LÖSUNG 41. Die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ soll mit der Operation $*$ eine Gruppe bilden. Ergänzen Sie die Verknüpfungstafel und bestimmen Sie, ob die resultierende Gruppe kommutativ ist:

$x * y$	$y = a$	$y = b$	$y = c$	$y = d$
$x = a$				c
$x = b$		b		
$x = c$	b			
$x = d$			a	

- Da $b * b = b$ ist, muss b das neutrale Element sein.

$x * y$	$y = a$	$y = b$	$y = c$	$y = d$
$x = a$		a		c
$x = b$	a	b	c	d
$x = c$	b	c		
$x = d$		d	a	

- Angenommen $d * d = d$, das wäre ein Widerspruch zu b neutrales Element.
- Angenommen $d * d = a$, das wäre ein Widerspruch zu $d * c = a$, da es dann kein d^{-1} geben könnte, mit $d = d^{-1} * a = c$.
- Angenommen $d * d = c$, das wäre entsprechend ein Widerspruch zu $a * d = c$.
- Damit ist $d * d = b$ und $d * a = c$.

$x * y$	$y = a$	$y = b$	$y = c$	$y = d$
$x = a$		a		c
$x = b$	a	b	c	d
$x = c$	b	c		
$x = d$	c	d	a	b

- Analog füllen sich die restlichen Felder im Ausschlussverfahren:

$x * y$	$y = a$	$y = b$	$y = c$	$y = d$
$x = a$	d	a	b	c
$x = b$	a	b	c	d
$x = c$	b	c	d	a
$x = d$	c	d	a	b

- Die Verknüpfungstafel ist symmetrisch, also ist die Gruppe kommutativ.

LÖSUNG 42. Die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ soll mit der Operation $*$ eine Gruppe bilden. Ergänzen Sie die Verknüpfungstafel und bestimmen Sie, ob die resultierende Gruppe kommutativ ist:

$x * y$	$y = a$	$y = b$	$y = c$	$y = d$
$x = a$				a
$x = b$		d		
$x = c$	b			
$x = d$				

- Wegen $a * d = a$ ist d das neutrale Element.

$x * y$	$y = a$	$y = b$	$y = c$	$y = d$
$x = a$				a
$x = b$		d		b
$x = c$	b			c
$x = d$	a	b	c	d

- Für $b * a$ kommt als Ergebnis nur c in Frage, da $b * b = d$, $b * d = b$, $d * a = a$.

$x * y$	$y = a$	$y = b$	$y = c$	$y = d$
$x = a$				a
$x = b$	c	d		b
$x = c$	b			c
$x = d$	a	b	c	d

- Im Auschlussprinzip ergibt sich:

$x * y$	$y = a$	$y = b$	$y = c$	$y = d$
$x = a$	d	c	b	a
$x = b$	c	d	a	b
$x = c$	b	a	d	c
$x = d$	a	b	c	d

- Damit ist die Gruppe kommutativ, da die Verknüpfungstafel symmetrisch ist.

LÖSUNG 43. Bestimmen Sie alle Elemente von $\langle(12)(34), (13)(24)\rangle$. Ist die resultierende Gruppe kommutativ?

- Sei $\sigma = (12)(34)$ und $\tau = (13)(24)$. Da $\sigma^2 = \tau^2 = id$, ist das ein Element der Gruppe.
- Es ist $\sigma \circ \tau = (14)(23) = \tau \circ \sigma$.
- Es ist $\sigma \circ \tau \circ \sigma = (13)(24) = \tau$ und $\tau \circ \sigma \circ \tau = (12)(34) = \sigma$. Es gibt keine weiteren Elemente.
- Damit lautet die Gruppe $\langle(12)(34), (13)(24)\rangle = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
- Da $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$, $\tau \circ (\sigma \circ \tau) = \sigma = (\sigma \circ \tau) \circ \tau$ und $(\sigma \circ \tau) \circ \sigma = \tau = \sigma \circ (\sigma \circ \tau)$ ist die Gruppe kommutativ.

LÖSUNG 44. Bestimmen Sie alle Elemente von $\langle(13),(1234)\rangle$. Ist die resultierende Gruppe kommutativ?

- Sei $\sigma = (13)$ und $\tau = (1234)$. Da $\sigma^2 = id$, ist das ein Element der Gruppe.
- Es ist $\tau^2 = (13)(24)$ und $\tau^3 = (1432) = \tau^{-1}$, $\tau^4 = id$.
- Weiterhin ist $\tau \circ \sigma = (14)(23)$, $\tau^2 \circ \sigma = (24)$, $\tau^3 \circ \sigma = (12)(34)$.
- Umgekehrt liefert $\sigma \circ \tau = (12)(34)$, $\sigma \circ \tau^2 = (24)$, $\sigma \circ \tau^3 = (14)(23)$ nichts Neues.
- Dann ist $\tau \circ \sigma \circ \tau = (13)$ mit $\sigma \circ \tau \circ \sigma = (1432)$ auch nichts weiteres zu erreichen.
- Damit lautet die Gruppe $\langle(13),(1234)\rangle = \{id,(13),(24),(1234),(1432),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$.
- Da $\tau \circ \sigma = (14)(23)$ aber $\sigma \circ \tau = (12)(34)$ ist die Gruppe nicht kommutativ.

LÖSUNG 45. Bestimmen Sie in $(\mathbb{Z}_8,+)$ die Ordnung aller Elemente.

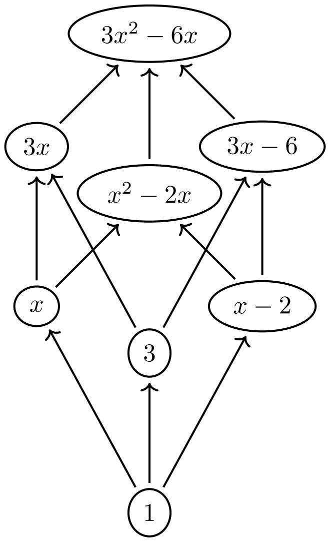
- $\langle 0\rangle = \{0\}$, $|\langle 0\rangle| = 1$
- $\langle 1\rangle = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $|\langle 1\rangle| = 8$
- $\langle 2\rangle = \{0,2,4,6\}$, $|\langle 2\rangle| = 4$
- $\langle 3\rangle = \{0,3,6,1,4,7,2,5\}$, $|\langle 3\rangle| = 8$
- $\langle 4\rangle = \{0,4\}$, $|\langle 4\rangle| = 2$
- $\langle 5\rangle = \{0,5,2,7,4,1,6,3\}$, $|\langle 5\rangle| = 8$
- $\langle 6\rangle = \{0,6,4,2\}$, $|\langle 6\rangle| = 4$
- $\langle 7\rangle = \{0,7,6,5,4,3,2,1\}$, $|\langle 7\rangle| = 8$

LÖSUNG 46. Bestimmen Sie in $(\mathbb{Z}_{12},+)$ die Ordnung aller Elemente.

- $\langle 0\rangle = \{0\}$, $|\langle 0\rangle| = 1$
- $\langle 1\rangle = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, $|\langle 1\rangle| = 12$
- $\langle 2\rangle = \{0,2,4,6,8,10\}$, $|\langle 2\rangle| = 6$
- $\langle 3\rangle = \{0,3,6,9\}$, $|\langle 3\rangle| = 4$
- $\langle 4\rangle = \{0,4,8\}$, $|\langle 4\rangle| = 3$
- $\langle 5\rangle = \{0,5,10,3,8,1,6,11,4,9,2,7\}$, $|\langle 5\rangle| = 12$
- $\langle 6\rangle = \{0,6\}$, $|\langle 6\rangle| = 2$
- $\langle 7\rangle = \{0,7,2,9,4,11,6,1,8,3,10,5\}$, $|\langle 7\rangle| = 12$
- $\langle 8\rangle = \{0,8,4\}$, $|\langle 8\rangle| = 3$
- $\langle 9\rangle = \{0,9,6,3\}$, $|\langle 9\rangle| = 4$
- $\langle 10\rangle = \{0,10,8,6,4,2\}$, $|\langle 10\rangle| = 6$
- $\langle 11\rangle = \{0,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1\}$, $|\langle 11\rangle| = 12$

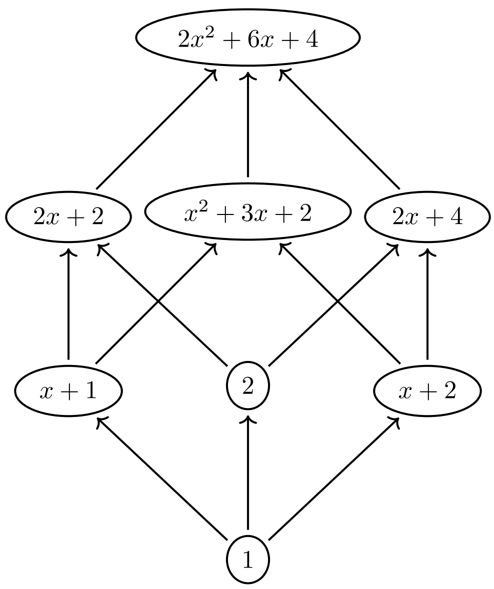
LÖSUNG 47. Erstellen Sie bezüglich $3x^2 - 6x$ das Hassediagramm zur Teilbarkeit in $\mathbb{Z}[x]$ durch Terme mit positivem Vorzeichen.

Zunächst ist $3x^2 - 6x = 3 \cdot (x^2 - 2x) = 3 \cdot x \cdot (x-2)$. Daraus ergibt sich folgendes Diagramm:



LÖSUNG 48. Erstellen Sie bezüglich $2x^2 + 6x + 4$ das Hassediagramm zur Teilbarkeit in $\mathbb{Z}[x]$ durch Terme mit positivem Vorzeichen.

Zunächst ist $2x^2 + 6x + 4 = 2 \cdot (x^2 + 3x + 2) = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$. Daraus ergibt sich folgendes Diagramm:



LÖSUNG 49. Bestimmen Sie durch den euklidischen Algorithmus den $x = \mathrm{ggT}(81, 57)$ und zwei ganze Zahlen u, v mit $x = 81u + 57v$.

k	a_k	r_k	u_k	v_k
0	81		1	0
1	57	$\lfloor\frac{81}{57}\rfloor = 1$	0	1
2	$81 - 1 \cdot 57 = 24$	$\lfloor\frac{57}{24}\rfloor = 2$	$1 - 1 \cdot 0 = 1$	$0 - 1 \cdot 1 = -1$
3	$57 - 2 \cdot 24 = 9$	$\lfloor\frac{24}{9}\rfloor = 2$	$0 - 2 \cdot 1 = -2$	$1 - 2 \cdot (-1) = 3$
4	$24 - 2 \cdot 9 = 6$	$\lfloor\frac{9}{6}\rfloor = 1$	$1 - 2 \cdot (-2) = 5$	$-1 - 2 \cdot 3 = -7$
5	$9 - 1 \cdot 6 = 3$	$\lfloor\frac{6}{3}\rfloor = 2$	$-2 - 1 \cdot 5 = -7$	$3 - 1 \cdot (-7) = 10$

Damit ist $\mathrm{ggT}(81, 57) = 3 = -7 \cdot 81 + 10 \cdot 57$.

Lösung 50. Bestimmen Sie durch den euklidischen Algorithmus den $x = \mathrm{ggT}(98, 77)$ und zwei ganze Zahlen u, v mit $x = 98u + 77v$.

k	a_k	r_k	u_k	v_k
0	98		1	0
1	77	$\lfloor\frac{98}{77}\rfloor = 1$	0	1
2	$98 - 1 \cdot 77 = 21$	$\lfloor\frac{77}{21}\rfloor = 3$	$1 - 1 \cdot 0 = 1$	$0 - 1 \cdot 1 = -1$
3	$77 - 3 \cdot 21 = 14$	$\lfloor\frac{21}{14}\rfloor = 1$	$0 - 3 \cdot 1 = -3$	$1 - 3 \cdot (-1) = 4$
4	$21 - 1 \cdot 14 = 7$	$\lfloor\frac{14}{7}\rfloor = 2$	$1 - 1 \cdot (-3) = 4$	$-1 - 1 \cdot 4 = -5$

Damit ist $\mathrm{ggT}(98, 77) = 7 = 4 \cdot 98 - 5 \cdot 77$.

Lösung 51. Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_{94}$ eine positive multiplikative Inverse zu 41.

k	a_k	r_k	u_k	v_k
0	94		1	0
1	41	$\lfloor\frac{94}{41}\rfloor = 2$	0	1
2	$94 - 2 \cdot 41 = 12$	$\lfloor\frac{41}{12}\rfloor = 3$	$1 - 2 \cdot 0 = 1$	$0 - 2 \cdot 1 = -2$
3	$41 - 3 \cdot 12 = 5$	$\lfloor\frac{12}{5}\rfloor = 2$	$0 - 3 \cdot 1 = -3$	$1 - 3 \cdot (-2) = 7$
4	$12 - 2 \cdot 5 = 2$	$\lfloor\frac{5}{2}\rfloor = 2$	$1 - 2 \cdot (-3) = 7$	$-2 - 2 \cdot 7 = -16$
5	$5 - 2 \cdot 2 = 1$	$\lfloor\frac{2}{1}\rfloor = 2$	$-3 - 2 \cdot 7 = -17$	$7 - 2 \cdot (-16) = 39$

Damit ist $\mathrm{ggT}(94, 41) = 1 = -17 \cdot 94 + 39 \cdot 41$ und $41 \cdot 39 \equiv 1 \mod 94$.

Lösung 52. Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_{99}$ eine positive multiplikative Inverse zu 70.

k	a_k	r_k	u_k	v_k
0	99		1	0
1	70	$\lfloor \frac{99}{70} \rfloor = 1$	0	1
2	$99 - 1 \cdot 70 = 29$	$\lfloor \frac{70}{29} \rfloor = 2$	$1 - 1 \cdot 0 = 1$	$0 - 1 \cdot 1 = -1$
3	$70 - 2 \cdot 29 = 12$	$\lfloor \frac{29}{12} \rfloor = 2$	$0 - 2 \cdot 1 = -2$	$1 - 2 \cdot (-1) = 3$
4	$29 - 2 \cdot 12 = 5$	$\lfloor \frac{12}{5} \rfloor = 2$	$1 - 2 \cdot (-2) = 5$	$-1 - 2 \cdot 3 = -7$
5	$12 - 2 \cdot 5 = 2$	$\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$	$-2 - 2 \cdot 5 = -12$	$3 - 2 \cdot (-7) = 17$
6	$5 - 2 \cdot 2 = 1$	$\lfloor \frac{2}{1} \rfloor = 2$	$5 - 2 \cdot (-12) = 29$	$-7 - 2 \cdot 17 = -41$

Damit ist $\mathrm{ggT}(99, 70) = 1 = 29 \cdot 99 - 41 \cdot 70 = 29 \cdot 99 - 70 \cdot 99 + 99 \cdot 70 - 41 \cdot 70 = -41 \cdot 99 + 58 \cdot 70$ und $58 \cdot 70 \equiv 1 \mod 99$.