# Duale Hochschule Baden-Württemberg

## Logik und Algebra

## 4. Übungsblatt

1. Aufgabe: Auf $\mathbb{N}^2$ sei die folgende Relation $R$ gegeben:

$$(a_1, a_2)\ R\ (b_1, b_2) \ \Leftrightarrow\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \geq 0$$

Untersuchen Sie die Relation auf ihre Eigenschaften.

2. Aufgabe: Gegeben sind die folgenden Relationen auf der Menge $\{a, b, c\}$ mit drei Elementen:

$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$

$R_3 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$

$R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$

$R_5 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$

$R_6 = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c)\}$

(a) Sind die Relationen Ordnungen, und wenn ja, was für welche?

(b) Gibt es minimale, maximale, kleinste oder größte Elemente?

3. Aufgabe: Die Menge $Z_n = \{0, \ldots, n-1\}$ bezeichnet die Menge der Zahlen von $0$ bis $n-1$. Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$:

$$f: Z_4 \to Z_5, \qquad x \mapsto x + 1$$

$$g: Z_5 \to Z_4, \qquad x \mapsto \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } x = 0 \\ x - 1\,, & \text{wenn } x \neq 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie $f$, $g$, $f \circ g$ und $g \circ f$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

4. Aufgabe: Gegeben seien die folgenden Permutationen in $S_7$ in Zyklusschreibweise: $(146)(23)$, $(17)(23)(45)$ und $(23456)$. Bestimmen Sie die drei Umkehrpermutationen und alle neun Verkettungen dieser Permutationen in einer Verknüpfungstabelle.

5. Aufgabe: Auf $\mathbb{R}^2$ sei die folgende Verknüpfung definiert:

$$(a, b)\ *\ (c, d) = (ac, ad + bc)$$

(a) Ist $*$ kommutativ und/oder assoziativ?

(b) Gibt es ein Tupel $(e, f)$, so dass für alle $(u, v)$ gilt, dass $(e, f) * (u, v) = (u, v)$?

# Lösung 3. Übungsblatt

**Lösung 1:**

**(a)** $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$:

**Gegeben ist:** $x \in (A \times C) \cup (B \times D)$

**Zu zeigen ist:** $x \in (A \cup B) \times (C \cup D)$

**1. Fall:** Ist $x \in A \times C$, so gibt es ein $a \in A$ und ein $c \in C$, so dass $x = (a, c)$. Da $a \in A \subseteq A \cup B$ und $c \in C \subseteq C \cup D$ ist, ist $x = (a, c) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$.

**2. Fall:** Ist $x \in B \times D$, so gibt es ein $b \in B$ und ein $d \in D$, so dass $x = (b, d)$. Da $b \in B \subseteq A \cup B$ und $d \in D \subseteq C \cup D$ ist, ist $x = (b, d) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$.

Da dies für alle $x \in (A \times C) \cup (B \times D)$ gilt, folgt $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$.

**(b)** Da wie gerade bewiesen $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$, kann es nur ein $x \in (A \cup B) \times (C \cup D)$ geben, für das $x \notin (A \times C) \cup (B \times D)$ ist. Seien nun $A$ und $B$, sowie $C$ und $D$ paarweise disjunkt, und alle nichtleer. Dann wähle $a \in A$ und $d \in D$, für die nach Annahme $a \notin B$ und $d \notin C$ gelten. Dann ist $a \in A \cup B$ und $d \in C \cup D$ und damit $x = (a, d) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$. Nach Konstruktion ist $(a, d) \notin A \times C$, da $d \notin C$ und auch $(a, d) \notin B \times D$, da $a \notin B$. Damit ist $x = (a, d) \notin (A \times C) \cup (B \times D)$ und damit kann die Gleichheit nicht gelten.
Oder ein ganz explizites Gegenbeispiel: $A = C = \{1\}$, $B = D = \{2\}$. Dann ist

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\},$$

aber

$$(A \times C) \cup (B \times D) = (\{1\} \times \{1\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) = \{(1, 1)\} \cup \{(2, 2)\} = \{(1, 1), (2, 2)\}.$$

Also sind die Mengen nicht gleich, denn beispielsweise $x = (1, 2)$ oder $x = (2, 1)$ finden sich in der ersten aber nicht in der zweiten Menge.

**Lösung 2:** Beweis der Aussage $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (|M| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^n)$ durch vollständige Induktion:

**Induktionsstart $n = 0$:** Ist $|M| = 0$, so ist $M = \emptyset$ und $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$, also $|\mathcal{P}(M)| = 1 = 2^0$.

**Induktionsschritt $n \to n + 1$:**

**Gegeben ist:** Für eine Menge $K$ mit $|K| = n$ gilt $|\mathcal{P}(K)| = 2^n$.

**Zu zeigen ist:** Für eine Menge $M$ mit $|M| = n + 1$ gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{n+1}$.

Sei $a \in M$ beliebig, und sei $K = M \backslash \{a\}$. Dann ist $|K| = n$ und $|\mathcal{P}(K)| = 2^n$. Sei nun $\mathcal{K}_1 = \mathcal{P}(K)$ und

$$\mathcal{K}_2 = \{A \cup \{a\} \ : \ A \in \mathcal{K}_1\}$$

und $\mathcal{M} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$. Nach Prämisse ist $|\mathcal{K}_1| = 2^n$ und nach Konstruktion $|\mathcal{K}_2| = 2^n$. Außerdem ist $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$, da $a$ nach Konstruktion in keiner Menge von $\mathcal{K}_1$ vorkommt, hingegen in jeder Menge von $\mathcal{K}_2$. Damit ist

$$|\mathcal{M}| = |\mathcal{K}_1| + |\mathcal{K}_2| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathcal{P}(M) = \mathcal{M}$:

$\mathcal{P}(M) \subseteq \mathcal{M}$ : Sei $B \in \mathcal{P}(M)$.

**1. Fall:** Ist $a \notin B$, so ist $B \subseteq K$ und damit $B \in \mathcal{P}(K) = \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{M}$.

**2. Fall:** Ist $a \in B$, so ist $B \backslash \{a\} \subseteq K$ und damit $B \backslash \{a\} \in \mathcal{P}(K) = \mathcal{K}_1$. Damit ist nach Konstruktion $B \in \mathcal{K}_2 \subset \mathcal{M}$.

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$ : Sei $B \in \mathcal{M}$.

**1. Fall:** Ist $B \in \mathcal{K}_1$, so ist $B \subseteq K \subset M$, also ist $B \in \mathcal{P}(M)$.

**2. Fall:** Ist $B \in \mathcal{K}_2$, so ist $B \backslash \{a\} \subseteq K$ und $B \subseteq M$, also ist $B \in \mathcal{P}(M)$.

Damit ist $\mathcal{P}(M) = \mathcal{M}$ und damit $|\mathcal{P}(M)| = 2^{n+1}$.

Damit gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

**Lösung 3:** Eigenschaften der Relation $R$ über der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$R = \{\ (1, 3), (2, 4), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (2, 5), (4, 5)\ \}$$

**Symmetrie:** Die Relation $R$ ist nicht symmetrisch, da $(2, 5) \in R$, aber $(5, 2) \notin R$.

**Antisymmetrie:** Die Relation $R$ ist nicht antisymmetrisch, da $(1, 3) \in R$ und $(3, 1) \in R$ mit $1 \neq 3$.

**Reflexivität:** Die Relation $R$ ist nicht reflexiv, da $(1, 1) \notin R$.

**Transitivität:** Die Relation $R$ ist nicht transitiv, da $(1, 3) \in R$ und $(3, 1) \in R$, aber nicht $(1, 1) \in R$.

**Linearität:** Die Relation $R$ ist nicht linear, denn es ist $(1, 2) \notin R$ und $(2, 1) \notin R$.

**Lösung 4:** Gegeben sei die Relation $R$ über der Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$:

$$R = \{\ (a, a), (a, d), (b, b), (b, e), (c, c), (d, a), (d, d), (e, b), (e, e)\ \}$$

**(a)** $R$ ist Äquivalenzrelation, denn

**Reflexivität:** Es ist $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\} \subseteq R$.

**Symmetrie:** Folgende Tupel sind $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$:

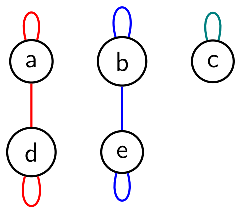
$(a, d) \in R$ und $(d, a) \in R$. $\surd$

$(b, e) \in R$ und $(e, b) \in R$. $\surd$

**Transitivität:** Seien $x \neq y$, $y \neq z$ und $z \neq x$.

So einen Fall gibt es nicht, die sonstigen sind oben schon aufgeführt.

**(b)** Ungerichteter Graph der Relation $R$:




**(c)** Die Quotientenmenge $M/R$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von $R$:

$$M/R = \{\, [a]_R, [b]_R, [c]_R \,\} = \{\, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c\} \,\}\,.$$

**Lösung 5:** Auf $M = [-2\pi, 2\pi]$ ist die Relation $\sim$ definiert durch:

$$x \sim y \ \Leftrightarrow\ \sin(x) = \sin(y)\,.$$

**(a)** Es ist eine Äquivalenzrelation, da:

**Reflexivität:** Sei $x \in [-2\pi, 2\pi]$, dann ist $\sin(x) = \sin(x)$, also gilt $x \sim x$.

**Symmetrie:** Seien $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$ mit $x \sim y$, also $\sin(x) = \sin(y)$. Dann ist auch $\sin(y) = \sin(x)$ und damit $y \sim x$.

**Transitivität:** Seien $x, y, z \in [-2\pi, 2\pi]$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann ist $\sin(x) = \sin(y)$ und $\sin(y) = \sin(z)$, also auch $\sin(x) = \sin(z)$, also gilt $x \sim z$.

**(b)** Für alle Elemente $x \in [0]_\sim$ gilt: $\sin(x) = \sin(0) = 0$. Allgemein gilt dies in den reellen Zahlen für alle $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In $M$ verbleiben $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, also ist

$$[0]_\sim = \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}\,.$$

**(c)** Die Sinusfunktion durchläuft in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alle möglichen Werte in $[-1, 1]$, damit kann die Quotientenmenge so geschrieben werden:

$$M/_\sim = \{\, [x]_\sim \,|\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \,\}$$