Duale Hochschule Baden-Württemberg

Logik und Algebra

5. Übungsblatt

1. Aufgabe: Die Abbildungen $f_i : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ sind gegeben durch

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = 1 - x,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{1-x},\ f_5(x) = \frac{x}{x-1},\ f_6(x) = \frac{x-1}{x}\,.$$

   Geben Sie jeweils die Umkehrabbildung an. Stellen Sie die Verknüpfungstafel für $\circ$ für diese Funktionen auf. Bildet die Menge der Funktionen mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe?

2. Aufgabe: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit endlich vielen Elementen und neutralem Element 1. Sei $x \in G$ beliebig aber fest. Zeigen Sie:
   (a) Es gibt ein kleinstes $k \in \mathbb{N}$ mit $x^k = 1$.
   (b) Für das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $x^k = 1$ gilt: $U = \{x, x^2, \dots, x^k\}$ ist eine kommutative Untergruppe von G mit k Elementen.

3. Aufgabe: Bestimmen Sie alle Elemente von $\langle(13)(24), (123)\rangle$ in S_4. Ist die resultierende Gruppe kommutativ?

4. Aufgabe: Erstellen Sie bezüglich $6x^2 + 12x + 6$ das Hassediagramm zur Teilbarkeit in $\mathbb{Z}[x]$ durch Terme mit positivem Vorzeichen.

5. Aufgabe: Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus:
   (a) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(189, 51)$ und $\mathrm{ggT}(189, 133)$.
   (b) Berechnen Sie multiplikativ inverse Elemente zu 79 und 81 in $\mathbb{Z}_{196}$. Prüfen Sie anschließend das Ergebnis.

Lösung 4. Übungsblatt

Lösung 1: Auf $\mathbb{N}^2$ ist R definiert als $(a_1, a_2)\ R\ (b_1, b_2) \ \Leftrightarrow\ a_1b_2 - a_2b_1 \geq 0 \ \Leftrightarrow\ a_1b_2 \geq a_2b_1$.

Symmetrie: Für $a = (3, 4)$ und $b = (1, 2)$ ist $a\,R\,b$, da $3{\cdot}2{-}4{\cdot}1 = 2 \geq 0$, jedoch $b \not R\, a$, da $1{\cdot}4{-}2{\cdot}3 = -2 \ngeq 0$. Also ist R nicht symmetrisch.

Antisymmetrie: Für $a = (1, 1)$ und $b = (2, 2)$ ist $a\,R\,b$, denn $1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0 \geq 0$ und auch $b\,R\,a$, da $2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \geq 0$, jedoch $a \neq b$. Also ist R nicht antisymmetrisch.

Reflexivität: Für $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$ ist $a\,R\,a$, da $a_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot a_1 = 0 \geq 0$. Also ist R reflexiv.

Transitivität: Seien $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), c = (c_1, c_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $a\,R\,b$ und $b\,R\,c$, also $a_1b_2 \geq a_2b_1$ und $b_1c_2 \geq b_2c_1$. Für Transitivität ist $a\,R\,c$ zu zeigen, also $a_1c_2 \geq a_2c_1$: Aus den Vorbedingungen folgt $a_1 \geq \frac{a_2b_1}{b_2}$ und $b_1 \geq \frac{b_2c_1}{c_2}$, da alle Variablen positiv sind. Damit ist

$$a_1c_2 \geq \frac{a_2b_1}{b_2} \cdot c_2 \geq \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{b_2c_1}{c_2} \cdot c_2 = a_2c_1\,,$$

und damit ist R transitiv.

Linearität: Seien $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{N}^2$. Ist $a_1b_2 \geq a_2b_1$, so gilt $a\,R\,b$. Gilt dies nicht, so ist $a_1b_2 < a_2b_1$ und damit sicher $b_1a_2 \geq b_2a_1$ und damit gilt $b\,R\,a$. Damit ist R linear.

Lösung 2:

$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$: Mit $\{(a, a), (b, b), (c, c)\} \subseteq R_1$ ist sie reflexiv, und da nur Elemente der Form (x, x) auftreten auch transitiv und antisymmetrisch. Sie ist aber nicht linear, da weder (a, b) noch (b, a) in R_1 sind. Es ist eine Halbordnung. Alle Elemente der Menge $\{a, b, c\}$ sind minimal und maximal, es gibt keine kleinsten oder größte Elemente.

$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$: Mit $\{(a, a), (b, b), (c, c)\} \subseteq R_2$ ist sie reflexiv, und zu $(a, b), (b, a) \in R_2$ passenden $(a, a), (b, b) \in R_2$ auch transitiv. Sie ist aber wegen $(a, b), (b, a) \in R_2$ nicht antisymmetrisch. Sie ist also Quasiordnung. Nur das Element c ist minimal und maximal. Es gibt keine kleinsten und größten Elemente.

$R_3 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$: Mit $\{(a, a), (b, b), (c, c)\} \subseteq R_3$ ist sie reflexiv, damit zu $(b, c) \in R_3$ auch transitiv. Es gibt keine Elemente mit $(x, y), (y, x) \in R_3$ mit $x \neq y$, somit ist sie auch antisymmetrisch. Sie ist aber nicht linear, da weder (a, b) noch (b, a) in R_3 sind. Es ist eine Halbordnung. Die Elemente a, b sind minimal, die Elemente a, c sind maximal. Es gibt keine kleinsten und größten Elemente.

$R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$: Wegen $(a, b), (b, c) \in R_4$ aber $(a, c) \notin R_4$ ist sie nicht transitiv, also keine Ordnung. a ist minimales Element, c ist maximales Element. Es gibt keine kleinsten oder größte Elemente.

$R_5 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$: Wegen $\{(a, a), (b, b), (c, c)\} \subseteq R_5$ ist sie reflexiv, und wegen $(a, b), (b, c), (a, c) \in R_5$ auch transitiv. Es gibt keine Elemente mit $(x, y), (y, x) \in R_3$ mit $x \neq y$, somit ist sie auch antisymmetrisch. Und für jedes $x, y \in \{a, b, c\}$ ist entweder $(x, y) \in R_5$ oder $(y, x) \in R_5$, somit ist sie linear. Dies ist eine Vollordnung. a ist minimal und kleinstes Element, c ist maximal und größtes Element.

$R_6 = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c)\}$: Wegen $\{(a, a), (b, b), (c, c)\} \subseteq R_6$ ist sie reflexiv, und mit $(b, a), (a, c), (b, c) \in R_6$ und $(b, c), (c, a), (b, a) \in R_6$ auch transitiv. Sie ist nicht antisymmetrisch, da $(a, c), (c, a) \in R_6$. Es ist eine Quasiordnung. b ist minimal und kleinstes Element. Es gibt keine maximalen oder größten Elemente.

Lösung 3:

$f : Z_4 \to Z_5, x \mapsto x+1$: Die Funktion ist injektiv, da für alle $x \neq y$ gilt $f(x) \neq f(y)$, aber nicht surjektiv, da es kein $x \in Z_4$ gibt mit $f(x) = 0 \in Z_5$.

$g : Z_5 \to Z_4, x \mapsto \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } x = 0 \\ x-1\,, & \text{wenn } x \neq 0 \end{cases}$: Die Funktion ist nicht injektiv, da $g(1) = g(0)$. Die Funktion ist surjektiv, da für jedes $z \in Z_4$ gerade $g(z+1) = z$ ist.

$f \circ g : Z_5 \to Z_5, x \mapsto \begin{cases} 1\,, & \text{wenn } x = 0 \\ x\,, & \text{wenn } x \neq 0 \end{cases}$: Die Funktion ist nicht injektiv, da $(f \circ g)(0) = (f \circ g)(1)$. Die Funktion ist nicht surjektiv, da es kein $x \in Z_5$ gibt mit $(f \circ g)(x) = 0 \in Z_5$.

$g \circ f : Z_4 \to Z_4, x \mapsto x$: Die Funktion ist injektiv, da für $x \neq y$ gilt $(g \circ f)(x) = x \neq y = (g \circ f)(y)$. Die Funktion ist surjektiv, da für jedes $x \in Z_4$ gilt $(g \circ f)(x) = x$.

Lösung 4: Inverse Abbildungen:

$$((146)(23))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} = (164)(23)$$

$$((17)(23)(45))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (17)(23)(45)$$

$$((23456))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (26543)$$

Verkettungen:

$a \circ b$	$b = (146)(23)$	$b = (17)(23)(45)$	$b = (23456)$
$a = (146)(23)$	$(164) = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 6231547 \end{pmatrix}$	$(17456) = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7235614 \end{pmatrix}$	$(145)(36) = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 4265137 \end{pmatrix}$
$a = (17)(23)(45)$	$(15467) = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 5236471 \end{pmatrix}$	$id = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 1234567 \end{pmatrix}$	$(17)(356) = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7254631 \end{pmatrix}$
$a = (23456)$	$(156)(24) = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 5432617 \end{pmatrix}$	$(17)(246) = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7436521 \end{pmatrix}$	$(24635) = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 1456237 \end{pmatrix}$

Lösung 5: Auf $\mathbb{R}^2$ ist die Verknüpfung $*$ definiert durch:

$$(a,b) \; * \; (c,d) = (ac, ad + bc)$$

(a) Die Verknüpfung ist kommutativ

$$(a,b) \; * \; (c,d) = (ac, ad+bc) = (ca, cb+da) = (c,d) \; * \; (a,b)$$

und assoziativ, denn seien $(a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2) \in \mathbb{R}^2$, dann gilt

$$\begin{aligned} (a_1,a_2) * ((b_1,b_2) * (c_1,c_2)) &= (a_1,a_2) * (b_1c_1, b_1c_2 + b_2c_1) = (a_1b_1c_1, a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1) \\ ((a_1,a_2) * (b_1,b_2)) * (c_1,c_2) &= (a_1b_1, a_1b_2 + a_2b_1) * (c_1,c_2) = (a_1b_1c_1, a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1)\,. \end{aligned}$$

(b) Ja, denn mit $e = (1,0)$ gilt für $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$e * a = (1,0) * (a_1,a_2) = (a_1, 1 \cdot a_2) = (a_1,a_2) = a$$