Duale Hochschule Baden-Württemberg

Logik und Algebra

3. Übungsblatt

1. Aufgabe: Seien A, B, C, D Mengen.
   (a) Beweisen Sie: $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$.
   (b) Geben Sie ein Beispiel für $(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)$ an, und beweisen Sie so durch ein Gegenbeispiel, dass die Gleichheit allgemein nicht gilt.

2. Aufgabe: Sei M eine Menge mit $n \in \mathbb{N}_0$ Elementen, also $|M| = n$. Beweisen Sie, dass $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

3. Aufgabe: Welche Eigenschaften hat folgende Relation R über der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

$$R = \{\ (1,3), (2,4), (2,2), (3,1), (4,2), (2,5), (4,5)\ \}$$

4. Aufgabe: Gegeben sei die Relation R über der Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$:

$$R = \{\ (a,a), (a,d), (b,b), (b,e), (c,c), (d,a), (d,d), (e,b), (e,e)\ \}$$

   (a) Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.
   (b) Zeichnen Sie den durch R dargestellten Graphen der Knoten aus Menge M.
   (c) Bestimmen Sie die Quotientenmenge M/R.

5. Aufgabe: Auf der Menge $M = [-2\pi, 2\pi]$ ist die Relation $\sim$ definiert durch

$$x \sim y \ \Leftrightarrow\ \sin(x) = \sin(y)\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.
   (b) Welche Elemente sind in der Äquivalenzklasse $[0]_\sim$?
   (c) Wie lautet die Quotientenmenge $M/_\sim$?

Lösung 2. Übungsblatt

Lösung 1: Die formalisierten Aussagen (mit der Wahl x an erster Stelle von $F(\cdot,\cdot)$ zur sinnvollen Vergleichbarkeit) lauten:

(a) $\exists y : \neg\exists x : F(x,y) \quad\Leftrightarrow\quad \exists y : \forall x : \neg F(x,y)$

(b) $\neg\forall x : \exists y : \neg F(x,y) \quad\Leftrightarrow\quad \exists x : \neg\exists y : \neg F(x,y) \quad\Leftrightarrow\quad \exists x : \forall y : F(x,y)$

(c) $\forall y : \forall x : \neg F(x,y)$

(d) $\forall y : \exists x : F(x,y)$

(e) $\exists x : \neg\exists y : F(x,y) \quad\Leftrightarrow\quad \exists x : \forall y : \neg F(x,y)$

(f) $\exists x : \exists y : F(x,y)$

Die Aussagen (b), (d) und (f) handeln vom Folgen, (a), (c) und (e) vom Nicht-Folgen. Es gibt folgende Zusammenhänge:

(b)⇒(d) wegen Satz 1.36

(d)⇒(f) da eine Ausage für alle die Existenz einschließt (AE und EI)

(c)⇒(a) da eine Aussage für alle die Existenz einschließt (AE und EI)

(c)⇒(e) da eine Aussage für alle die Existenz einschließt (AE und EI)

Insgesamt lauten die Zusammenhänge also:

$$\text{(b)} \Rightarrow \text{(d)} \Rightarrow \text{(f)} \qquad \text{(a)} \Leftarrow \text{(c)} \Rightarrow \text{(e)}$$

Lösung 2:

(a)

Schritt	Aussage	Begündung
1	$\forall x : \forall y : P(x,y)$	Prämisse
2.1	Es sei t beliebig	Annahme für AI
2.2.1	Es sei s beliebig	Annahme für AI
2.2.2	$\forall y : P(u,y)$, u beliebig	AE 1
2.2.3	$P(u,v)$, v beliebig	AE 2.2.2
2.2	$\forall x : P(x,v)$ mit $u = s$	AI 2.2.1 2.2.3
2	$\forall y : \forall x : P(x,y)$ mit $v = t$	AI 2.1 2.2

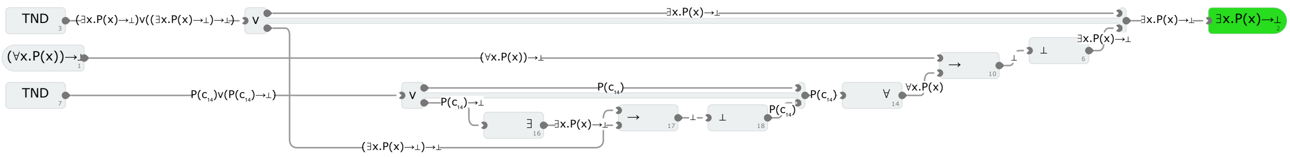
(b)

Schritt	Aussage	Begündung
1	$\exists x : \exists y : P(x,y)$	Prämisse
2.1	Sei t so, dass $\exists y : P(t,y)$	Annahme für EE 1
2.2.1	Sei s so, dass $P(t,s)$	Annahme für EE 2.1
2.2.2	Mit t gilt $\exists x : P(x,s)$	EI 2.2.1
2.2.3	Mit s gilt $\exists y : \exists x : P(x,y)$	EI 2.2.2
2.2	$\exists y : \exists x : P(x,y)$	EE 2.1 2.2.1 2.2.3
2	$\exists y : \exists x : P(x,y)$	EE 1 2.1 2.2

(c)

Schritt	Aussage	Begündung
1	$\exists x : \forall y : P(x,y)$	Prämisse
2.1	Sei s beliebig	Annahme für AI
3.1	Sei t so, dass $\forall y : P(t,y)$	Annahme für EE 1
3.2.1	$P(t,u)$, u beliebig	AE 3.1
3.2.2	Mit t gilt $\exists x : P(x,u)$	EI 3.2.1
3.2	$\exists x : P(x,u)$	EE 1 3.1 3.2.2
3	$\forall y : \exists x : P(x,y)$ mit $s = u$	AI 2.1 3.2

Lösung 3:



Schritt	Aussage	Begründung
1	$(\forall x: P(x)) \to \bot$	Prämisse
2	$(\exists x: (P(x) \to \bot)) \vee ((\exists x: (P(x) \to \bot)) \to \bot)$	TND
3.1	$\exists x: (P(x) \to \bot)$	Annahme für D 2
3.1.1	$\exists x: (P(x) \to \bot)$	3.1
3.2	$(\exists x: (P(x) \to \bot)) \to \bot$	Annahme für D 2
3.2.1	t beliebig, $P(t) \vee (P(t) \to \bot)$	TND
3.2.2.1	$P(t)$	Annahme für D 3.2.1
3.2.2.1.1	$P(t)$	3.2.2.1
3.2.2.2	$P(t) \to \bot$	Annahme für D 3.2.1
3.2.2.2.1	$\exists x: (P(x) \to \bot)$	EI 3.2.2.2
3.2.2.2.2	$\bot$	IE 3.2 3.2.2.1
3.2.2.2.3	$P(t)$	F 3.2.2.2.2
3.2.2	$P(t)$	D 3.2.1 ...
3.2.3	$\forall x: P(x)$	AI 3.2.1 3.2.2
3.2.4	$\bot$	IE 1 3.2.3
3.2.5	$\exists x: (P(x) \to \bot)$	F 3.2.4
3	$\exists x: (P(x) \to \bot)$	D 2 ...

Lösung 4:

(a) Widerlegung durch Gegenbeispiel: Die Aussage ist falsch, da $6 \cdot 41^2 + 36 \cdot 41 + 1 = 11\,563 = 31 \cdot 373$. $\square$

(b) Direkter Beweis von $\forall n \in \mathbb{N}: \exists k \in \mathbb{N}: n^2 - (n-1)^2 = 2k - 1$

Gegeben ist: $n \in \mathbb{N}$

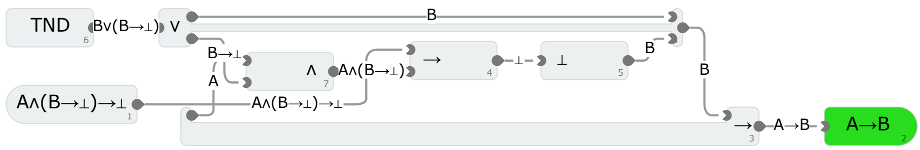
Zu zeigen ist: $\exists k \in \mathbb{N}: n^2 - (n-1)^2 = 2k - 1$.
Nach binomischen Formeln gilt: $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$.
Wähle also $k = n \in \mathbb{N}$. $\square$

(c) Direkter Beweis der Aussage $100!$ hat genau 24 Nullen am Ende:

1. Es entsteht genau dann eine Null am Ende, wenn die Primzahlen 2 und 5 multipliziert werden.
2. In der Zahl $100!$ gibt es 50 gerade Zahlen, die also den Primfaktor 2 mindestens einmal besitzen.
3. In der Zahl $100!$ gibt es 20 Zahlen, die durch 5 teilbar sind und 4 Zahlen, die durch $5^2 = 25$ teilbar sind. Es gibt keine Zahl, die durch 5^3 teilbar ist.
4. Damit haben die Faktoren in $100!$ genau $20 + 4$ Primfaktoren der Form 5 und deutlich mehr Primfaktoren der Form 2.
5. Damit können genau 24 Nullen aus den $5 \cdot 2$-Paaren erzeugt werden. $\square$

Lösung 5: Beweis der Äquivalenz $\neg(A \wedge \neg B) \;\Leftrightarrow\; A \to B$

$\Longrightarrow$ Visueller Beweis:

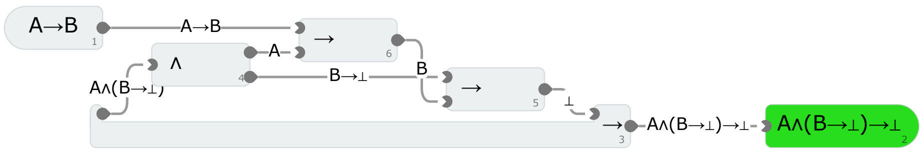


Schriftlicher Beweis von $\neg(A \wedge \neg B) \;\Rightarrow\; A \to B$

Gegeben ist: $(A \wedge (B \to \bot)) \to \bot$
Zu zeigen ist: $A \to B$

1. Angenommen A gilt, so ist zu zeigen, dass B gilt.
2. Aus TND folgt, dass entweder B gilt oder $B \to \bot$ gilt.
   (a) Gilt B, so ist die Aussage gezeigt.
   (b) Gilt $B \to \bot$,
      i. so gilt $A \wedge (B \to \bot)$.
      ii. Nach IE gilt nach Prämisse dann $\bot$.
      iii. Ex falso quodlibet gilt dann auch B.
3. Da für beide Fälle B gezeigt wurde, gilt nach II die Konklusion $A \to B$. $\square$

$\Longleftarrow$ Visueller Beweis:



Schriftlicher Beweis von $A \to B \;\Rightarrow\; \neg(A \wedge \neg B)$

Gegeben ist: $A \to B$
Zu zeigen ist: $(A \wedge (B \to \bot)) \to \bot$

1. Angenommen es gilt $A \wedge (B \to \bot)$ gilt, so ist daraus $\bot$ zu folgern.
2. Gilt $A \wedge (B \to \bot)$ so gilt nach KL und KR A und $B \to \bot$.
3. Nach Prämisse und A gilt nach IE daher B.
4. Nach $B \to \bot$ und B gilt nach IE daher $\bot$.
5. Damit wurde nach II die Konklusion $(A \wedge (B \to \bot)) \to \bot$ gezeigt. $\square$