

Devoir Maison

Exercice 1 (Modèle binomial en temps discret)

On a ici un Binomial tree à n périodes. On note : $\Delta_n t = \frac{T}{n}$. On a donc les paramètres suivants : $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n t}}$ d'après l'énoncé :

$$S_{t_{k+1}}^n = \begin{cases} uS_{t_k}^n & \text{si } \xi = 1 \text{ (proba } \frac{1}{2}) \\ dS_{t_k}^n & \text{si } \xi = -1 \text{ (proba } \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Les rendements sont $Y_{k+1} = S_{t_{k+1}}^n / S_{t_k}^n = e^{\sigma(\sqrt{\frac{T}{n}})\xi_{k+1}} = e^{\sigma(\sqrt{\Delta_n t})\xi_{k+1}}$

1.a Pour que ce modèle vérifie la condition *A.O.A.*, il faut que $d < e^{r\Delta_n t} = e^{r\frac{T}{n}} < u$, $r \in \mathbb{R}$. Soit :

$$\begin{aligned} e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n t}} &< e^{r\Delta_n t} < e^{\sigma\sqrt{\Delta_n t}} \\ -\sigma\sqrt{\Delta_n t} &< r\Delta_n t < \sigma\sqrt{\Delta_n t} \\ \frac{-\sigma}{\sqrt{\frac{T}{n}}} &< r < \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{T}{n}}} \end{aligned}$$

1.b On a \mathbb{Q}^n une probabilité neutre au risque. On sait alors que \mathbb{Q}^n est unique, et que sous cette probabilité, les rendements sont indépendants et de même loi. On a donc, pour tout $k \neq k'$, $k, k' \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} Y_k &\perp\!\!\!\perp Y_{k'} \\ e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\xi_k} &\perp\!\!\!\perp e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\xi_{k'}} \end{aligned}$$

qui équivaut à :

$$\forall k \neq k', \quad k, k' \in [0, T], \quad \xi_k \perp\!\!\!\perp \xi_{k'}$$

La loi de ces rendements est alors donnée par :

$$\mathbb{Q}^n(Y_1 = u) = q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^n(Y_1 = d) = 1 - q$$

$$\text{où : } q = \frac{e^{r\frac{T}{n}} - d}{u - d}$$

soit :

$$\mathbb{Q}^n \left[e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\xi_1} = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \right] = q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^n \left[e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\xi_1} = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \right] = 1 - q$$

$$\mathbb{Q}^n(\xi_1 = 1) = q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^n(\xi_1 = -1) = 1 - q$$

$$\text{avec : } q = \frac{e^{r\frac{T}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}$$

La loi de S_T sous \mathbb{Q}^n est alors :

$$S_T = S_0 e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i} \quad \text{avec : } \begin{cases} \xi_i = 1 \text{ (proba } q) \\ \xi_i = -1 \text{ (proba } 1 - q) \end{cases}$$

En posant $X_i = \frac{\xi_i + 1}{2}$ on a :

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, q)$$

Alors :

$$S_T = S_0 \exp \left\{ 2\sigma \sqrt{\frac{T}{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i + 1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right\} = S_0 \exp \left\{ 2\sigma \sqrt{\frac{T}{n}} \sum_{i=1}^n X_i - \sigma n \sqrt{\frac{T}{n}} \right\}$$

S_T est à valeur dans : $S_0 \exp \left\{ \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} (2k - n) \right\}$, $0 \leq k \leq n$. On a alors :

$$\mathbb{Q}^n \left(S_T = S_0 \exp \left\{ \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} (2k - n) \right\} \right) = \mathbb{Q}^n \left(\sum_{i=1}^n X_i = k \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} q^k (1-q)^{n-k}$$

1.c

2. On a donc :

$$\begin{aligned} C^{BS}(S_0, T, K, \sigma, r) &:= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-rT} \left(S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K \right)^+ \right] \\ C^{BS}(S_0, T, K, \sigma, r) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-rT} \left(S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K \right) \mathbb{1}_{\left\{ S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right\}} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-rT} \left(S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) \mathbb{1}_{\left\{ S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right\}} - e^{-rT} K \mathbb{1}_{\left\{ S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right\}} \right] \\ &= e^{-rT} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) \mathbb{1}_{\left\{ S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right\}} \right] - K \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\mathbb{1}_{\left\{ S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right\}} \right] \right) \\ &= e^{-rT} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) \mathbb{1}_{\left\{ S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right\}} \right] - K \mathbb{P} \left[S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right] \right) \end{aligned}$$

On va alors poser :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 + \sigma \sqrt{T} \\ a_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}} \end{cases}$$

Or, on a pour le second membre :

$$\begin{aligned} \left\{ S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right\} &= \left\{ \sigma B_T > \log \left(\frac{K}{S_0} \right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right\} \\ &= \left\{ \frac{-B_T}{\sqrt{T}} < \frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right\} \end{aligned}$$

donc : $K \mathbb{P} \left[S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right] = K \mathcal{N}(a_1)$ car $B_T \sim \mathcal{N}(0, T)$.

Ensuite pour le premier membre :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) \mathbb{1}_{\left\{ S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right\}} \right] &= S_0 \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) \mathbb{1}_{\left\{ S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right\}} \right] \\
&= \frac{S_0}{e^{-rT}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(e^{\sigma B_T - \frac{\sigma^2}{2}T} \right) \mathbb{1}_{\left\{ S_0 e^{\sigma B_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} > K \right\}} \right] \\
&= \frac{S_0}{e^{-rT}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{d\mathbb{P}^{\sigma}}{d\mathbb{P}} \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \right] \\
&= \frac{S_0}{e^{-rT}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\sigma}} [\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}] \\
&= \frac{S_0}{e^{-rT}} \mathbb{P}^{\sigma} [S_T > K]
\end{aligned}$$

Où $(B_t - \sigma t)_t$ est un mouvement Brownien sous \mathbb{P}^{σ} une mesure équivalente à \mathbb{P} et $\{S_T > K\} = \left\{ -\frac{B_t - \sigma t}{\sqrt{T}} \leq \sigma\sqrt{T} \right\}$

On a donc : $\mathbb{P}^{\sigma}(S_T \geq K) = \mathcal{N}(a_0)$

$$\begin{aligned}
C^{BS}(S_0, T, K, \sigma, r) &= Ke^{-rT} \mathcal{N}(a_1) + S_0 \mathcal{N}(a_0) \\
&= S_0 \mathcal{N} \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T} \right) - Ke^{-rT} \mathcal{N} \left(\frac{\log \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma\sqrt{T}} \right)
\end{aligned}$$

3.a Avec le langage python, on crée une fonction avec le code suivant :

```

1 %pylab inline
2 import scipy.stats as stats
3
4 def Call_option(S,K,T,sigma,r,n):
5
6     #On implemente delta_T, u et d, ainsi que le prix q et e_r
7     delta_T = T/n
8     u = exp(sigma * sqrt(delta_T))
9     d = exp(- sigma * sqrt(delta_T))
10    q = ((exp(r*delta_T))-d)/(u - d)
11    e_r = exp(-r*delta_T)
12
13    #On initialise la taille de C et de S_t
14    S_t = zeros(n + 1)
15    C = zeros(n + 1)
16
17    #On initialise S_t[0]
18    S_t[0]=S*d**n
19
20    #On calcule St a chaque temps t
21    for j in range(1, n+1):
22        S_t[j] = S_t[j-1] * u/d
23
24    #On calcule C a chaque temps t > 0
25    for j in range(1, n+1):
26        C[j] = max(S_t[j]-K,0)
27
28    # On trouve C[0] en "remontant"
29    for i in range(n, 0, -1):
30        for j in range(0, i):
31            C[j] = e_r*(q*C[j+1]+(1-q)*C[j])
32
33    # On renvoie C[0]

```

```

34     return C[0]
35
36 def CBB(S_0,K,T,sigma,r):
37     a_1 = (log(S_0/K)+(r-(sigma**2)/2)*T) / (sigma*sqrt(T))
38     a_0 = a_1 + sigma*sqrt(T)
39     return(- K * exp(-r*T)* stats.norm.cdf(a_0) + S_0 * stats.norm.cdf(a_1))

```

3.b On a l'entrée suivante :

```

1  #On initialise nos parametres
2
3  diff_n = [10, 20, 30, 50, 100]
4  S_0, K, T, sigma, r = 50, 50, 1, 0.1, 0.3
5
6  #On fait tourner la fonction
7
8  for n in diff_n:
9      print("avec n =", n, "C[0] vaut :", Call_option(S_0,K,T,sigma,r,n))
10 print("")
11 print('CBB : ', CBB(S_0, K, T, sigma, r))

```

Qui nous donne en sortie :

```

avec n = 10 C[0] vaut : 12.95908911726609
avec n = 20 C[0] vaut : 12.959297541310416
avec n = 30 C[0] vaut : 12.959584558212452
avec n = 50 C[0] vaut : 12.959942641314868
avec n = 100 C[0] vaut : 12.960297193045758

```

FIGURE 1 – Sorties Python

Exercice 2 (Formule d'Itô)

Le processus X est un processus d'Itô et donc peut s'écrire : $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_u dB_u + \int_0^t \mu_u du$. On rappelle alors la formule d'Itô : Si $f(t, X_t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, on a la formule :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u, B_u) du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, B_u) dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, B_u) d\langle B \rangle_u$$

1. On a $X_t = f(B_t)$ où $f(x) = 3x$ est de classe \mathcal{C}^2 . Ainsi on peut appliquer la formule d'Itô et l'on obtient :

$$X_t = X_0 + 3 \int_0^t dB_s$$

qui montre que $(X_t)_{t \geq 0}$ est bien un processus d'Itô.

2. On a $X_t = f(t, B_t)$ où $f(t, x) = e^{x+t}$. L'application f est bien $\mathcal{C}^{1,2}$, on peut donc appliquer la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} X_t &= f(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u, B_u) du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, B_u) dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, B_u) d\langle B \rangle_u \\ X_t &= X_0 + \int_0^t X_u du + \int_0^t X_u dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t X_u du \\ X_t &= X_0 + \int_0^t X_u dB_u + \frac{3}{2} \int_0^t X_u du \end{aligned}$$

qui montre que $(X_t)_{t \geq 0}$ est bien un processus d'Itô.

3. On pose $Y_t = \exp\{B_t\}$, on a alors :

$$\begin{aligned} Y_t &= \exp\{B_0\} + \int_0^t \exp\{B_u\} du + \int_0^t \exp\{B_u\} dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t \exp\{B_u\} du \\ &= 1 + \int_0^t Y_u dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t Y_u du \end{aligned}$$

soit $dY_t = Y_t dt + Y_t dB_t$.

On a aussi : $Z_t = \int_0^t B_u du$ soit $dZ_t = B_t dt$.

D'où :

$$\begin{aligned} X_t &= Y_t Z_t, \quad dX_t = d(Y_t Z_t) = Y_t dZ_t + Z_t dY_t + d\langle Y, Z \rangle_t \\ &= Y_t dZ_t + Z_t dY_t \end{aligned} \quad \text{puisque } d\langle Y, Z \rangle_t = 0 \text{ car } H^2 = 0$$

donc on trouve :

$$dX_t = d(Y_t Z_t) = Y_t B_t dt = \left(\int_0^t B_u du \right) Y_t dt + \left(\int_0^t B_u du \right) Y_t dB_t$$

qui montre que $(X_t)_{t \geq 0}$ est bien un processus d'Itô.

4. On a $X_t = f(t, B_t)$ où $f(t, x) = xe^{\sigma x}$. L'application f est bien $\mathcal{C}^{1,2}$, on peut donc appliquer la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} X_t &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u, B_u) dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, B_u) d\langle B \rangle_u \\ X_t &= X_0 + \int_0^t e^{\sigma B_u} + B_u \sigma e^{\sigma B_u} dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 e^{2\sigma B_u} + \sigma (e^{\sigma B_u} + B_u \sigma e^{\sigma B_u}) du \\ X_t &= X_0 + \int_0^t Z_u dB_u + \sigma \int_0^t X_u dB_u + \frac{1}{2} \left(\sigma \int_0^t Z_u du + \sigma \int_0^t Z_u du + \sigma \int_0^t X_u du \right) \\ X_t &= X_0 + \int_0^t (Z_u + \sigma X_u) dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma (2Z_u + X_u) du \end{aligned}$$

qui montre que $(X_t)_{t \geq 0}$ est bien un processus d'Itô.

5. On a $X_t = f(B_t, W_t)$ où $f(x, y) = \cos(xy)$. L'application f est bien \mathcal{C}^2 on donc appliquer la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}
X_t &= f(0, B_0, W_0) + \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B_s, W_s) dB_s \right) + \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(B_s, W_s) dW_s \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s, W_s) d\langle B \rangle_s \right) + \frac{1}{2} \left(\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(B_s, W_s) d\langle B, W \rangle_s \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(B_s, W_s) d\langle W, B \rangle_s \right) + \frac{1}{2} \left(\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B_s, W_s) d\langle W \rangle_s \right) \\
&= \cos(B_0 W_0) + \left(\int_0^t -W_s \sin(B_s W_s) dB_s \right) + \left(\int_0^t -B_s \sin(B_s W_s) dW_s \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_0^t -\sin(B_s W_s) - W_s^2 \cos(B_s W_s) ds \right) + \left(\int_0^t -W_s B_s \cos(B_s W_s) ds \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_0^t -\sin(B_s W_s) - B_s^2 \cos(B_s W_s) ds \right) \\
&= 1 + \left(\int_0^t -W_s \sin(B_s W_s) dB_s \right) + \left(\int_0^t -B_s \sin(B_s W_s) dW_s \right) + \frac{1}{2} \left(\int_0^t -2 \sin(B_s W_s) - (W_s + B_s)^2 \cos(B_s W_s) ds \right)
\end{aligned}$$

qui montre que $(X_t)_{t \geq 0}$ est bien un processus d'Itô.

Exercice 3 (Changement de probabilité)

On rappelle que l'on pose :

$$L := \left\{ L_t = \exp \left\{ \lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right\}, t \in [0, T] \right\}$$

Et que l'on définit sur \mathbb{F}_T la fonction $\mathbb{Q}_T : A \in \mathcal{F}_T \rightarrow \mathbb{E}^\mathbb{P} [\mathbb{1}_A L_T]$.

1. On va montrer que \mathbb{Q}_T est une mesure de probabilité :

- $\mathbb{Q}_T(\emptyset) = \mathbb{E}^\mathbb{P} [\mathbb{1}_\emptyset L_T] = 0$;
- Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, une famille d'éléments 2 à 2 disjoints ;
 $\mathbb{Q}_T(\bigcup_n A_n) = \mathbb{E}^\mathbb{P} [\mathbb{1}_{\{\bigcup_n A_n\}} L_T] = \mathbb{E}^\mathbb{P} [\sum_n \mathbb{1}_{\{A_n\}} L_T] = \sum_n \mathbb{E}^\mathbb{P} [\mathbb{1}_{\{A_n\}} L_T] = \sum_n \mathbb{Q}_T(A_n)$;
- $\mathbb{Q}_T(\Omega) = \mathbb{E}^\mathbb{P} [L_T] = \mathbb{E}^\mathbb{P} [L_0] = 1$ car L est une martingale (voir question 2.).

Reste donc à prouver que $\mathbb{Q}_T(A) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_T(A) &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}^\mathbb{P} [\mathbb{1}_A L_T] &= 0 \end{aligned}$$

Or $L_T > 0$ p-ps. , donc : $\mathbb{1}_A = 0$ p-ps. , soit :

$$\mathbb{Q}_T(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = 0$$

2. L est une martingale. En effet le processus est \mathbb{F} -adapté. De plus, les exponentielles de variables gaussiennes sont intégrables. On a enfin pour tout $s < t$:

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right] = \exp \left\{ \lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2} s \right\}$$

Il en découle donc facilement, avec $A \in \mathcal{F}_t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_T(A) &= \mathbb{E}^\mathbb{P} [\mathbb{1}_A L_T] \\ &= \mathbb{E}^\mathbb{P} [\mathbb{1}_A \mathbb{E}^\mathbb{P} [L_T | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}^\mathbb{P} [\mathbb{1}_A L_t] \end{aligned}$$

3. On a, avec $A \in \mathcal{F}_t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T} [\mathbb{1}_A Z] &= \mathbb{E}^\mathbb{P} [\mathbb{1}_A Z L_T] \\ &= \mathbb{E}^\mathbb{P} \left[\mathbb{1}_A Z L_t \frac{L_T}{L_t} \right] \\ &= \mathbb{E}^\mathbb{P} \left[\mathbb{1}_A L_t \mathbb{E}^\mathbb{P} \left[Z \frac{L_T}{L_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T} \left[\mathbb{1}_A \mathbb{E}^\mathbb{P} \left[Z \frac{L_T}{L_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right] \end{aligned}$$

d'après la question 2. on a alors bien :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T} [\mathbb{1}_A Z] = \mathbb{E}^\mathbb{P} \left[Z \frac{L_T}{L_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{\mathbb{E}^\mathbb{P} [Z L_T | \mathcal{F}_t]}{L_t}$$

4. On cherche ici à montrer que $\{B_t^\lambda := B_t - \lambda t, \quad 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien. Pour $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T} [\exp\{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)\} | \mathcal{F}_s] &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\exp\{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)\} L_t | \mathcal{F}_s]}{L_s} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp\{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)\} \cdot \exp\left\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2}{2}(t - s)\right\} | \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp\{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)\} \cdot \exp\left\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2}{2}(t - s)\right\} \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp\left\{(B_t - B_s)(\lambda + iu) - (t - s) \left(\frac{\lambda^2}{2} + i\lambda u\right)\right\} \right] \\
&= \exp\{-u^2(t - s)/2\}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé que B^λ était un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q}_T)$.