Selected Topics Augmented and Virtual Reality

Mathematische Grundlagen

Prof. Dr. Gerald Pirkl

<g.pirkl@oth-aw.de>

Amberg, 19. Oktober 2023

Hinweis

- Bitte beachten Sie das *Urheberrecht*!
- *Alle Materialien* dieser Vorlesung sind – auch wenn sie nicht ausdrücklich gekennzeichnet sind – *urheberrechtlich geschützt*.
- Sie dienen *ausschließlich* Ihrem *persönlichen Gebrauch* im Rahmen dieser Vorlesung.
- Die Materialien dürfen insbesondere *nicht weiter verbreitet* werden.
- *Eigene Aufzeichnungen* (Video, Foto, Ton) der Vorlesung sind *nicht gestattet*.

Überblick

Mathematische Grundlagen

Analytische Geometrie

Komplexere Operationen, Rotation, Translation

Euler Winkel

Mathematische Grundlagen

- Körper
- Vektoraum
- affine Räume
- Translationen, Rotationen
- homogene Operationen

entnommen aus *Virtual und Augmented Reality, Ralf Dörner, Springer 2019*

Grundkörper

Grundkörper G, Zahlenmenge mit Elementen, die

- Verknüpfung mit $+$
- Verknüpfung mit *
- Ergebnis liegt wieder in G
- Nullelement 0
- Einselement 1

Gesetze für Addition und Multiplikation

Grundkörper, Addition

Für die Addition $+$ gilt:
Es gilt für a,b,c,d aus G:

- **Assoziativgesetz**: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- **Kommutativgesetz**: $a + b = b + a$
- **Nullelement**: $0 + a = a$
- **Inverses der Addition**: Für alle $a \in G$ gibt es ein $-a \in G$ mit $-a + a = 0$

Grundkörper, Multiplikation

- **Assoziativgesetz**: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- **Kommutativgesetz**: $a \cdot b = b \cdot a$
- **Einselement**: $a \cdot 1 = a$
- **Inverses**: $d \in G, d \neq 0$: es gibt ein $d^{-1} \in G$: $d \cdot d^{-1} = 1$

außerdem:

Distributivgesetz:$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Körper

Die grundlegende Gesezte heißen **Axiome**

Beispiele für Grundkörper

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sind Beispiele für Körper

Vektorraum

Körper mit **Vektoren** als Elemente, Grundkörper $\mathbb{R}$, $+$ Vektor Addition, $\cdot$ **Skalarmultiplikation**, jeweils mit gültigen Gesetzen.
Außerdem gilt das **Distributivgesetz**:

$$\forall a, b \in \mathbb{G}, \forall \vec{u}, \vec{v}$$
$$a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$$
$$(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$$

Beispiel

3er Tupel mit Skalaren aus $\mathbb{R}$

für $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$ aus dem Vektorraum gilt

die komponentenweise Addition:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} x_v + x_w \\ y_v + y_w \\ z_v + z_w \end{pmatrix}$$

$$a \cdot \vec{u} = a \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_u \\ a \cdot y_u \\ a \cdot z_u \end{pmatrix}$$

Vektorraum und Basis

Linearkombination:
$\vec{u} = a_1 \cdot \vec{u_1} + a_2 \cdot \vec{u_2} + \ldots + a_n \cdot \vec{u_n}$,
nur wenn alle $a_i = 0$ sind und denn Nullvektor ergeben, so heißen die n Vektoren **lin. unabhängig**.
Benötigt man d lin. unabhängigen Vektoren um jeden Vektor des Vektorraums zu beschreiben, so nennt man d die Dimension des Vektorraums.
Die d Vektoren heißen Basis des Vektorraums.

Vektorraum - Länge eines Vektors

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix},$$

Die Länge des Vektors $\mid \vec{u} \mid = \sqrt{(} x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)$

Affiner Raum

Vektoren bis jetzt: nur Länge und Richtung - aber keine Position im Raum.

affiner Raum: Skalar, Vektor, Punkt. Ein Punkt hat eine Position im Raum. Seien $P = (x, y, z)$ und $Q = (x_q, y_q, z_q)$ Punkte im affinen Raum, dann gilt für die Operation $-$:
$P - Q = \vec{u} \Leftrightarrow P = \vec{u} + Q$

Zusammen mit dem Ursprung ($\mathbf{O}$) können wir über drei linear unabhängige Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (**Basisvektoren**) jeden Punkt darstellen:

$$P = \mathbf{O} + a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} = \mathbf{O} + \vec{p},$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ spannen das **Koordinatensystem** auf. $\vec{p}$ ist der zu P gehörende **Ortsvektor**.

Euklidischer Raum

Bis jetzt Affiner Raum

- **Skalarprodukt** $\vec{u} \cdot \vec{v} = w$, Kommutativgesetz und Nullvektor

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

- **Vektorbetrag**: $\mid \vec{u} \mid = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- **Abstand**: Punkte P und Q: $d = \mid P - Q \mid = \sqrt{(P-Q) \cdot (P-Q)} = \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{u})}$, mit $\vec{u} = P - Q$
- **Winkel**: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \mid \vec{u} \mid \cdot \mid \vec{v} \mid \cdot \cos\alpha$

Ist das Skalarprodukt 0, so sind die beiden Winkel senkrecht zueinander.

Kartesisches Koordinatensystem

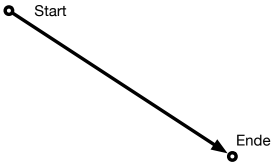
Kartesisches Koordinatensystem: Stehen alle Basisvektoren zueinander senkrecht und haben alle Vektoren die Länge 1, so heißt das Koordinatensystem Kartesisches Koordinatensystem

$$\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Ursprung: $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$

Mathematische Grundlagen - Vektoren

$$\overrightarrow{v} = (x, y, z), \mid \overrightarrow{v} \mid = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



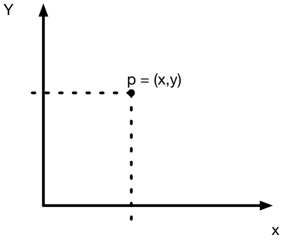
Vektor

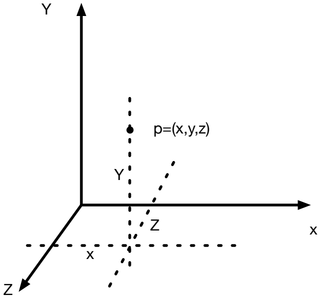
- gibt **Richtung und Länge** vor (sind mehrere Vektoren gleichlang, parallel und gleich orientiert, so sind sie der gleiche Vektor)
- **Verschiebung / Offset**: Ein Vektor zwischen zwei Punkten definiert eine Verschiebung dieser Punkte: **a** und **b**: $\overrightarrow{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ (Ende - Anfang)

Achtung: Oft wird nicht zwischen Punkten und Vektoren unterschieden

Mathematische Grundlagen - Koordinatensysteme

Kartesische Koordinatensysteme, $\mathbf{p} = (x, y, z)$, Dimensionalität

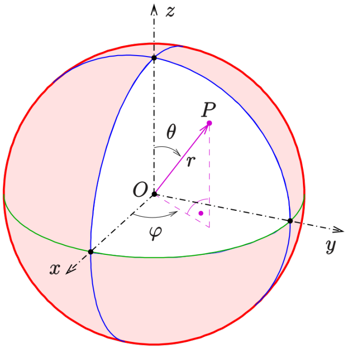




Abstandsbestimmung: $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, kartesischer Abstand
In AR/VR Anwendungen hauptsächlich 2D, 3D Koordinaten

Mathematische Grundlagen - Koordinatensysteme

Spherische Koordinatensysteme / Kugelkoordinaten



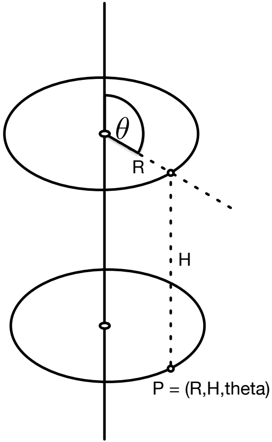
©wikipedia, ag2gaeh

Im Kugelkoordinatensystem liegt ein Punkt p auf einer Kugel mit Abstand d zum Ursprung. Die Koordinaten (r, ϑ, φ) definieren den Radius der Kugel und die Winkel zwischen der Z Achse und dem Punkt bzw. der X Achse und dem Punkt.

Der Abstand zum Ursprung ist direkt aus den Koordinaten ablesbar.

Mathematische Grundlagen - Koordinatensysteme

Zylinder Koordinatensysteme



Ein Punkt wird über die 3 Koordinaten (R, H, ϑ) definiert. R und H stehen senkrecht aufeinander

Kreuzprodukt

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y \\ u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z \\ u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x \end{pmatrix} = -1 \cdot \vec{v} \times \vec{u}$$

$\vec{n}$ heißt **Normalenvektor** und steht senkrecht zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Überblick

Mathematische Grundlagen

Analytische Geometrie

Komplexere Operationen, Rotation, Translation

Euler Winkel

Analytische Geometrie - Geradendefinition

Gerade:

$$g = \{\vec{x} \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{R}, \vec{x} = \vec{p} + t \cdot (\vec{q} - \vec{p}\},$$

$\vec{q}$ und $\vec{p}$ sind Ortsvektoren der Punkte P und Q,
$\vec{p}$ ist der Aufpunkt, $\vec{q} - \vec{q}$ ist der Richtungsvektor der Gerade. t ist der Parameter (**Parameterdarstellung der Geraden**)

(Skizze)

Parameterdarstellung der Ebene

Seien P,Q,R drei Punkte im $\mathbb{R}^3$ mit $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ deren zugehörige Ortsvektoren, dann ist die Ebene wie folgt definiert:

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t, s \in \mathbb{R}, \vec{x} = \vec{p} + t \cdot (\vec{q} - \vec{p}) + s \cdot (\vec{r} - \vec{p})\}$$

(Skizze)

Normalengleichung der Ebene

Sei P ein Punkt im $\mathbb{R}^3$, $\vec{p}$ der zugehörige Ortsvektor und $\vec{n}$der Normalenvektor der Ebene, dann gilt für die **Ebene**:

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0\}$$

(Skizze, alle Vektoren der Ebene sind senkrecht zum Normalenvektor, wg. Skalarprodukt)

Ebene - Abstand eines Punkts zur Ebene

Die Ebene E ist gegeben durch die Normalengleichung$(\vec{n}, \vec{p})$. Sei X ein Punkt aus $\mathbb{R}^3$ mit zugehörigem Ortsvektor $\vec{x}$.

Dann ist der Abstand d des Punktes zur Ebene E wie folgt definiert:
$d = \mid \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \mid$

Skizze, Länge der senkrecht zur Ebene stehenden Komponente des Differenzvektors zwischen $\vec{x}$ und $\vec{p}$.

Überblick

Mathematische Grundlagen

Analytische Geometrie

Komplexere Operationen, Rotation, Translation

Euler Winkel

Matrix (1)

Beispiel f. 2×4 Matrix, mit $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} = [m_{ij}]$$

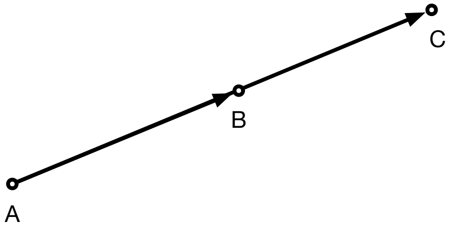
Operation Skalare Multiplikation: $\mathbf{M}$, $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot \mathbf{M} = a \cdot [m_{ij}] = [a \cdot m_{ij}]$

Operation Addition zweier Matrizen **gleicher** Größe $n \times m$:
$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ (komponentenweise Addition)

Operation Multiplikation: $\mathbf{A}$ $(n \times k)$, $\mathbf{B}$ $(k \times m)$, Ergebnis $(n \times m)$:
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [c_{ij}]$ mit $c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}$

Vektoroperationen - Skalarmultiplikation

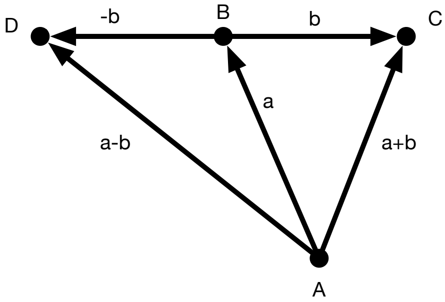
$\overrightarrow{b} = d \cdot \overrightarrow{c}$ mit $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3, d \in \mathbb{R}$



- Der Vektor wird skaliert - er wird länger oder kürzer
- Die Richtung verändert sich nicht

Die Skalierung erfolgt komponentenweise:
$\overrightarrow{b} = d \cdot \overrightarrow{c} = (d \cdot x_c, d \cdot y_c, d \cdot z_c)$

Vektor Addition und Vektor Subtraktion



Vektor Addition / Substraktion erfolgt komponentenweise:

$\overrightarrow{a} = (x_a, y_a)$, $\overrightarrow{b} = (x_b, y_b)$

- Ausgangspunkt $\mathbf{A} = (x_A, y_A)$
- $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \overrightarrow{a} = (x_A + x_a, y_A + y_a)$
- $\mathbf{C} = \mathbf{B} + \overrightarrow{b}$
- $\mathbf{D} = \mathbf{B} - \overrightarrow{b} = (x_B - x_b, y_B - y_b)$

Matrix (2)

Transponierte Matrix $\mathbf{M} = [a_{ij}]$, $\mathbf{M}^T = [a_{ji}]$
Es gilt außerdem: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$

Einheitsmatrix: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Diagonale 1)

Invertierbarkeit, Inverse: Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$ Matrix und es gibt eine Matrix $\mathbf{A}^-1$ so dass gilt: $\mathbf{A}^{\cdot}\mathbf{A}^-1 = \mathbf{I}$, so heißt $\mathbf{A}$ invertierbar und $\mathbf{A}^-1$ ist die **Inverse** zu $\mathbf{A}$

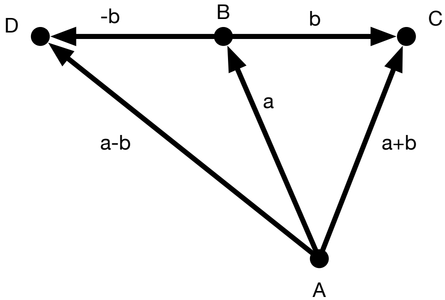
Affine Abbildungen

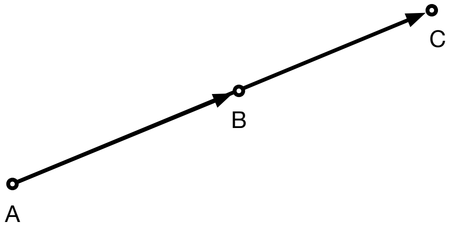
Translation: Sei $P = (x, y, z)$ ein Punkt im Kartesischen Koordinatensystem, sei $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$,

so gilt für $P' = P + \vec{t} = (x + t_x, y + t_y, z + t_z)$

Ziel: Translation mit Matrizen!

Translationen





Affine Abbildung - homogene Koordinaten und Translation

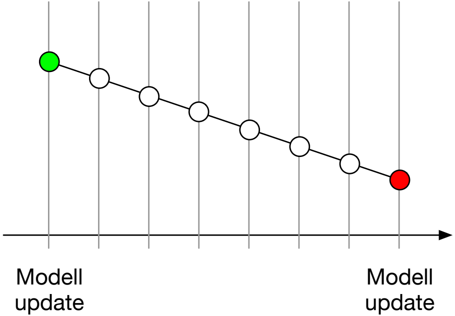
Sei $P = (x, y, z)$, dann ist die **homogene Darstellung** des Punktes P:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} w \cdot x \\ w \cdot y \\ w \cdot z \\ w \end{bmatrix}, \text{ mit } w \in \mathbb{R}, \text{ z.B. } w = 1$$

Für die **Translation** mit dem Vektor $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$ gilt:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{p}, \text{ in } \mathbb{R}^3\text{: } \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \cdot x \\ w \cdot y \\ w \cdot z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \cdot (x + t_x) \\ w \cdot (y + t_y) \\ w \cdot (z + t_z) \\ w \end{bmatrix}$$

Lineare Interpolation



Lineare Interpolation

Affine Abbildungen - Skalierungen

Eine **Skalierung** eines Vektors $\vec{v} = (x, y, z)$ zu $\vec{v}' = (s_x * x, s_y * y, s_z * z)$ kann durch die homogene Skalierungsmatrix

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

erfolgen:

$$\vec{v}' = S \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (x, y, z, 1) = (s_x * x, s_y * y, s_z * z, 1)$$

Rotationsmatrizen um x und y Achsen

Rotation um X Achse:

$$R_x(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation um Y Achse

$$R_y(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Achtung: Rotation um Achse und um Ursprung - ggf. Translation in Ursprung nötig

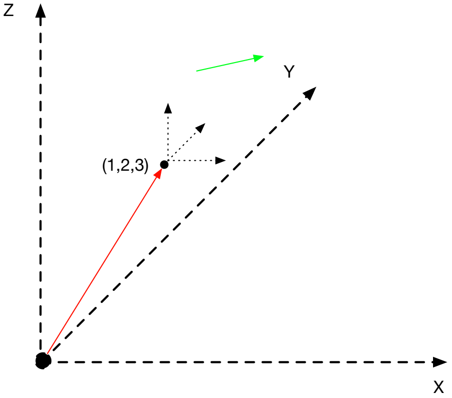
Rotationsmatrix um z Achse

$$R_z(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Achtung: Rotation um Achse und um Ursprung - ggf. Translation in Ursprung nötig

Beispiel Rotation mit Matrizen

Bis jetzt: Rotation um Ursprung. Beispiel für Rotation um Drehpunkt $(1, 2, 3)$, mit $\vartheta = 30°$:



- bringe Vektor v in Ursprungskoordinatensystem (Translation um $(-1, -2, -3)$)
- Rotiere Vektor im Ursprungskoordinatensystem
- bringe rotierten Vektor zurück an Position (Translation um $(1, 2, 3)$)

Beispiel Rotation und Translation mit Matrizen

Beispiel für Rotation um Drehpunkt $P = (1, 2, 3)$, mit $\vartheta = 30°$:

$\mathbf{M} = \mathbf{T_O} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_P$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Für v' gilt dann: $\mathbf{v}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$

Probleme mit Rotationsmatrizen

- Sperrige Handhabung
- Rotationsreihenfolge beachten (Kommutativität gilt nicht!)

Überblick

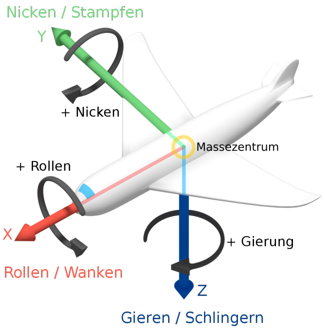
Mathematische Grundlagen

Analytische Geometrie

Komplexere Operationen, Rotation, Translation

Euler Winkel

Euler Winkel: Gieren - Nicken - Rollen



©Georg Eckert, Wikipedia

- **Gieren:** Drehung um z-Achse des Referenzsystems, heading / yaw
- **Nicken:** Drehung um y-Achse des neuen Referenzsystems
- **Rollen:** Drehung um x-Achse des neuen Referenzsystems (Querneigung)

Gieren: yaw, Nicken: pitch, Rollen: roll

Euler Winkel Anmerkungen

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gesamtrotationsmatrix der Eulerwinkel: $R = R_z(\psi) \cdot R_y(\vartheta) \cdot R_x(\varphi)$

Euler Winkel: Gimbal Lock

Achtung: Wenn ein Winkel 90 Grad entspricht, dann geht ein Freiheitsgrad verloren

Erklärung Gimbal Lock

Quaternionen

Opengl

Aufgabe - Koordinatensysteme

- Überlegen Sie sich, wie Sie bei den 3 Koordinatensystemvarianten die Abstände zwischen 2 Punkten bestimmen können.
- Wie wird der Abstand zum Koordinatenurspung im Zylinderkoordinatensystem berechnet?
- Gibt es in den Koordinatensystemvarianten Informationen, die in ähnlicher Form in den anderen Koordinatensystemvarianten vorkommen?
- Wie können Sie einen Punkt eines Koordinatensystems in die Darstellung der anderen beiden Koordinatensysteme überführen?
- Überlegen Sie sich eine Anwendung, in der es sinnvoll ist, ein anderes Koordinatensystem zu verwenden.

Aufgaben - Anwendung

- Schreiben Sie ein python Script (z.B. mit der numpy Bibliothek), das einen Pfad (Sequenz von Punkten) in Form einer Acht in der (x, y) Ebene, mit einstellbarem Radius der Teilkreise generiert.
- Berechnen Sie nun für jeden Punkt des Pfades die Parameter einer Ebene, die 5m vom Punkt entfernt. Die Neigung der zu berechnenden Ebene soll abhängig vom Punkt zwischen 45 Grad und 135 Grad hin und herwandern. (Punkt 0 hat Neigung 45 Grad, Punkt n hat die Neigung 135 Grad). Die Neigung soll relativ zur (x,y) Ebene berechnet werden.
- Überprüfen Sie für jeden Punkt den / die Winkel zwischen der berechneten Ebene und der (x,y) Ebene.
- Erweitern Sie ihr Script so, dass die Acht in einer Ebene ungleich der (x,y) Ebene enthalten ist. Auch die relative Ebene aus der vorherigen Aufgabe soll entsprechend angepasst werden.