Duale Hochschule Baden-Württemberg

Analysis und Lineare Algebra

6. Übungsblatt

1. Aufgabe: Für welche $t \in \mathbb{R}$ bilden $x^{(1)} = (1,0,2)^\top$, $x^{(2)} = (1,1,t)^\top$, $x^{(3)} = (1,-t,2)^\top$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

2. Aufgabe: Stellen Sie $y = (2,1,5)^\top$ als Linearkombination von $(1,0,2)^\top$,$(2,2,3)^\top$,$(1,1,1)^\top$ dar.

3. Aufgabe: Gegeben seien die Punkte $P(1|2|0)$, $Q(1|-1|2)$ und $R(2|2|1)$. Geben Sie die Gerade durch P und Q in Parameterform und die Ebene durch P, Q und R in Normalenform an.

4. Aufgabe: Unter welchem Winkel schneidet die Gerade

$$G = \{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

die x_1, x_2-Ebene?

5. Aufgabe: Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & +4x_2 & & +2x_4 & = & 1 \end{array}$$

Lösung 5. Übungsblatt

Lösung 1: Die Summe wird elementeweise integriert. Das erste Integral ist logarithmisch, also $\int \frac{dx}{4+2x} = \frac{1}{2}\ln|4+2x|+C$. Der zweite Integrand lässt sich auf $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(x/2)^2}$ umformen, und nach Substitution $z = x/2$, $dz/dx = 1/2$ ist $\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{2\,dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\arctan(x/2)+C$. Der Nenner des dritten Integrands hat keine Nullstelle, also quadratische Ergänzung $x^2-2x+10 = (x^2-2x+1)+9 = (x-1)^2+9$ und mit der Umformung $\frac{1}{9+(x-1)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}$ ist nach Substitution $z = \frac{x-1}{3}$, $dz/dx = 1/3$ dann $\int \frac{dx}{x^2-2x+10} = \frac{1}{9}\int \frac{3\,dz}{1+z^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x-1}{3}+C$. Insgesamt ist das Ergebnis

$$\int\left(\frac{1}{4+2x}+\frac{1}{4+x^2}+\frac{1}{x^2-2x+10}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|4+2x|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\arctan\frac{x-1}{3}+C\,.$$

Lösung 2: Mit $\cos x\cdot\sqrt{3\sin x+1} = \frac{1}{3}\cdot 3\cos x\cdot\sqrt{3\sin(x)+1}$ ist die Ableitung von $z = 3\sin(x)+1$ gerade $dz/dx = 3\cos(x)$, also $dz = 3\cos(x)\,dx$, also ist $\int\cos x\cdot\sqrt{3\sin x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int z^{1/2}\,dz = \frac{2}{9}z^{3/2}+C = \frac{2}{9}(3\sin(x)+1)^{3/2}+C'$. Das bestimmte Integral ist dann

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\sqrt{3\sin x+1}\,dx = \left[\frac{2}{9}(3\sin(x)+1)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{9}(3+1)^{3/2}-\frac{2}{9}(0+1)^{3/2} = \frac{16}{9}-\frac{2}{9} = \frac{14}{9}\,.$$

Lösung 3: Da die Ableitung von $\ln x$ gerade $\frac{1}{x}$ ist, liegt hier ein logarithmisches Integral vor: $2\int\frac{dx}{x\ln x} = 2\ln(\ln x)+C$. Damit ist

$$\int_e^{e^e}\frac{2\,dx}{x\ln x} = [2\ln(\ln x)]_e^{e^e} = 2\cdot 1-2\cdot 0 = 2\,.$$

Lösung 4: Mit partieller Integration kann der Logarithmus abgeleitet werden:

$$\int x^{-2}\ln x\,dx \overset{\substack{u=\ln x\,,\quad u'=x^{-1}\\ v'=x^{-2}\,,\quad v=-x^{-1}}}{=} -\frac{\ln x}{x}+\int x^{-2}\,dx = -\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C = -\frac{1+\ln x}{x}+C$$

Das bestimmte Integral berechnet sich dann zu $\int\limits_1^e x^{-2}\ln x\,dx = \left[-\frac{1+\ln x}{x}\right]_1^e = -\frac{2}{e}+1$.

Lösung 5: Mit dem Hinweis ergibt sich aus der Polynomdivison $x^3-x^2+x-1 = (x-1)(x^2+1)$. Damit ist der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{x-1} = \frac{(A+C)x^2+(B-A)x+(C-B)}{(1+x^2)(x-1)} \overset{!}{=} \frac{3x^2-1}{(1+x^2)(x-1)}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $A+C=3$, $B-A=0$ und $C-B=-1$. Aus der zweiten Gleichung folgt $A=B$ und mit der ersten Gleichung dann $C=3-A$. Damit ist in der dritten Gleichung $3-A-A=3-2A=-1$ also ist $A=B=2$ und $C=1$. Damit ist

$$\int\frac{3x^2-1}{x^3-x^2+x-1}\,dx = \int\frac{2x\,dx}{1+x^2}+2\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{dx}{x-1} = \ln(1+x^2)+2\arctan x+\ln|x-1|+C\,.$$