Processus de Poisson
Master 1
Université Paris-Dauphine

# Examen partiel
# Lundi 16 Mars 2020
# 2h - documents non autorisés

La copie peut être rédigée en français ou en anglais; version anglaise du sujet ci-dessous.
Papers can be written in French or English; see below for the English version of the exam.

## Exercice I

Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. On note $(T_n)_{n\geq 1}$ ses temps de sauts.

1. Quelle est la loi de $N_t$ pour $t \geq 0$ ?
2. Déterminer la limite en loi de $\frac{T_n - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{n}}$ quand $n \to \infty$.
3. Soit $0 < s < t$ et soit $q \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{E}[\exp(q(N_t + N_s))]$.
4. Soit $\Theta$ une v.a. strictement positive indépendante de $N$. Calculer $\mathbb{E}[N_{\Theta t}]$ et $\mathrm{Var}[N_{\Theta t}]$.

## Exercice II

Soit $(\delta_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. telles que $(\delta_{2n+1})_{n\geq 0}$ est une suite de v.a. i.i.d. exponentielles de paramètre $\lambda > 0$ et pour tout $n \geq 1$, $\delta_{2n} = 0$. On définit le processus de comptage $N$ associé en posant :

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} \delta_k \ , \quad N_t := \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{T_n \leq t} \ .$$

1. Quelle est la taille des sauts de $N$ ?
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n := T_{2n}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $S_n$ suit une loi Gamma dont on précisera les paramètres.
3. On pose $M_t := \frac{1}{2} N_t$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que $M$ est un processus de Poisson.

## Exercice III

Soit $M$ et $N$ deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs $\mu$ et $\lambda$. On notera $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ les temps de sauts de $M$ et $N$ respectivement. On définit alors

$$X_t = M_t - N_t \ , \quad t \geq 0 \ .$$

On note $R_1$ le temps du premier saut de $X$, c'est-à-dire

$$R_1 := \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 0\} \ .$$

1. Le processus $X$ est-il un processus de comptage ?
2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $t \geq 0$, déterminer $\mathbb{P}(X_t = k)$ sous la forme d'une série.
3. Montrer que le processus $X$ est à accroissements indépendants et stationnaires.
4. Déterminer la limite presque sûre de $\frac{X_t}{t}$ quand $t \to \infty$.
5. Déterminer la loi de $R_1$.

## Exercice IV

Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. On note $(T_n)_{n\geq 1}$ ses temps de sauts. On rappelle que si $X$ et $Y$ sont indépendantes de lois Gamma$(\alpha, \lambda)$ et Gamma$(\beta, \lambda)$, alors $X/(X+Y)$ suit une loi Beta$(\alpha, \beta)$ dont la densité est donnée par

$$\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{Z_{\alpha,\beta}} \mathbf{1}_{\{0<x<1\}} \ ,$$

où $Z_{\alpha,\beta}$ est une constante qui dépend de $\alpha$ et $\beta$.

1. Quelle est la loi de $T_n$ pour $n \geq 1$ ?
2. Montrer que $T_1$ est indépendant de $T_n - T_1$ et identifier la loi du couple $(T_1, T_n - T_1)$.
3. Déterminer la loi de $T_1/T_n$ pour $n \geq 2$.
4. On fixe $t > 0$ et $n \geq 2$. Montrer que la v.a. $(T_1, T_n)$ sachant $N_t = n$ admet pour densité
$$\frac{(t_n - t_1)^{n-2}}{t^n} n(n-1) \mathbf{1}_{\{0<t_1<t_n<t\}} \ .$$
5. Déterminer la loi de $T_1/T_n$ sachant $N_t = n$ et comparer au cas non-conditionné.

## Exercise I

Let $(N_t, t \geq 0)$ be a Poisson process of intensity $\lambda > 0$. We let $(T_n)_{n\geq 1}$ be its jump times.

1. What is the law of $N_t$ for $t \geq 0$ ?
2. Determine the limit in law of $\frac{T_n - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{n}}$ when $n \to \infty$.
3. Let $0 < s < t$ and let $q \in \mathbb{R}$. Compute $\mathbb{E}[\exp(q(N_t + N_s))]$.
4. Let $\Theta$ be a positive r.v. independent of $N$. Compute $\mathbb{E}[N_{\Theta t}]$ and $\mathrm{Var}[N_{\Theta t}]$.

## Exercice II

Let $(\delta_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of r.v. such that $(\delta_{2n+1})_{n\geq 0}$ is a sequence of i.i.d. exponential r.v. with parameter $\lambda > 0$ and for every $n \geq 1$, $\delta_{2n} = 0$. We define the counting process $N$ by setting:

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} \delta_k \ , \quad N_t := \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{T_n \leq t} \ .$$

1. What is the size of the jumps of $N$ ?
2. For every $n \geq 1$, we set $S_n := T_{2n}$. Show that for every $n \geq 1$, $S_n$ follows a Gamma law and determine its parameters.
3. We set $M_t := \frac{1}{2} N_t$ for all $t \geq 0$. Show that $M$ is a Poisson process.

## Exercice III

Let $M$ and $N$ be two independent Poisson processes with respective parameters $\mu$ and $\lambda$. We let $(S_n)_{n\geq 1}$ and $(T_n)_{n\geq 1}$ be the jump times of $M$ and $N$ respectively. We define

$$X_t = M_t - N_t \ , \quad t \geq 0 \ .$$

We let $R_1$ be the first jump time of $X$, that is

$$R_1 := \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 0\} \ .$$

1. Is $X$ a counting process ?
2. For every $k \in \mathbb{Z}$ and all $t \geq 0$, determine $\mathbb{P}(X_t = k)$ under the form of a series.
3. Show that the process $X$ has independent and stationary increments.

4. Determine the almost sure limit of $\frac{X_t}{t}$ as $t \to \infty$.

5. Determine the law of $R_1$.

## Exercice IV

Let $(N_t, t \geq 0)$ be a Poisson process of intensity $\lambda > 0$. We let $(T_n)_{n\geq 1}$ be its jump times. We recall that if $X$ and $Y$ are two independent r.v. with laws Gamma$(\alpha, \lambda)$ and Gamma$(\beta, \lambda)$, then $X/(X+Y)$ follows a Beta$(\alpha, \beta)$ law whose density is given by

$$\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{Z_{\alpha,\beta}} \mathbf{1}_{\{0<x<1\}} \ ,$$

where $Z_{\alpha,\beta}$ is a constant that depends on $\alpha$ and $\beta$.

1. What is the law of $T_n$ for $n \geq 1$ ?

2. Show that $T_1$ is independent of $T_n - T_1$ and identify the law of the pair $(T_1, T_n - T_1)$.

3. Determine the law of $T_1/T_n$ for $n \geq 2$.

4. We fix $t > 0$ and $n \geq 2$. Show that the r.v. $(T_1, T_n)$ given $N_t = n$ has density

$$\frac{(t_n - t_1)^{n-2}}{t^n} n(n-1) \mathbf{1}_{\{0<t_1<t_n<t\}} \ .$$

5. Determine the law of $T_1/T_n$ given $N_t = n$ and compare it with the un-conditioned case.