Duale Hochschule Baden-Württemberg

Analysis und Lineare Algebra

5. Übungsblatt

1. Aufgabe: Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \left(\frac{1}{4+2x} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{x^2-2x+10} \right) dx \, .$$

2. Aufgabe: Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sqrt{3 \sin x + 1} \, dx$$

3. Aufgabe: Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_e^{e^e} \frac{2 \, dx}{x \ln x} \, .$$

4. Aufgabe: Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^e x^{-2} \ln x \, dx \, .$$

5. Aufgabe: Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \frac{3x^2-1}{x^3-x^2+x-1} \, dx \, .$$

Hinweis: Der Nenner hat eine Nullstelle bei $x = 1$.

Lösung 4. Übungsblatt

Lösung 1: Mit dem Hinweis ist $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(-1) = \frac{(\ln 3)^n}{3}$. Damit ist die gesuchte Taylorreihe:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n}{3 \cdot n!}(x+1)^n$$

Lösung 2: Die Ableitungen lauten $g'(x) = -\frac{2}{(2x-1)^2}$, $g''(x) = \frac{8}{(2x-1)^3}$ und $g'''(x) = -\frac{48}{(2x-1)^4}$. Am Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ ist $g(-1) = -\frac{1}{3}$, $g'(-1) = -\frac{2}{9}$, $g''(-1) = -\frac{8}{27}$, $g'''(-1) = -\frac{16}{27}$. Die Taylorpolynome lauten damit:

$$p_0(x) = -\frac{1}{3}\,,\ p_1(x) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}(x+1)\,,\ p_2(x) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}(x+1) - \frac{4}{27}(x+1)^2\,,$$
$$p_3(x) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}(x+1) - \frac{4}{27}(x+1)^2 - \frac{8}{81}(x+1)^3\,.$$

Lösung 3: Die erforderlichen Ableitungen lauten: $h'(x) = (x+1)\exp(x)$, $h''(x) = (x+2)\exp(x)$, $h'''(x) = (x+3)\exp(x)$. Am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, $h''(0) = 2$. Das Taylorpolynom samt Restglied lautet damit für ein $\hat{x} \in \mathbb{R}$:

$$f(x, \hat{x}) = p_2(x) + R_2(x, \hat{x}) = x + x^2 \quad + \frac{x^3}{3!} \cdot (\hat{x} + 3)\exp(\hat{x})$$

Lösung 4: Nach Kettenregel ist $f'(x) = 2x^{-3}\exp(-x^{-2})$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \exp(\underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{\to -\infty}) = 0\,, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \exp(\underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{\to -\infty}) = 0\,.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2x^{-3}}{\exp(x^{-2})} &\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-6x^{-4}}{\exp(x^{-2})\cdot(-2)x^{-3}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3x^{-1}}{\exp(x^{-2})} \\
&\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-3x^{-2}}{\exp(x^{-2})\cdot(-2)x^{-3}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{3x}{\exp(x^{-2})\cdot 2} = 0
\end{aligned}$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2x^{-3}}{\exp(x^{-2})} = \ldots \text{ wie oben } \ldots = 0$$

Damit ist sowohl die Funktion als auch ihre Ableitung stetig an $x = 0$ jeweils durch den Wert 0 ergänzbar.

Lösung 5: Wenn $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}'(0) = 0$ und auch alle anderen $\tilde{f}^{(n)}(0) = 0$ sind, so ist die Taylorreihe zu $\tilde{f}(x)$ an $x_0 = 0$ gegeben durch:

$$p(x) = 0$$

Die unendlich oft stetig differenzierbar ergänzbare Funktion $\tilde{f}(x)$ zu $f(x) = \exp(-x^{-2})$ ist nicht als Potenzreihe darstellbar und damit nicht „analytisch“. Die zugehörige Taylorreihe hat zwar unendlichen Konvergenzradius, stimmt aber nur am Entwicklungspunkt mit der Funktion überein. Funktionen dieser Art sind sehr hilfreich, um unendlich oft differenzierbare Funktionen zu konstruieren, die nur auf einem Intervall überhaupt einen Wert ungleich 0 haben.