$. La condition pour respecter le critère de Nyquist est de choisir $t_0 = T_s$.

2.1.2 Expression du signal en sortie de l'échantillonneur avec une erreur de phase ϕ

L'expression du signal en sortie de l'échantillonneur avec une erreur de phase ϕ est la suivante :

$$z_m(t) = ((x_e(t) + I_w(t)) e^{j\phi}) * h_r(t)$$

Avec $x_e(t)$ l'enveloppe complexe, $I_w(t)$ le bruit en sortie du filtre de réception, ϕ l'erreur de phase et $h_r(t)$ le filtre de mise en forme.

2.1.3 Calcul du TEB de liaison

Nous devons calculer le TEB qui est la probabilité d'erreur de décodage du bruit.

Calcul du TEB de liaison

En sachant que $P(a_k = 1) = P(a_k = -1) = \frac{1}{2}$ nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} P(a_k = 1 \mid a_k = -1) &= I_w + T_s \cos(\phi) \geq 0 \\ \Leftrightarrow P(a_k = 1 \mid a_k = -1) &= \frac{I_w}{\sigma_{I_w}} + \frac{T_s \cos(\phi)}{\sigma_{I_w}} \geq 0 \end{aligned}$$

Or $\frac{I_w}{\sigma_{I_w}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, nous obtenons la fonction de probabilité de fausse alarme, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} P\left[\frac{w}{\sigma_{I_w}} \geq \frac{T_s \cos(\phi)}{\sigma_{I_w}}\right] \\ \Rightarrow P(a_k = 1 \mid a_k = -1) &= Q\left(\frac{T_s \cos(\phi)}{\sigma_{I_w}}\right) \end{aligned}$$

Finalement, nous avons :

$$TEB = Q\left(\frac{T_s \cos(\phi)}{\sigma_{I_w}}\right)$$

2.1.4 Calcul de la puissance du bruit en sortie du filtre de réception

Calcul du TEB de liaison

Par définition de la puissance du bruit :

$$\sigma_{I_w}^2 = \int S_{I_w}(f) df = \int S_{I_n(t) \cdot e^{j\phi}}(f) \times |H_r(f)|^2 df$$

Or :

$$S_{I_n(t) \times e^{j\phi}}(f) = S_{I_n}(f) = N_0$$

Car une erreur de phase sur un bruit blanc Gaussien n'as pas d'effet. Donc d'après Parseval, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{I_w}^2 &= N_0 \int |H_r(f)|^2 df \\ \Leftrightarrow \sigma_{I_w}^2 &= N_0 \int |h_r(t)|^2 dt \\ \Leftrightarrow \sigma_{I_w}^2 &= N_0 \int_0^{T_s} 1 dt \end{aligned}$$

Finalement, nous avons :

$$\sigma_{I_w}^2 = N_0 T_s$$

2.1.5 Calcul de l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur

Par application de formule du cours, nous obtenons l'expression suivante :

$$E_s = \frac{T_s}{2}$$

2.1.6 Calcul de l'expression du taux d'erreur binaire de la liaison

En sachant que nous procédons à un mapping binaire (donc $E_b = E_s$) et avec les expressions précédentes, nous pouvons écrire :

Calcul du TEB de liaison

$$\begin{aligned} TEB &= Q\left(\frac{T_s \cos(\phi)}{\sigma_{I_w}}\right) \\ &= Q\left(\frac{T_s \cos(\phi)}{\sqrt{N_0 T_s}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{T_s}{N_0}} \cos(\phi)\right) \end{aligned}$$

Nous avons donc l'expression :

$$TEB = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \cos(\phi)\right)$$

2.2 Implantation sous Matlab

2.2.1 Chaîne de transmission sans erreurs de phase et sans bruit

Voici la constellation correspondant à la modulation BPSK :

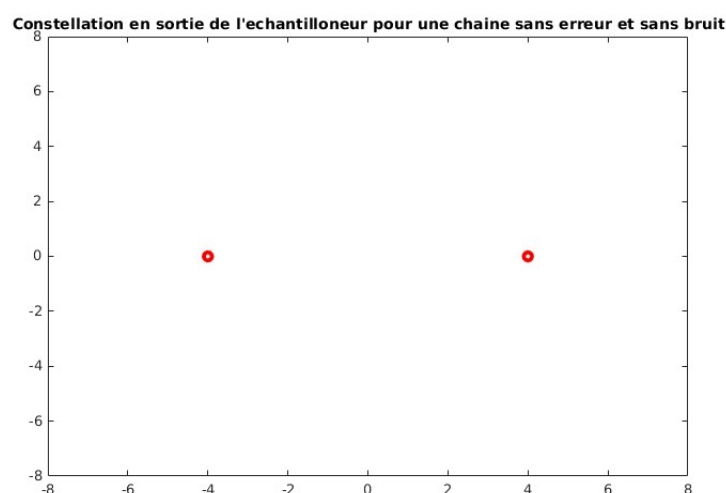


FIGURE 1 – Constellation pour une chaîne sans erreurs et sans bruit

Ici, nous reconnaissons la modulation linéaire mono-dimensionnelle BPSK, avec les a_k en abscisse et les b_k en ordonnée. Les b_k exercent une rotation de 180° par rapport à l'origine, c'est pourquoi nous avons les deux points en $(-4;0)$ et en $(4;0)$. Nous obtenons un taux d'erreur binaire de liaisons nul.

2.2.2 Chaîne de transmission avec erreur de phase et sans bruit

Ici, nous introduisons une erreur de phase, mais sans bruit. L'erreur de phase provoque une rotation sur nos symboles d_k par rapport à l'origine. Cela est nettement visible avec les figures suivantes.

Pour une erreur de phase de 40° , nos symboles effectuent une rotation de 40° par rapport à l'origine :

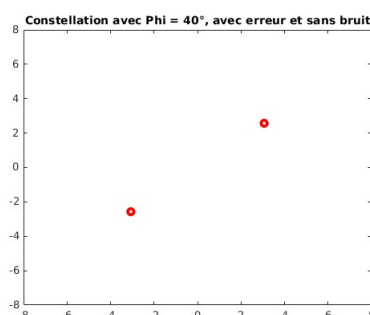


FIGURE 2 – Constellation avec $\phi = 40$

Dans cette situation, les points n'ont pas échangé de côté par rapport à l'axe des abscisses, donc en conservant le même démodulateur, le taux d'erreur binaire devrait être nul. L'erreur de phase n'est pas assez grande pour changer la valeur du TEB. Pour une erreur de phase de 100° , nos symboles effectuent une rotation de 100° par rapport à l'origine :

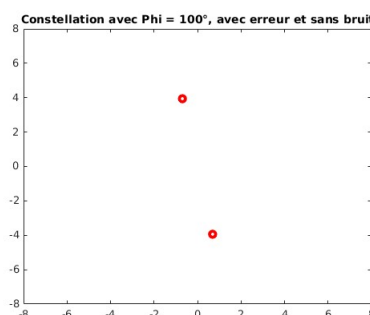


FIGURE 3 – Constellation avec $\phi = 100$

Dans cette situation, nos points ont échangé de côté par rapport à l'axe des abscisses ($100^\circ > 90^\circ$). Notre démodulateur n'est plus adapté pour retrouver les bons symboles. Nous

2 IMPACT D'UNE ERREUR DE PHASE PORTEUSE

devrions inverser le démappage binaire pour avoir un TEB nul. Nous devrions donc obtenir un TEB égale à 1.

Pour une erreur de phase de 180° , nos symboles effectuent une rotation de 180° par rapport à l'origine : Comme pour le cas précédent, nous devrions obtenir un TEB égal à 1,

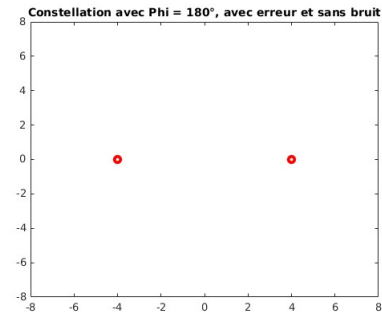


FIGURE 4 – Constellation avec $\phi = 180^\circ$

car les points ont effectué une rotation complète de 180° . Et voici les valeurs de nos TEB mesurés :





	TEB	0
	TEB100	1
	TEB180	1
	TEB40	0

FIGURE 5 – Valeurs des TEB expérimentaux

Ainsi, nous pouvons conclure que nos attentes sont identiques aux résultats.

2.2.3 Chaîne de transmission complète avec erreur de phase et ajout de bruit

1. Voici les tracés des TEB estimés et théorique pour un signal avec une erreur de phase de $\phi = 40^\circ$: Nous pouvons constater que les TEB sont très proches, nous pouvons

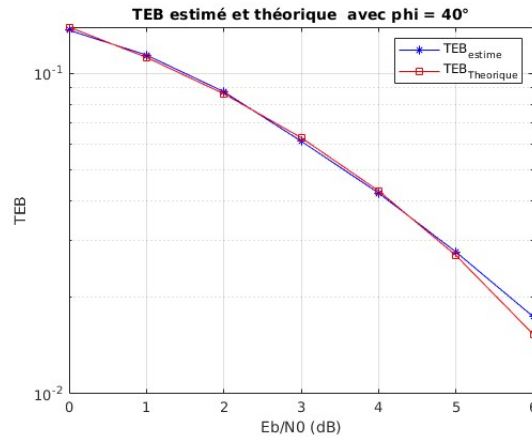


FIGURE 6 – TEB estimés et théorique pour $\phi = 40^\circ$

en conclure que notre chaîne de transmission fonctionne correctement. Comme nous l'avons dit, pour une erreur de phase inférieure à 90° , le TEB ne change pas ou très peu si nous rajoutons du bruit dans le canal de propagation.

2. Voici le tracé permettant de constater l'influence de l'ajout d'une erreur de phase dans la chaîne de transmission :

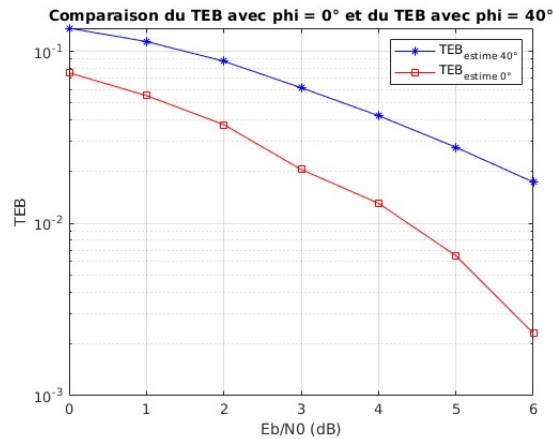


FIGURE 7 – Comparaison des TEB pour $\phi = 40^\circ$ et $\phi = 0^\circ$

Nous pouvons constater que lorsque nous ajoutons du bruit dans le canal de propagation, même une petite erreur de phase peu changer la valeur du TEB. Le bruit génère de la distance entre les points regroupée dans les foyers de la constellation. Ainsi certains points franchissent l'axe des ordonnées en 0, et donc sont des erreurs.

3. Voici le tracé des TEB estimés pour $\phi = 40^\circ$ et $\phi = 100^\circ$:

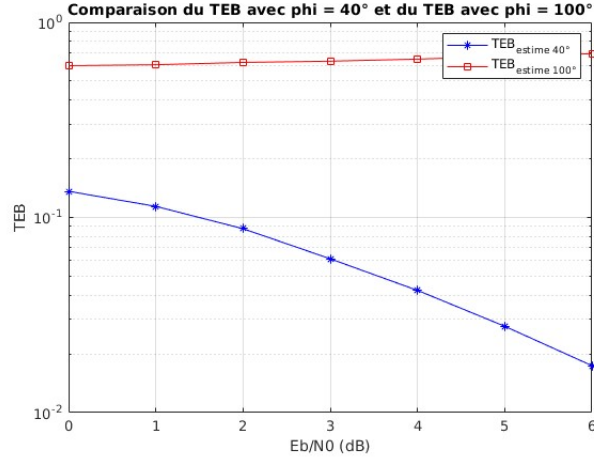


FIGURE 8 – Comparaison des TEB pour $\phi = 40^\circ$ et $\phi = 100^\circ$

Ici, nous pouvons voir que l'erreur de phase de 100° génère un grand taux d'erreur binaire. On peut constater qu'il n'est pas égale à 1, cela est à cause du bruit : certains qui se devraient se trouver du mauvais côté de l'axe des ordonnées se retrouve du bon côté grâce au bruit (visuellement sur le graphe de constellation). Mais cela n'empêche pas le fait que le taux d'erreur binaire est très important pour 100° et peut causer des problèmes.

3 Estimation et correction de l'erreur de phase porteuse

3.1 Étude théorique

L'étude théorique nous mène à utiliser un estimateur $\hat{\phi}$ qui a pour expression :

$$\hat{\phi} = \frac{1}{2} \arg \{ \sum_m z_m^2 \}$$

Cet estimateur nous permettrait de corriger l'erreur de phase du signal au niveau du sur-échantillonnage. Nous allons faire son application avec différentes erreurs de phase pour observer son influence.

3.2 Implantation sous Matlab

3.2.1 Explication des erreurs de phase pour $\phi = 40^\circ$ et $\phi = 100^\circ$

Avec l'expression de $\hat{\phi}$ nous sommes en mesure de corriger l'erreur de phase de nos signaux. En effet, pour $\phi = 40^\circ$ et par application de la correction, nous obtenons un TEB nul. Cependant, pour $\phi = 100^\circ$ nous avons toujours un TEB égal à un, cela s'explique par le fait que $\hat{\phi} = -80^\circ$, son calcul effectue un tour complet avec l'erreur de phase de 180° .

Sur la constellation, nous ne pouvons pas observer ce résultat, car la correction a agrandi l'erreur de phase pour effectuer un tour complet. Cette ambiguïté peut être corrigée en ajoutant π à $\hat{\phi}$.

3.2.2 Comparaison de différents TEB

Voici les différents tracés de TEB que nous avons obtenues :

Pour une erreur de phase de 40° , la correction d'erreur de phase $\hat{\phi}$ agit correctement sur

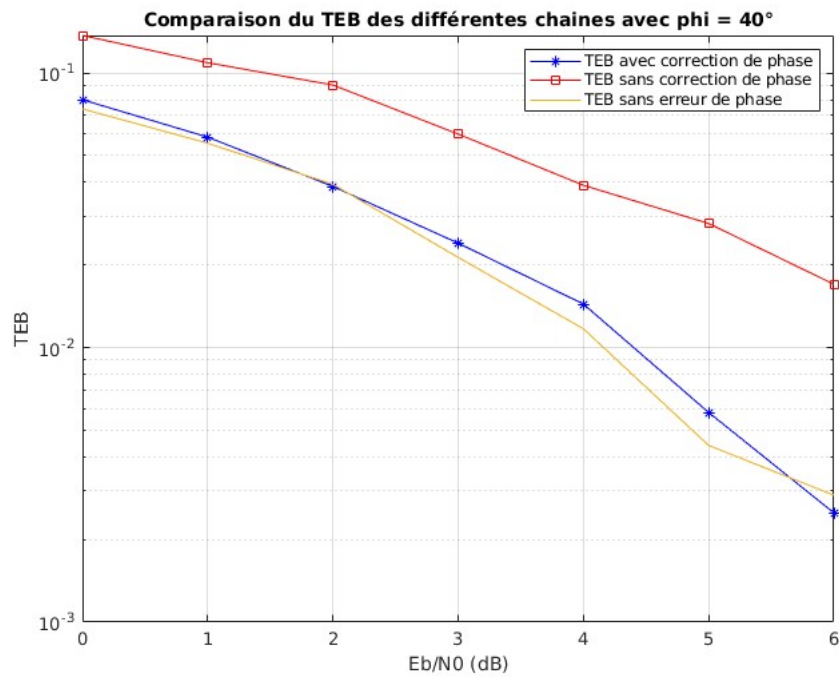
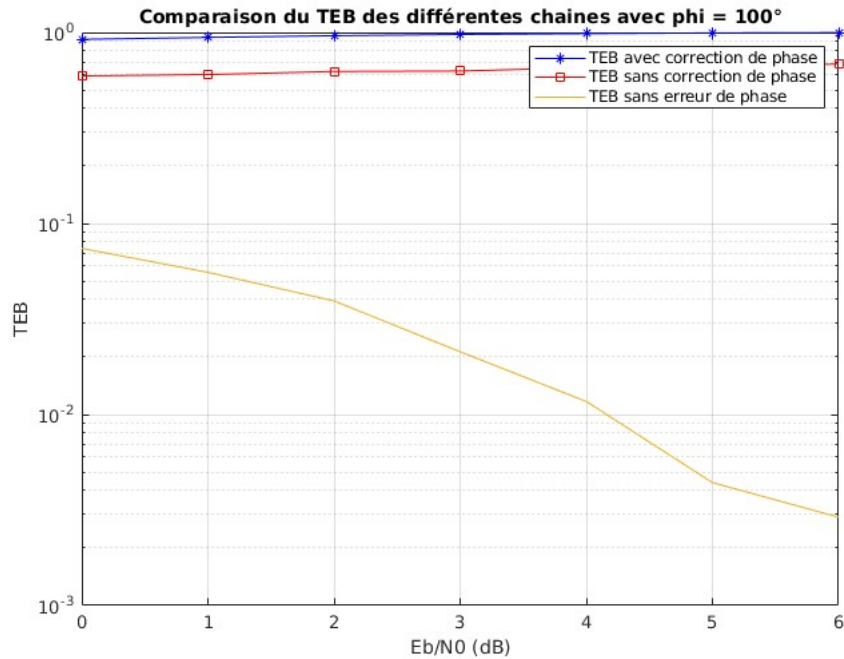


FIGURE 9 – Comparaison des TEB pour $\phi = 40^\circ$

nos symboles. Nous pouvons le constater avec la courbe bleue qui suit la courbe jaune. Et ce correcteur nous prouve qu'il fonctionne, car nous pouvons observer la courbe rouge qui a un TEB plus grand (quel que soit le rapport E_b/N_0). Le correcteur de phase fonctionne correctement.

FIGURE 10 – Comparaison des TEB pour $\phi = 100^\circ$

Pour une erreur de phase de 100° , nous pouvons constater que la courbe rouge ne suit plus la courbe jaune et est proche de la courbe bleue. En fait, nous retrouvons un TEB très proche 1 avec le correcteur de phase, même plus grand que celui sans correcteur. Cela est dû au fait que $\phi = 100^\circ > 90^\circ$ et que le correcteur force les symboles à exécuter une rotation de 180° . Ce qui déplace la plupart des symboles du mauvais côté par rapport au démappage, alors que nous pourrions malgré tout récupérer des symboles corrects si le correcteur ne serait pas présent. Cela peut se régler avec l'ajout de π dans l'estimateur, ou en changeant le démappage. Mais cette méthode serait inadaptée et ne s'appliquerait pas de la même manière dans différentes situations.

4 Utilisation d'un codage par transition

4.1 Étude théorique

4.1.1 Affranchissement de l'ambiguïté π

Nous savons que pour un angle compris dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ l'estimateur provoque une rotation atteignant π . Donc pour cela, il faut forcer les signaux à faire une rotation supplémentaire pour minimiser le taux d'erreur binaire d'où le produit :

$$\hat{a}_k = c_k \times c_{k-1} = (a_k \times c_{k-1}) \times c_{k-1}$$

4.1.2 Doublage du TEB

Maintenant une erreur sur c_k entraîne une erreur sur $\widehat{a_{k+1}}$ et sur $\widehat{a_k}$ ce qui double le taux d'erreur binaire.

4.2 Implantation sous Matlab

Nous introduisons un codage par transition dans cette partie.

4.3 Tracés des TEB pour $\phi = 40^\circ$

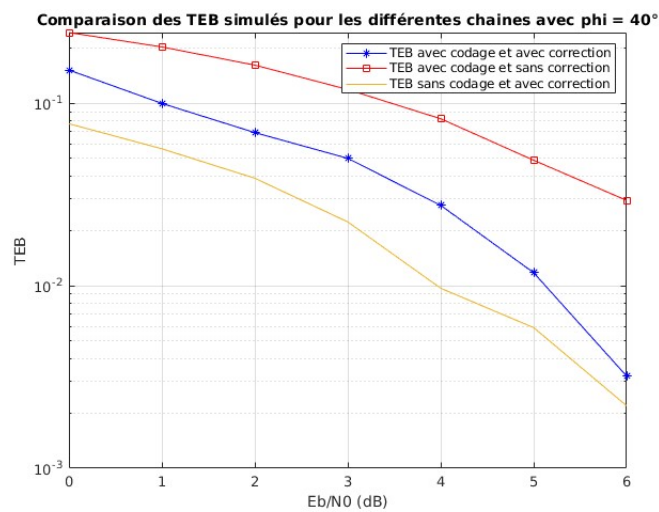
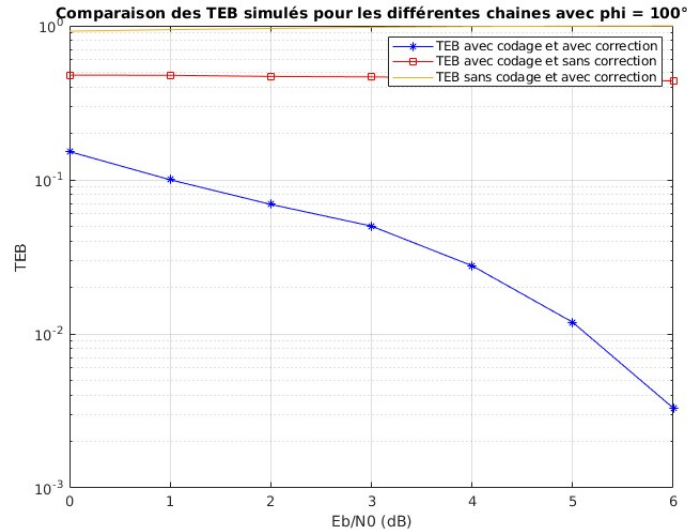


FIGURE 11 – TEB simulés sur les trois chaines pour $\phi = 40^\circ$

Comme nous pouvons le constater, le taux d'erreur binaire double lors de la présence d'un codage (courbe jaune et bleu). Et nous pouvons aussi admettre que le codage est une solution à l'ambiguïté générée par l'estimateur de phase. S'il n'y a pas correction de l'erreur de phase, il est inutile de procéder à du codage : cela fait augmenter le taux d'erreur binaire (courbe rouge).

4.4 Tracés des TEB pour $\phi = 100^\circ$ FIGURE 12 – TEB simulés sur les trois chaines pour $\phi = 100^\circ$

Avec cette valeur de ϕ nous pouvons constater la réelle performance du codage. La courbe bleue le prouve. Nous nous approchons du TEB théorique.

5 Conclusion

Dans ce tp, nous pu voir l'erreur de synchronisation qui pouvait avoir lieu dans une chaine de transmission. Nous avons découvert un moyen (non optimal) de corriger l'erreur de phase en utilisant un estimateur. Nous avons également découvert une méthode permettant d'améliorer cet estimateur : le codage par transition. Nous avons pu mettre en place ces différents procédés, tester sur différentes chaines de transmission pour comprendre leur utilité et leur importance lorsqu'ils ont réuni.