Lösung 31. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) = (x^2 + e^x)\sin(7x+3)\,.$$

Die Funktion $f(x)$ kann als Produkt von zwei Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ geschrieben werden: $f(x) = a(x)\cdot b(x)$ mit $a(x) = x^2 + e^x$ und $b(x) = \sin(7x+3)$. Die Anwendung der Produktregel liefert dann $f'(x) = a'(x)b(x) + a(x)b'(x)$. Die Ableitung von $a(x)$ kann wegen Linearität einzeln bestimmt werden: $a'(x) = 2x + e^x$. Die Ableitung von $b(x)$ wird mit der Kettenregel bestimmt: $b'(x) = \cos(7x+3)\cdot(7+0)$. Insgesamt ist damit:

$$f'(x) = (2x+e^x)\sin(7x+3) + (x^2+e^x)\cos(7x+3)\cdot 7$$

Lösung 32. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \big(x^3 + \sin(x)\big)\cdot e^{3x+2}\,.$$

Die Funktion $f(x)$ kann als Produkt von zwei Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ geschrieben werden: $f(x) = a(x)\cdot b(x)$ mit $a(x) = x^3 + \sin(x)$ und $b(x) = \exp(3x+2)$. Die Anwendung der Produktregel liefert dann $f'(x) = a'(x)b(x) + a(x)b'(x)$. Die Ableitung von $a(x)$ kann wegen Linearität einzeln bestimmt werden: $a'(x) = 3x^2 + \cos(x)$. Die Ableitung von $b(x)$ wird mit der Kettenregel bestimmt: $b'(x) = \exp(3x+2)\cdot(3+0)$. Insgesamt ist damit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \big(3x^2 + \cos(x)\big)\cdot e^{3x+2} + \big(x^3 + \sin(x)\big)\cdot e^{3x+2}\cdot 3 \\ &= \big(3x^3 + 3x^2 + 3\sin(x) + \cos(x)\big)\cdot e^{3x+2} \end{aligned}$$

Lösung 33. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$g(x) = \frac{\ln(x) + 2^x}{\cos^2(x)}\,.$$

Die Funktion $g(x)$ ist ein Quotient $g(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ mit $a(x) = \ln(x) + 2^x$ und $b(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$. Zunächst die Vorüberlegung: $2^x = e^{x\cdot\ln 2}$ mit Ableitung $e^{x\cdot\ln 2}\cdot\ln 2 = 2^x\cdot\ln 2$. Damit ist $a'(x) = \frac{1}{x} + 2^x\cdot\ln 2$. Die Ableitung von $\cos^2(x)$ ist nach Kettenregel $b'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$. Insgesamt erhalten wir nach der Quotientenregel:

$$g'(x) = \frac{\big(\frac{1}{x} + 2^x\cdot\ln 2\big)\cdot\big(\cos^2(x)\big) - (\ln x + 2^x)\cdot(-2\sin x\cos x)}{\cos^4(x)}$$

Lösung 34. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$g(x) = \frac{x^2 + 4x}{\ln(x)}\,.$$

Die Funktion $g(x)$ ist ein Quotient $g(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ mit $a(x) = x^2 + 4x$ und $b(x) = \ln(x)$. Wegen Linearität ist $a'(x) = 2x + 4$. Die Ableitung von $b(x)$ ist $b'(x) = \frac{1}{x}$. Insgesamt erhalten wir nach der Quotientenregel:

$$g'(x) = \frac{(2x+4)\cdot(\ln x) - \big(x^2 + 4x\big)\cdot\big(\frac{1}{x}\big)}{(\ln x)^2}\,.$$

Lösung 35. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$h(x) = x^x\cdot\sqrt{\ln x}\,.$$

Zunächst die Vorüberlegung $x^x = e^{x \cdot \ln x}$ mit Ableitung $e^{x \cdot \ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + \frac{x}{x})$ wegen der Kettenregel, und $\sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}$ mit Ableitung $\frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \cdot \frac{1}{x}$ ebenfalls wegen der Kettenregel. Damit gilt nach Produktregel

$$h'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot \sqrt{\ln x} + \frac{1}{2} \frac{x^x}{x\sqrt{\ln x}}$$

LÖSUNG 36. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$h(x) = (\ln(x))^{\sqrt{x}}\,.$$

Zunächst ist $(\ln(x))^{\sqrt{x}} = \exp\left((\sqrt{x}) \cdot \ln(\ln x)\right)$ und damit ist nach Kettenregel und Produktregel:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \exp\left((\sqrt{x}) \cdot \ln(\ln x)\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \ln(\ln x) + (\sqrt{x}) \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right) \\ &= (\ln(x))^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln(\ln x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x \ln x}\right) \end{aligned}$$

LÖSUNG 37. Bestimmen Sie die Extremwerte und deren Art von

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 - 4\,.$$

Die Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 + 3x^2 - 4x \\ f''(x) &= 3x^2 + 6x - 4 \end{aligned}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung lauten $x_1 = 0$ (ablesbar), $x_2 = 1$, $x_3 = -4$ (z.B. mit p, q-Formel) und damit haben wir drei Kandidaten für Extremstellen mit $f(x_1) = -4$, $f(x_2) = -\frac{19}{4}$, $f(x_3) = -36$. Mit der Untersuchung der Krümmung ist ersichtlich:

$$\begin{aligned} f''(0) = -4 < 0 &: \qquad E_1(0|-4) \text{ ist ein relatives Maximum} \\ f''(1) = 5 > 0 &: \qquad E_2(1|-\frac{19}{4}) \text{ ist ein relatives Minimum} \\ f''(-4) = 20 > 0 &: \qquad E_3(-4|-36) \text{ ist ein relatives Minimum} \end{aligned}$$

LÖSUNG 38. Bestimmen Sie die Extremwerte und deren Art von

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 1\,.$$

Die Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 3x - 18 \\ f''(x) &= 6x + 3 \end{aligned}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitungen sind nach beispielsweise p, q-Formel $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, mit $f(x_1) = -\frac{83}{2}$ und $f(x_2) = -21$. Aus der Analyse der Krümmung ist ersichtlich:

$$\begin{aligned} f''(-3) = -15 < 0 &: \qquad E_1(-3|-\frac{83}{2}) \text{ ist ein relatives Maximum} \\ f''(2) = 15 > 0 &: \qquad E_2(2|-21) \text{ ist ein relatives Minimum} \end{aligned}$$

LÖSUNG 39. Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens zu $g(x)$ ab $x_0 = 1$ durch:

$$g(x) = x^3 - 2\,.$$

Das Newtonverfahren lautet hier

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \frac{2}{3}(x_n + \frac{1}{x_n^2})$$

und damit ist:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= \frac{4}{3} \approx 1.333 \\ x_2 &= \frac{91}{72} \approx 1.264 \end{aligned}$$

Die tatsächliche Nullstelle liegt bei $\sqrt[3]{2} \approx 1.260$.

LÖSUNG 40. Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens zu $g(x)$ ab $x_0 = 2$ durch:

$$g(x) = 5 - x^2 \,.$$

Das Newtonverfahren lautet hier

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x)}{g'(x)} = x_n + \frac{5 - x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{5}{2x_n}$$

und damit ist:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= \frac{9}{4} = 2.25 \\ x_2 &= \frac{161}{72} \approx 2.236 \end{aligned}$$

Die tatsächliche Nullstelle ist $\sqrt{5} \approx 2.236$.

LÖSUNG 41. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \,.$$

Hier liegt der Fall „$\frac{\infty}{\infty}$" vor, damit ist nach l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \ln x} = 0$$

LÖSUNG 42. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \,.$$

Auf einem gemeinsamen Nenner ist:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{e^x + xe^x - 1} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2e^x + xe^x} = -\frac{1}{2} \,.$$