Mouvement Brownien et évaluation des actifs
Lucas Perrin
10 mai 2020

# Devoir Maison

## Exercice 1 (Modèle binomial en temps discret)

On a ici un Binomial tree à $n$ périodes. On note : $\Delta_n t = \frac{T}{n}$. On a donc les paramètres suivants : $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n t}}$ d'après l'énoncé :

$$S_{t^n_{k+1}} = \begin{cases} uS_{t^n_k} & \text{si } \xi = 1 \text{ (proba } \frac{1}{2}) \\ dS_{t^n_k} & \text{si } \xi = -1 \text{ (proba } \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Les rendements sont $Y_{k+1} = S_{t_{k+1}}/S_{t_k} = e^{\sigma\left(\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\xi_{k+1}} = e^{\sigma\left(\sqrt{\Delta_n t}\right)\xi_{k+1}}$

**1.a** Pour que ce modèle vérifie la condition $A.O.A.$, il faut que $d < e^{r\Delta_n t} = e^{r\frac{T}{n}} < u$, $r \in \mathbb{R}$. Soit :

$$e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n t}} < e^{r\Delta_n t} < e^{\sigma\sqrt{\Delta_n t}}$$
$$-\sigma\sqrt{\Delta_n t} < r\Delta_n t < \sigma\sqrt{\Delta_n t}$$
$$\frac{-\sigma}{\sqrt{\frac{T}{n}}} < r < \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{T}{n}}}$$

**1.b** On a $\mathbb{Q}^n$ une probabilité neutre au risque. On sait alors que $\mathbb{Q}^n$ est unique, et que sous cette probabilité, les rendements sont indépendants et de même loi. On a donc, pour tout $k \neq k'$, $k, k' \in [0, T]$ :

$$Y_k \perp\!\!\!\perp Y_{k'}$$
$$e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\xi_k} \perp\!\!\!\perp e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\xi_{k'}}$$

qui équivaut à :

$$\forall k \neq k', \quad k, k' \in [0, T], \quad \xi_k \perp\!\!\!\perp \xi_{k'}$$

La loi de ces rendements est alors donnée par :

$$\mathbb{Q}^n\left(Y_1 = u\right) = q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^n\left(Y_1 = d\right) = 1 - q$$

$$\text{où :} \quad q = \frac{e^{r\frac{T}{n}} - d}{u - d}$$

soit :

$$\mathbb{Q}^n\left[e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\xi_1} = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right] = q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^n\left[e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\xi_1} = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right] = 1 - q$$

$$\mathbb{Q}^n\left(\xi_1 = 1\right) = q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^n\left(\xi_1 = -1\right) = 1 - q$$

avec : $q = \frac{e^{r\frac{T}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}$

La loi de $S_T$ sous $\mathbb{Q}^n$ est alors :

$$S_T = S_0 e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^n \xi_i} \quad \text{avec :} \begin{cases} \xi_i = 1 \text{ (proba } q) \\ \xi_i = -1 \text{ (proba } 1 - q) \end{cases}$$

En posant $X_i = \frac{\xi_i+1}{2}$ on a :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,q)$$

Alors :

$$S_T = S_0 \exp\left\{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i+1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\} = S_0 \exp\left\{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i - \sigma n\sqrt{\frac{T}{n}}\right\}$$

$S_T$ est à valeur dans : $S_0 \exp\left\{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}(2k-n)\right\}$, $0 \leq k \leq n$. On a alors :

$$\mathbb{Q}^n\left(S_T = S_0 \exp\left\{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}(2k-n)\right\}\right) = \mathbb{Q}^n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}q^k(1-q)^{n-k}$$

**1.c**

**2.** On a donc :

$$C^{BS}(S_0,T,K,\sigma,r) := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-rT}\left(S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}-K\right)^+\right]$$

$$\begin{aligned}
C^{BS}(S_0,T,K,\sigma,r) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-rT}\left(S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}-K\right)\mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-rT}\left(S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\right)\mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right\}} - e^{-rT}K\mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right\}}\right] \\
&= e^{-rT}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\right)\mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right\}}\right] - K\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right\}}\right]\right) \\
&= e^{-rT}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\right)\mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right\}}\right] - K\mathbb{P}\left[S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right]\right)
\end{aligned}$$

On va alors poser :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 + \sigma\sqrt{T} \\ a_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \end{cases}$$

Or, on a pour le second membre :

$$\begin{aligned}
\left\{S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right\} &= \left\{\sigma B_T > \log\left(\frac{K}{S_0}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\} \\
&= \left\{\frac{-B_T}{\sqrt{T}} < \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}
\end{aligned}$$

donc : $K\mathbb{P}\left[S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right] = K\mathcal{N}(a_1)$ car $B_T \sim \mathcal{N}(0,T)$.

Ensuite pour le premier membre :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\right)\mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right\}}\right] = S_0\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\right)\mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right\}}\right]$$

$$= \frac{S_0}{e^{-rT}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(e^{\sigma B_T-\frac{\sigma^2}{2}T}\right)\mathbb{1}_{\left\{S_0 e^{\sigma B_T+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}>K\right\}}\right]$$
$$= \frac{S_0}{e^{-rT}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{P}^{\sigma}}{d\mathbb{P}}\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\right]$$
$$= \frac{S_0}{e^{-rT}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\sigma}}\left[\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\right]$$
$$= \frac{S_0}{e^{-rT}}\mathbb{P}^{\sigma}\left[S_T>K\right]$$

Où $(B_t-\sigma t)_t$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^{\sigma}$ une mesure équivalente à $\mathbb{P}$ et $\{S_T>K\} = \left\{-\frac{B_t-\sigma t}{\sqrt{T}} \leq \sigma\sqrt{T}\right\}$

On a donc : $\mathbb{P}^{\sigma}(S_T \geq K) = \mathcal{N}(a_0)$

$$C^{BS}(S_0,T,K,\sigma,r) = S_0\mathcal{N}(a_0) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(a_1)$$
$$= S_0\mathcal{N}\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}+\sigma\sqrt{T}\right) - Ke^{-rT}\mathcal{N}\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

**3.a** Avec le langage python, on crée une fonction avec le code suivant :

```python
%pylab inline
import scipy.stats as stats

def Call_option(S,K,T,sigma,r,n):

    #On implemente delta_T, u et d, ainsi que le prix q et e_r
    delta_T = T/n
    u = exp(sigma * sqrt(delta_T))
    d = exp(- sigma * sqrt(delta_T))
    q = ((exp(r*delta_T))-d)/(u - d)
    e_r = exp(-r*delta_T)

    #On initialise la taille de C et de S_t
    S_t = zeros(n + 1)
    C = zeros(n + 1)

    #On initalise S_t[0]
    S_t[0]=S*d**n

    #On calcule St a chaque temps t
    for j in range(1, n+1):
        S_t[j] = S_t[j-1] * u/d

    #On calcule C a chaque temps t > 0
    for j in range(1, n+1):
        C[j] = max(S_t[j]-K,0)

    # On trouve C[0] en "remontant"
    for i in range(n, 0, -1):
        for j in range(0, i):
            C[j] = e_r*(q*C[j+1]+(1-q)*C[j])

    # On renvoie C[0]
```

```python
    return C[0]

#On implemente aussi le resultat de la question 2.
def CBB(S_0,K,T,sigma,r):
    a_1 = (log(S_0/K)+(r-(sigma**2)/2)*T)  /  (sigma*sqrt(T))
    a_0 = a_1 + sigma*sqrt(T)
    return(- K * exp(-r*T)* stats.norm.cdf(a_0) + S_0 * stats.norm.cdf(a_1))
```

**3.b** On a l'entrée suivante :

```python
#On initialise nos parametres

diff_n = [10, 20, 30, 50, 100]
S_0, K, T, sigma, r = 50, 50, 1, 0.1, 0.3

#On fait tourner la fonction

for n in diff_n:
    print("avec n =", n, "C[0] vaut :", Call_option(S_0,K,T,sigma,r,n))
print("")
print('CBB : ', CBB(S_0, K, T, sigma, r))
```

Qui nous donne en sortie :

```
avec n = 10 C[0] vaut : 12.95908911726609
avec n = 20 C[0] vaut : 12.959297541310416
avec n = 30 C[0] vaut : 12.959584558212452
avec n = 50 C[0] vaut : 12.959942641314868
avec n = 100 C[0] vaut : 12.960297193045758

CBB :  12.922027946978368
```

Figure 1 – Sorties Python

Le calcul par itération est donc assez proche du résultat trouvé à la question **2.**, mais légèrement supérieur.

## Excercice 2 (Formule d'Itô)

Le processus $X$ est un processus d'Itô et donc peut s'écrire : $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_u dB_u + \int_0^t \mu_u du$. On rappelle alors la formule d'Itô : Si $f(t, X_t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, on a la formule :

$$\boxed{f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u,B_u)du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u,B_u)dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,B_u)d<B>_u}$$

**1.** On a $X_t = f(B_t)$ où $f(x) = 3x$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi on peut appliquer la formule d'Itô et l'on obtient :

$$X_t = X_0 + 3\int_0^t dB_s$$

qui montre que $(X_t)_{t\geq 0}$ est bien un processus d'Itô.

**2.** On a $X_t = f(t, B_t)$ où $f(t,x) = e^{x+t}$. L'application $f$ est bien $\mathcal{C}^{1,2}$, on peut donc appliquer la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}
X_t &= f(0,B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u,B_u)du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u,B_u)dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,B_u)d<B>_u \\
X_t &= X_0 + \int_0^t X_u du + \int_0^t X_u dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t X_u du \\
X_t &= X_0 + \int_0^t X_u dB_u + \frac{3}{2}\int_0^t X_u du
\end{aligned}$$

qui montre que $(X_t)_{t\geq 0}$ est bien un processus d'Itô.

**3.** On pose $Y_t = \exp\{B_t\}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
Y_t &= \exp\{B_0\} + \int_0^t \exp\{B_u\}d_u + \int_0^t \exp\{B_u\}d<B>_u \\
&= 1 + \int_0^t Y_u dB_u + \int_0^t Y_u du
\end{aligned}$$

soit $dY_t = Y_t dt + Y_t dB_t$.
On a aussi : $Z_t = \int_0^t B_u du$ soit $dZ_t = B_t dt$.
D'où :

$$\begin{aligned}
X_t = Y_t Z_t, \quad dX_t &= d(Y_t Z_t) = Y_t dZ_t + Z_t dY_t + d<Y,Z>_t \\
&= Y_t dZ_t + Z_t dY_t \qquad \text{pusique } d<Y,Z>_t = 0 \text{ car } H^2 = 0
\end{aligned}$$

donc on trouve :

$$dX_t = d(Y_t Z_t) = Y_t B_t d_t = \left(\int_0^t B_u du\right) Y_t dt + \left(\int_0^t B_u du\right) Y_t dB_t$$

qui montre que $(X_t)_{t\geq 0}$ est bien un processus d'Itô.

**4.** On a $X_t = f(t, B_t)$ où $f(t,x) = xe^{\sigma x}$. L'application $f$ est bien $\mathcal{C}^{1,2}$, on peut donc appliquer la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}
X_t &= f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u,B_u)dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,B_u)d<B>_u \\
X_t &= X_0 + \int_0^t e^{\sigma B_u} + B_u \sigma e^{\sigma B_u} dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma e^{\sigma B_u} + \sigma\left(e^{\sigma B_u} + B_u \sigma e^{\sigma B_u}\right) du \\
X_t &= X_0 + \int_0^t Z_u dB_u + \sigma\int_0^t X_u dB_u + \frac{1}{2}\left(\sigma\int_0^t Z_u du + \sigma\int_0^t Z_u du + \sigma\int_0^t X_u du\right) \\
X_t &= X_0 + \int_0^t (Z_u + \sigma X_u)dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(2Z_u + X_u)du
\end{aligned}$$

qui montre que $(X_t)_{t\geq 0}$ est bien un processus d'Itô.

**5.** On a $X_t = f(B_t, W_t)$ où $f(x,y) = cos(xy)$. L'application $f$ est bien $\mathcal{C}^2$ on donc appliquer la formule d'Itô :

$$
\begin{aligned}
X_t =& f(0, B_0, W_0) + \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B_s, W_s) dB_s\right) + \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(B_s, W_s) dW_s\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s, W_s) d < B >_s\right) + \frac{1}{2}\left(\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(B_s, W_s) d < B, W >_s\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(B_s, W_s) d < W, B >_s\right) + \frac{1}{2}\left(\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B_s, W_s) d < W >_s\right) \\
=& \cos(B_0 W_0) + \left(\int_0^t -W_s \sin(B_s W_s) dB_s\right) + \left(\int_0^t -B_s \sin(B_s W_s) dW_s\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_0^t -\sin(B_s W_s) - W_s^2 \cos(B_s W_s) ds\right) + \left(\int_0^t -W_s B_s \cos(B_s W_s) ds\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_0^t -\sin(B_s W_s) - B_s^2 \cos(B_s W_s) ds\right) \\
=& 1 + \left(\int_0^t -W_s \sin(B_s W_s) dB_s\right) + \left(\int_0^t -B_s \sin(B_s W_s) dW_s\right) + \frac{1}{2}\left(\int_0^t -2\sin(B_s W_s) - (W_s + B_s)^2 cos(B_s W_s) ds\right)
\end{aligned}
$$

qui montre que $(X_t)_{t\geq 0}$ est bien un processus d'Itô.

## Excercice 3 (Changement de probabilité)

On rappelle que l'on pose :

$$L := \left\{ L_t = \exp\left\{ \lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right\}, t \in [0, T] \right\}$$

Et que l'on définit sur $\mathbb{F}_T$ la fonction $\mathbb{Q}_T : A \in \mathcal{F}_T \to \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A L_T\right]$.

**1.** On va montrer que $\mathbb{Q}_T$ est une mesure de probabilité :

- $\mathbb{Q}_T(\varnothing) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\varnothing} L_T\right] = 0$ ;
- Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une famille d'éléments 2 à 2 disjoints ;
  $\mathbb{Q}_T(\bigcup_n A_n) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{\bigcup_n A_n\}} L_T\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sum_n \mathbb{1}_{\{A_n\}} L_T\right] = \sum_n \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{A_n\}} L_T\right] = \sum_n \mathbb{Q}_T(A_n)$ ;
- $\mathbb{Q}_T(\Omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[L_T\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[L_0\right] = 1$ car $L$ est une martingale (voir question **2.**).

Reste donc à prouver que $\mathbb{Q}_T(A) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{Q}_T(A) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A L_T\right] = 0 \end{aligned}$$

Or $L_T > 0$ p-ps. , donc : $\mathbb{1}_A = 0$ p-ps. , soit :

$$\mathbb{Q}_T(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = 0$$

**2.** $L$ est une martingale. En effet le processus est $\mathbb{F}$-adapté. De plus, les exponentielles de variables gaussiennes sont intégrables. On a enfin pour tout $s < t$ :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda B_t - \lambda^2 \frac{t}{2}\right\} | \mathcal{F}_s\right] = \exp\left\{\lambda B_s - \sigma^2 \frac{t}{2}\right\}$$

Il en découle donc facilement, avec $A \in \mathcal{F}_t$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_T(A) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A L_T\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[L_T | \mathcal{F}_t\right]\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A L_t\right] \end{aligned}$$

**3.** On a, avec $A \in \mathcal{F}_t$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\mathbb{1}_A Z\right] &= E^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A Z L_T\right] \\ &= E^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A Z L_t \frac{L_T}{L_t}\right] \\ &= E^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A L_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Z \frac{L_T}{L_t} | \mathcal{F}_t\right]\right] \\ &= E^{\mathbb{Q}_T}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Z \frac{L_T}{L_t} | \mathcal{F}_t\right]\right] \end{aligned}$$

d'après la question **2.** on a alors bien :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\mathbb{1}_A Z\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Z \frac{L_T}{L_t} | \mathcal{F}_t\right] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Z L_T | \mathcal{F}_t\right]}{L_t}$$

**4.** On cherche ici à montrer que $\{B_t^\lambda := B_t - \lambda t, \quad 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien. Pour $0 \leq s \leq t \leq T$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[\exp\{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)\}|\mathcal{F}_s\right] &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\{iu\left(B_t^\lambda - B_s^\lambda\right)\}L_t|\mathcal{F}_s\right]}{L_s} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)\} \cdot \exp\left\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right\}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\{iu(B_t^\lambda - B_s^\lambda)\} \cdot \exp\left\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right\}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left\{(B_t - B_s)(\lambda + iu) - (t-s)\left(\frac{\lambda^2}{2} + i\lambda u\right)\right\}\right] \\
&= \exp\{-u^2(t-s)/2\}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé que $B^\lambda$ était un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q}_T)$.