Duale Hochschule Baden-Württemberg

Analysis und Lineare Algebra

3. Übungsblatt

1. Aufgabe: Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von

$$f(x) = \frac{x + e^x}{xe^{-x} + 1} \, .$$

2. Aufgabe: Bestimmen Sie die Ableitung von

$$g(x) = \sqrt[x]{\cos(x)} \, .$$

3. Aufgabe: Bestimmen Sie den Gradienten von

$$p(x, y) = x^2 + 4\cos(x)e^y + xy^3 \, .$$

4. Aufgabe: Bestimmen Sie die Extrema und deren Art von der Funktion

$$h(x) = \frac{1 - x}{3 + x^2} \, .$$

5. Aufgabe: Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens zu $u(x)$ ab $x_0 = 1$ durch:

$$u(x) = 2x^2 - 3$$

6. Aufgabe: Berechnen Sie den Grenzwert für $1 \neq a > 0$:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$$

Lösung 2. Übungsblatt

Lösung 1: Mit der 3. binomischen Formel ist $k^2 - \sqrt{k^4+1} = \frac{k^4-k^4-1}{k^2+\sqrt{k^4+1}} = -\frac{1}{k^2+\sqrt{k^4+1}}$, mit Verhalten ähnlich der konvergenten Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$. Es geht also um eine konvergente Majorante:

$$|-\frac{1}{k^2+\sqrt{k^4+1}}| = \frac{1}{k^2+\sqrt{k^4+1}} < \frac{1}{k^2}\,,$$

da $\sqrt{k^4+1} > 0$. Damit ist die konvergente Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante und damit konvergiert die betrachtete Reihe.

Lösung 2: Mit dem Wurzelkriterium ist $\varrho = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{(3-\frac{1}{k})^k}{2^{2k}}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{3-1/k}{4} = \frac{3}{4} < 1$, und daher konvergiert die Reihe.

Lösung 3: Umformung zu einer geometrischen Reihe in $x-2$:

$$\begin{aligned}\frac{(x-2)^2}{3+2x} &= \frac{(x-2)^2}{3-(-2)\cdot(x-2)+4} = \frac{(x-2)^2}{7-(-2)\cdot(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{7-(-2)\cdot(x-2)}\\ &= \frac{(x-2)^2}{7}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{2}{7})\cdot(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{7}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{2}{7})^k(x-2)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^k}{7^{k+1}}(x-2)^{k+2}\end{aligned}$$

Lösung 4: Mit Quotientenkriterium ist

$$\varrho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{8^{k+1}(k+1)!}{(2k+3)!}(x+1)^{2k+2}}{\frac{8^k k!}{(2k+1)!}(x+1)^{2k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{8(k+1)}{(2k+2)(2k+3)}|x+1|^2 = 0 \overset{!}{<} 1\,.$$

Das ist erfüllt für alle $x \in \mathbb{C}$. Der Konvergenzkreis der Potenzreihe um $x_0 = -1$ hat Radius $r = \infty$.

Lösung 5: Mit Quotientenkriterium ist

$$\varrho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{((k+1)!)^3 3^{k+1}}{(3k+4)!}z^{2k+3}}{\frac{(k!)^3 3^k}{(3k+1)!}z^{2k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^3\cdot 3}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}|z|^2 = \frac{1}{9}|z|^2 \overset{!}{<} 1\,.$$

Das ist erfüllt für $|z|^2 < 9$ und damit $|z| < 3$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe um $z_0 = 0$ beträgt $r = 3$.