LÖSUNG 43. Stellen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 2$ auf zu

$$f(x) = \exp(x/2)\,.$$

Die ersten Ableitungen lauten $f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$ und $f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2}$. Bei jeder Ableitung kommt ein weiterer Faktor $\frac{1}{2}$ dazu. Deshalb lautet die allgemeine Ableitung $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n}e^{x/2}$, und am Entwicklungspunkt lautet sie $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(2) = \frac{e}{2^n}$. Damit lautet die gesuchte Taylorreihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{2^n \cdot n!}(x-2)^n\right)\,.$$

LÖSUNG 44. Stellen Sie die Taylorreihe um $x_0 = -1$ auf zu

$$f(x) = \exp(2-x)\,.$$

Die ersten Ableitungen lauten $f'(x) = -\exp(2-x)$ und $f''(x) = \exp(2-x)$. Bei jeder Ableitung wechselt das Vorzeichen. Die allgemeine Ableitung lautet daher $f^{(n)}(x) = (-1)^n \exp(2-x)$. Am Entwicklungspunkt lauten daher die Funktions- und Ableitungswerte $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(-1) = (-1)^n e^3$. Die gesuchte Taylorreihe ist damit

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^3}{n!}(x+1)^n\right)\,.$$

LÖSUNG 45. Bestimmen Sie die Taylorpolynome bis 2. Ordnung um $x_0 = 1$ zu

$$g(x) = \frac{1}{x+1}\,.$$

Die Ableitungen lauten: $g'(x) = -(x+1)^{-2}$ und $g''(x) = 2\cdot(x+1)^{-3}$. Die Funktions- und Ableitungswerte an $x_0 = 1$ sind damit $g(1) = \frac{1}{2}$, $g'(1) = -\frac{1}{4}$, $g''(1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Somit sind die Taylorpolynome $p_0(x) = \frac{1}{2}$, $p_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1)$, $p_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2$.

LÖSUNG 46. Bestimmen Sie die Taylorpolynome bis 2. Ordnung um $x_0 = 2$ zu

$$g(x) = x^3 - 2x\,.$$

Die Ableitungen lauten $g'(x) = 3x^2 - 2$, $g''(x) = 6x$ und die Auswertung von g und den Ableitungen am Entwicklungspunkt x_0 ergibt: $g(2) = 4$, $g'(2) = 10$, $g''(2) = 12$. Damit sind die Taylorpolynome $p_0(x) = 4$, $p_1(x) = 4 + 10(x-2)$, $p_2(x) = 4 + 10(x-2) + 6(x-2)^2$.

LÖSUNG 47. Stellen Sie das Taylorpolynom 1. Ordnung an $x_0 = \frac{1}{4}$ samt Restglied auf $\mathbb{R}$ auf zu

$$h(x) = \sin(\pi x)\,.$$

Die Ableitungen lauten $h'(x) = \pi\cos(\pi x)$, $h''(x) = -\pi^2\sin(\pi x)$. Am Entwicklungspunkt ergibt sich $h(\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. Damit ist für ein $\hat{x} \in \mathbb{R}$

$$h(x) = p_1(x) + R_1(x, x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi(x - \frac{1}{4}) \quad - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{4})^2 \cdot \pi^2 \sin(\pi\hat{x})\,.$$

LÖSUNG 48. Stellen Sie das Taylorpolynom 1. Ordnung an $x_0 = 1$ samt Restglied auf $\mathbb{R}$ auf zu

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Die Ableitungen lauten $h'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $h''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2-8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$. Am Entwicklungspunkt ergibt sich $h(1) = \frac{1}{2}$, $h'(1) = -\frac{1}{2}$. Das Taylorpolynom erster Ordnung samt Restglied nach Lagrange ist dann für ein $\hat{x} \in \mathbb{R}$

$$h(x) = p_1(x) + R_1(x, x_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) \quad + \frac{1}{2}(x-1)^2 \cdot \frac{6\hat{x}^2 - 2}{(1+\hat{x}^2)^3}.$$

LÖSUNG 49. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = (x+y)^3 - x^2 y.$$

Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =& 3 \cdot (x+y)^2 - 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =& 3 \cdot (x+y)^2 - x^2\end{aligned}$$

LÖSUNG 50. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = x^3 - x \cdot \sin(x \cdot y^2).$$

Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =& 3x^2 - \sin(xy^2) - x \cdot \cos(x \cdot y^2) \cdot y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =& - x \cdot \cos(x \cdot y^2) \cdot x \cdot 2y\end{aligned}$$

LÖSUNG 51. Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

Der Gradient lautet:

$$\operatorname{grad} g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{(x_1^2+x_2^2+1) - x_1 \cdot 2x_1}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \\ \\ \frac{-x_1 \cdot 2x_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x_1^2+x_2^2+1}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \\ \\ \frac{-x_1 \cdot 2x_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

LÖSUNG 52. Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion

$$g(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_2) \cdot x_1}{1 + x_1^4}.$$

Der Gradient lautet:

$$\operatorname{grad} g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(x_2) \cdot (1+x_1^4) - \sin(x_2) \cdot x_1 \cdot 4x_1^3}{(1+x_1^4)^2} \\ \\ \frac{x_1 \cdot \cos(x_2)}{1+x_1^4} \end{pmatrix}$$

LÖSUNG 53. Bestimmen Sie Nullstellen des Gradienten von

$$h(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + 4x_1^2.$$

Der Gradient lautet:

$$\operatorname{grad} h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 + 8x_1 \\ \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Damit muss $x_2^2 = -8x_1$ und $x_1 x_2 = 0$ sein. Aus der zweiten Gleichung folgt, dass x_1 oder x_2 0 sein müssen, und aus der ersten folgt, dass dann auch die andere Variable 0 ist. Also ist $x_1 = x_2 = 0$.

LÖSUNG 54. Bestimmen Sie Nullstellen des Gradienten von

$$h(x_1, x_2) = x_2^2 + x_1^2 - 2x_2 + 1\,.$$

Der Gradient lautet:

$$\operatorname{grad} h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

Damit muss $x_1 = 0$ und $2x_2 = 2$ also $x_2 = 1$ sein. Das ist genau für $(x_1, x_2) = (0, 1)$ erfüllt.