Analysis und Lineare Algebra

Prof. Dr. Sebastian Ritterbusch

Studiengang
Wirtschaftsinformatik

Studienakademie
Mannheim

7. Mai 2022

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Grundlagen 5
- 1.1. Mengen und Zahlen 5
- 1.2. Abbildungen und Funktionen 7
- 1.3. Polynome und Standardfunktionen 9
- 1.4. Aufgaben 19

Kapitel 2. Elementare Analysis 21
- 2.1. Folgen und Konvergenz 21
- 2.2. Stetige Funktionen 23
- 2.3. Reihen 24
- 2.4. Potenzreihen 29
- 2.5. Aufgaben 33

Kapitel 3. Differenzialrechnung 37
- 3.1. Differenzialquotient 37
- 3.2. Ableitungen und Ableitungsregeln 38
- 3.3. Taylorreihe 41
- 3.4. Funktionen in mehreren Variablen 43
- 3.5. Aufgaben 45

Kapitel 4. Integralrechnung 47
- 4.1. Integration 47
- 4.2. Stammfunktionen 49
- 4.3. Integrationsregeln 50
- 4.4. Integraltransformationen 53
- 4.5. Aufgaben 55

Kapitel 5. Vektoren und lineare Gleichungssysteme 57
- 5.1. Vektoren und Vektorräume 57
- 5.2. Lineare Gleichungssysteme 61
- 5.3. Geraden und Ebenen 64
- 5.4. Aufgaben 70

Kapitel 6. Matrizen und Determinanten 73
- 6.1. Lineare Abbildungen 73
- 6.2. Kern und Bild 74
- 6.3. Determinanten 76
- 6.4. Eigenwerte und Eigenvektoren 77
- 6.5. Aufgaben 80

Literaturverzeichnis 83

Index 85

KAPITEL 1

Grundlagen

1.1. Mengen und Zahlen

Die Beschreibung von Mengen ist ein elementares Werkzeug der Mathematik. Sie ermöglicht es, Objekte zu gruppieren und Aussagen auf in Mengen beschriebenen Klassen zu beschreiben. Eine Möglichkeit Mengen zu beschreiben, ist die einfache Aufzählung der Elemente:

$$A = \{1, 9, 4, 12\}$$

Die Elemente haben in einer Menge keine Reihenfolge, daher spielt diese bei der Beschreibung der Menge keine Rolle. Mit dieser Beschreibung kann nun auch feststellen, dass die Zahl 9 ein Element der Menge A ist, und die Zahl 7 kein Element der Menge A ist. In mathematischer Notation beschreibt man das so: $9 \in A$, $7 \notin A$.

Mengen können auch unendlich viele Elemente beinhalten. Bei einfachen Bildungsgesetzen, kann man die Menge mit Punkten illustrieren:

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

Die Menge B scheint die Menge aller positiven ungeraden Zahlen zu beschreiben, ganz sicher ist man sich aber nur, wenn man die Bildungsregel tatsächlich aufschreibt:

$$B = \{\ x \mid x \text{ ist eine positive ungerade Zahl }\}$$

In dieser Notation gehören alle x zur Menge, die die darauf folgende Aussage erfüllen. Möchte man eine Menge aus allen Quadratzahlen positiver ungerader Zahlen beschreiben, so könnte man dies so tun:

$$C = \{\ x^2 \mid x \text{ ist eine positive ungerade Zahl }\} = \{1, 9, 25, 49, \ldots\}$$

Hier wurde jetzt naiv von Zahlen gesprochen, gemeint sind dabei **natürliche Zahlen**, die mit der 1 beginnen und alle Nachfolger beinhalten, die bei einer Erhöhung um 1 entstehen können:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Für die Vereinigung zweier Mengen wird der Operator $\cup$ und für deren Schnitt der Operator $\cap$ verwendet:

$$A \cup B = \{\ x \mid x \text{ ist Element von } A \text{ oder Element von } B\ \} = \{\ x \mid x \in A\ \vee\ x \in B\ \}$$
$$A \cap B = \{\ x \mid x \text{ ist Element von } A \text{ und Element von } B\ \} = \{\ x \mid x \in A\ \wedge\ x \in B\ \}$$

In der Kurzschreibweise wurden die logischen Operatoren für **Oder** „$\vee$“ und für **Und** „$\wedge$“ eingeführt. Hier gilt es aufzupassen, dass im Gegensatz zum umgangssprachlichen „oder“ das logische **Oder** korrekt bleibt, wenn beide Seiten erfüllt sind. Das umgangssprachliche **Oder** wird in der logischen Beschreibung eher **Entweder-Oder** oder **Exklusiv-Oder** genannt.

Damit werden auch **natürliche Zahlen mit Null** oder **natürliche Zahlen nach DIN** $\mathbb{N}_0$ und **ganze Zahlen** $\mathbb{Z}$ definiert:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\ x, -x \mid x \in \mathbb{N}_0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Es kann aber auch passieren, dass bei einem Schnitt zweier Mengen kein Ergebnis übrig bleibt. Das Ergebnis ist dann die **leere Menge** $\emptyset$. Die Menge aller ganzer oder Bruchzahlen nennen wir **rationale Zahlen** $\mathbb{Q}$ mit ganzen **Zählern** z und natürlichen **Nennern** n:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N} \ \right\}$$

Hier werden natürlich alle Zahlen mit Nenner 1 mit den entsprechenden ganzen Zahlen identifiziert, beispielsweise $\frac{5}{1} = 5$, und Brüche ebenso mit ihren gekürzten oder erweiterten Versionen, wie zum Beispiel $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{4000}{6000}$. Das Komma in der Beschreibung hat die gleiche Bedeutung wie das Symbol $\wedge$.

Da die rationalen Zahlen aber sehr spannende Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder die Kreiszahl π auslassen, gibt es die reellen Zahlen. Diese kann man gut als die Menge aller Grenzwerte konvergenter rationaler Folgen definieren, aber diese Begriffe werden erst im Verlauf der Vorlesung einführt. Daher hier eine anschauliche, jedoch äquivalente Definition für eine **reelle Zahl** mit Hilfe von Dezimalzahlen wie 12.34521:

$$\mathbb{R} = \{ \ x \mid x \text{ ist als, eventuell unendliche, Dezimalzahl darstellbar } \}$$

Besonders interessant sind hier die Zahlen in $\mathbb{R}$, die nicht rational sind. Diese können wir mit der Mengenoperation **Ohne** bzw. „\“ beschreiben:

$$A \backslash B = \{ \ x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B \ \}$$

Damit sind $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ alle **irrationale Zahlen**, also alle reelle Zahlen, die nicht gleichzeitig rational sind. Beispiele sind dafür $\sqrt{2}$ oder π.

Eine besonders praktische Schreibweise gibt es für Intervalle auf den reellen Zahlen, wo man durch die Art der Klammern beschreibt, ob die Ränder dazu gehören oder nicht:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{ \ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \ \} \\
(a, b] &= \{ \ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \ \} \\
[a, b) &= \{ \ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \ \} \\
(a, b) &= \{ \ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \ \}
\end{aligned}$$

Speziell wird $[a, b]$ **abgeschlossenes Intervall** von a nach b genannt und (a, b) wird als **offenes Intervall** zwischen a und b bezeichnet. Mit Hilfe des Symbols ∞ für **unendlich** werden auch unbeschränkte Intervalle beschrieben:

$$\begin{aligned}
(-\infty, a) &= \{ \ x \in \mathbb{R} \mid x < a \ \} \\
(-\infty, a] &= \{ \ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \ \} \\
[a, \infty) &= \{ \ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \ \} \\
(a, \infty) &= \{ \ x \in \mathbb{R} \mid x > a \ \}
\end{aligned}$$

Da es in den reellen Zahlen nicht möglich ist, Wurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen, hat man auch die reellen Zahlen erweitert. Dazu führt man eine Konstante i mit der Eigenschaft ein, dass $i^2 = -1$ gilt. Damit kann man Wurzeln aus negativen Zahlen als **komplexe Zahl** unter anderem erklären als $\sqrt{-n} = i \cdot \sqrt{n}$ (oder auch $-i\sqrt{n}$, je nach Kontext) und erhält die Menge der **komplexen Zahlen**:

$$\mathbb{C} = \{ \ x + iy \mid x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R} \ \}$$

Von einer komplexen Zahl $z = x + iy$ wird $x = \operatorname{Re} z$ als **Realteil** von z und $y = \operatorname{Im} z$ als **Imaginärteil** von z bezeichnet. Abbildung 1.1.1 zeigt die Darstellung einer komplexen Zahl in der komplexen Zahlenebene, auch **Gaußsche Zahlenebene** genannt. Der **Betrag einer komplexen Zahl** ist $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Beim Rechnen mit komplexen Zahlen ist die **komplexe Konjugation** $\bar{z} = x - iy$ zu einer komplexen

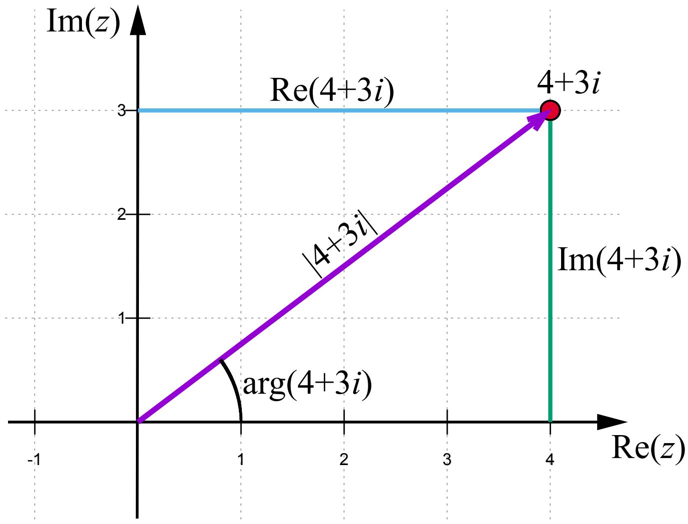


ABBILDUNG 1.1.1. Die komplexe Zahl $z = 4 + 3i$ in der Gaußschen Zahlenebene

Zahl $z = x + iy$ sehr wichtig, wo bei einer komplexen Zahl der Wert vor der Konstante i, genannt imaginärer Teil, negiert wird. Bei der Division durch eine komplexe Zahl kann man das Ergebnis schnell bestimmen, wenn man den Bruch durch die komplexe Konjugierte des Nenners erweitert:

$$\frac{2+3i}{1+4i} = \frac{(2+3i)\cdot(1-4i)}{(1+4i)\cdot(1-4i)} = \frac{2+3i-8i-12i^2}{1-16i^2} = \frac{14-5i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i$$

Komplexe Zahlen können auch in **Polarkoordinaten** dargestellt werden $z = x+iy = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit dem Betrag $r = |z|$ und dem Argument $\varphi = \arg z$, dem Winkel zwischen dem Vektor von Ursprung zum Wert in der komplexen Ebene zur positiven reellen Achse.

Die bisher eingeführten speziellen Zahlenmengen wurden immer erweitert: Die natürlichen Zahlen sind beispielsweise komplett in den rationalen Zahlen enthalten. Damit sind die natürlichen Zahlen eine **Teilmenge** der rationalen Zahlen, geschrieben $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Da die rationalen Zahlen auch Teilmenge der reellen Zahlen sind $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, gilt auch $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Ein „$\times$" zwischen zwei Mengen, genannt **kartesisches Produkt**, ist ein weiterer wichtiger Operator. Damit werden Tupel aus zwei oder mehr Mengen definiert:

$$A \times B = \{\ (a,b) \mid a \in A\ ,\ b \in B\ \}$$

Bei Zweier-Tupeln besteht eine Verwechslungsgefahr mit Intervallen, es muss also immer genau klar sein, was eine Notation bedeutet. Mit der Kurzschreibweise $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird beispielsweise der Raum der drei-dimensionalen reellen Vektoren $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ definiert.

1.2. Abbildungen und Funktionen

Mit Relationen und Abbildungen werden Beziehungen zwischen zwei Mengen beschrieben. Während Relationen von einem Element in der ersten Menge auch zu mehreren Elementen der zweiten Menge in Beziehung stehen können, so darf es bei Abbildungen und Funktionen nur genau ein Abbild für jedes Element aus der Ursprungsmenge geben.

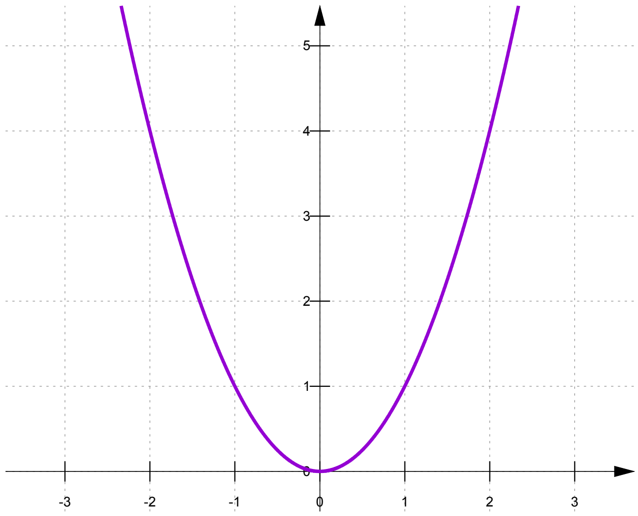


ABBILDUNG 1.2.1. Graph der Quadratfunktion

DEFINITION 1.1. Eine **Abbildung** $f : A \to B$ beschreibt die eindeutige Zuweisung von Elementen aus der **Definitionsmenge** A auf Elemente aus der **Wertemenge** B. Das **Bild** $f(A)$ beschreibt alle Elemente aus Wertemenge B, die durch die Abbildung erreicht werden.

Die Wertemenge und Definitionsmenge sind oft identisch. Sehr oft muss man die eigentliche Abbildungsvorschrift genau analysieren, um den korrekten Definitionsbereich zu bestimmen. Der Begriff Abbildung wird oft etwas allgemeiner verwendet als der Begriff der Funktion: So beschreibt man Operationen wie die Addition auf reellen Zahlen oft eher als Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, während reelle Funktionen eher Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnen.

Hat man zwei Funktionen, $f : A \to B$ und $g : B \to C$, wo die Definitionsmenge der einen Funktion die Wertemenge der anderen Funktion umfasst, so können diese Funktionen verkettet werden, also hintereinander ausgeführt werden. Diese **Verkettung von Funktionen** f und g ergibt eine neue Funktion $g \circ f$ mit der Abbildung $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Abbildungen können auf verschiedene Arten beschrieben werden. Die ausführlichste Darstellung beschreibt den Funktionsnamen, die Definitions- und Wertemenge und die eigentliche Abbildungsvorschrift, wie hier eine Funktion f, die reelle Zahlen quadriert:

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

Tatsächlich ist das Quadrieren für alle reellen Zahlen durchführbar, so ist der Definitionsbereich korrekt, und die Ergebnisse sind auch in den reellen Zahlen, also stimmt auch der Wertebereich. Natürlich sind alle Quadratzahlen positiv, deshalb ist das Bild $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ die Menge der positiven reellen Zahlen und 0.

Der **Graph einer Funktion** hilft wichtige Eigenschaften der Funktion auf einen Blick zu erfassen. Abbildung 1.2.1 zeigt den Graphen der Quadratfunktion f in einem Achsenkreuz.

Eine kürzere Schreibweise für Funktionen ist $g(x) = \frac{1}{x}$, bei der aus dem Kontext klar sein muss, auf welcher Zahlenmenge sie operiert. Sie könnte eine Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sein, aber auch eine Abbildung $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, wo die 0 aus dem Definitionsbereich ausgenommen werden muss, da man nicht durch 0 teilen kann.

Entsprechend ist die Funktion

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

für $x = 1$ nicht definiert, mit dieser Vorschrift könnte sie also eine Abbildung $h : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ sein, doch kann man die Funktion in diesem Punkt sinnvoll fortsetzen, gemeint ist **stetig fortsetzen** doch dieser Begriff wird erst später eingeführt. Für Werte nahe $x = 1$, wie etwa $h(0.99) = -1.99$, nähert sich h dem Wert -2 an, also kann man die Vorschrift entsprechend ergänzen:

$$\begin{aligned} h: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-1}{1-x} & , \quad x \neq 1 \\ -2 & , \quad x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Oder man stellt fest, dass man die Funktion auf noch einfachere Weise beschreiben kann, und schreibt $h(x) = -1 - x$ auf $x \in \mathbb{R}$.

Definition 1.2. Eine Funktion f ist **injektiv**, wenn unterschiedliche Elemente aus der Definitionsmenge immer unterschiedliche Bilder in der Wertemenge haben, also aus $a \neq b$ immer auch $f(a) \neq f(b)$ folgt. Eine Funktion f ist **surjektiv**, wenn die Wertemenge der Bildmenge entspricht, also es für jedes Element aus der Wertemenge ein Element aus der Definitionsmenge gibt, das auf das betreffende Element abgebildet wird. Ist eine Funktion sowohl injektiv als auch surjektiv, so ist die Funktion **bijektiv**.

Mit anderen Worten ist eine injektive Funktion auch in ihren Bildern eindeutig, und eine surjektive Funktion kann den vollen Wertebereich ausschöpfen. Eine bijektive Funktion kann man umkehren:

Satz 1.3. *Eine bijektive Funktion $f : A \to B$ besitzt eine* ***Umkehrfunktion*** *$f^{-1} : B \to A$, so dass für alle $x \in A$ gilt, dass $f^{-1}(f(x)) = x$ ist. Und besitzt eine Funktion eine Umkehrfunktion, so ist sie bijektiv.*

Die Schreibweise f^{-1} darf man nicht mit der Potenz von -1 verwechseln: So ist $x = f^{-1}(5)$ das Urbild von 5, es gilt dann also $f(x) = 5$. Hingegen ist $z = (f(5))^{-1}$ der Kehrwert vom Funktionswert von 5, also $z = \frac{1}{f(5)}$.

Beispiel 1.4. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, da $f(-2) = 4 = f(2)$. Sie ist nicht surjektiv, da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $f(x) \geq 0$, somit sind die negativen Zahlen aus dem Wertebereich nicht im Bild von f. Schränkt man aber die Definitions- und Wertebereiche von f geeignet ein: $\tilde{f} : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto x^2$, so ist $\tilde{f}$ sowohl injektiv als auch surjektiv und besitzt die Umkehrfunktion $\tilde{f}^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto \sqrt{x}$. Dieses Vorgehen nennt man die Auswahl eines Funktionsasts. Abbildung 1.2.2 zeigt den gewählten Ast der Quadratfunktion und deren Umkehrfunktion, die Wurzelfunktion. Funktion und Umkehrfunktion sind zueinander immer an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt, die ebenfalls in der Abbildung eingezeichnet ist.

1.3. Polynome und Standardfunktionen

1.3.1. Polynome.

Definition 1.5. Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit Koeffizienten $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ bzw. $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ ist ein **Polynom n-ten Grades**.

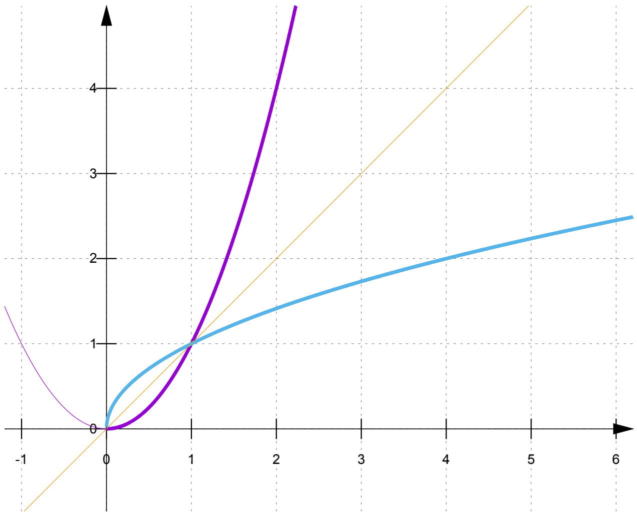


ABBILDUNG 1.2.2. Umkehrung der Quadratfunktion

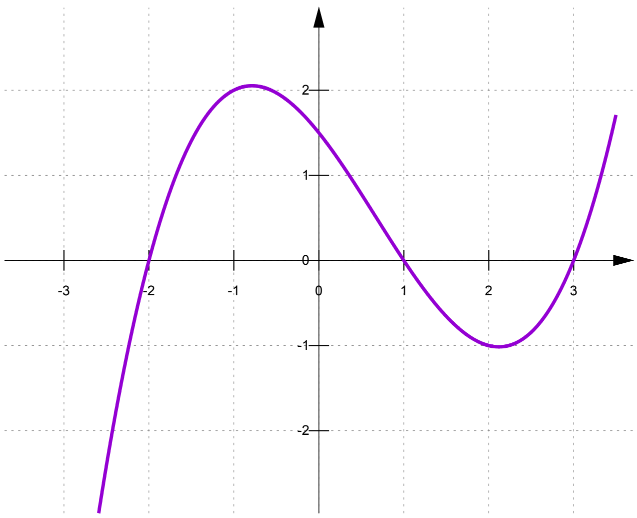


ABBILDUNG 1.3.1. Das Polynom $p(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$

Die Abbildung 1.3.1 zeigt ein Polynom dritten Grades mit **Nullstellen** -2, 1 und 3, wo die Funktion die x-Achse schneidet. Der Grad eines Polynoms bezeichnet sowohl das Verhalten für große Zahlen, als auch die mögliche Anzahl von Nullstellen. Die Abbildung 1.3.2 stellt die ersten vier **Monome** 1, x, x^2 und x^3 dar, aus denen Polynome zusammengesetzt sind.

Ein Polynom nullten oder ersten Grades bezeichnet man normalerweise als **Konstante** oder **Gerade**. In der Form

$$g(x) = a_1 x + a_0$$

bezeichnet a_0 den **Achsenabschnitt** für $x = 0$ und a_1 die **Steigung**. In Abbildung 1.3.2 sehen wir unter anderem die Konstante $y_0(x) = 1$ und die Gerade $y_1(x) = x$ mit Steigung 1 und Achsenabschnitt $y_1(0) = 0$.

Ein Polynom zweiter Ordnung wird **Parabel** genannt und kann bis zu zwei reelle Nullstellen besitzen: Die Parabel $p_1(x) = x^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle, die Parabel $p_2(x) = x^2 - 4x + 4$ hat eine so genannte **doppelte Nullstelle** an $x = 2$. Die Bezeichnung kommt daher, dass man $p_2(x) = (x - 2)^2$

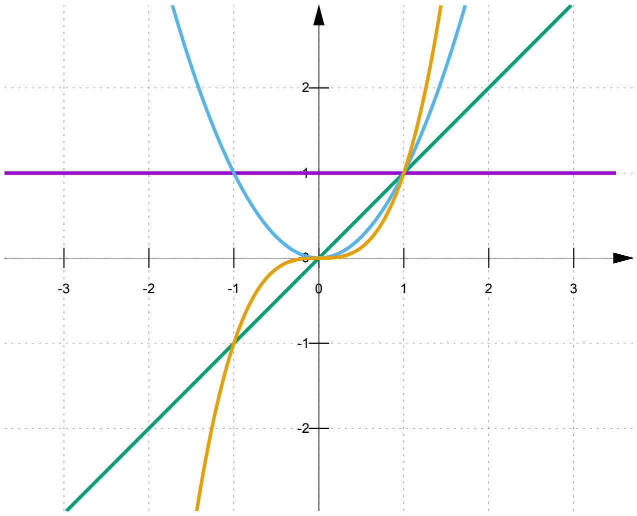


ABBILDUNG 1.3.2. Die Monome $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ und $y_3(x) = x^3$

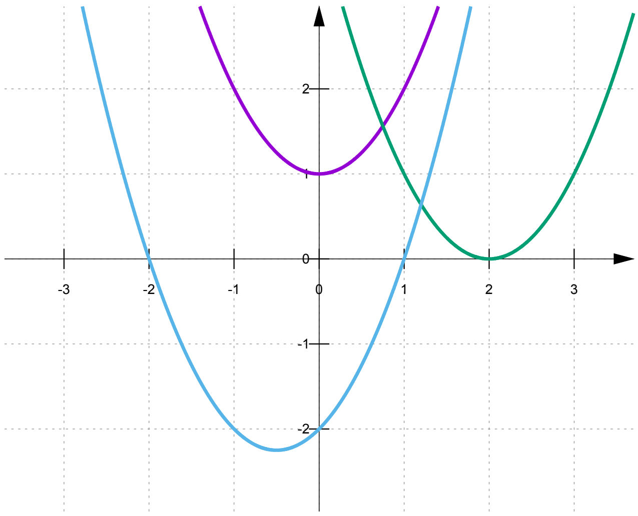


ABBILDUNG 1.3.3. Parabeln $p_1(x) = x^2 + 1$, $p_2(x) = x^2 - 4x + 4$, $p_3(x) = x^2 + x - 2$

schreiben kann, und damit die Parabel das Produkt zweier **Linearfaktoren** mit eben dieser Nullstelle ist. Die Parabel $p_3(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ hat zwei Nullstellen an $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$, wie man in Abbildung 1.3.3 erkennen kann. Mit Hilfe der binomischen Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

ist es möglich, Parabeln in die **Scheitelpunktsform** zu bringen, in der der Scheitelpunkt direkt ablesbar ist:

$$p_3(x) = x^2 + x - 2 = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Für das Ablesen wird geprüft, wann der quadratische Term verschwindet, hier bei $x = -\frac{1}{2}$ und welchen y-Wert das Polynom dann annimmt, hier $y = -\frac{9}{4}$: Der Scheitelpunkt von $p_3(x)$ liegt auf $S_3(-\frac{1}{2}| - \frac{9}{4})$. Diese **Punktschreibweise** beschreibt einen Punkt mit Bezeichnung S_3 mit einem Wert von $-\frac{1}{2}$ auf der waagerechten Koordinatenrichtung und $-\frac{9}{4}$ auf der senkrechten Koordinatenrichtung.

Die Bestimmung von Nullstellen von Parabeln und generell das Lösen von quadratischen Gleichungen kann man auf viele unterschiedliche Methoden durchführen, beispielsweise mit quadratischer Ergänzung, dem Satz von Vieta, der abc und der pq-Formel.

SATZ 1.6. *pq-Formel. Die* ***quadratische Gleichung***

$$x^2 + px + q = 0$$

hat die ***Diskriminante***

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Ist $D > 0$ so hat die quadratische Gleichung zwei Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,,$$

ist D=0 so gibt es nur eine Lösung $x = -\frac{p}{2}$ und bei $D < 0$ gibt es keine reelle Lösung.

Bei Polynomen höherer Ordnung ist es eine sinnvolle Strategie zu versuchen eine Nullstelle zu erraten, und dann den Grad des Polynoms durch eine **Polynomdivision** um eine Ordnung zu reduzieren, bis nur noch quadratische Terme vorliegen. Beispielsweise hat das Polynom

$$f(x) = x^3 - 7x + 6$$

eine Nullstelle bei $x = 1$, da sich nach Probieren $f(1) = 0$ ergibt. Damit kann das Monom $(x - 1)$ ohne Rest faktorisiert werden:

$$\begin{array}{cccccl}
x^3 & & -7x & +6 & = & (\ x-1\ ) \ \cdot\ (\ x^2+x-6\ )\ +\ 0 \\
x^3 & -x^2 & & & & \\
-- & -- & & & & \\
 & x^2 & -7x & & & \\
 & x^2 & -\ x & & & \\
 & -- & -- & & & \\
 & & -6x & +6 & & \\
 & & -6x & +6 & & \\
 & & -- & -- & & \\
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Das verbleibende Polynom $x^2 + x - 6$ hat nach p,q-Formel $x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$ die Nullstellen 2 und -3 und damit hat $f(x)$ insgesamt die Nullstellen $1, 2, -3$.

Oft wird die Polynomdivision, hier mit Rest, äquivalent als tatsächliche Division geschrieben:

$$\begin{array}{ccccccl}
(\ 2x^4 & -4x^3 & +7x^2 & -7x & +5 &) & :\ (\ 2x^2+1\ )\ =\ x^2-2x+3\ +\ \frac{-5x+2}{2x^2+1} \\
2x^4 & & +x^2 & & & & \\
-- & -- & -- & & & & \\
 & -4x^3 & +6x^2 & -7x & & & \\
 & -4x^3 & & -2x & & & \\
 & -- & -- & -- & & & \\
 & & +6x^2 & -5x & +5 & & \\
 & & +6x^2 & & +3 & & \\
 & & & -- & -- & & \\
 & & & -5x & +2 & &
\end{array}$$

Aus diesem Ergebnis kann abgelesen werden, dass die so genannte gebrochen-rationale Funktion

$$g(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 7x + 5}{2x^2 + 1}$$

sich für große $|x|$ sich an die Parabel $p(x) = x^2 - 2x + 3$ annähert, da der Rest immer kleiner wird.

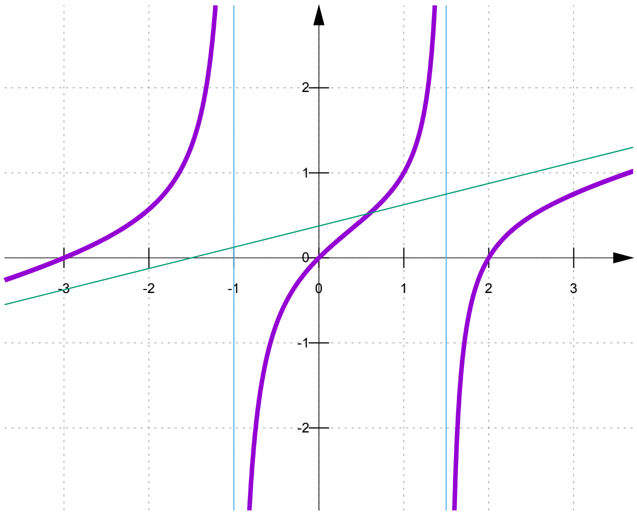


ABBILDUNG 1.3.4. Gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{x^3+x^2-6x}{4x^2-2x-6}$ mit Asymptote $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$ und Polstellen $x = -1$ und $x = \frac{3}{2}$

1.3.2. Gebrochen rationale Funktionen.

DEFINITION 1.7. Seien p und q Polynome und die Menge N_q die Menge alle Nullstellen von q. Eine Funktion $f : \mathbb{R}\backslash N_q \to \mathbb{R}$ in der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist eine **gebrochen rationale Funktion**.

Die Abbildung 1.3.4 zeigt die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{x^3+x^2-6x}{4x^2-2x-6}$ mit den Nullstellen -3, 0 und 2, sowie so genannten **Polstellen** an -1 und $\frac{3}{2}$.

Wenn die Nullstellenmengen N_p vom Zähler und N_q vom Nenner keinen Schnitt besitzen, so sind die Nullstellen N_p des Zählers auch die Nullstellen von f, und die Nullstellen N_q vom Nenner sind die Polstellen. Sollte es Punkte geben, wo sowohl Nenner als auch Zähler 0 werden, so ist alles offen. Hier würde man versuchen die Nullstellen aus den Zähler- und Nennerpolynomen „herauszukürzen“, oder andere Analysetechniken verwenden.

Wenn man die Funktion f mit einer Polynomdivision umformt zu $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\frac{-5x+3}{4x^2-2x-6}$, so ist der letzte Summand, auch Restterm genannt, für große $|x|$ vernachlässigbar. Daher nähert sich die Funktion für große Werte von $|x|$ ihrer so genannten **Asymptote** $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$ an.

1.3.3. Exponentialfunktion und Logarithmus.

Wir werden die **Exponentialfunktion** im Folgenden als natürlicher Bestandteil der Differenzial- und Integralrechnung kennen lernen, dazu beschreibt sie auch viele natürliche Phänomene, glücklicherweise immer nur abschnittsweise. Die Exponentialfunktion basiert auf der irrationalen Konstante $e = 2.7182818284\ldots$, genannt **Eulersche Zahl**. Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat darauf das Bild $(0, \infty)$ und hat die Abbildungsvorschrift $\exp(x) = e^x$. Ihre Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, der oft auch mit der Funktionsbezeichnung „$\log$“ geführt wird. Abbildung 1.3.5 zeigt die Graphen der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus.

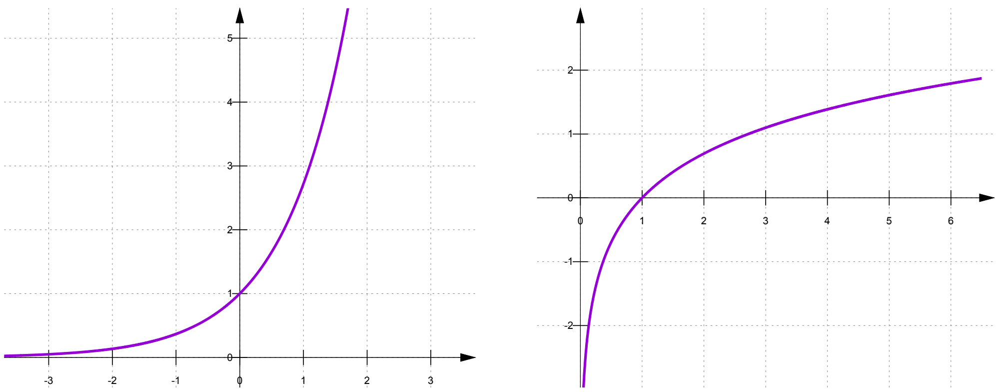


ABBILDUNG 1.3.5. Die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus

Alle weiteren Potenzfunktionen mit positiver Basis können auf die Exponentialfunktion zurückgeführt werden, ebenso wie Logarithmen zu anderer Basis mit Hilfe des natürlichen Logarithmus berechnet werden können:

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

SATZ 1.8. *Potenz- und Logarithmengesetze. Sei* $a, x, y > 0$ *und* $r, s \in \mathbb{R}$, *dann gilt*

$$\begin{aligned} a^{r+s} &= a^r \cdot a^s \,, \\ a^{r-s} &= \frac{a^r}{a^s} \,, \\ (a^r)^s &= a^{r \cdot s} \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \,, \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \,, \\ \log_a(x^y) &= y \cdot \log_a(x) \,. \end{aligned}$$

1.3.4. Trigonometrische Funktionen. Der **Einheitskreis** bezeichnet den Kreis mit Radius $r = 1$ um den Ursprung. Umläuft man den Einheitskreis vom Punkt $x = 1$ gegen den Uhrzeigersinn, so ist nach dem Weg s auf dem Kreis in x, y-Ebene die y-Position gegeben durch den **Sinus** $y = \sin(s)$ und die x-Position durch den **Cosinus** $x = \cos(s)$. Legt man am Punkt $x = 1$ eine Tangente an den Einheitskreis, so schneidet eine Gerade durch den Ursprung und den aktuellen Punkt die Tangente auf der Höhe des **Tangens** $y = \tan(s)$, wie in Abbildung 1.3.6 zu sehen ist.

Ein Kreis mit Radius r hat den Umfang $U = 2\pi r$, mit der irrationalen Kreiszahl $\pi = 3.14159265\ldots$. Daher wiederholen sich die Sinus- und Cosinus-Funktion alle 2π, da man am wieder am Ursprungsort angekommen ist. Der Tangens wiederholt sich alle π, da die Gerade durch den Ursprung in zwei Richtungen zeigt.

Diese Definition für die **trigonometrische Funktion** ist natürlich, und stellt sich als deutlich einfacher für die Differenzial- und Integralrechnung heraus, die im Folgenden behandelt wird. Man kann die Funktionen aber auch in Winkeln φ in Grad definieren, die Umrechnung erfolgt mit $\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} s$ beziehungsweise $s = \frac{\pi}{180^\circ} \varphi$.

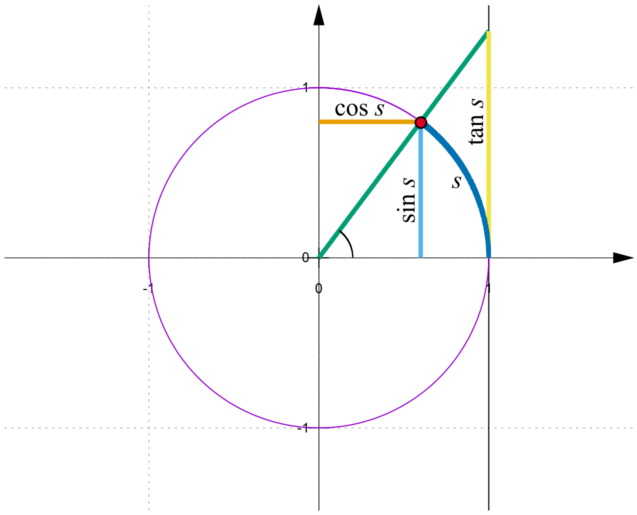
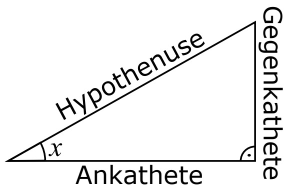


ABBILDUNG 1.3.6. Einheitskreis mit Bogenlänge und trigonometrischen Funktionen

Im rechtwinkligen Dreieck, wo die **Hypotenuse** die Seite gegenüber dem rechten Winkel liegt, ein Winkel mit x gemessen wird, und die anliegende Seite als **Ankathete**, die gegenüberliegende als **Gegenkathete** beschrieben ist, bezeichnen Sinus, Cosinus und Tanges das Verhältnis der Seiten zueinander:

$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$
$$\cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$
$$\tan x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$



Die Sinus-Funktion $\sin(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat das Bild $[-1, 1]$. Die Nullstellen liegen auf $k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Die Sinus-Funktion ist auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bijektiv und darauf definiert man ihre Umkehrfunktion **Arcussinus** $\arcsin(x)$. Die Abbildung 1.3.7 zeigt die Graphen des Sinus und des Arcussinus.

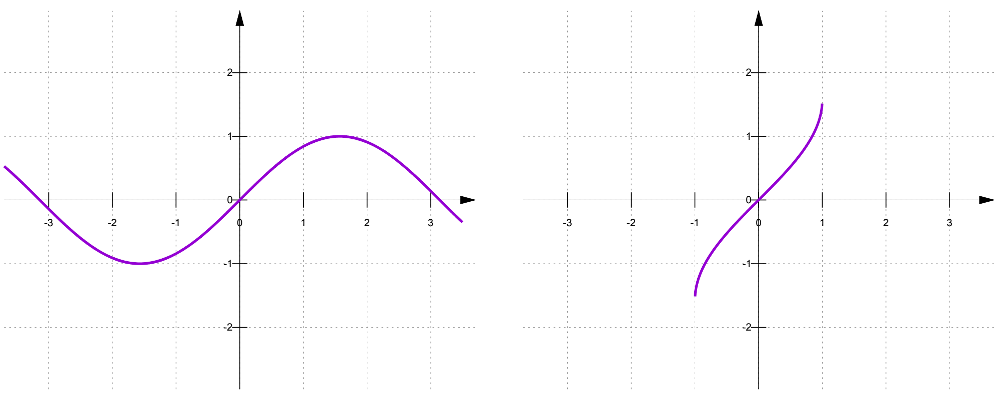


ABBILDUNG 1.3.7. Sinus und Umkehrfunktion Arcussinus

Die Cosinus-Funktion $\cos(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat das Bild $[-1, 1]$. Die Nullstellen liegen auf $k\pi + \frac{\pi}{2}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Die Cosinus-Funktion ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ bijektiv und darauf definiert man ihre Umkehrfunktion **Arcuscosinus** $\arccos(x)$. Die Abbildung 1.3.8 zeigt die Graphen von Cosinus und Arcuscosinus.

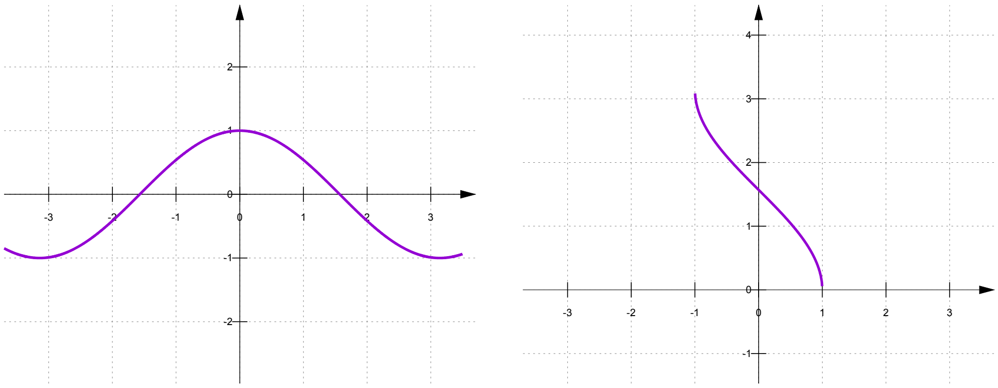


Abbildung 1.3.8. Cosinus und Umkehrfunktion Arcuscosinus

Die **Tangens**-Funktion $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist auf $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,,\ k \in \mathbb{Z} \}$ definiert und hat das Bild $\mathbb{R}$. Die Nullstellen liegen auf $k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Die Tangens-Funktion ist auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv und darauf definiert man ihre Umkehrfunktion **Arcustangens** $\arctan(x)$. Die Abbildung 1.3.9 zeigt die Graphen des Tangens und des Arcustangens. Die Kotangens-Funktion $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$ ist der Kehrwert der Tangens-Funktion.

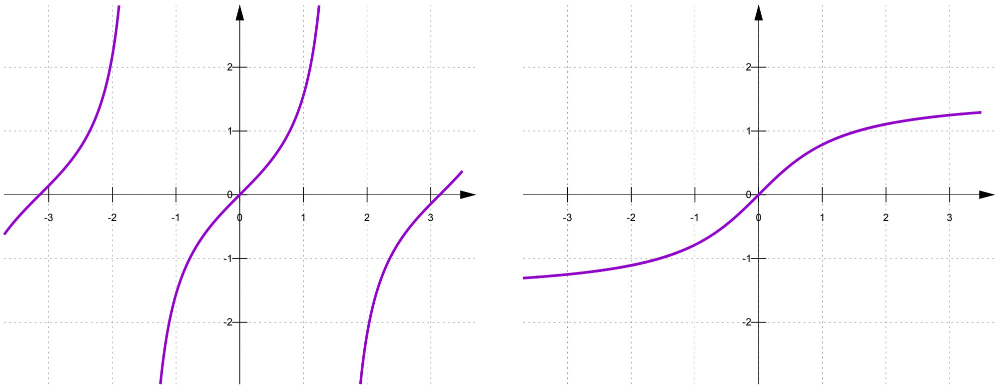


Abbildung 1.3.9. Tangens und Umkehrfunktion Arcustangens

Eine Wertetabelle einiger exakter Werte der trigonometrischen Funktionen:

Grad	0°	30°	45°	60°	90°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Mit Symmetrieeigenschaften wie

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x)\,,\ \sin(\pi - x) = \sin(x)\,,$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos(x)\,,\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

können damit auch direkt weitere Werte bestimmt werden, so ist beispielsweise

$$\sin(\frac{5}{4}\pi) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{und } \cos(\frac{5}{4}\pi) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,.$$

Satz 1.9. ***Additionstheoreme*** *der trigonometrischen Funktionen.*
Für $x, y \in \mathbb{R}$ *gelten die folgenden Gleichungen:*

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Im Spezialfall $x = y$ *ergeben sie* $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ *und* $\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$.

1.3.5. Hyperbelfunktionen. Die Hyperbelfunktionen entstehen natürlich aus sowohl den trigonometrischen Funktionen als auch der Exponentialfunktion. Mit ihrer Hilfe werden wir Probleme in der Differenzial- und Integralrechnung lösen können.

Der **Sinus hyperbolicus** $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat das Bild $\mathbb{R}$. Er hat eine Nullstelle bei $x = 0$. Der Sinus hyperbolicus ist bijektiv und hat die Umkehrfunktion **Areasinus hyperbolicus** $\operatorname{arsinh}(x)$. Die Abbildung 1.3.10 zeigt die Graphen des Sinus hyperbolicus und des Areasinus hyperbolicus.

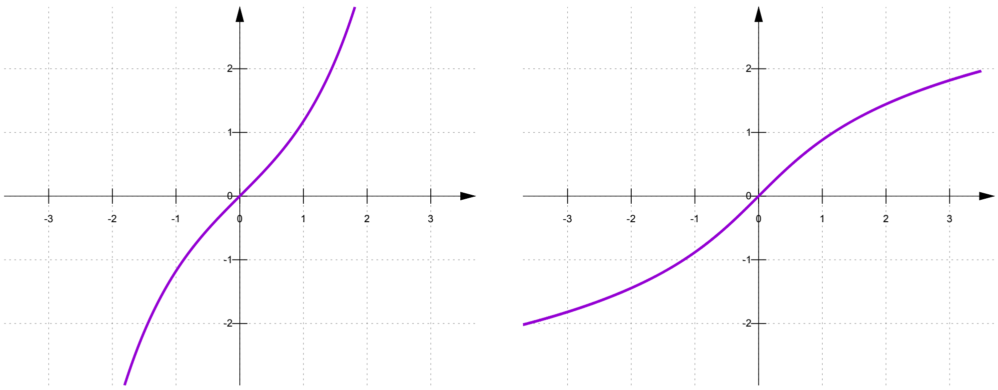


Abbildung 1.3.10. Sinus hyperbolicus und Umkehrfunktion Areasinus hyperbolicus

Der **Cosinus hyperbolicus** $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat das Bild $[1, \infty)$ und damit keine Nullstelle. Er ist auf dem Intervall $[0, \infty)$ bijektiv und darauf definiert man ihre Umkehrfunktion **Areacosinus hyperbolicus** $\operatorname{arcosh}(x)$. Die Abbildung 1.3.11 zeigt die Graphen von Cosinus hyperbolicus und Areacosinus hyperbolicus. Der Cosinus hyperbolicus ist auch unter dem Namen oder der Anwendung **Kettenlinie** bekannt.

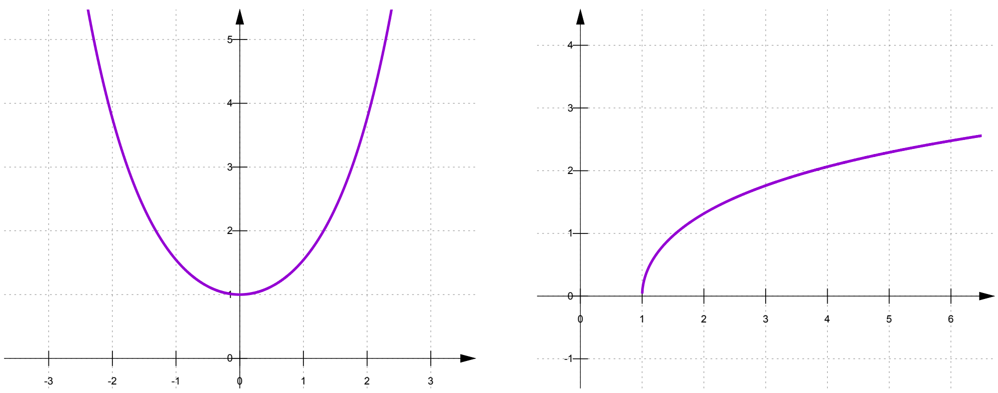


Abbildung 1.3.11. Cosinus hyperbolicus und Umkehrfunktion Areacosinus hyperbolicus

Der **Tangens hyperbolicus** $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert und hat das Bild $(-1, 1)$. Die einzige Nullstelle liegt bei $x = 0$. Die Tangens-Funktion ist bijektiv und hat die Umkehrfunktion **Areatangens hyperbolicus** $\operatorname{artanh}(x)$. Die Abbildung 1.3.12 zeigt die Graphen des Tangens hyperbolicus und des Areatangens hyperbolicus.

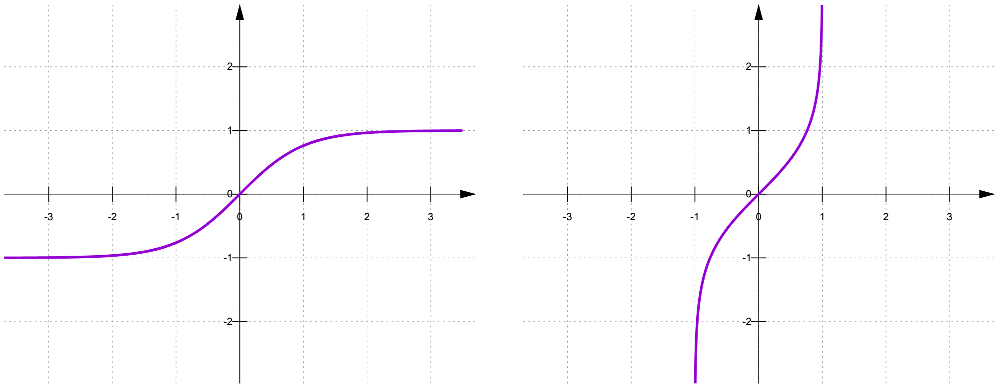


ABBILDUNG 1.3.12. Tangens hyperbolicus und Umkehrfunktion Areatangens hyperbolicus

1.4. Aufgaben

AUFGABE 1. Bestimmen Sie in $\mathbb{C}$ die Scheitelpunktsform, Nullstellen und Faktorisierung von

$$f(x) = x^2 + 4x + 13\,.$$

AUFGABE 2. Bestimmen Sie in $\mathbb{C}$ die Scheitelpunktsform, Nullstellen und Faktorisierung von

$$f(x) = x^2 + 6x + 13\,.$$

AUFGABE 3. Berechnen Sie für $z = 3 + 4i$ den Real- und Imaginärteil von

$$\frac{z + \mathrm{Re}(z \cdot z)}{2z - \bar{z}}\,.$$

AUFGABE 4. Berechnen Sie für $z_1 = 1 - 2i$ und $z_2 = 3 - 4i$ den Real- und Imaginärteil von

$$\frac{z_1 z_2 + \frac{z_1}{z_2}}{z_1 \bar{z}_1}\,.$$

AUFGABE 5. Geben Sie die Polarkoordinaten zur Zahl $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ und die komplexe Zahl mit den Polarkoordinaten $r = 3$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ an.

AUFGABE 6. Geben Sie die Polarkoordinaten zur Zahl $z = -1 + i$ und die komplexe Zahl mit den Polarkoordinaten $r = 2$, $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ an.

KAPITEL 2

Elementare Analysis

2.1. Folgen und Konvergenz

DEFINITION 2.1. Eine **Folge** (a_n) ist eine Abbildung, die jedem $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{N}_0$ ein Folgenglied a_n zuweist.

Folgen können auf unterschiedliche Arten definiert werden:

- **Explizite Definition** der Folge der Quadratzahlen (a_n): $a_n = n^2$ mit Folgengliedern
$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$
- **Rekursive Definition** der **Fibonacci-Folge** (b_n): $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ mit Folgengliedern
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

DEFINITION 2.2. Eine Folge (a_n) wird als **Arithmetische Folge** bezeichnet, wenn die Differenz zwei aufeinander folgender Folgenglieder konstant ist, also $a_{n+1} - a_n = d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Dann ist $a_n = a_0 + n \cdot d$ oder $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Eine Folge (b_n) wird als **Geometrische Folge** bezeichnet, wenn der Quotient zwei aufeinander folgender Folgenglieder konstant ist, also $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Dann ist $a_n = a_0 \cdot q^n$ oder $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

BEISPIEL 2.3. **Zinsen** bezeichnet die Vergütung für einen bereit gestellten Kapitalbetrag. Die **Einfache Zinsrechnung** berechnet die Zinsen für einen Kapitalbetrag von K bei einem Zinssatz von p Prozent pro **Zinsperiode** wie beispielsweise einem Jahr direkt als
$$Z = K \cdot \frac{p}{100}\,.$$
Bei einer **Zinseszinsrechnung** werden die Zinsen wieder angelegt, und ausgehend vom Startkapital $K_0 = K$ verhält sich das Kapital dann wegen
$$K_{n+1} = K_n + Z_n = K_n + K_n \cdot \frac{p}{100} = \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{=q} \cdot K_n$$
wie eine geometrische Folge mit Startwert K_0 und Faktor q mit einem Endkapital von
$$K_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot K_0 = q^n \cdot K_0$$
nach n Zinsperioden. Der Faktor $q^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ wird **Aufzinsfaktor** genannt. Wird bei festgelegtem Endkapital K_n nach n Zinsperioden bei Zinssatz von p Prozent das entsprechende Startkapital oder **Kapitalwert** oder **Barwert** berechnet, so gilt die Formel
$$K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n} \cdot K_n = q^{-n} \cdot K_n$$
und der Faktor $q^{-n} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}$ wird als **Abzinsfaktor** oder **Diskontierung** bezeichnet.

Viele der genannten Folgen wachsen immer weiter an, im Gegensatz zu beschränkten Folgen:

DEFINITION 2.4. Eine Folge (a_n) ist **beschränkt**, wenn es eine **Schranke** $r > 0$ gibt, so dass $|a_n| \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die Folge (c_n) mit $c_n = \frac{n+1}{n}$ ist beschränkt, da $|c_n| = |1 + \frac{1}{n}| = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2 = r$ ist.

DEFINITION 2.5. Eine reelle Folge (a_n) ist **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sie ist **monoton fallend**, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sie ist **streng monoton**, wenn jeweils $a_{n+1} > a_n$ oder $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

BEISPIEL 2.6. Die oben definierten Folgen der Quadratzahlen und der Fibonaccizahlen sind monoton wachsend, denn beispielsweise ist

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0\,.$$

Die zuletzt definierte Folge (c_n) ist monoton fallend, denn

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2)n}{(n+1)n} - \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)n}. \\ &= \frac{(n+2)n - (n+1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0\,. \end{aligned}$$

DEFINITION 2.7. Eine Folge (a_n) ist **konvergent** zum **Grenzwert** a, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für jedes $n > N$. Dies wird dann $a_n \to a$, $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ geschrieben. Gibt es keinen solchen Grenzwert, so ist die Folge **divergent**.

Ist (a_n) divergent und beispielsweise monoton steigend, so kann dies mit $a_n \to \infty$ oder mit der eigentlich ungenauen (denn ∞ ist keine Zahl, die verglichen werden kann) aber sehr gängigen Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ beschrieben werden. Ist sie divergent und monoton fallend, so gilt $a_n \to -\infty$, entsprechend $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Unter anderem bedeutet $n \to \infty$ oft speziell die monoton steigende Folge der natürlichen Zahlen. Eine Schreibweise $x \to b$ bedeutet, dass x die Werte einer Folge (x_n) durchläuft, für die $x_n \to b$ gilt.

SATZ 2.8. *Rechenregeln für Grenzwerte. Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $p, q \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \lambda a_n &= \lambda a \\ \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) &= a \pm b \\ \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b}\,, \ \textit{für } b \neq 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n^{p/q} &= a^{p/q}\,, \ \textit{wenn } a^{p/q} \textit{ existiert} \end{aligned}$$

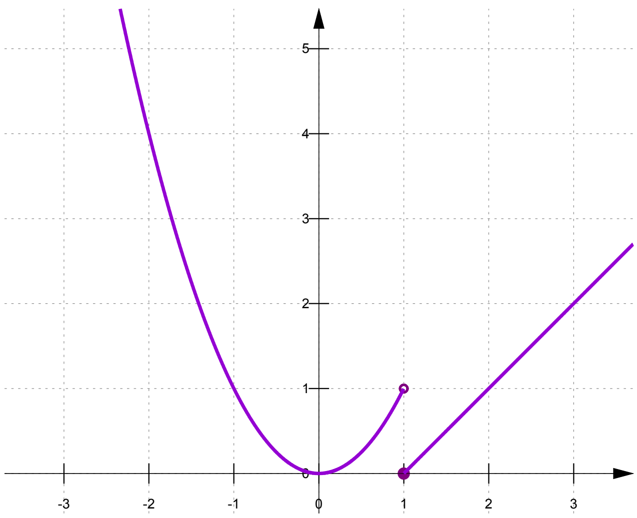


ABBILDUNG 2.2.1. Eine stückweise definierte Funktion mit Sprung an $x = 1$

Einige wichtige Grenzwerte und divergente Folgen:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ wenn } |q| < 1$$
$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty \text{ wenn } q > 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \text{ für } q \in \mathbb{C}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ wenn } a > 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

SATZ 2.9. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Aus der Definition für Konvergenz für eine zu a konvergente Folge (a_n) können wir aus gewähltem $\varepsilon > 0$ ein N bestimmen, ab dem alle Folgenglieder vom Betrag kleiner $\varepsilon + |a|$ sind. Diesen Wert können wir mit dem Betrag aller endlichen Folgenglieder zuvor vergleichen und den höchsten Betrag der endlich vielen Werte ist eine passende Schranke.

SATZ 2.10. *Jede beschränkte und monotone reelle Folge ist konvergent.*

Zwar ist jede konvergente Folge beschränkt, jedoch ist nicht jede konvergente Folge monoton: Die Folge (d_n) mit $d_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert $d_n \to 3$, springt aber um die 3 immer auf und ab, und ist deshalb nicht monoton.

2.2. Stetige Funktionen

DEFINITION 2.11. Eine Funktion $f : A \to B$ ist **im Punkt** $z \in A$ **stetig**, wenn für alle Folgen (x_n) mit Werten aus A mit $x_n \to z$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to z} f(x) = f(z)$. Die Funktion ist **stetig**, wenn sie auf allen Punkten ihres Definitionsbereichs stetig ist.

BEISPIEL 2.12. Bei reellen Funktionen untersucht man typischerweise den links- und rechtsseitigen Grenzwert mit Folgen, die sich vollständig von linker oder rechter Seite zum Untersuchungspunkt konvergieren. Bei der stückweisen definierten Funktion aus Abbildung 2.2.1

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto &\begin{cases} x^2 & , \quad x < 1 \\ x - 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ist der linksseitige Grenzwert an $x = 1$ gegeben durch

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 = 1\,,$$

der rechtsseitige Grenzwert an $x = 1$ berechnet sich zu

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x - 1) = 0\,.$$

Damit ist die Funktion an $x = 1$ nicht stetig, sondern hat dort einen **Sprung**. Der Wert der Funktion an der Position $x = 1$ stimmt in diesem Fall mit dem rechtsseitigen Grenzwert überein $f(1) = 1$. Hat eine Funktion zu einem Punkt den uneigentlichen Grenzwert ∞ oder $-\infty$, so spricht man von einer **Polstelle**.

SATZ 2.13. ***Zwischenwertsatz***. *Die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ihr Maximum und Minimum an den Stellen x^+ und x^- an, und für jeden Wert $y \in [f(x^-), f(x^+)]$ gibt es ein $x \in [a, b]$, so dass $f(x) = y$.*

2.3. Reihen

DEFINITION 2.14. Eine **Reihe** ist die Folge (s_n) von **Partialsummen**

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

einer Folge (a_n). Konvergiert die Folge (s_n) zu einem **Reihenwert** s, so ist die Reihe **konvergent**, sonst **divergent**.

Verkürzt werden Reihen oft in der Form $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ oder $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ geschrieben.

SATZ 2.15. ***Arithmetische Reihe***. *Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2} \cdot (1 + n)$$

Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Reihe (a_n) mit $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)\,.$$

SATZ 2.16. ***Geometrische Reihe***. *Für beliebiges $q \in \mathbb{C}$ gilt die **geometrische Summenformel***

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

und für $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe zum Wert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, für $|q| \geq 1$ divergiert sie.

BEISPIEL 2.17. **Renten** sind in festen Perioden wiederkehrende Zahlungen. **Nachschüssige Renten** werden immer am Ende der Periode ausgezahlt, hingegen werden **Vorschüssige Renten** am Anfang einer Periode bereitgestellt. Den Gesamtwert einer Rente kann man mit Hilfe des Zinses p über eine Periode vor Auszahlung als **Rentenbarwert** oder am Ende der Rentenauszahlung als **Rentenendwert** berechnet werden. Die jeweiligen Rentenzahlungen werden dazu entsprechend des Zinssatzes für den Barwert ab- oder den Endwert aufgezinst und können mit der geometrischen Summenformel berechnet werden.

Vorschüssige konstante Renten: Bei einer vorschüssigen konstanten Rente r über n Perioden ist der Rentenendwert R_{E^v} bei Zinssatz p und Aufzinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ gegeben durch

$$R_{E^v} = \underbrace{r \cdot q^n}_{\text{1. Zahlung}} + \underbrace{r \cdot q^{n-1}}_{\text{2. Zahlung}} + \ldots + \underbrace{r \cdot q}_{n.\text{ Zahlung}} = r \cdot q \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = r \cdot \underbrace{q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}_{\textbf{Rentenendwertfaktor}} .$$

Für den Rentenbarwert R_{B^v} vorschüssiger konstanter Renten ergibt sich entsprechend

$$R_{B^v} = \underbrace{r}_{\text{1. Zahlung}} + \underbrace{r \cdot q^{-1}}_{\text{2. Zahlung}} + \ldots + \underbrace{r \cdot q^{-(n-1)}}_{n.\text{ Zahlung}} = r \cdot q^{-(n-1)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = r \cdot \underbrace{\frac{q^n - 1}{q^{n-1} \cdot (q-1)}}_{\textbf{Rentenbarwertfaktor}} .$$

Eine vorschüssige konstante Rente von $r = 50$ Euro über $n = 10$ Perioden bei einem Zinssatz von $p = 1$ Prozent, also $q = 1.01$ ergibt einen Rentenendwert von

$$R_{E^v} = 50 \cdot 1.01 \cdot \frac{1.01^{10} - 1}{0.01} \approx 528.34 \text{ Euro}$$

und einen Rentenbarwert von

$$R_{B^v} = 50 \cdot \frac{1.01^{10} - 1}{1.01^9 \cdot 0.01} \approx 478.30 \text{ Euro}\,.$$

Nachschüssige konstante Renten: Bei einer nachschüssigen konstanten Rente r über n Perioden ist der Rentenendwert R_{E^n} bei Zinssatz p und Aufzinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ gegeben durch

$$R_{E^n} = \underbrace{r \cdot q^{n-1}}_{\text{1. Zahlung}} + \underbrace{r \cdot q^{n-2}}_{\text{2. Zahlung}} + \ldots + \underbrace{r}_{n.\text{ Zahlung}} = r \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = r \cdot \underbrace{\frac{q^n - 1}{q - 1}}_{\textbf{Rentenendwertfaktor}} .$$

Für den Rentenbarwert R_{B^n} nachschüssiger konstanter Renten ergibt sich entsprechend

$$R_{B^n} = \underbrace{r \cdot q^{-1}}_{\text{1. Zahlung}} + \underbrace{r \cdot q^{-2}}_{\text{2. Zahlung}} + \ldots + \underbrace{r \cdot q^{-n}}_{n.\text{ Zahlung}} = r \cdot q^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = r \cdot \underbrace{\frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)}}_{\textbf{Rentenbarwertfaktor}} .$$

Eine nachschüssige konstante Rente von $r = 50$ Euro über $n = 10$ Perioden bei einem Zinssatz von $p = 1$ Prozent, also $q = 1.01$ ergibt einen Rentenendwert von

$$R_{E^n} = 50 \cdot \frac{1.01^{10} - 1}{0.01} \approx 523.11 \text{ Euro}$$

und einen Rentenbarwert von

$$R_{B^n} = 50 \cdot \frac{1.01^{10} - 1}{1.01^{10} \cdot 0.01} \approx 473.57 \text{ Euro}\,.$$

BEISPIEL 2.18. Die **Tilgungsrechnung** bestimmt die periodischen Zahlungen unter Berücksichtigung von periodischer Verzinsung zur Rückzahlung eines Kredits. Dabei wird unterschieden zwischen **Tilgung**, der Reduktion des Kredits in einer Periode, und der **Annuität**, der tatsächlichen Zahlung innerhalb einer Periode, die aus Tilgung und Zinsen besteht. Eine **Ratentilgung** bezeichnet einen Tilgungsplan mit fester Tilgung pro Periode: Dabei fällt die zu zahlende Annuität über den Tilgungszeitraum, da die zu zahlenden Zinsen über die Zeit sinken. Bei einer **Annuitätentilgung** bleibt die periodisch zu zahlende Annuität fest, während die Tilgung über die Zeit langsam steigt, da die Zinslast sinkt.

Ratentilgung: Soll ein Kredit K über n Perioden in Ratentilgung und einem Zinssatz von p zurückgezahlt werden, so ist der feste Tilgungsbetrag $T = \frac{K}{n}$ und die zu zahlende Annuität A_k beträgt nach der k-ten Periode

$$A_k = \underbrace{T}_{\text{Feste Tilgung}} + \underbrace{(K - (k-1) \cdot T) \cdot \frac{p}{100}}_{\text{Zinsen auf verbleibenden Kredit}} .$$

Ein Kredit von $K = 80\,000.00$ Euro soll beispielsweise in 5 Jahren zurückbezahlt sein. Bei einer jährlichen Verzinsung von 2.5% soll der Kredit mit konstanter Tilgung zurückgezahlt werden.

Jahr	Kredit	Zinsen	Tilgung	Annuität	Verbleibender Kredit
1	80 000	2 000	16 000	18 000	64 000
2	64 000	1 600	16 000	17 600	48 000
3	48 000	1 200	16 000	17 200	32 000
4	32 000	800	16 000	16 800	16 000
5	16 000	400	16 000	16 400	0
Summe	–	6 000	80 000	86 000	–

Annuitätentilgung: Soll ein Kredit K über n Perioden in Annuitätentilgung und einem Zinssatz von p zurückgezahlt werden, so kann die Annuität als eine nachschüssige Rentenzahlung gesehen werden und damit aus deren Barwert berechnet werden: Bei einer festen Annuität muss der Barwert zu Beginn dem Kreditbetrag entsprechen, also $K = A \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)}$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$. Damit ist die Annuität gegeben durch

$$A = K \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} .$$

Ein Kredit $K = 80\,000.00$ Euro soll beispielsweise in $n = 5$ Jahren bei konstanter Annuität bei einer Verzinsung von $p = 3.5\%$ getilgt werden.

$$A = 80\,000 \cdot \frac{1.035^5 \cdot 0.035}{1.035^5 - 1} = 80\,000 \cdot 0.22148\ldots \approx 17\,715.51$$

Jahr	Kredit	Zinsen	Tilgung	Annuität	Verbleibender Kredit
1	80 000.00	2 800.00	14 918.51	17 715.51	65 081.49
2	65 081.49	2 277.85	15 440.66	17 715.51	49 640.83
3	49 640.83	1 737.43	15 981.06	17 715.51	33 659.75
4	33 659.75	1 178.09	16 540.42	17 715.51	17 119.33
5	17 119.33	599.18	17 119.33	17 715.51	0,00
Summe	–	8 592.55	80 000.00	88 592.55	–

Damit eine Reihe konvergieren kann, muss die aufsummierte Folge eine **Nullfolge** sein, also gegen 0 konvergieren. Das alleine reicht aber nicht, denn beispielsweise divergiert die **harmonische Reihe**

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right),$$

da die Summe der Partialsummen über 2^m Summanden jeden Wert übersteigt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^m}\frac{1}{k} &= \quad 1 \quad +\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^m}\\ &\geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{1}{2^m}\\ &= \frac{1}{2}\cdot(m+2)\end{aligned}$$

Um den Wert 5 zu übersteigen, sollte es reichen $2^8=256$ Elemente zu addieren, da $\frac{1}{2}(8+2)=5$. Tatsächlich ist

$$\sum_{k=1}^{256}\frac{1}{k}\approx 6.12 \text{ und schon } \sum_{k=1}^{83}\frac{1}{k}\approx 5.00\,,$$

da die Abschätzung recht grob ist. Eine vielleicht überraschende Anwendung ist, dass $n-1$ Bauklötze der Länge 1 von unten gezählt gerade mit Überhang $\frac{1}{n},\frac{1}{n-1},\ldots,\frac{1}{2}$ aufeinander gestapelt werden können, und damit nach 84 Klötzen von einer Seite der Abstand $5-1=4$ theoretisch erreicht wird. So kann theoretisch von einer Seite jede Distanz überwunden werden, praktisch können die Bausteine aber nicht so exakt hergestellt werden, dass der Turm nicht doch umfallen würde.

SATZ 2.19. ***Allgemeine harmonische Reihe***. *Die Reihe*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right)$$

konvergiert für $\alpha>1$ und divergiert für $0\leq\alpha\leq 1$.

Die Reihenwerte lassen sich nur für spezielle α angeben:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

SATZ 2.20. ***Exponentialreihe***.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$$

Bei der Untersuchung auf Konvergenz einer Reihe hilft der Vergleich mit bekannten Reihen.

SATZ 2.21. ***Majoranten- und Minorantenkriterium***. *Konvergiert die reelle Reihe $(\sum_{k=1}^{\infty}a_k)$ und gilt $|b_k|\leq a_k$ für alle k ab einem Index n, so konvergiert die Reihe $(\sum_{k=1}^{\infty}b_k)$. Ist die Reihe $(\sum_{k=1}^{\infty}a_k)$ divergent, und sind $b_k\in\mathbb{R}$ und $0\leq a_k\leq b_k$ für alle k ab einem Index n, so divergiert die Reihe $(\sum_{k=1}^{\infty}b_k)$.*

BEISPIEL 2.22. Bei der Untersuchung der Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+k^2}\right)$$

kann man sich überlegen, dass $\left|\frac{1}{k+k^2}\right| < \frac{1}{k^2}$ für alle $k > 0$ gilt. Damit ist $\left(\sum \frac{1}{k^2}\right)$ eine konvergente Majorante. Damit ist die untersuchte Reihe nach Majorantenkriterium konvergent.

Bei der Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$$

muss man die Summanden zunächst umformen:

$$\begin{aligned}\sqrt{k+1} - \sqrt{k} &= \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}\end{aligned}$$

Damit sind die Summanden grob in der Form $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{1/2}}$ und es ist zu erwarten, dass es eine divergente Minorante gibt.

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{k}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\hat{k}^{1/2}}$$

mit $\hat{k} = k+1$. Damit haben wir eine divergente Minorante gefunden und somit ist auch die betrachtete Reihe divergent.

Satz 2.23. ***Quotientenkriterium***. *Existiert der Grenzwert*

$$\varrho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

und ist $\varrho < 1$*, so konvergiert die Reihe* $(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)$*. Ist* $\varrho > 1$ *so divergiert die Reihe. Für* $\varrho = 1$ *ist keine Aussage möglich.*

Satz 2.24. ***Wurzelkriterium***. *Existiert der Grenzwert*

$$\varrho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

und ist $\varrho < 1$*, so konvergiert die Reihe* $(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)$*. Ist* $\varrho > 1$ *so divergiert die Reihe. Für* $\varrho = 1$ *ist keine Aussage möglich.*

Beispiel 2.25. Die Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k}{2^k}\right)$$

kann mit dem Wurzelkriterium untersucht werden:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{2+(-1)^k}{2^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} \cdot \sqrt[k]{|2+(-1)^k|} &= \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2+(-1)^k} \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k \textbf{ gerade}}} \sqrt[k]{2+1} & = 1 \\ \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k \textbf{ ungerade}}} \sqrt[k]{2-1} & = 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Damit ist $\varrho = \frac{1}{2} < 1$ und somit konvergiert die Reihe.

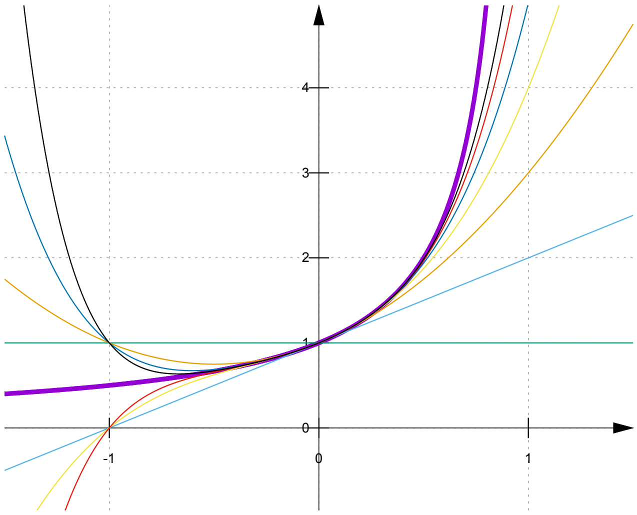


ABBILDUNG 2.4.1. $\frac{1}{1-x}$ und Partialsummen 1, $1+x$, $\ldots$, $1+x+\ldots+x^6$

2.4. Potenzreihen

Potenzreihen sind ein grundlegendes Werkzeug, um Funktionen zu definieren, berechnen oder anzunähern. Ein einfaches Beispiel für eine Potenzreihe können wir mit der geometrischen Reihe darstellen. Summiert man die Potenzen von x, so erhalten wir nach Satz 2.16

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

für $|x| < 1$. Wir können hier verschiedene Dinge erkennen: Zum einen erreicht die Potenzreihe außer bei $x = 0$ die Funktion $\frac{1}{1-x}$ nur, wenn wir den kompletten Reihenwert bilden, also den Grenzwert bilden. Zum anderen sehen wir, dass die Potenzreihe nur in einem gewissen Bereich die Funktion abbilden kann. Beides ist typisch für Potenzreihen. In Abbildung 2.4.1 sehen wir die Funktion $\frac{1}{1-x}$ mit den Partialsummen 1, $1+x$, $\ldots$, $1+x+\ldots+x^6$, und erkennen, dass die Partialsummen tatsächlich die Funktion immer besser annähern, mitunter aber nicht sehr schnell. Wie auch bei der geometrischen Reihe können die Potenzreihen ohne Einschränkungen gleich auf den komplexen Zahlen definiert werden.

DEFINITION 2.26. Eine **Potenzreihe** mit **Koeffizienten** (a_k) und **Entwicklungspunkt** $x_0 \in \mathbb{C}$ ist eine Reihe

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right) .$$

Die Konvergenz von Potenzreihen kann genau mit genau den Werkzeugen analysiert werden, die auch zur Analyse von allgemeinen Reihen verwendet wurden. Existiert beispielsweise der Grenzwert $\varrho_a = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, so können wir mit dem Wurzelkriterium schließen, dass wir für

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = |x - x_0| \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \varrho_a |x - x_0| < 1$$

also $|x - x_0| < \frac{1}{\varrho_a}$ Konvergenz erhalten, und für $|x - x_0| > \frac{1}{\varrho_a}$ die Reihe divergiert. Damit haben wir in den komplexen Zahlen eine Kreisscheibe ohne Rand um x_0 mit Radius $r = \frac{1}{\varrho_a}$, in der die Potenzreihe konvergiert, und außerhalb des Kreises divergiert. Auf der Kreislinie ist das Verhalten noch nicht bestimmt. Im Reellen konvergiert die Potenzreihe in einem um x_0 zentrierten Intervall mit Durchmesser

$d = 2r = \frac{2}{\varrho_a}$. Dieses Verhalten von Potenzreihen gilt nicht nur für Fälle in denen so ein ϱ_a existiert, sondern lässt sich allgemein formulieren:

SATZ 2.27. *Eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x_0 konvergiert im Inneren eines Kreises mit* ***Konvergenzradius*** $r \geq 0$

$$\{x \in \mathbb{C} : \ |x - x_0| < r\}$$

und divergiert außerhalb des Kreises. Auf dem Rand selbst kann die Potenzreihe für einzelne Punkte konvergieren oder divergieren. Für $r = 0$ konvergiert die Potenzreihe für $x = x_0$ und mit $r = \infty$ wird beschrieben, wenn die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert.

Innerhalb ihres Konvergenzkreises haben Potenzreihen angenehme Eigenschaften:

SATZ 2.28. *Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzradius stetig.*

Damit darf man auch Grenzwerte nach Definition der Stetigkeit innerhalb des Konvergenzkreises in eine Potenzreihe hinein- oder herausziehen:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k$$

SATZ 2.29. *Stimmen zwei Potenzreihen mit gleichem Entwicklungspunkt x_0 auf einem Kreis mit Radius $r > 0$ überein, d.h.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \text{ für alle } |x - x_0| < r$$

so sind die Potenzreihen identisch, d.h. $a_k = b_k$ für $k = \mathbb{N}_0$.

Damit sind Potenzreihen nicht nur durch ihre Funktionswerte eindeutig bestimmt, sondern sie können auch mit Hilfe von Koeffizientenvergleichen bestimmt werden.

BEISPIEL 2.30. Gesucht ist die Potenzreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1 + 2x}{1 - x^2}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Zunächst können wir mit der geometrischen Reihe für $|x^2| < 1$ folgende Umformung vornehmen:

$$f(x) = (1 + 2x) \cdot \frac{1}{1 - x^2} = (1 + 2x) \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2x^{2k+1} = 1 + 2x^2 + x^3 + 2x^3 + \ldots$$

Wenn wir nun einen Koeffizientenvergleich mit der gesuchten Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

durchführen, sehen wir, dass wir diese Koeffizienten berechnen können:

$$a_k = \begin{cases} 1 \text{ wenn } k \text{ ungerade} \\ 2 \text{ wenn } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Über Potenzreihen können wir nun die sehr wichtige Exponentialfunktion eindeutig definieren:

DEFINITION 2.31. Die **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist durch die Reihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

definiert. Es gibt auch die Schreibweise $e^x = \exp(x)$.

BEMERKUNG 2.32. Der Konvergenzradius r der Exponentialreihe ist $r = \infty$, die Reihe konvergiert also für alle $x \in \mathbb{C}$, da mit dem Quotientenkriterium für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}}{\frac{1}{k!}x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!}{(k+1)\cdot k!}\right||x| = \lim_{k\to\infty}\frac{|x|}{k+1} = 0 < 1$$

Die Exponentialfunktion definiert uns alle trigonometrischen Funktionen mit der Eulerschen Formel:

SATZ 2.33. ***Eulersche Formel.*** *Für $x \in \mathbb{C}$ gilt*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x\,.$$

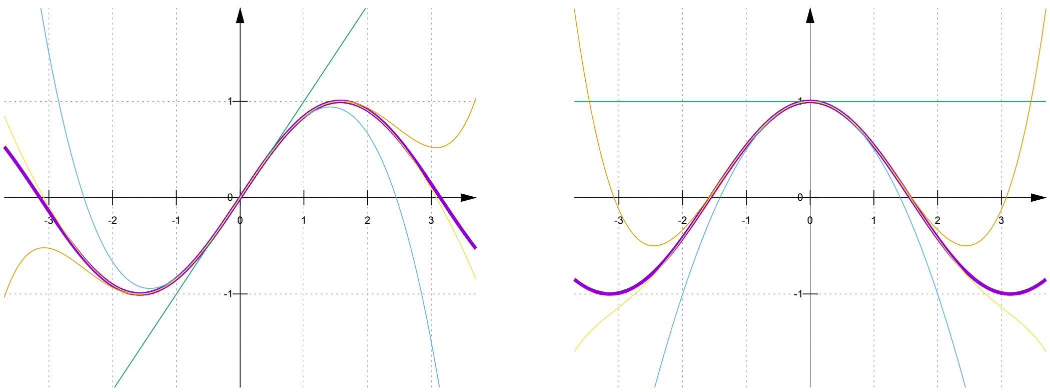
Diese Formel lässt sich mit der Abbildung 1.3.6 in der komplexen Zahlenebene wie in Abbildung 1.1.1 darstellen.

Mit den Folgerungen $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ können wir die Potenzreihen von Sinus und Cosinus mit Koeffizientenvergleich bestimmen:

$$\cos x = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-ix)^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k + (-1)^k i^k}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}}{(2k)!}x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!} - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-ix)^k}{k!} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k - (-1)^k i^k}{k!}x^k = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\end{aligned}$$

Abbildung 2.4.2 zeigt die Sinus- und Cosinus-Funktion mit jeweils den erste vier Partialsummen, die um den Entwicklungspunkt die Funktionen immer besser approximieren.



$\sin x,\ x,\ x - \frac{x^3}{3!},\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ $\quad\cos x,\ 1,\ 1 - \frac{x^2}{2},\ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!},\ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^8}{8!}$

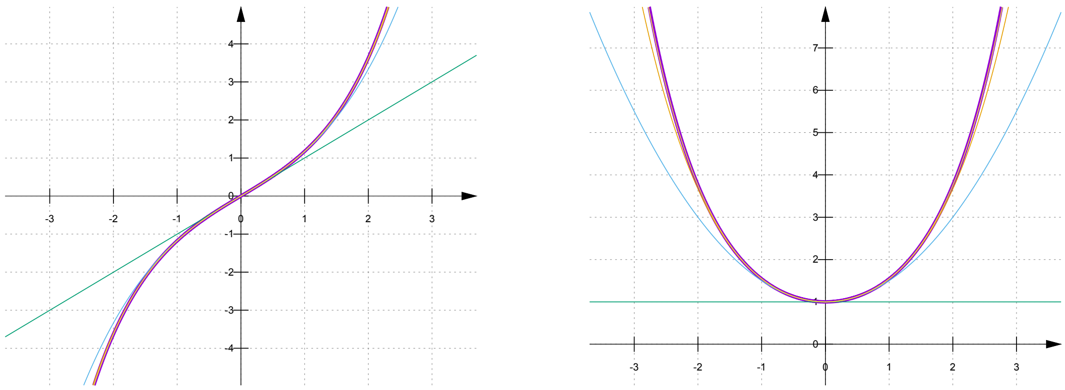
ABBILDUNG 2.4.2. Sinus und Cosinus und deren ersten Partialsummen

Ebenso können wir mit den Formeln $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ die entsprechenden Potenzreihen der hyperbolischen Funktionen bestimmen:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^k}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Die Abbildung 2.4.3 zeigt den Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus mit den ersten vier Partialsummen deren Potenzreihen mit Entwicklungspunkt 0.



$\sinh x,\ x,\ x + \frac{x^3}{3!},\ x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\ x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}$ $\quad \cosh x,\ 1,\ 1 + \frac{x^2}{2},\ 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!},\ 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!}$

ABBILDUNG 2.4.3. Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus und deren ersten Partialsummen

2.5. Aufgaben

AUFGABE 7. Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Monotonie und Beschränktheit:

$$a_n = \frac{1 - n + n^2}{n + 1}\,.$$

AUFGABE 8. Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Monotonie und Beschränktheit:

$$a_n = \frac{1 + 6n + 2n^2}{(n + 3)n}\,.$$

AUFGABE 9. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (b_n), falls er existiert:

$$b_n = \frac{1 - n + n^2}{n(n + 1)}\,.$$

AUFGABE 10. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (b_n), falls er existiert:

$$b_n = \frac{n^2 - 1}{n + 3} - \frac{n^2 + 1}{n - 1}\,.$$

AUFGABE 11. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n^2 + n} - n\,.$$

AUFGABE 12. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 4n}\,.$$

AUFGABE 13. Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 + 2 & , \quad x < -1 \\ \exp(x + 1) + 2 & , \quad x \geq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

AUFGABE 14. Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x \sin(\pi x) & , \quad x < 1 \\ \sqrt{x - 1} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

AUFGABE 15. Untersuchen Sie g auf Nullstellen, stetige Ergänzbarkeit, Pole und Asymptoten:

$$g(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 3}\,.$$

AUFGABE 16. Untersuchen Sie g auf Nullstellen, stetige Ergänzbarkeit, Pole und Asymptoten:

$$g(x) = \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 - x - 2}\,.$$

AUFGABE 17. Zeigen Sie, dass $u(x) = |x|$ eine Asymptote zu v ist:

$$v(x) = \sqrt{x^2 + 1}\,.$$

Aufgabe 18. Zeigen Sie, dass $u(x) = |x+1|$ eine Asymptote zu v ist:

$$v(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}\,.$$

Aufgabe 19. Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^4+1} - \sqrt{k^4-1}\right)$$

Aufgabe 20. Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^2+1} - k\right)$$

Aufgabe 21. Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+k^2}{2^k}\right)$$

Aufgabe 22. Wenden Sie das Wurzelkriterium auf diese Reihe an:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Aufgabe 23. Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}{k!}\right)$$

Aufgabe 24. Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{(2k)!}\right)$$

Aufgabe 25. Bestimmen Sie die Potenzreihe zu $f(x)$ zu $x_0 = 1$:

$$f(x) = \frac{x-1}{3+x}$$

Aufgabe 26. Bestimmen Sie die Potenzreihe zu $f(x)$ zu $x_0 = 0$:

$$f(x) = \frac{x}{4+x^2}$$

Aufgabe 27. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}(z-3)^{2k}\right)$$

Aufgabe 28. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k \cdot k!}{(k+2)!}(z-1)^k\right)$$

Aufgabe 29. Bestimmen Sie den Konvergenzkreis der Potenzreihe:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(k+2)^k}(x+1)^k\right)$$

Aufgabe 30. Bestimmen Sie den Konvergenzkreis der Potenzreihe:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(1+\frac{1}{k})^k}(x+2)^{2k}\right)$$

KAPITEL 3

Differenzialrechnung

3.1. Differenzialquotient

Wir haben bei den Potenzreihen gesehen, dass die ersten Partialsummen als Näherungen für Funktionen um den Entwicklungspunkt verwendet werden können. So nähert die lineare Funktion $1 + x$ als Partialsumme aus zwei Summanden die Exponentialfunktion um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an, wie in Abbildung 3.1.1 zu sehen ist. Warum ist die lineare Funktion im Entwicklungspunkt eine so gute Approximation? Zum einen liegt es daran, dass die Funktionswerte der beiden Funktionen übereinstimmen. Zusätzlich haben sie aber auch im Entwicklungspunkt exakt die gleiche Steigung, und nur mit beiden Eigenschaften, also als **Tangente**, kann die lineare Funktion die Exponentialfunktion lokal so gut annähern. Die Bestimmung der Steigung von Funktionen, um damit Aussagen über Funktionen zu erhalten, diese zu approximieren oder auszuwerten, ist das Grundthema der Differenzialrechnung.

SATZ 3.1. *Die **Sekante** s an eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x_1$ ist gegeben durch*

$$s(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0)\,.$$

Sekanten können verwendet werden, um Tangenten anzunähern: Dazu lässt man die Punkte x_0 und x_1 immer weiter sich annähern. In Abbildung 3.1.2 wurden Sekanten von $x_1 = 1$, 0 und $-\frac{1}{2}$ jeweils zum Funktionswert an $x_0 = -1$ gezogen. Die Sekanten nähern sich dabei immer mehr der Tangente im Punkt $x_0 = -1$ an, und deren Steigung, der so genannte **Differenzenquotient**

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

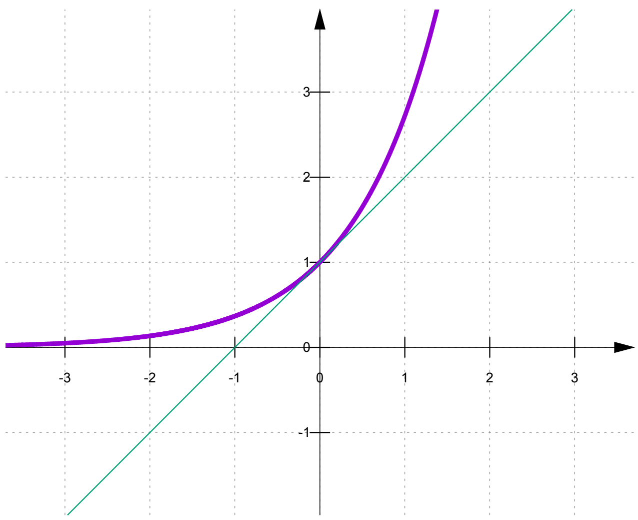


ABBILDUNG 3.1.1. Exponentialfunktion $\exp(x)$ und die Partialsummenfunktion $1 + x$

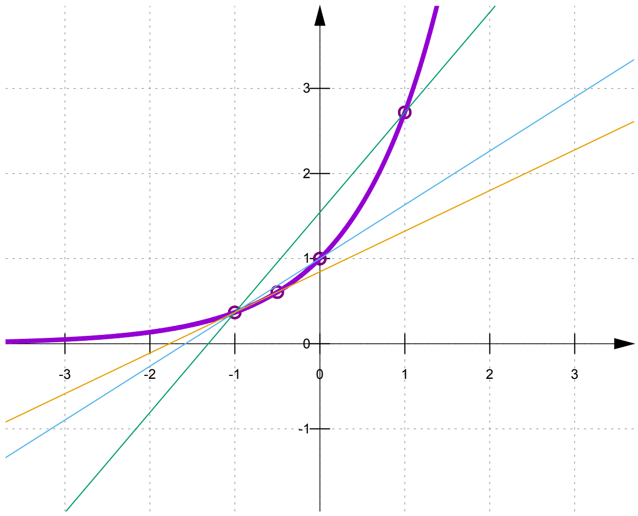


ABBILDUNG 3.1.2. $\exp(x)$ mit Sekanten von $x_0 = -1$ nach $x_1 = 1,\, 0,\, -\frac{1}{2}$

nähert sich immer mehr der Steigung der Tangente und damit der Funktion an. Genau so wird der Begriff der Ableitung definiert.

DEFINITION 3.2. Existiert für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ für ein bestimmtes $x_0 \in I$ der Grenzwert

$$m = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

so ist f an x_0 **differenzierbar** und der Grenzwert der Differentialquotient $\frac{df}{dx}$ **an** x_0 bzw. ist die Ableitung von f an x_0, geschrieben $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = m$. Ist f für jedes $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f auf I differenzierbar. Ist die so genannte **Ableitung** f' auf I stetig, so ist f **stetig differenzierbar**.

Eine grundlegende Eigenschaft von stetig differenzierbaren Funktionen zeigt der folgende Satz.

SATZ 3.3. *Mittelwertsatz. Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige und differenzierbare Funktion, so gibt es eine Zwischenstelle* $\hat{x} \in (a, b)$*, so dass* $f(b) - f(a) = f'(\hat{x})(b - a)$.

BEISPIEL 3.4. Ein Alltagsbeispiel ist dafür die Abschnittskontrolle: Wenn ein Auto einen Tunnel von 1km Länge in 36 Sekunden durchquert, so ist es im Durchschnitt 100km/h gefahren. Der Mittelwertsatz beweist uns nun, dass das Auto nicht nur im Durchschnitt sondern mindestens einmal im Tunnel exakt 100km/h gefahren sein muss, und damit auch nach Gesetz, das sich nicht um Durchschnitte kümmert, ein Knöllchen verdient hat, wenn in Wirklichkeit nur 70km/h erlaubt waren.

3.2. Ableitungen und Ableitungsregeln

Mit der Definition der Ableitung kann man elementar Ableitungen von Funktionen berechnen. Die Zusatzbedingung $x \neq x_0$ wird oft in der Notation ausgelassen, gilt aber weiterhin.

BEISPIEL 3.5. Monome der Form $f_n(x) = x^n$ sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, so ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) = n x_0^{n-1} .$$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$a^x = e^{x \ln a}$	$e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

TABELLE 1. Ableitungen von Standardfunktionen

Linearität	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
	$(af)'(x) = af'(x)$
Kettenregel	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Produktregel	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

TABELLE 2. Ableitungsregeln

Damit ist $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Tabelle 1 zeigt die Ableitungen von weiteren Standardfunktion und Tabelle 2 zeigt die wichtigsten Ableitungsregeln, die man entsprechend aus der Definition der Ableitung herleiten kann.

Eine wichtige Anwendung von Ableitungen ist die Analyse von Funktionen auf lokale **Extremwerte**, also wo Funktionen lokal ein Maximum oder ein Minimum annehmen.

DEFINITION 3.6. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat ein **lokales Maximum** oder **lokales Minimum** an einer Stelle $x \in [a, b]$, wenn es eine Umgebung $(c, d) \subset [a, b]$ um $x \in (c, d)$ gilt, dass für alle $x^* \in (c, d)$ gilt, dass $f(x) \geq f(x^*)$ beziehungsweise $f(x) \leq f(x^*)$ gilt.

Ist nun eine Funktion differenzierbar, kann man leicht Stellen identifizieren, die für lokale Maxima und Minima in Frage kommen:

SATZ 3.7. *Hat eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an $x \in (a, b)$ ein lokales Minimum oder lokales Maximum so gilt $f'(x) = 0$.*

Dieses Kriterium liefert uns kritische Punkte, die wir weiter analysieren müssen. Dies kann entweder durch lokale Werte der Funktion um den kritischen Punkt, oder das Verhalten der ersten Ableitung um diesen Punkt geschehen. Sehr einfach wird es, wenn die Funktion zweimal stetig ableitbar ist:

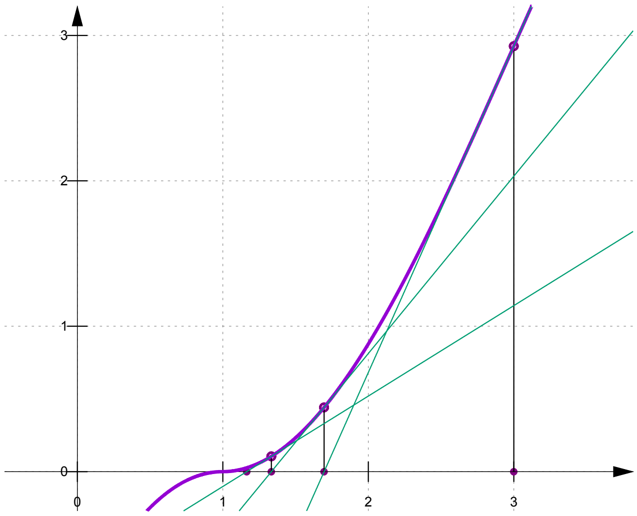


ABBILDUNG 3.2.1. Newton-Verfahren für $x_0 = 3$, $x_1 \approx 1.7$, $x_2 \approx 1.3$, $x_3 \approx 1.2$

SATZ 3.8. *Sei eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f'(x) = 0$ für ein $x \in (a,b)$. Ist $f''(x) > 0$, so hat f an x ein relatives Minimum. Ist $f''(x) < 0$, so hat f an x ein relatives Maximum.*

BEISPIEL 3.9. Ein wichtiges Verfahren zur Nullstellensuche, und allgemein zum Lösen von Gleichungen, ist das **Newton-Verfahren**: Ist eine Nullstelle einer differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gesucht, so kann man ausgehend von einem Startwert $x_0 \in (a,b)$ die dortige Tangente an f als Näherung verwenden, und soweit $f'(x_0) \neq 0$ ist, deren Nullstelle x_1 berechnen. Ist diese Nullstelle weiterhin im Intervall, so kann man weiter iterieren. Die allgemeine Vorschrift für einen Newton-Schritt lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad \text{für} \quad x_n \in (a,b)\,,\ f'(x_n) \neq 0\,.$$

In Abbildung 3.2.1 ist eine Nullstellensuche mit dem Newton-Verfahren und $x_0 = 3$ illustriert. Typischerweise konvergiert das Newton-Verfahren sehr schnell, wenn man einen guten Startwert verwendet. Ist keine Nullstelle in der Nähe kann der Verfahren sehr schnell ohne Lösung abbrechen.

Neben der Analyse von Funktionen, der Optimierung von Zielfunktionen zum Maximum oder Minimum oder der Nullstellensuche gibt es noch eine weitere wichtige Anwendung der Differenziation:

SATZ 3.10. ***Regel von l'Hospital**. Ist $I = (a,b)$ ein beschränktes Intervall und $x_0 \in I$, sowie $g, h : I \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ und für alle $x \neq x_0$ gilt $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wenn der rechte Grenzwert existiert. Entsprechende Aussagen gelten für Intervalle $I = (-\infty, b)$ oder $I = (a, \infty)$.

BEISPIEL 3.11. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{e^x-e}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{e^x-e} \overset{l.H.}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x}{e^x} = \frac{2}{e}$$

3.3. Taylorreihe

Satz 3.12. *Eine Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ *mit Konvergenzradius* $r \geq 0$ *ist in ihrem Konvergenzbereich stetig differenzierbar und hat die Ableitung*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

mit dem gleichen Entwicklungspunkt x_0 *und Konvergenzradius* r.

Aus dieser interessanten Eigenschaft der Potenzreihen können wir einen Zusammenhang der Koeffizientenfolge (a_n) und den Ableitungen von f im Entwicklungspunkt feststellen: Es ist $f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = 1 \cdot a_1 = 1$ und entsprechend mit weiteren Ableitungen $f''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 = 2a_2$, $f'''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = 3! \cdot a_3$ und so fort. Das gibt uns eine neue Möglichkeit Potenzreihen von Funktionen zu bestimmen, die in einem Punkt unendlich oft differenzierbar sind. Ist eine Funktion k-mal differenzierbar, so kann man die Partialsumme, das Taylor-Polynom k-ter Ordnung bestimmen:

Satz 3.13. *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *k-mal stetig differenzierbar und* $x_0 \in (a, b)$. *Dann ist*

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

das ***Taylorpolynom*** *von* f *im Entwicklungspunkt* x_0 *mit* k*-ter Ordnung. Ist* f *sogar* $k + 1$*-mal stetig differenzierbar, so gilt*

$$f(x) = p_k(x) + R_k(x, x_0)$$

mit $\hat{x} \in (a, b)$, *so dass*

$$R_k(x, x_0) = \frac{1}{(k + 1)!} (x - x_0)^{k+1} f^{(k+1)}(\hat{x}) \,.$$

Dieses Restglied $R_k(x, x_0)$ *wird bezeichnet als* ***Lagrangesches Restglied****.*

Mit dem Restglied kann auf einem beschränkten Intervall insbesondere der absolute Fehler abgeschätzt werden, der bei der Verwendung des Taylorpolynoms auftritt. Soweit eine Funktion hinreichend oft differenzierbar ist, und die Ableitungen nicht beliebig anwachsen, so ist eine bessere **Approximation** durch die Verwendung von Polynomen höherer Ordnung durch die sehr schnell ansteigende Fakultät im Nenner zu erwarten. In realen Anwendungen ist der Höhe der Ordnung aber oft schnell eine Grenze gesetzt, da höhere Ableitungen aufgrund von Messungenauigkeiten nicht mehr sinnvoll werden.

Beispiel 3.14. Bestimmen Sie die Taylorpolynome von $f(x) = \exp(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ bis zum zweiten Grad und schätzen Sie den maximalen Fehler bei der Approximation der Funktion durch die Taylorpolynome auf $[0, 2]$ nach oben ab.

Zunächst können wir feststellen, dass alle Ableitungen $f^{(n)}(x) = \exp(x)$ lauten, und damit $f^{(n)}(x_0) = e$ gilt. Die Taylorpolynome p_0, p_1 und p_2 lauten damit:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= e \\
p_1(x) &= e + e(x - 1) \\
p_2(x) &= e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2
\end{aligned}$$

Die Funktion und die Taylorpolynome sind in Abbildung 3.3.1 abgebildet.

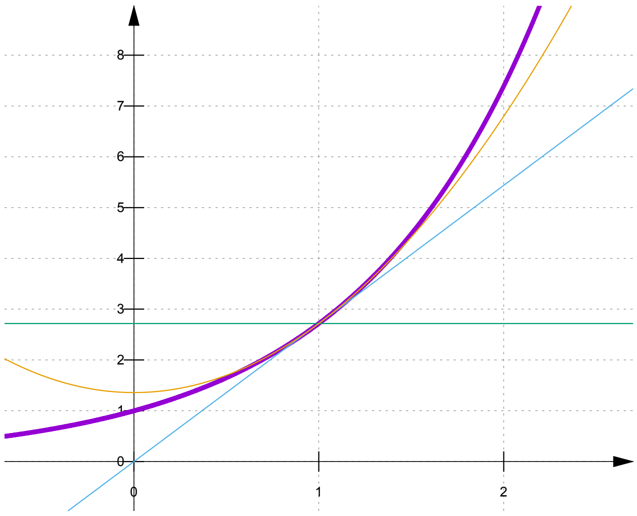


ABBILDUNG 3.3.1. Approximation von $\exp(x)$ durch Taylorpolynome um $x_0 = 1$

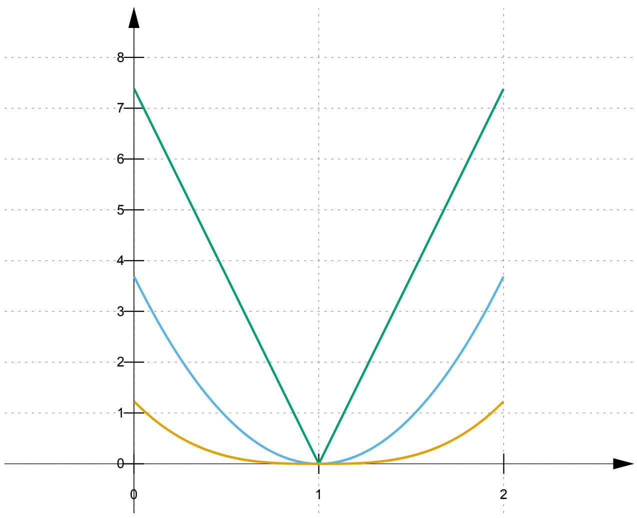


ABBILDUNG 3.3.2. Fehlerabschätzung auf $[0, 2]$ durch Taylorpolynome um $x_0 = 1$

Das Restglied gibt uns einen Hinweis für den Fehler, den wir maximal bei der Approximation erhalten. Das Problem ist jedoch, dass wir nicht wissen, welches $\hat{x}$ für das jeweilige x und x_0 den korrekten Wert ergibt. Wir können aber den betragsmäßig maximalen Wert von $f^{(n)}(\hat{x})$ im Intervall $[0, 2]$ als Abschätzung verwenden: Da alle Ableitungen $f^{(n)}(x) = \exp(x)$ lauten, und wir wissen, dass die Exponentialfunktion streng monoton steigt, ist das Maximum bei 2. Damit gilt hier für $\hat{x} \in [0, 2]$:

$$|R_n(x, 1)| = |\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\hat{x})| \leq |\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} e^2|$$

Diese Abschätzungen bei der Approximation durch Taylorpolynome auf $[0, 2]$ sind in Abbildung 3.3.2 dargestellt. Die Abschätzung der Abweichung ist jeweils am Entwicklungspunkt erwartungsgemäß 0 und wird an den Rändern maximal. Wir erhalten insgesamt:

$$|R_0(x,1)| \le e^2 \approx 7.39$$
$$|R_1(x,1)| \le \frac{e^2}{2} \approx 3.69$$
$$|R_2(x,1)| \le \frac{e^2}{6} \approx 1.23$$

In diesem Fall geht der Fehler schnell zurück, das Polynom dritter Ordnung hätte einen absoluten Fehler von weniger als 0.31, bei fünfter Ordnung weniger als 0.07. Der tatsächliche Fehler liegt aber häufig darunter, nur wenn man diesen zusätzlich exakt berechnet, bräuchte man sich keine unnötigen Gedanken mehr um Vorteile durch die vereinfachte Darstellung der Approximation zu machen.

Ist eine Funktion schließlich unendlich oft differenzierbar, so können wir die so genannte Taylorreihe definieren:

DEFINITION 3.15. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$, so ist die Reihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right)$$

die **Taylorreihe** von f im Entwicklungspunkt x_0.

Die Taylorreihe ist neben dem Koeffizientenvergleich eine weitere Methode die Potenzreihe einer Funktion in einem Entwicklungspunkt zu bestimmen. Ob und in welchem Konvergenzradius die Taylorreihe konvergiert, und ob überhaupt zur Funktion, muss man noch getrennt untersuchen.

3.4. Funktionen in mehreren Variablen

Die Definition 1.1 beschreibt den Begriff von Funktionen sehr allgemein, und bisher wurden hier hauptsächlich Funktionen in einer Variable betrachtet. In Anwendungen können auch leicht Funktionen in mehreren Variablen auftreten, beispielsweise die in Abbildung 3.4.1 dargestellte Funktion in zwei reellen Variablen:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{1 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2} \end{array}$$

Der Begriff der Stetigkeit aus Definition 2.11 ist auf für Funktionen in mehreren Variablen gültig, wenn Folgen von mehrdimensionalen Punkten der Variablen verwendet werden. Ebenso sind alle Funktionen, die aus Standardfunktionen in ihren Definitionsbereichen zusammengesetzt sind, ebenso stetig.

Der Begriff der Ableitung ist hingegen nicht ganz direkt übertragbar, da diese elementar nur in eine Richtung möglich ist. Speziell werden die Ableitungen in Richtung der Variablen, wo alle anderen Variablen konstant gehalten werden, partielle Ableitungen genannt:

DEFINITION 3.16. Existiert für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ in n Variablen auf einer offenen Menge $I \subseteq \mathbb{R}^n$ für ein bestimmtes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in I$ und ein k aus $1, \ldots, n$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

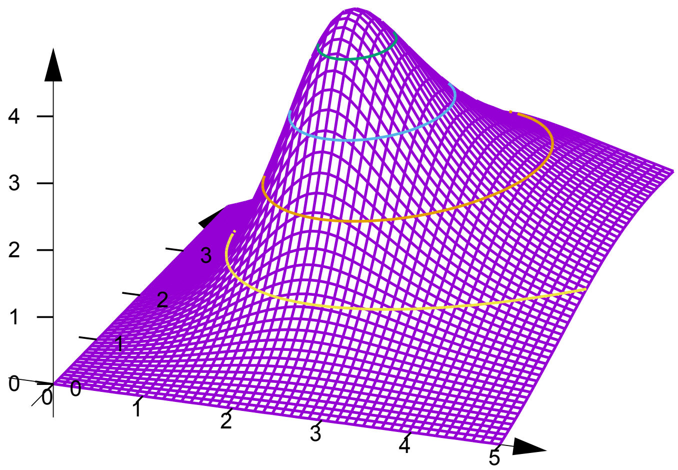


ABBILDUNG 3.4.1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{1 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2}$ mit **Höhenlinien**

so ist f an x **partiell nach** x_k **differenzierbar**. Ist eine Funktion an einem Punkt in allen Variablen partiell differenzierbar, so ist die Funktion in dem Punkt **partiell differenzierbar** und der Vektor der partiellen Ableitungen ist der **Gradient**

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} .$$

Diese Definition nimmt den Begriff des Vektors vorweg, der in Kapitel 5 noch vollständig eingeführt wird. Praktisch wird die partielle Ableitung so durchgeführt, dass nach der betreffenden Variable abgeleitet wird und alle anderen Variablen als konstant angenommen werden:

BEISPIEL 3.17. Die Funktion $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + \sin(x_2)$ hat die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) =& 2x_1 + x_2 \,, \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) =& x_1 + \cos(x_2) \end{aligned}$$

und der Gradient von g lautet damit

$$\operatorname{grad} g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + \cos(x_2) \end{pmatrix} .$$

Der Gradient hat einige spannende Eigenschaften: Ist er nicht null, zeigt er in die Richtung des größten Anstiegs, und der Gradient ist der Nullvektor, wenn ein relatives **Maximum** oder **Minimum** erreicht wird. Wie auch schon bei der Ableitung im eindimensionalen Fall ist der Null-Gradient ein wichtiges Indiz, reicht aber nicht alleine, um sicher ein Maximum oder Minimum zu identifizieren. Beispielsweise verschwindet ein Gradient auch in **Sattelpunkt**en.

3.5. Aufgaben

Aufgabe 31. Bestimmen Sie die Ableitung von
$$f(x) = (x^2 + e^x)\sin(7x + 3)\,.$$

Aufgabe 32. Bestimmen Sie die Ableitung von
$$f(x) = \big(x^3 + \sin(x)\big) \cdot e^{3x+2}\,.$$

Aufgabe 33. Bestimmen Sie die Ableitung von
$$g(x) = \frac{\ln(x) + 2^x}{\cos^2(x)}\,.$$

Aufgabe 34. Bestimmen Sie die Ableitung von
$$g(x) = \frac{x^2 + 4x}{\ln(x)}\,.$$

Aufgabe 35. Bestimmen Sie die Ableitung von
$$h(x) = x^x \cdot \sqrt{\ln x}\,.$$

Aufgabe 36. Bestimmen Sie die Ableitung von
$$h(x) = (\ln(x))^{\sqrt{x}}\,.$$

Aufgabe 37. Bestimmen Sie die Extremwerte und deren Art von
$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 - 4\,.$$

Aufgabe 38. Bestimmen Sie die Extremwerte und deren Art von
$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 1\,.$$

Aufgabe 39. Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens zu $g(x)$ ab $x_0 = 1$ durch:
$$g(x) = x^3 - 2\,.$$

Aufgabe 40. Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens zu $g(x)$ ab $x_0 = 2$ durch:
$$g(x) = 5 - x^2\,.$$

Aufgabe 41. Berechnen Sie
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\,.$$

Aufgabe 42. Berechnen Sie
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\,.$$

Aufgabe 43. Stellen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 2$ auf zu
$$f(x) = \exp(x/2)\,.$$

AUFGABE 44. Stellen Sie die Taylorreihe um $x_0 = -1$ auf zu

$$f(x) = \exp(2 - x)\,.$$

AUFGABE 45. Bestimmen Sie die Taylorpolynome bis 2. Ordnung um $x_0 = 1$ zu

$$g(x) = \frac{1}{x+1}\,.$$

AUFGABE 46. Bestimmen Sie die Taylorpolynome bis 2. Ordnung um $x_0 = 2$ zu

$$g(x) = x^3 - 2x\,.$$

AUFGABE 47. Stellen Sie das Taylorpolynom 1. Ordnung an $x_0 = \frac{1}{4}$ samt Restglied auf $\mathbb{R}$ auf zu

$$h(x) = \sin(\pi x)\,.$$

AUFGABE 48. Stellen Sie das Taylorpolynom 1. Ordnung an $x_0 = 1$ samt Restglied auf $\mathbb{R}$ auf zu

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

AUFGABE 49. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = (x + y)^3 - x^2 y\,.$$

AUFGABE 50. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = x^3 - x \cdot \sin(x \cdot y^2)\,.$$

AUFGABE 51. Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\,.$$

AUFGABE 52. Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion

$$g(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_2) \cdot x_1}{1 + x_1^4}\,.$$

AUFGABE 53. Bestimmen Sie Nullstellen des Gradienten von

$$h(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + 4x_1^2\,.$$

AUFGABE 54. Bestimmen Sie Nullstellen des Gradienten von

$$h(x_1, x_2) = x_2^2 + x_1^2 - 2x_2 + 1\,.$$

KAPITEL 4

Integralrechnung

4.1. Integration

Die Integration hat nicht nur die Rolle einer gewissen Umkehrung der Differenziation, sondern sie kann auch sich aufsummierende Effekte einer veränderlichen Größe abbilden oder Flächeninhalte bestimmen. Es gibt verschiedene Methoden die Integration einzuführen. Die hier verwendete Einführung nach Lebesgue ist eine modernere Definition, die heutzutage in Wissenschaft und Technik am häufigsten verwendet wird. Speziell erleichtert sie weiterführende Methoden wie der Laplace- oder Fouriertransformation und auch die kontinuierliche Stochastik. Um ein Integral zu bestimmen, werden Treppenfunktionen verwendet:

DEFINITION 4.1. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine **Treppenfunktion**, wenn es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$ und Konstanten $c_1, \ldots, c_k$ gibt, so dass

$$f(x) = c_i \text{ für } x \in (x_{i-1}, x_i)\,.$$

Für eine positive Treppenfunktion f wie in Abbildung 4.1.1 kann man das geometrische Integral, das ist die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse auf $[a, b]$ wie in Abbildung 4.1.2 leicht angeben:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{k} c_n \cdot (x_n - x_{n-1})$$

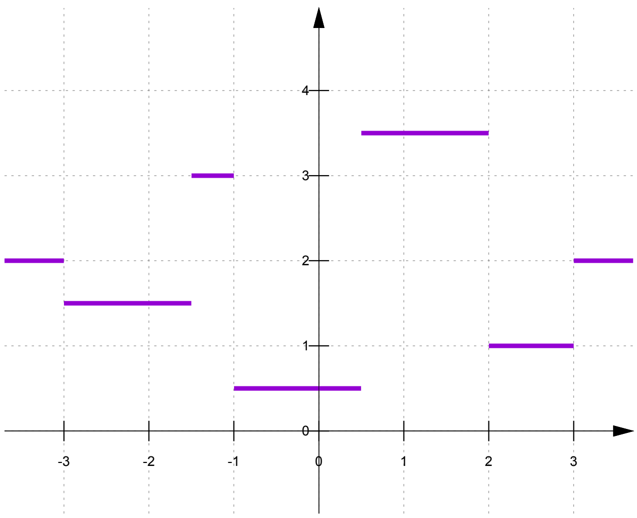


ABBILDUNG 4.1.1. Eine Treppenfunktion

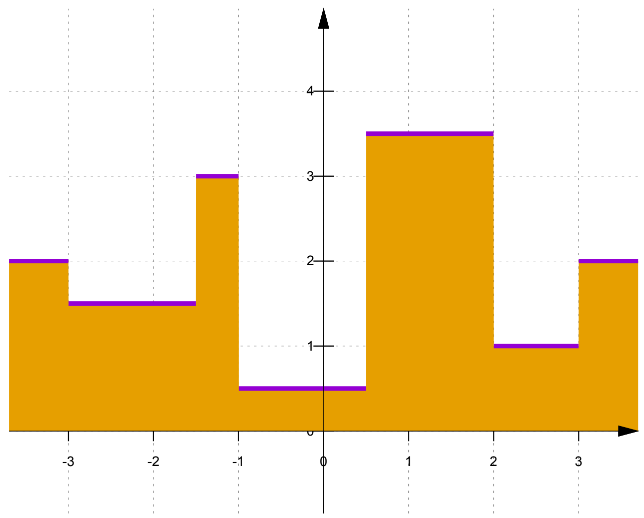


ABBILDUNG 4.1.2. Fläche unter einer Treppenfunktion

DEFINITION 4.2. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt **Nullmenge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Intervalle J_n gibt, deren Vereinigung M überdecken

$$M \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$$

und die Länge aller Intervalle in der Summe kleiner als ε ist, also

$$\sum_{n=0}^{\infty} |J_n| < \varepsilon$$

gilt.

Die Menge der rationalen Zahlen ist beispielsweise eine Nullmenge. Wir benötigen die Nullmengen, da sich Funktionen, die sich nur in Punkten von Nullmengen unterscheiden, am Ende den gleichen Integralwert haben werden. Wenn man dies nicht berücksichtigt, beispielsweise durch eine andere Herleitung des Integralbegriffs, werden weitere Anwendungen deutlich aufwendiger.

Wir werden nun zu integrierende Funktionen f durch eine monoton steigende Folge von Treppenfunktionen f_i annähern.

DEFINITION 4.3. Eine Folge von Treppenfunktionen (f_i) auf $[a, b]$ ist monoton steigend, wenn für alle $x \in [a, b]$ die Ungleichung $f_{i+1}(x) \geq f_i(x)$ gilt.

Mit so einer Folge nähert man eine Funktion f an, wenn die folgende Definition gilt:

DEFINITION 4.4. Die Funktionsfolge von Treppenfunktionen (f_i) konvergiert **fast überall punktweise** gegen die Funktion f, wenn es eine Nullmenge M gibt, so dass für alle $x \in [a, b] \backslash M$ der Grenzwert $\lim\limits_{i \to \infty} f_i(x) = f(x)$ ist.

Jetzt verbleibt nur noch ein technisches Problem, dass nicht alle Funktionen, wie zum Beispiel

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

auf $(0, 1)$, durch eine steigende Folge von Treppenfunktionen angenähert werden kann, jedoch eine Annäherung durch eine fallende Folge von Treppenfunktionen funktionieren würde. Um diesem Problem zu entgehen, stellen wir die Funktion durch die Differenz zweier Funktionen dar, die dann beide von unten angenähert werden können.

DEFINITION 4.5. Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann bezeichnet $L^{\uparrow}(I)$ die Menge der Funktionen, die fast überall punktweise Grenzwert einer monoton steigenden Folge von Treppenfunktionen $(f_i^{\uparrow})$ sind, für die die Integralfolge $\left(\int_a^b f_i^{\uparrow}(x)\,dx\right)$ konvergiert. Für $f \in L^{\uparrow}(I)$ sei dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{i\to\infty} \int_a^b f_i^{\uparrow}(x)\,dx\,.$$

Die Menge $L(I)$, eine Funktion darin wird als **Lebesgue-integrierbare Funktion** über dem Intervall $I = (a, b)$ bezeichnet, ist definiert als

$$\begin{aligned} L(I) &= L^{\uparrow}(I) - L^{\uparrow}(I) \\ &= \{ f = f_1 - f_2 : \ f_1, f_2 \in L^{\uparrow}(I) \}\,, \end{aligned}$$

also der Menge der Funktionen, die aus der Differenz zweier konvergierende ansteigender, integrierbarer Funktionsfolgen fast überall punktweise angenähert werden kann, mit dem Integralwert

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx\,.$$

Genau genommen ist noch nachzuweisen, dass die Wahl der Zerlegung in die zwei Funktionen den Integralwert nicht verändert, also die Definition überhaupt **wohldefiniert** ist, also überhaupt grundsätzlich Sinn macht. Dieser etwas technische Teil ist in der Literatur [**3**] zu finden.

Die Tabelle 3 zeigt verschiedene Eigenschaften des Lebesgue-Integrals. Die bisherige Definition sagt uns leider nur sehr undeutlich, welche Funktionen wirklich integrierbar sind, doch glücklicherweise reicht es schon, dass eine Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall stetig ist:

Linearität	$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
Zerlegung des Integrationsintervalls	$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$
Monotonie	Ist $f \leq g$ fast überall, so ist $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,.$
Integrationsrichtung	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

TABELLE 3. Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

SATZ 4.6. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f \in L((a, b))$.*

4.2. Stammfunktionen

SATZ 4.7. ***1. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**. Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) = \int_a^x f(z)\,dz$$

mit einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auf (a, b) stetig differenzierbar und es gilt für alle $x \in (a, b)$

$$F'(x) = f(x)\,.$$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx + C$
a	ax
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n \neq -1$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$a^x = e^{x \ln a}$	$\frac{e^{x \ln a}}{\ln a} = \frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{arsinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\mathrm{arcosh} \pm x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\tan x} = -\cot x$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\tanh x$	$\ln\cosh x$

TABELLE 4. Wichtige Stammfunktionen

Mit diesem Satz erhalten wir den direkten Zusammenhang zwischen der Integration und Differenziation und den Begriff der Stammfunktion:

DEFINITION 4.8. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Jede Funktion $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ ist eine **Stammfunktion** von f.

Stammfunktionen sind nicht eindeutig: Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist auch die Funktion G mit $G(x) = F(x) + C$ für ein beliebiges $C \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion von f, da die Konstante bei der Differenziation verschwindet. Für die Berechnung einer Stammfunktion wird die Schreibweise eines so genannten unbestimmten Integrals ohne Grenzen verwendet. Bei der Berechnung ist aber immer zu berücksichtigen, dass das Ergebnis nur bis auf eine **Integrationskonstante** eindeutig ist. Dies wird so geschrieben:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Kennt man eine Stammfunktion eines Integranden, so kann man ein bestimmtes Integral mit Grenzen leicht ausrechnen:

SATZ 4.9. ***2. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung***. *Ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und stetig differenzierbare Funktion und die Ableitung F' auf (a,b) integrierbar, also $F' \in L((a,b))$, so ist*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Die Tabelle 4 zeigt einige der wichtigsten Stammfunktionen.

4.3. Integrationsregeln

Während die Differenziation systematisch durchgeführt werden kann, ist die Integration deutlich schwieriger durchzuführen.

4.3.1. Grundlegende Techniken. Eine wichtige Strategie ist es, das zu bestimmende Integral auf bekannte Stammfunktionen zurück zu führen. Die Linearität der Integration ist dabei ein sehr wichtiges Hilfsmittel:

BEISPIEL 4.10. Bestimmen Sie die beiden Stammfunktionen

$$\int \left(4x^2 + 5x^3 + e^{3x} - \cos(2x)\right)\, dx\,,$$
$$\int \left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{\cosh x}{e^x}\right)\, dx\,.$$

Für die erste Aufgabe sollte man die Summanden zunächst durch die Linearität in einzelne Integrale trennen, und dann die Terme so umformen, dass sie als Ableitungen einer einfachen Stammfunktion identifiziert werden können:

$$\begin{aligned}\int \left(4x^2 + 5x^3 + e^{3x} - \sin(2x)\right)\, dx &= 4\int x^2\, dx + 5\int x^3\, dx + \int e^{3x}\, dx - \int \cos(2x)\, dx\\ &= \frac{4}{3}\int 3x^2\, dx + \frac{5}{4}\int 4x^3\, dx + \frac{1}{3}\int 3e^{3x}\, dx - \frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\, dx\\ &= \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}\sin(2x) + C\end{aligned}$$

Im zweiten Beispiel hilft es, grundlegende Definitionen oder bekannte Identitäten zu verwenden: So ist laut Additionstheorem aus Satz 1.9 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ und wir kennen die Definition des Cosinus Hyperbolicus $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int \left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{\cosh x}{e^x}\right)\, dx &= \frac{1}{2}\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x}\, dx\\ &= \frac{1}{2}\int \sin x\, dx + \frac{1}{2}\int 1\, dx + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx\\ &= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

Gerade bei Brüchen ist die Kettenregel beim Logarithmus eine sehr große Hilfe:

SATZ 4.11. *Logarithmisches Integral. Für eine integrierbare und differenzierbare Funktion f gilt:*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$

BEISPIEL 4.12. Bestimmen Sie die Stammfunktion $\int \frac{2x+1}{x^2+1}\, dx$.

Da die Ableitung von $x^2 + 1$ gerade $2x$ ist, können wir das Integral zerlegen und erhalten das Ergebnis mit Hilfe der Tabelle 4:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \ln|x^2+1| + \arctan x + C$$

4.3.2. Partialbruchzerlegung. Die Partialbruchzerlegung ermöglicht die Integration von gebrochen rationalen Funktionen. Hier wird der polynomiale Bruch in die Faktoren des Nenners aufgeteilt.

(1) Ist der Grad des Zählers höher als der des Nenners, so wird eine Polynomdivision durchgeführt. Alle ungebrochenen Anteile können direkt integriert werden.
(2) Der Nenner wird in seine Nullstellen oder quadratischen Anteile faktorisiert.
(3) Es wird der Partialbruch-Ansatz mit Unbekannten aufgestellt: Quadratische Faktoren im Nenner erhalten einen Partialbruch mit Koeffizienten $Ax + B$ im Zähler, Nullstellen erhalten nach Vielfachheit jeweils für jede Ordnung einen Bruch mit einzelnen Koeffizienten.

(4) Die Partialbrüche werden durch Erweitern addiert und der Koeffiziententerm wird mit dem Ergebnis nach Schritt 1 verglichen, und die Koeffizienten identifiziert.
(5) Elementare Integration der einzelnen Summanden.

Beispiel 4.13. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \frac{2x^3}{(1+x^2)(x-1)^2}\,dx\,.$$

Die ersten beiden Schritte sind hier nicht erforderlich, da zum einen der Zählergrad 3 und der Nennergrad 4 ist, und der Nenner schon komplett faktorisiert ist. Der Ansatz für die Partialbrüche ergibt dann:

$$\begin{aligned}
&\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}\\
=\;&\frac{A(x^3-2x^2+x)+B(x^2-2x+1)+C(1+x^2)+D(x^3-x^2+x-1)}{(1+x^2)(x-1)^2}\\
=\;&\frac{(A+D)x^3+(-2A+B+C-D)x^2+(A-2B+D)x+(B+C-D)}{(1+x^2)(x-1)^2}\\
\overset{!}{=}\;&\frac{2x^3}{(1+x^2)(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Der folgende Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
 & A & & & & & + & D & = & 2 & (1)\\
- & 2A & + & B & + & C & - & D & = & 0 & (2)\\
 & A & - & 2B & & & + & D & = & 0 & (3)\\
 & & & B & + & C & - & D & = & 0 & (4)
\end{array}$$

Da wir aus (4) erfahren, dass $B+C-D=0$, muss bei (2) wegen $-2A+B+C-D=0$ auch $A=0$ sein. Daher ist nach (1) $D=2$, und gemäß (3) ist dann $B=1$. Es verbleibt C aus (4) zu bestimmen, und wir erhalten $C=1$. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3}{(1+x^2)(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(1+x^2)}\,dx \int +\frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)}\,dx\\
&= \arctan x - \frac{1}{(x-1)} + 2\ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

4.3.3. Integration durch Substitution. Die Integration durch Substitution haben wir schon vereinfacht in den grundlegenden Verfahren kennengelernt. Sie ist die Übertragung der Kettenregel aus der Differenziation.

Satz 4.14. *Für eine integrierbare Funktion f und eine differenzierbare und umkehrbare Funktion u gilt:*

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Beispiel 4.15. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \frac{\sin(\arctan x)}{1+x^2}\,dx.$$

Hier ist zu erkennen, dass die Funktion $u(x)=\arctan x$ sowohl als Argument als auch die Ableitung $u'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ als Faktor zu finden ist. Damit erhalten wir mit der Substitutionsformel

$$\int \frac{\sin(\arctan x)}{1+x^2}\,dx \overset{\substack{u=\arctan x\\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{1+x^2}}}{=} \int \sin(u)\,du = -\cos(u)+C = -\cos(\arctan x)+C'\,.$$

4.3.4. Partielle Integration. Die partielle Integration ist die Übertragung der Produktregel der Differenziation in die Integration. Hier können wir Faktoren von Integranden gegeneinander integrieren oder differenzieren.

SATZ 4.16. *Für differenzierbare und integrierbare Funktionen u und v gilt:*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

BEISPIEL 4.17. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int x^2 \cos x\,dx\,.$$

In diesem Beispiel kann durch zweimalige Differenziation des Monoms x^2 dieses reduziert werden, und die Integration von $\cos x$ ist kein Problem. Daher erhalten wir mit zweimaliger partieller Integration:

$$\int x^2 \cos x\,dx \overset{\substack{u=x^2 \quad u'=2x\\ v'=\cos x \quad v=\sin x}}{=} x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$$

$$\overset{\substack{u=x \quad u'=1\\ v'=\sin x \quad v=-\cos x}}{=} x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C$$

4.4. Integraltransformationen

SATZ 4.18. ***Lebesguescher Konvergenzsatz**. Sei (f_n) eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f_n \in L(I)$ über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, die punktweise fast überall gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergieren, und es existiert eine integrierbare Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in L(I)$, so dass $|f_n(x)| < g(x)$ für fast alle $x \in I$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx\,.$$

Dieser Satz sagt uns nicht nur, dass wir mit einer integrierbaren Majorante die Integrierbarkeit des Grenzwerts gegeben ist, sondern die Werte stimmen bei vertauschtem Limes sogar überein. Genau diese Eigenschaft benötigen wir, um die Stetigkeit von Parameterintegralen zu analysieren:

SATZ 4.19. ***Stetigkeit von Parameterintegralen**. Sei $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ für $a, b \in R$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so dass $f(\cdot, x)$ für fast alle $x \in I$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$ ist, und gibt es für alle $t \in [a, b]$ eine Funktion $g \in L(I)$ mit $|f(t, x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in I$, so ist die Funktion*

$$G(t) = \int_I f(t, x)\,dx$$

eine stetige Funktion $G : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Auch eine Ableitbarkeit kann vom Integranden abgeleitet werden:

SATZ 4.20. ***Differenzierbarkeit von Parameterintegralen**. Sei $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ für $a, b \in R$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f(\cdot, x)$ für fast alle $x \in I$ ableitbar, und es gibt für alle $t \in [a, b]$ eine integrierbare Funktion $g \in L(I)$ mit $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leq g(x)$ für fast alle $x \in I$, so ist das Parameterintegral*

$$G(t) = \int_I f(t, x)\,dx$$

differenzierbar und hat die Ableitung

$$G'(t) = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\,dx$$

für alle $t \in [a, b]$.

Damit haben wir die Möglichkeit zwei wichtige Integraltransformationen zu definieren, zunächst die Laplacetransformation:

DEFINITION 4.21. Zu einer Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ ist auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ die **Laplacetransformation** von f definiert als

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

für $s \in J$, soweit das Integral existiert.

BEISPIEL 4.22. Bestimmung von $\mathcal{L}t^2$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^2 e^{-st}\,dt &= \underbrace{\left[-\frac{1}{s}t^2 e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty}}_{=0} + \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}\,dt \\ &= \underbrace{\left[-\frac{2}{s^2}te^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty}}_{=0} + \frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\,dt \\ &= \left[-\frac{2}{s^3}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{2}{s^3}\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{L}t^2(s) = \frac{2}{s^3}$. Generell ist für $p_n(t) = t^n$ die Laplacetransformierte gegeben durch $\mathcal{L}p_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, und dank der Linearität des Parameterintegrals kann man damit beliebige Polynome transformieren.

Warum sollte man nun überhaupt eine Laplacetransformation durchführen? Das wird im nächsten Beispiel ersichtlich:

BEISPIEL 4.23. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion $f \in L([0, \infty))$ für die die folgenden Integrale existieren und mit Laplacetransformierter $\mathcal{L}f(s)$. Dann ist die Laplacetransformierte der Ableitung $\mathcal{L}f'(s)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f'(s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt \\ &= \left[-f(t)e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = f(0) + s\mathcal{L}f(s)\,,\end{aligned}$$

also der Laplacetransformierten multipliziert mit s und einem Anfangswert. Das bedeutet, dass Gleichungen mit Ableitungen von Funktionen, so genannte Differenzialgleichungen, in Gleichungen mit Polynomen umgewandelt, und so auch gelöst werden können.

Eine ebenso wichtige Integraltransformation, die statt der Geschehnisse ab einem Zeitpunkt $t = 0$ wie bei der Laplacetransformation, eher globale Zusammenhänge analysieren kann, ist die Fouriertransformation:

DEFINITION 4.24. Für eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g \in L(\mathbb{R})$ definieren wir die **Fouriertransformation** $\mathcal{F}g(\omega)$ durch das Parameterintegral

$$\mathcal{F}g(\omega) = \int_{-\infty}^\infty g(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

soweit das Integral existiert.

4.5. Aufgaben

Aufgabe 55. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \left(6x^2 + 2e^{-x} + e^{-x}\cosh(x)\right)\, dx\,.$$

Aufgabe 56. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{1+x^2}\right)\, dx\,.$$

Aufgabe 57. Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi/4} \frac{2\cos(2x)}{2+\sin(2x)}\, dx.$$

Aufgabe 58. Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^4 \frac{x+1}{x^2+2x}\, dx.$$

Aufgabe 59. Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx\,.$$

Aufgabe 60. Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\, dx\,.$$

Aufgabe 61. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int x^2 e^x\, dx\,.$$

Aufgabe 62. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int x\cos(2x)\, dx\,.$$

Aufgabe 63. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int x^3 \ln x\, dx\,.$$

Aufgabe 64. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int x^2 \ln(2x)\, dx.$$

Aufgabe 65. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}\, dx\,.$$

Aufgabe 66. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \frac{2x^2+x-2}{x^3-x^2}\, dx\,.$$

KAPITEL 5

Vektoren und lineare Gleichungssysteme

5.1. Vektoren und Vektorräume

Unter einem Vektor verstehen wir vereinfacht gesagt einen Pfeil, der eine Richtung und eine Länge hat. Das Konzept lässt sich deutlich erweitern, und um zu definieren, welche Zusammenhänge dafür vorausgesetzt werden, wird ein Vektorraum definiert.

DEFINITION 5.1. Ein **Vektorraum** über $\mathbb{R}$ ist eine Menge V von **Vektoren** mit einer Addition $+ : V \times V \to V$, einer Multiplikation mit einem Skalar $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ und einem Nullvektor $\mathbf{0} \in V$, so dass für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$(V1)$	$\lambda \cdot u + v \in V$	Abgeschlossenheit
$(V2)$	$(u + v) + w = u + (v + w)$	Assoziativität
$(V3)$	$\mathbf{0} + v = v$	Neutrales Element
$(V4)$	Es gibt ein $v' \in V$ mit $v + v' = \mathbf{0}$	Inverse Elemente
$(V5)$	$u + v = v + u$	Kommutativität
$(V6)$	$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$	
$(V7)$	$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$	
$(V8)$	$(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$	
$(V9)$	$1 \cdot v = v$	

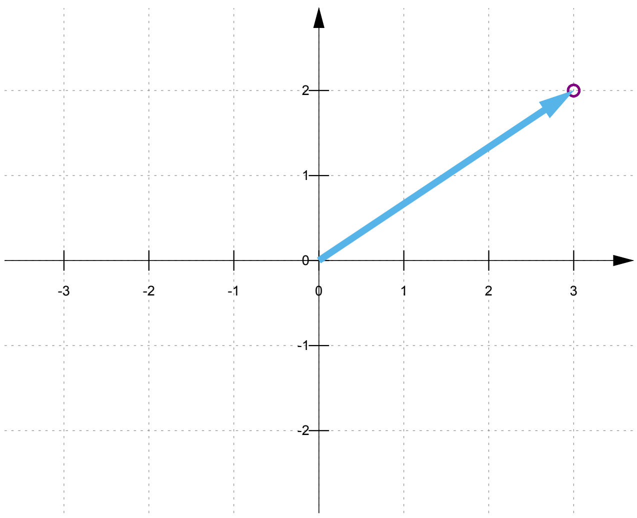


ABBILDUNG 5.1.1. Der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ im kartesischen $\mathbb{R}^2$

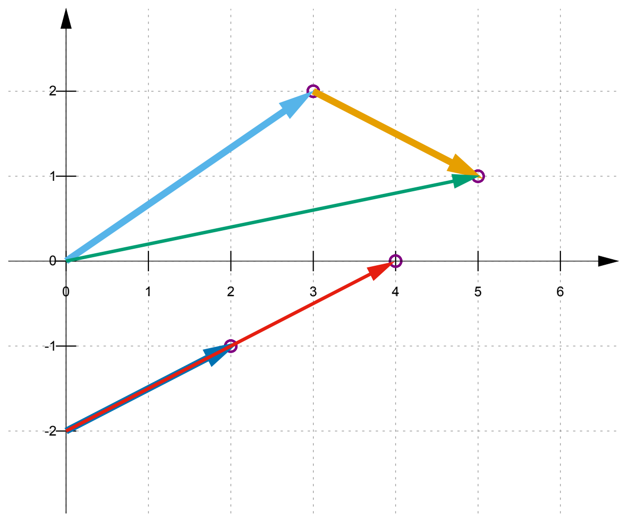


ABBILDUNG 5.1.2. Addition $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ und Skalierung $2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

Entsprechend ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, wenn die Eigenschaften über $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ erfüllt sind.

Im Folgenden werden alle weitere Eigenschaften für reelle Vektorräume beschrieben, die typischerweise ebenso auf komplexen Vektorräume definiert werden können. Soweit es Unterschiede gibt, werden diese aufgeführt.

Das sieht nach einer sehr komplizierten Definition für die Anschauungsräume wie $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ aus mit nahe liegender komponentenweise Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar, doch umfasst diese Definition auch Räume von Funktionen. Diese sind viel größer, verhalten sich aber in vielen Bereichen wie die Anschauungsräume und erlauben die Lösung von deutlich komplexeren Aufgaben.

BEISPIEL 5.2. Die Menge $\mathbb{R}^2$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, mit Vektoren der Form

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\,,\ v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\,,$$

wo die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda\in\mathbb{R}$ komponentenweise definiert wird:

$$u+v=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\,,\ \lambda\cdot v=\begin{pmatrix}\lambda v_1\\\lambda v_2\end{pmatrix}\,.$$

Vektoren können mit Hilfe der **Transposition**, wo die Rolle von Reihen und Spalten vertauscht wird, auch als „liegende“ statt „stehender“ Vektoren geschrieben werden,

$$x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(1,2,3)^\top\in\mathbb{R}^3\,.$$

Die Menge $V=\{a_0+a_1x+a_2x^2\ :\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{C}\}$ der Polynome von bis zu zweitem Grad mit komplexwertigen Koeffizienten ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Für Polynome $p,q\in V$ und ein Skalar $\lambda\in\mathbb{C}$ definiert man dann die Vektor-Addition und die Multiplikation mit einem Skalar so:

$$\begin{aligned}p+q&=p_0+p_1x+p_2x^2+q_0+q_1x+q_2x^2=(p_0+q_0)+(p_1+q_1)x+(p_2+q_2)x^2\\\lambda\cdot p&=\lambda\cdot(p_0+p_1x+p_2x^2)=(\lambda p_0)+(\lambda p_1)x+(\lambda p_2)x^2\end{aligned}$$

Wie im Beispiel zuvor werden die Operationen komponentenweise durchgeführt. Man kann so die verschiedenen Eigenschaften eines Vektorraums nachweisen.

Damit können wir in Vektorräumen rechnen und Zusammenhänge herstellen. Ein sehr wichtiger Zusammenhang ist die lineare Kombination mehrerer Vektoren:

DEFINITION 5.3. Seien $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)} \in V$ Vektoren eines reellen Vektorraums und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalare Koeffizienten. Dann ist

$$v = \alpha_1 \cdot u^{(1)} + \ldots + \alpha_n u^{(n)}$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ und die Menge

$$U =< u^{(1)}, \ldots, u^{(n)} >= \{\alpha_1 \cdot u^{(1)} + \ldots + \alpha_n u^{(n)} : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

aller möglichen Linearkombinationen ist die **lineare Hülle** der Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$.

Solche linearen Hüllen ergeben einen **Untervektorraum** mit den gleichen Eigenschaften des ursprünglichen Vektorraums, wenn sie ihn nicht schon vollständig ausfüllen.

DEFINITION 5.4. Die Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)} \in V$ sind **linear abhängig**, wenn der Nullvektor eine Linearkombination der Vektoren ist, und mindestens ein Koeffizient dabei nicht 0 ist, es also $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $\alpha_k \neq 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so dass

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot u^{(1)} + \ldots + \alpha_n u^{(n)} \,.$$

Dann ist mindestens einer der Vektoren durch die anderen als Linearkombination darstellbar. Ist das nicht möglich, so sind die Vektoren **linear unabhängig**.

Dadurch können Vektorräume nun mit Hilfe von erzeugenden Vektoren beschrieben werden:

DEFINITION 5.5. Ist die lineare Hülle einer Menge von Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)} \in V$ gleich dem Vektorraum selbst

$$< u^{(1)}, \ldots, u^{(n)} >= V \,,$$

so ist die Menge der Vektoren ein **Erzeugendensystem**. Ist die Menge der Vektoren dabei auch linear unabhängig, so ist die Menge eine **Basis** des Vektorraums und die Anzahl der Basisvektoren die **Dimension** kurz $\dim V$ des Vektorraums V.

Für diese Definition muss man prüfen, ob sie wohldefiniert ist, also die Dimension unabhängig von der Wahl der Basis ist.

BEISPIEL 5.6. Die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind die **Standardbasis** des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden aber ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Je nach zu lösender Aufgabe kann es hilfreich sein, ein Problem in einer anderen Basis darzustellen.

Einen Winkel- und Längenbegriff können wir mit Hilfe eines Skalarprodukts zwischen zwei Vektoren definieren:

DEFINITION 5.7. Ein **Skalarprodukt** eines reellen Vektorraums ist eine Abbildung $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften für $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w\,,\ (\lambda u)\cdot w = \lambda\cdot(u\cdot w)$	Linearität im ersten Argument
$u\cdot v = v\cdot u$	Kommutativität
$u\cdot u \geq 0\,,$ und $u\cdot u = 0$ nur wenn $u = \mathbf{0}$	Positive Definitheit

Für ein Skalarprodukt in komplexen Vektorräume gilt die Linearität auch für komplexe Faktoren und statt der Kommutativität gilt **Hermitizität** $u\cdot v = \overline{v\cdot u}$. Ein Vektorraum mit Skalarprodukt ist ein **Euklidischer Vektorraum**.

Sowohl für das Produkt mit einem Skalar als auch für das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren wird ein einfacher Punkt „·“ verwendet. Die Art der Multiplikation wird durch die Faktoren bestimmt. Soweit der Zusammenhang dies erlaubt, wird oft auch auf den Punkt zwischen zwei Vektoren oder zwischen Skalar und Vektor verzichtet.

BEISPIEL 5.8. Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist das **Standardskalarprodukt** die Summe der komponentenweisen Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Im Vektorraum der auf einem Intervall I quadratisch integrierbaren reellen Funktionen

$$L^2(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\ :\ \int_I |f(x)|^2\,dx < \infty\}$$

ist das Standardskalarprodukt das Integral des punktweisen Funktionenprodukts:

$$f\cdot g = \int_I f(x)\cdot g(x)\,dx, \text{ für } f, g \in L^2(I)\,.$$

In komplexen Vektorräumen werden bei den Standardskalarprodukten die rechten Seiten komplex konjugiert, um die Hermitizität und positive Definitheit zu erreichen. So ist das Standardskalarprodukt von $\mathbb{C}^2$ beispielsweise

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2\,.$$

In einem euklidischen Vektorraum ergibt sich eine natürliche Norm:

DEFINITION 5.9. In einem euklidischen Vektorraum V ist die **Norm** oder **Länge** eines Vektors $u \in V$ definiert als $||u|| = \sqrt{u\cdot u}\,$.

Außerdem erklärt ein euklidischer Vektorraum auch Winkel zwischen zwei Vektoren:

DEFINITION 5.10. In einem euklidischen Vektorraum V ist der Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ zwischen zwei Vektoren $u, v \in V$ definiert durch

$$\cos\alpha = \frac{u\cdot v}{||u||\cdot||v||}\,.$$

Die beiden Vektoren werden genau dann **orthogonal** zu einander bezeichnet, $u \perp v$, wenn $u\cdot v = 0$ gilt.

Speziell im $\mathbb{R}^3$ gibt es noch ein spezielles Produkt, das viele Notationen erleichtert:

DEFINITION 5.11. Für $u, v \in \mathbb{R}^3$ ist das **Kreuzprodukt** $u \times v$ der beiden Vektoren definiert durch

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

SATZ 5.12. *Eigenschaften des Kreuzprodukts.*

(1) *Sind $u, v \in V$ linear abhängig, so ist $u \times v = \mathbf{0}$.*
(2) *Sind $u, v \in V$ linear unabhängig, so ist $w = u \times v$ senkrecht auf u und v, $w \perp u$ und $w \perp v$.*
(3) *Das Kreuzprodukt ist antisymmetrisch $u \times v = -v \times u$.*
(4) *Es gilt $||u \times v|| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \sin\varphi$, wobei $\varphi \in [0, \pi]$ den Winkel zwischen u und v beschreibt, also dem Flächeninhalt dem von u und v aufgespannten Parallelogramms beträgt.*

5.2. Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme treten in vielen Situationen auf. Dieses Kapitel behandelt die Darstellung, graphische Interpretation, Lösungsmethoden und Lösungstheorie.

DEFINITION 5.13. Ein **lineares Gleichungssystem** (**LGS**) in n Variablen (x_i) und mit m Gleichungen ist mit **Koeffizienten** $(a_{ij}) \in \mathbb{C}$ und (b_i) darstellbar:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Sind alle $b_i = 0$, so ist das LGS **homogen**, sonst **inhomogen**.

Ein Gleichungssystem kann mit Hilfe von einer Matrix und zwei Vektoren auch als eine vektorielle Gleichung geschrieben werden. Hier ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Das LGS lässt sich dann schreiben als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}$$

Oder in Kurzform $Ax = b$. Die Vektor-Matrix-Multiplikation erzeugt in der wiederholten Multiplikation der Elemente in einer Zeile von A mit dem Spaltenvektor x und Summation der einzelnen Produkte ergibt mit der rechten Seite genau die erste Zeile des ursprünglichen Problems.

Zum Lösen von linearen Gleichungssystemen gibt es verschiedene Methoden. Gerade bei größeren Gleichungssystemen ist es sehr empfehlenswert, systematisch mit dem **Gauß-Jordan-Verfahren** vorzugehen. Das Verfahren benutzt drei **elementare Umformungen**, die die Lösung des LGS nicht verändern:

(1) Vertauschen von Gleichungen,
(2) Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\lambda \neq 0$,
(3) Addition einer mit einem Faktor λ multiplizierten Gleichung zu einer anderen.

Im Gauß-Jordan-Verfahren wird das LGS im ersten Teil, dem Gaußverfahren, mit den elementaren Umformungen spaltenweise von links nach rechts zunächst in eine Dreiecksform gebracht, so dass bei der im unteren linken Dreieck nur noch Nullen sind. Im zweiten Teil, dem Jordanteil, spaltenweise von rechts nach links das rechte obere Dreieck mit elementaren Umformungen bearbeitet, bis am Ende die Lösung abgelesen werden kann.

Zur Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens wird das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

zunächst in einer deutlich sparsameren Notation geschrieben, oft werden die äußeren Klammern dabei auch weggelassen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Das Verfahren startet nun mit der ersten Spalte. Da in der ersten Zeile kein Koeffizient vorhanden ist, werden die erste und die zweite Zeile vertauscht und dann mit der ersten Zeile alle weiteren Werte in der ersten Spalte eliminiert.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \downarrow \\ \\ -2 \\ -1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & -1 & -1 & 1 & 4 \\ & -5 & 0 & 3 & 4 \\ & -4 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Die erste Zeile ist damit für den ersten Teil abgearbeitet und bleibt fest. Für die zweite Spalte ist keine Vertauschung erforderlich, wir können aber die Koeffizienten in der zweiten Zeile zweite Spalte auf 1 bringen, und dann die Werte darunter aufräumen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & -1 & -1 & 1 & 4 \\ & -5 & 0 & 3 & 4 \\ & -4 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & \mathbf{1} & 1 & -1 & -4 \\ & -5 & 0 & 3 & 4 \\ & -4 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \downarrow \\ 5 \\ 4 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & \mathbf{1} & 1 & -1 & -4 \\ & & 5 & -2 & -16 \\ & & 4 & -2 & -14 \end{array}\right)$$

Die zweite Zeile ist abgearbeitet, die dritte Zeile wird durch Division durch 5 normiert und damit die dritte Spalte darunter aufgelöst:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & 1 & 1 & -1 & -4 \\ & & 5 & -2 & -16 \\ & & 4 & -2 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & 1 & 1 & -1 & -4 \\ & & \mathbf{1} & -\frac{2}{5} & -\frac{16}{5} \\ & & 4 & -2 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ \downarrow \\ -4 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & 1 & 1 & -1 & -4 \\ & & \mathbf{1} & -\frac{2}{5} & -\frac{16}{5} \\ & & & -\frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \end{array}\right)$$

Damit ist das LGS in Dreiecksform. Mit der letzten Zeile kann nun nach oben aufgeräumt werden:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & 1 & 1 & -1 & -4 \\ & & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{16}{5} \\ & & & -\frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \cdot(-\frac{5}{2}) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & 1 & 1 & -1 & -4 \\ & & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{16}{5} \\ & & & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \\ \uparrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & & 2 \\ & 1 & 1 & & -1 \\ & & 1 & & -2 \\ & & & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

Entsprechend wird nun mit der dritten Zeile die dritte Spalte nach oben eliminiert:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & & 2 \\ & 1 & 1 & & -1 \\ & & \mathbf{1} & & -2 \\ & & & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ \uparrow \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & & & 4 \\ & 1 & & & 1 \\ & & \mathbf{1} & & -2 \\ & & & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Es verbleibt die zweite Spalte:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & & & 4 \\ & \mathbf{1} & & & 1 \\ & & 1 & & -2 \\ & & & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \\ \uparrow \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 2 \\ & \mathbf{1} & & & 1 \\ & & 1 & & -2 \\ & & & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Damit ist das Ergebnis:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & = & 2 \\ & x_2 & & & = & 1 \\ & & x_3 & & = & -2 \\ & & & x_4 & = & 3 \end{array} \quad \text{oder} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das folgende LGS hat ein anderes Lösungsverhalten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 3 \end{array}$$

Nach Vertauschung der ersten mit der zweiten Zeile wird die erste Spalte aufgeräumt:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \\ -1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & -1 & -1 & 1 & 4 \\ & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Die zweite Zeile können wir zur Elimination der zweiten Spalte verwenden, dann verschwindet aber die dritte Zeile komplett:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & -1 & -1 & 1 & 4 \\ & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & \mathbf{1} & 1 & -1 & -4 \\ & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & \mathbf{1} & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Nun wird im zweiten Teil nach oben aufgelöst, wobei x_3 und x_4 frei definiert werden können, ein Einfügen von -1 auf den nicht besetzten Stellen der Diagonalen ermöglicht ein direktes Ablesen der Lösung:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & \mathbf{1} & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \\ \uparrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & & -1 & 1 & 7 \\ & \mathbf{1} & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{rrrrr} & & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 & 0 \end{array} \end{array}$$

Die Anzahl der verbleibenden Zeilen am Ende des Gauß-Jordan-Verfahrens ist der **Rang** der Ursprungsmatrix A. Das Ergebnis lautet dann:

$$\begin{array}{cccrcrcr} x_1 & & = & 7 & + & x_3 & - & x_4 \\ & x_2 & = & -4 & - & x_3 & + & x_4 \end{array}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

$$\text{oder} \quad x = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

Die letzte Darstellung ist mit Hilfe der dazu geschriebenen Zahlen ablesbar und kann mit Hilfe des folgenden Abschnitts als Ebene identifiziert werden.

Es kann bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen noch einen dritten Fall geben, und zwar einen Widerspruch in einer der beiden Formen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 17 \end{array}\right) ϟ \quad \text{oder} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right) ϟ$$

In beiden Fällen kann man sofort aufhören, denn dann gibt es keine Lösung. Diese drei Fälle sind alle Möglichkeiten, die es bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems geben kann:

Satz 5.14. *Ein lineares Gleichungssystem hat entweder genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder ist unlösbar.*

Ein homogenes LGS ist immer mit dem Nullvektor $\mathbf{0}$ lösbar.

Wenn lineare Gleichungssysteme Parameter beinhalten, so rechnet man nach dem System durch, bis man einmal durch einen Term mit Parameter teilen würde. Ab hier muss man zwei Fälle betrachten: Einmal den Fall, dass der Term 0 ist, und die Lösung für diesen Fall berechnen, und dann den zweiten Teil, in dem der Term sicher nicht 0 ist, und daher durch diesen Term geteilt werden kann.

5.3. Geraden und Ebenen

Definition 5.15. Eine **Gerade** in einem Vektorraum V wird mit einem **Aufpunkt** $a \in V$ und einer **Richtung** $u \in V$ durch die Menge $G = \{\, x = a + \lambda \cdot u\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\,\}$ beschrieben.

Diese sehr allgemeine Art der Darstellung von Geraden wird **Parameterdarstellung** der Geraden genannt. Weder der Aufpunkt noch die Richtung ist dabei eindeutig. Die Gerade in $V = \mathbb{R}^3$ durch die beiden Punkte $P(1,2,3)$ und $Q(1,0,2)$ kann beispielsweise jeweils P oder Q oder jeden anderen Punkt auf der Geraden als Aufpunkt verwenden. Als Richtung kann man den Vektor von P nach Q, oder den Vektor von Q nach P oder jedes Vielfache der beiden verwenden. Daher beschreiben die folgenden Darstellungen alle die gleiche Gerade G_{PQ} durch die Punkte P und Q, jedoch mit unterschiedlichem Parameter:

$$G_{PQ} = \{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\,\} = \{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\ ,\ \mu \in \mathbb{R}\,\}$$

Nur im $\mathbb{R}^2$ können Geraden auch in ihrer **Normalenform** beschrieben werden, also mit einem Vektor $n \in \mathbb{R}^2$, der senkrecht auf der Geraden steht.

Satz 5.16. *Im $\mathbb{R}^2$ kann eine Gerade der Form $G = \{x = a + \lambda u\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ auch mit einem Normalenvektor $n \in \mathbb{R}$ und einem Skalar $b \in \mathbb{R}$ beschrieben werden*

$$G = \{x = a + \lambda u\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\, x \in \mathbb{R}^2\ :\ n \cdot x = b\}$$

mit $n = (u_2, -u_1)^\top$ und $b = n \cdot a$.

Beispiel 5.17. Die Gerade G_{PQ} durch die beiden Punkte $P(1,2)$ und $Q(3,5)$ kann in Parameterform durch

$$G_{PQ} = \{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;,\; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

beschrieben werden. Eine Normalenform erhalten wir mit $n = (3,-2)^\top$ und $b = (3,-2)^\top \cdot (1,2)^\top = -1$

$$G_{PQ} = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \;:\; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot x = 3x_1 - 2x_2 = -1\}$$

und erhalten damit die Geradengleichung $3x_1 - 2x_2 = -1$ oder $x_2 = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}$, wie sie in Kapitel 1 eingeführt wurde. Die symmetrische Darstellung mit $n \cdot x$ hat jedoch den großen Vorteil, dass auch senkrechte Geraden ohne Sonderfall dargestellt werden können.

Definition 5.18. Eine **Ebene** in einem Vektorraum V wird mit einem **Aufpunkt** $a \in V$ und zwei linear unabhängigen **Richtungen** $u, v \in V$ durch die Menge $E = \{\, x = a + \lambda \cdot u + \mu \cdot v \;,\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,\}$ beschrieben.

Nur im $\mathbb{R}^3$ können Ebenen auch in ihrer Normalenform beschrieben werden:

Satz 5.19. *Im $\mathbb{R}^3$ kann eine Ebene der Form $E = \{\, x = a + \lambda \cdot u + \mu \cdot v \;,\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,\}$ auch mit einem Normalenvektor $n \in \mathbb{R}^3$ und einem Skalar $b \in \mathbb{R}$ beschrieben werden*

$$E = \{\, x = a + \lambda \cdot u + \mu \cdot v \;,\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \;:\; n \cdot x = b\}$$

mit $n = u \times v$ und $b = n \cdot a$.

Beispiel 5.20. Im $\mathbb{R}^3$ kann die Ebene E_{PQR} durch die Punkte $P(1,2,3)$, $Q(1,0,1)$ und $R(0,1,0)$ in Parameterform durch den Aufpunkt P und die Richtungsvektoren $u = (0,2,2)^\top$ von Q nach P und $v = (1,1,3)^\top$ von R nach P beschrieben werden:

$$E_{PQR} = \{\, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;,\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Die Normalenform erhalten wir durch das Kreuzprodukt

$$n = u \times v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und dem Skalarprodukt

$$b = n \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 2\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$E_{PQR} = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot x = 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2\}\,.$$

Die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen können also als Punkte, Ebenen, Geraden oder höher-dimensionale Objekte identifiziert werden.

DEFINITION 5.21. Im Vektorraum V beschreibt die Lösungsmenge H einer Gleichung $n \cdot x = b$ für $n \in V$ und $b \in \mathbb{R}$, also

$$H = \{ x \in V \; : \; n \cdot x = b\}$$

eine **Hyperebene** im Vektorraum.

Im $\mathbb{R}^2$ sind Hyperebenen Geraden und im $\mathbb{R}^3$ sind es Ebenen. Ganz allgemein kann man also ein lineares Gleichungssystem in $\mathbb{R}^k$ als die Suche nach allen Punkten sehen, die auf allen den durch die Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} H_1 :\; & n_1^{(1)} x_1 + \ldots + n_k^{(1)} x_k = b^{(1)} \\ \vdots\quad & \qquad\quad \vdots \\ H_m :\; & n_1^{(m)} x_1 + \ldots + n_k^{(m)} x_k = b^{(m)} \end{aligned}$$

angegebenen Hyperebenen liegen. Man berechnet also den Schnitt $H_1 \cap \ldots \cap H_m$ aller Hyperebenen, und deshalb kann das LGS unlösbar sein, wenn die Hyperebenen sich alle nicht in mindestens einem Punkt schneiden, es gibt genau einen Punkt als Ergebnis, wenn sie sich in einem Punkt schneiden, oder das Ergebnis sind ganze Geraden oder Ebenen oder höher-dimensionale Objekte, wenn der Schnitt unendlich viele Lösungen hat.

BEISPIEL 5.22. In der Computer-Grafik wird die virtuelle Realität mit Hilfe der Methoden der linearen Algebra berechnet. Eine wichtige und rechenaufwendige Aufgabe ist die Normierung eines Vektors auf die Länge 1, wie in diesem Beispiel:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \frac{x}{||x||} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{25}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Da Additionen und Multiplikationen mit die schnellsten Operationen auf CPUs darstellen, liegt das Hauptaugenmerk auf der Umsetzung der Funktion $r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ zur Berechnung des Kehrwerts der Wurzel. Als 1999 der Sourcecode von dem für seine estaunlich schnelle Grafik bekannte Spiel Quake III Arena veröffentlicht wurde, erhielt dieser Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung und die Konstante 0x5f3759df große Aufmerksamkeit:

```
float Q_rsqrt( float number )
{
  long i;
  float x2, y;
  const float threehalfs = 1.5F;

  x2 = number * 0.5F;
  y  = number;
  i  = * ( long * ) &y;                       // evil floating point bit level hacking
  i  = 0x5f3759df - ( i >> 1 );               // what the fuck?
  y  = * ( float * ) &i;
  y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) ); // 1st iteration
//  y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) ); // 2nd iteration, this can be removed

  return y;
}
```

Dieser Algorithmus „fast inverse square root“, der nicht von John Carmack stammt, sondern wohl schon in den 80er Jahren entwickelt wurde, ist sehr effizient und dabei überraschend genau und verwendet viele mathematische Konzepte.

Grundsätzlich ist das Newton-Verfahren aus Beispiel 3.9 der erste Ansatz, um nicht-lineare Probleme iterativ zu lösen. Ein Ansatz zur Berechnung von $y = r(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}$, oder zur Vermeidung der rechenintensiven Wurzel $y^2 = \frac{1}{a}$, ist hier die Nullstelle $0 = y^2 - \frac{1}{a}$ von $f(y) = y^2 - \frac{1}{a}$ zu bestimmen. Das Newton-Verfahren ergibt dann mit $f'(y) = 2y$ die Iteration

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^2 - \frac{1}{a}}{2y_n} = y_n - \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2y_n a} = \frac{y_n}{2} + \frac{1}{2y_n a}\,.$$

Jeweils mit dem Startwert $y_0 = 1$ ergeben sich die folgenden Näherungen für $a_1 = 2$ mit $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$ und $a_2 = 8$ mit $\frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0.3536$ in den ersten drei Schritten:

$a_1 = 2$

k	y_k	rel. Fehler
1	0.75	6.0660%
2	≈ 0.7083	0.1735%
3	≈ 0.7071	0.0002%

$a_2 = 8$

k	y_k	rel. Fehler
1	0.5625	59.0990%
2	≈ 0.3555	10.9765%
3	≈ 0.3554	0.5428%

Nach ein paar Schritten wird das Ergebnis sehr genau, kann aber am Anfang im relativen Fehler noch stark vom korrekten Ergebnis abweichen. Diese Iteration wurde aber im Verfahren oben nicht verwendet, da hier eine Division erfolgen muss. Wird statt $y^2 = \frac{1}{a}$ der Kehrwert $\frac{1}{y^2} = a$ und entsprechend die Nullstelle $0 = y^{-2} - a$ von $g(y) = y^{-2} - a$ mit $g'(y) = -2y^{-3}$ gesucht, ergibt sich die Iteration

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n^{-2} - a}{-2y_n^{-3}} = y_n + \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}ay_n^3 = \frac{3}{2}y_n - \frac{1}{2}ay_n^3 = y_n \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{a}{2} \cdot y_n^2\right)\,,$$

die am Ende des Verfahrens zum Einsatz kommt. Diese hat nur noch Additionen und Multiplikationen, verhält sich aber weniger stabil und effizient:

$a_1 = 2$

k	y_k	rel. Fehler
1	0.5	29.2893%
2	0.625	11.6117%
3	≈ 0.6934	1.9442%

$a_2 = 8$

k	y_k	rel. Fehler
1	-2.5	$> 807\%$
2	58.75	$> 16517\%$
3	≈ -811029.06	$> 10^8\%$

Im ersten Fall nimmt die Genauigkeit in jedem Schritt zu, im zweiten Beispiel war der Startwert $y_0 = 1$ zu weit von der tatsächlichen Lösung entfernt, damit hier überhaupt eine Lösung gefunden wird. Diese Newton-Iteration ist also schneller zu berechnen, liefert aber nur gute Ergebnisse, wenn der Startwert schon nahe der Lösung liegt.

Der Algorithmus nutzt nur einen Iterationsschritt, der zweite ist auskommentiert, daher muss der obere Teil schon eine sehr gute Näherung liefern, damit sinnvolle Ergebnisse erzielt werden können. Dafür benutzt der Algorithmus das **IEEE 754 Gleitkommaformat** mit Binärdarstellungen von Zahlen der Form

v	$e\ \ e\ \ \dots\ \ e$	$m\ \ m\ \ m\ \ \dots\ \ m\ \ m$

mit dem höchstwertigen Bit v für das Vorzeichen der Mantisse und Feldern für den Exponenten und Mantisse in den folgenden Bitlängen:

Typ	Größe	Exponent e	Mantisse m	Bias B
single	32 bit	8 bit	23 bit	127
double	64 bit	11 bit	52 bit	1023

Der Wert x der Gleitkommazahl berechnet sich im Normalfall $e \neq 0$ und $e \neq 11\dots1$ aus

$$x = (-1)^v \cdot 1.m\,m\,\dots\,m_{bin} \cdot 2^{e\,e\,\dots\,e_{bin}-B}\,,$$

im Fall $e = 0$ aus $x = (-1)^v \cdot 2^{-B} \cdot 0.m\,m\,\dots\,m_{bin}$, und repräsentiert im Fall $e = 11\dots1_{bin}$ Ausnahmen wie $x = (-1)^v \cdot \infty$. Diese wissenschaftliche Darstellung von Zahlen in der Form einer einstelligen Zahl multipliziert mit eine Potenz der Basis für die Größenordnung erlaubt eine sehr schnelle Abschätzung des Logarithmus, wenn nur der Exponent betrachtet wird.

$$\begin{aligned}
\log_2(x) &= \log_2(1.m\,m\,\dots\,m_{bin} \cdot 2^{e\,e\,\dots\,e_{bin}-B}) \\
&= \underbrace{\log_2(1.m\,m\,\dots\,m_{bin})}_{=\delta} + \log_2(2^{e\,e\,\dots\,e_{bin}-B}) \\
&= \delta + e\,e\,\dots\,e_{bin} - B \\
&= e\,e\,\dots\,e_{bin} - (B - \delta)
\end{aligned}$$

In Java lässt sich dies beispielsweise für den Datentyp single bzw. float so umsetzen:

```
static float approxLog2(float y)
{
  int i = Float.floatToIntBits( y ); // i = * ( long * ) &y;
  return (float)( i >> 23 ) - 127;
}
```

Der Fehler ist dann genau der unbekannte aber kleine Wert (in der Regel ist $0 \leq \delta < 1$) des Logarithmus der Mantisse. Dank der Logarithmengesetze aus Satz 1.8 können Funktionen wie $r(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-1/2}$ über Logarithmen einfach durch Multiplikation ausgerechnet werden:

$$r(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-1/2} = 2^{\log_2(a^{-1/2})} = 2^{-\frac{1}{2}\log_2(a)}$$

Ohne Berücksichtigung des Fehlers durch δ und mit erneuter Umwandlung in eine Fließkommazahl ergibt sich die Näherung der Funktion $r(a)$, hier in Java unter Verwendung von $127 \cdot 2^{23} - \frac{1}{2}(\mathtt{i} - 127 \cdot 2^{23}) = (127 \cdot 2^{23} + 127 \cdot 2^{22}) - \frac{\mathtt{i}}{2}$:

```
static float approxInvSqrt(float y)
{
  int i = Float.floatToIntBits( y );      // i = * ( long * ) &y;
  i = ( (127<<23) + (127<<22) ) - i / 2;  // i = 0x5f400000 - ( i >> 1 );
  return Float.intBitsToFloat( i );       // y  = * ( float * ) &i;
}
```

Da nun δ in der Regel einen Wert zwischen 0 und 1 besitzt, wird die Approximation im Schnitt über alle Zahlen hinweg ein wenig besser, wenn eine leicht kleinere Konstante wie 0x5f3759df verwendet wird. Die anschließende Newton-Iteration kann in Java nach einer der beiden Newton-Verfahren so aussehen:

```
static float newtonStep(float a,float y)
{
  return y * ( 1.5f - a / 2 * y * y ); // y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );
}
static float newtonStepWithDivision(float a,float y)
{
  return y / 2 + 1 / ( 2 * a * y );
}
```

Mit der Konstante 0x5f400000 ergeben sich dann für den Newton-Schritt ohne Division für die beiden Beispielprobleme folgende Ergebnisse:

$a_1 = 2$

k	y_k	rel. Fehler
0	0.75	6.0660%
1	≈ 0.7031	0.5631%
2	≈ 0.7071	0.0003%

$a_2 = 8$

k	y_k	rel. Fehler
0	0.375	6.0660%
1	≈ 0.3516	0.5631%
2	≈ 0.3535	0.0047%

Jeweils mit dem etwas besseren Newton-Schritt mit Division ergibt sich:

$a_1 = 2$

k	y_k	rel. Fehler
0	0.75	6.0660%
1	≈ 0.7083	0.1734%
2	≈ 0.7071	$< 10^{-5}\%$

$a_2 = 8$

k	y_k	rel. Fehler
0	0.375	6.0660%
1	≈ 0.3542	0.1735%
2	≈ 0.3536	0.0002%

In der Anwendung zur Visualisierung war die Genauigkeit für die Anwendung in der Visualisierung nach schon einem Newton-Schritt vollkommen ausreichend. Ein wichtiger Aspekt ist hier, dass der erste Schritt durch den bekannt beschränkten Fehleranteil δ eine garantierte Genauigkeit hatte, und dadurch auch der anschließende Newton-Schritt zu einer verlässlichen Verbesserung führen konnte.

Das Newton-Verfahren und auch das verwandte Sekanten-Verfahren ohne Berechnung von Ableitungen funktioniert und konvergiert besonders gut nahe den Lösungen und wird daher oft mit anderen Abschätzungen oder Näherungsmethoden im ersten Schritt, wie hier in diesem Beispiel, kombiniert. Im Gegensatz zu anderen gröberen Verfahren können Newton-Iterationen besonders schnell eine hohe Genauigkeit erreichen, wenn die Lösung schon in der Nähe ist.

Inzwischen sind Wurzelfunktionen direkt auf Chips implementiert und können auf diese Weise sehr schnell verwendet werden. Dennoch ist das Verfahren allgemein gültig und kann auch auf hochdimensionale Problemstellungen angewendet werden. So werden beispielsweise im Anlernen von neuronalen Netzen oft auf ein anderes Problem vortrainiertes Netz als Näherungslösung verwendet, um dann die nächsten Näherungslösungen für die Koeffzienten der Übertragungsfunktionen beispielsweise mit mehrdimensionalen Newton-Verfahren entsprechend in reduzierter Schrittanzahl anzupassen.

5.4. Aufgaben

Aufgabe 67. Bilden die drei Vektoren $x^{(1)} = (1,2,3)^\top$, $x^{(2)} = (1,1,-1)^\top$ und $x^{(3)} = (1,1,1)^\top$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 68. Sind die Vektoren $(1,4,1)^\top$, $(1,5,2)^\top$ und $(1,2,-1)^\top$ linear unabhängig?

Aufgabe 69. Ist der Vektor $y = (2,2,2)^\top$ als Linearkombination der Vektoren $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ darstellbar?

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 70. Liegt der Vektor $y = (1,1,1)^\top$ in der linearen Hülle

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} > ?$$

Aufgabe 71. Bestimmen sie alle Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & +6x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 72. Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 73. Bestimmen Sie die Ebene E durch die Punkte $P(1|2|0)$, $Q(0|1|1)$ und $R(2|2|1)$ in Parameter- und Normalenform.

Aufgabe 74. Bestimmen Sie die Ebene E durch die Punkte $P(3|1|2)$, $Q(1|2|1)$ und $R(1|0|1)$ in Parameter- und Normalenform.

Aufgabe 75. Bestimmen Sie Schnittgerade und -winkel der Ebenen E & F:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 = 2\},$$
$$F = \{x = (0,1,2)^\top + \lambda(1,0,1)^\top + \mu(1,-1,2)^\top, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 76. Bestimmen Sie Schnittgerade und -winkel der Ebenen E & F:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - x_3 = 1\},$$
$$F = \{x = (0,0,1)^\top + \lambda(1,1,1)^\top + \mu(2,1,1)^\top, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 77. Bestimmen Sie Schnittpunkt von Ebene H und Gerade G:

$$H = \{x = (1,0,2)^\top + \lambda(-1,1,1)^\top + \mu(0,1,2)^\top, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$
$$G = \{x = (0,1,5)^\top + \gamma(-1,0,1)^\top, \ \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 78. Bestimmen Sie Schnittpunkt von Ebene H und Gerade G:

$$H = \{x = (3,0,2)^\top + \lambda(1,2,1)^\top + \mu(1,1,2)^\top\,,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\},$$
$$G = \{x = (2,1,0)^\top + \gamma(1,0,1)^\top\,,\ \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 79. Für welche $t \in \mathbb{R}$ bilden $x^{(1)} = (1,2,0)^\top$, $x^{(2)} = (1,4,-1)$, $x^{(3)} = (t+1,2,t)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 80. Stellen Sie $y = (2,-3,2)^\top$ als Linearkombination von $(1,0,2)^\top$,$(1,-1,2)^\top$,$(0,1,1)^\top$ dar.

KAPITEL 6

Matrizen und Determinanten

6.1. Lineare Abbildungen

DEFINITION 6.1. Eine **lineare Abbildung** $\varphi : V \to W$ ist eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V und W mit den Eigenschaften, dass für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ und $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ gilt.

Typische Beispiele für lineare Abbildungen sind Spiegelungen wie $\varphi((x_1,, x_2)^\top) = (x_1, -x_2)^\top$, Drehungen wie $\varphi((x_1,, x_2)^\top) = (x_2, -x_1)^\top$ oder Projektionen wie $\varphi((x_1, x_2)^\top) = (x_1, 0)^\top$.

SATZ 6.2. *Sind $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen, so ist die Komposition $\psi \circ \varphi$ ebenfalls eine lineare Abbildung. Ist φ umkehrbar, so ist die Umkehrabbildung φ^{-1} ebenfalls eine lineare Abbildung.*

Eine wichtige Eigenschaft von linearen Abbildungen ist, dass sie bei der Abbildung zwischen endlichen dimensionalen Räumen mit Abbildungsmatrizen beschrieben werden können. Dazu benötigen wir die Matrix-Multiplikation: Eine Matrix-Multiplikation zur n-ten Zeile und k-ten Spalte des Ergebnisses, ist Skalarmultiplikation der n-ten Zeile des ersten Multiplikanten mit der m-ten Spalte des zweiten Multiplikanten:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

So ist beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9 & 1+4 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Multiplikation kann eine Matrix zur Beschreibung von linearen Funktionen verwendet werden, so beschreibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit m Zeilen und n Spalten mit der Multiplikation mit einem Vektor immer auch eine Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Ist beispielsweise $m = 3$ und $n = 2$ so ist

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix}.$$

SATZ 6.3. *Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ ist durch die Bilder einer Basis von V vollständig bestimmt. Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, so lässt sich die Abbildung als Matrix-Vektor-Produkt $\varphi(x) = A_\varphi \cdot x$ mit der Matrix*

$$A_\varphi = \left(\varphi(e^{(1)})\middle|\dots\middle|\varphi(e^{(n)})\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

mit $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ schreiben, und jede durch Vektor-Matrix-Multiplikation definierte Abbildung ist eine lineare Abbildung.

Beispiel 6.4. Eine Drehung φ im $\mathbb{R}^3$ um die x_3-Achse um 45° bzw. $\frac{\pi}{2}$ bildet die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^3$ folgendermaßen ab:

$$\varphi(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix},\ \varphi(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix},\ \varphi(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Dann lautet die **Abbildungsmatrix**

$$A_\varphi = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

und es gilt $\varphi(x) = A_\varphi \cdot x$.

Um zu einer durch eine Matrix A definierte lineare Abbildung die zugehörige inverse Abbildung zu bestimmten, reicht es also die Urbilder der Standardbasisvektoren zu bestimmen. Das bedeutet, man sucht $x^{(i)}$ für $A \cdot x^{(i)} = e^{(i)}$ gilt. Das ist ein lineares Gleichungssystem, das man simultan für alle Standardbasisvektoren gleichzeitig lösen kann.

Beispiel 6.5. **Inverse einer Matrix**. Gesucht ist die Inverse der quadratischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Diese wird durch das Gauß-Jordan-Verfahren mit mehreren rechten Seiten oder der **Einheitsmatrix** I auf der rechten Seite berechnet:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}\mathbf{1} & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{c}\downarrow\\ -3\end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right) \begin{array}{c}-2\\ \uparrow\end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

Damit erhalten wir das Ergebnis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Wie erwartet ist das Matrixprodukt von der Matrix A mit ihrer Inverse

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I$$

die Identitätsmatrix I. Eine Matrix hat genau dann eine Inverse, wenn die Matrix vollen Rang hat.

6.2. Kern und Bild

Definition 6.6. Der **Kern** einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ ist die Menge aller $x \in V$, die von φ auf den Nullvektor $\mathbf{0}_W$ von W abgebildet werden:

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = \{x \in V :\ \varphi(x) = \mathbf{0}_W\}$$

Der Kern ist nie leer, da bei linearen Abbildungen immer mindestens der Nullvektor des Urbild-Vektorraums auf den Nullvektor des Bild-Vektorraums abgebildet werden muss: $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Damit eine lineare Abbildung **invertierbar** ist, darf nur der Nullvektor im Kern der Abbildung sein.

BEISPIEL 6.7. Bestimmen Sie den Kern der durch die Abbildungsmatrix

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

definierten Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto A_\varphi \cdot x$.

Zur Bestimmung des Kerns ist das homogene LGS mit $A \cdot x = \mathbf{0}$ zu lösen. Das kann mit dem Gauß-Jordan-Verfahren erfolgen, wobei der rechte Teil nicht aufgeführt werden muss:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ -2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot(-\tfrac{1}{5})$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \cdot\uparrow \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Der Rang der Abbildungsmatrix ist also 2. Durch Einfügen der -1 in der Diagonalen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & -1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist die Lösung ablesbar:

$$\operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{Kern} A_\varphi = \{x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}\} =< \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

DEFINITION 6.8. Das **Bild** einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ ist die Menge aller $y \in W$, für die es $x \in V$ gibt mit $\varphi(x) = y$: $\operatorname{Bild}(\varphi) = \varphi(V) = \{\varphi(x) : x \in V\}$.

Diese Definition des Bildes deckt sich komplett mit der früheren Definition 1.1 für allgemeine Funktionen. Um das Bild einer linearen Funktion angeben zu können, reicht es wegen Satz 6.3 die lineare Hülle der Bilder einer Basis von V zu bestimmen.

BEISPIEL 6.9. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Abbildungsmatrix

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\operatorname{Bild} \varphi = \varphi(\mathbb{R}^3) = \operatorname{Bild} A_\varphi =< A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} > .$$

Sind die drei Vektoren linear unabhängig? Nur, wenn sie das sind, wären die drei Vektoren nicht nur Erzeuger, sondern auch eine Basis, und ihre Anzahl wäre die Dimension des Bildes. Die Frage ist, gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ außer $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, so dass

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Das ist ein lineares homogenes Gleichungssystem und wird mit dem Gauß-Jordan-Verfahren gelöst:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \downarrow \\ -4 \\ -5 \end{array} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \downarrow \\ 3 \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -2 \\ \uparrow \\ \\ \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad -1 \end{array}$$

Also sind die drei Vektoren wegen $\lambda \in < (-1, 2, -1)^\top >$ nicht linear unabhängig, sondern jeweils ein Vektor kann aus den anderen beiden erzeugt werden. Wenn wir damit einen Vektor weglassen, erhalten wir damit eine Basis. Damit ist $\dim \operatorname{Bild} \varphi = 2$. Die Dimensionen von Bild, Rang und Kern von linearen Abbildungen stehen in einem direkten Zusammenhang, deshalb kann man dieses Ergebnis auf verschiedene Arten erhalten:

SATZ 6.10. ***Dimensionsformel***. *Ist $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt*

$$\dim \operatorname{Bild} \varphi + \dim \operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{Rang} \varphi + \dim \operatorname{Kern} \varphi = \dim V\,.$$

6.3. Determinanten

DEFINITION 6.11. Die **Determinante** $\det A = |A|$ einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist für $n = 1$ definiert durch $\det A = |A| = a_{11}$ und für $n \geq 2$ durch die rekursive Entwicklung

$$\det A = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} = a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + - \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} A_{n1}\,,$$

wobei $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix A unter Auslassung der i-ten Zeile und j-ten Spalte bezeichnet.

BEISPIEL 6.12.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -1\cdot 1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 9 - 2 \cdot 12 = 13 \end{aligned}$$

Für $n = 2$ und $n = 3$ kann man die Formeln gut ausschreiben und direkt verwenden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Für alle größeren Determinanten gibt es folgende Rechenregeln und die Entwicklung aus der Definition:

SATZ 6.13. *Rechenregeln für Determinanten. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.*

(1) *Vertauschung von Zeilen oder Spalten ändert das Vorzeichen.*
(2) *Addition einer Zeile oder Spalte zu einer anderen ändert den Wert nicht.*
(3) $\det(A) = \det(A^\top)$

(4) *Ist* $A = B \cdot C$*, so ist* $\det A = \det B \cdot \det C$.
(5) *Ist* A *invertierbar, so ist* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Durch geeignete Vertauschungen und Operationen ist es möglich, viel Arbeit und Zeit zu sparen. Eine wichtige Anwendung der Determinante liefert der folgende Satz:

SATZ 6.14. *Eine quadratische Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ist genau dann invertierbar und ein LGS* $Ax = b$ *mit* $b \in \mathbb{R}^n$ *gegeben und* $x \in \mathbb{R}^n$ *gesucht genau dann eindeutig lösbar, wenn* $\det A \neq 0$.

6.4. Eigenwerte und Eigenvektoren

Bestimmte Vektoren werden von linearen Abbildungen auf Vielfache von sich selbst abgebildet, also $\varphi(x) = \lambda x$:

- Bei Rotationen φ gilt für Vektoren x auf der Rotationsachse: $\varphi(x) = x$.
- Bei Spiegelungen ψ gilt für Vektoren x in Spiegelrichtung: $\psi(x) = -x$.
- Bei Projektionen ϑ gilt für Vektoren x in Projektionsrichtung: $\vartheta(x) = \mathbf{0}$.
- Bei Streckungen σ um Faktor λ gilt für Vektoren x in Streckrichtung $\sigma(x) = \lambda x$.

Solche Vektoren nennt man **Eigenvektoren**, die zugehörigen Faktoren **Eigenwerte**.

DEFINITION 6.15. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein **Eigenwert** von A, wenn es einen zugehörigen **Eigenvektor** $u \in V\backslash\{\mathbf{0}\}$ gibt mit $Au = \lambda u$.

Zur Erinnerung: Die gleiche Definition gilt auch für quadratische Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und sehr oft werden reelle Matrizen als komplexe Matrizen aufgefasst, da sie leicht komplexe Eigenwerte besitzen können.

Eigenwerte und Eigenvektoren sind sehr wichtige Charakterisierungen linearer Abbildungen. Mit Kenntnis eines Eigenwerts λ können zugehörige Eigenvektoren u aus der Eigenschaft $Au = \lambda u$ berechnet werden, denn u erfüllt dann auch das homogene Gleichungssystem $Au - \lambda u = (A - \lambda I)u = \mathbf{0}$.

Die Menge E_λ der Vektoren, die dieses homogene Eigenwertproblem lösen, wird als **Eigenraum** bezeichnet. Aus dieser Erkenntnis kann man durch Berechnung der Determinante bestimmen, welche λ Eigenwerte sind:

SATZ 6.16. *Für eine quadratische Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *wird das Polynom*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)\,.$$

als ***charakteristisches Polynom der Matrix*** *bezeichnet. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte von* A.

BEISPIEL 6.17. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

und damit die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ mit Eigenvektoren

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

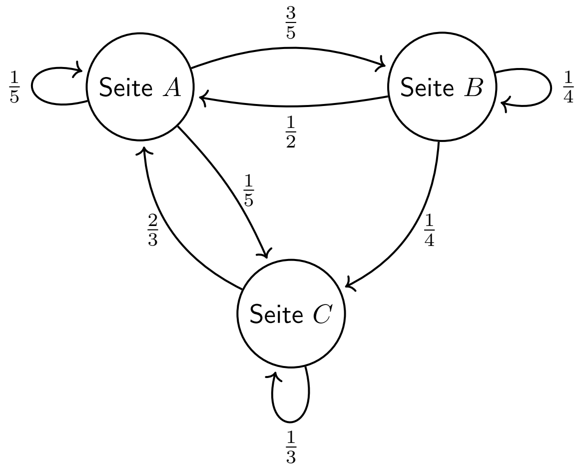


ABBILDUNG 6.4.1. **Markov-Kette** zu Übergangswahrscheinlichkeiten bei Webseiten

BEISPIEL 6.18. Webseiten sind im Internet über Hyperlinks verbunden und bilden damit einen gerichteten Graphen, bei dem durch Klicken von Links von einer Webseite zu einer anderen Webseite gesprungen werden kann.

Werden die Anzahl der Gesamtlinks gezählt und jeweils die Anzahl der Links, die zu einer anderen Seite führen, so können damit Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt werden, wie eine zufällig einen beliebigen Link klickende Person sich von einer Seite zu einer anderen Seite bewegt.

Für ein Beispiel aus drei Webseiten A, B und C könnte es die folgenden Anzahl Links zwischen den Seiten geben:

nach \ von	Seite A	Seite B	Seite C
Seite A	1	2	2
Seite B	3	1	0
Seite C	1	1	1
Summe	5	4	3

Damit ist die Wahrscheinlichkeit bei zufälligem Klick von Seite A zu Seite C zu kommen $\frac{1}{5}$, da genau einer von fünf Links auf Seite A auf Seite C führt. Von Seite C ist die Wahrscheinlichkeit zu Seite A zu gelangen bei $\frac{2}{3}$, da zwei von drei Links auf Seite C auf Seite A führen.

Werden die Übergangswahrscheinlichkeiten in einen gerichteten Graphen eingetragen, so ergibt dies eine **Markov-Kette** wie in Abbildung 6.4.1. Diese Markov-Kette kann auch in einer Übergangsmatrix A in der Form

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, wo beispielsweise durch Multiplikation mit einem Einheitsvektor e_k, der den Start auf den Seiten A, B oder C beschreibt, die jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeiten abgelesen werden:

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.20 \\ 0.60 \\ 0.20 \end{pmatrix} , \quad M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} , \quad M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.67 \\ 0.00 \\ 0.33 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Abbildung durch die Matrix eine Abbildung auf die Wahrscheinlichkeit die jeweiligen Seiten A, B oder C zu erreichen. Entsprechend können auch die Wahrscheinlichkeiten $M \cdot x$ berechnet werden, wenn der Vektor $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^\top$ beschreibt, dass sich eine Person zu 50% Wahrscheinlichkeit auf Seite A und zu 50% Wahrscheinlichkeit auf Seite B befindet:

$$M \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.43 \\ 0.23 \end{pmatrix}$$

Damit kann durch mehrfache Multiplikation der Matrix M berechnet werden, wo mit welcher Wahrscheinlichkeit Besuchende ausgehend von einer Seite landen werden, beispielsweise nach drei zufälligen Klicks:

$$M^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.35 \\ 0.25 \end{pmatrix}, \quad M^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.42 \\ 0.33 \\ 0.25 \end{pmatrix}, \quad M^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.31 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Hier nähern sich die Wahrscheinlichkeiten einem bestimmten Vektor an, und nach viel mehr Anwendungen der Matrix ändert sich irgendwann der Vektor fast nicht mehr. Es gibt also einen Vektor, der von der Matrix M auf sich selbst abgebildet wird. Dieser Vektor ist dann ein Eigenvektor mit Eigenwert 1. Damit lässt sich hier und gerade auch bei viel mehr betrachteten Seiten ein Eigenvektor zum Eigenwert direkt und genauer aus dem linearen homogenen Gleichungssystem

$$(M - 1 \cdot I) \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{4} - 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} - 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen! Dies ergibt einen (hier auf Komponentensumme 1 normierten) Eigenvektor von

$$x = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.42 \\ 0.33 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten sich nach unendlichen vielen Klicks auf den Seiten A, B oder C zu befinden, wird also durch das Verhältnis $5 : 4 : 3$, die auch als Ränge 5, 4 und 3 der Seiten bezeichnet werden.

Tatsächlich ist der Eigenwert 1 hier auch der vom Betrag größte Eigenwert und der Zusammenhang des Eigenvektors mit der mehrfachen Anwendung der Matrixmultiplikation gilt auch allgemein:

Hat eine quadratische $n \times n$-Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ maximale n unterschiedliche Eigenwerte mit dem maximalem Eigenwert λ zum Eigenvektor u, so wird in M^k für größere k der Eigenvektor u zum vom Betrag größten Eigenwert λ das Verhalten der Abbildung dominieren.

Die Berechnung des Eigenvektors zum größten Eigenwert, dessen Einträge als Wahrscheinlichkeit für erreichte Seiten nach unendlich vielen zufälligen Webseitenklicks interpretiert werden können, ist die Basis für den Seitenrang einer der erfolgreichsten Internetsuchmaschinen, wo dann aus vielen gefundenen Seiten mit den gesuchten Begriffen denen mit höherem Rang neben anderen Kriterien eine höhere Relevanz zugeordnet und als beste Ergebnisse angezeigt wurden. Dieses Eigenvektor-Verfahren ist auf viele Netzwerke auf Basis von gerichteten Graphen anwendbar.

6.5. Aufgaben

Aufgabe 81. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Funktion φ:

$$\varphi((2,0)^\top) = (4,2)^\top\,,\ \varphi((1,1)^\top) = (3,4)^\top\,.$$

Aufgabe 82. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Funktion φ:

$$\varphi((0,1)^\top) = (1,-1)^\top\,,\ \varphi((2,1)^\top) = (3,1)^\top\,.$$

Aufgabe 83. Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 84. Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 85. Bestimmen Sie Kern und Bild der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x\,.$$

Aufgabe 86. Bestimmen Sie Kern und Bild der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot x\,.$$

Aufgabe 87. Berechnen Sie die folgenden Determinanten direkt:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 88. Berechnen Sie die folgenden Determinanten direkt:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 89. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \pi & 1 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 90. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

AUFGABE 91. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 92. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Literaturverzeichnis

[1] Arens, T., F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel: *Arbeitsbuch Mathematik: Aufgaben, Hinweise, Lösungen und Lösungswege*. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

[2] Arens, T., F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel: *Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

[3] Arens, T., F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel: *Ergänzungen und Vertiefungen zu Arens et al., Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg, 2017.

[4] Dietmaier, C.: *Mathematik für Wirtschaftsingenieure: Lehr- und Übungsbuch*. Carl Hanser Verlag GmbH & Company KG, 2017.

[5] Heinrich, Gert: *Basiswissen Mathematik, Statistik und Operations Research für Wirtschaftswissenschaftler*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2018.

[6] Holey, T. und A. Wiedemann: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.

[7] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3: Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung*. Viewegs Fachbücher der Technik. Vieweg+Teubner Verlag, 2013.

[8] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014.

[9] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015.

[10] Papula, L.: *Mathematische Formelsammlung: Für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017.

[11] Tietze, Jürgen: *Einführung in die Finanzmathematik*. Springer, 2015.

Index

A

Abbildung, 8
Abbildungsmatrix, 74
abgeschlossenes Intervall, 6
Ableitung, 38
Abzinsfaktor, 21
Achsenabschnitt, 10
Additionstheoreme, 17
Allgemeine harmonische Reihe, 27
Ankathete, 15
Annuität, 26
Annuitätentilgung, 26
Approximation, 41
Arcuscosinus, 15
Arcussinus, 15
Arcustangens, 16
Areacosinus hyperbolicus, 17
Areasinus hyperbolicus, 17
Areatangens hyperbolicus, 18
Arithmetische Folge, 21
Arithmetische Reihe, 24
Asymptote, 13
Aufpunkt, 64, 65
Aufzinsfaktor, 21

B

Barwert , 21
Basis, 59
beschränkt, 22
Betrag einer komplexen Zahl, 6
bijektiv, 9
Bild, 8, 75

C

charakteristisches Polynom der Matrix, 77
Cosinus, 14
Cosinus hyperbolicus, 17

D

Definitionsmenge, 8
Determinante, 76
$\frac{df}{dx}$ an x_0, 38
Differenzenquotient, 37
differenzierbar, 38
Differenzierbarkeit von Parameterintegralen, 53
Dimension, 59
Dimensionsformel, 76
Diskontierung, 21
Diskriminante, 12
divergent, 22, 24
doppelte Nullstelle, 10
double, 68

E

Ebene, 65
Eigenraum, 77
Eigenvektor, 77
Eigenwert, 77
Einfache Zinsrechnung, 21
Einheitskreis, 14
Einheitsmatrix, 74
elementare Umformungen, 61
Entweder-Oder, 5
Entwicklungspunkt, 29
Erzeugendensystem, 59
Euklidischer Vektorraum, 60
Eulersche Formel., 31
Eulersche Zahl, 13
Exklusiv-Oder, 5
Explizite Definition, 21
Exponentialfunktion, 13, 30
Exponentialreihe, 27
Extremwerte, 39

F

fast überall punktweise, 48
Fibonacci-Folge, 21
Folge, 21
Fouriertransformation, 54

G

ganze Zahlen, 5
Gauß-Jordan-Verfahren, 61
Gaußsche Zahlenebene, 6
gebrochen rationale Funktion, 13
Gegenkathete, 15
Geometrische Folge, 21
Geometrische Reihe, 24
geometrische Summenformel, 24
Gerade, 10, 64

Gleitkommaformat, 67
Gradient, 44
Graph einer Funktion, 8
Grenzwert, 22

H
harmonische Reihe, 27
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, 49
Hermitizität, 60
Höhenlinien, 44
homogen, 61
Hyperebene, 66
Hypotenuse, 15

I
IEEE 754, 67
im Punkt $z \in A$ stetig, 23
Imaginärteil, 6
inhomogen, 61
injektiv, 9
Integrationskonstante, 50
Inverse einer Matrix, 74
invertierbar, 74
irrationale Zahl, 6

K
Kapitalwert, 21
kartesisches Produkt, 7
Kern, 74
Kettenlinie, 17
Koeffizienten, 29, 61
komplexe Konjugation, 6
komplexe Zahl , 6
Konstante, 10
konvergent, 22, 24
Konvergenzradius, 30
Kreuzprodukt, 61

L
Lagrangesches Restglied, 41
Länge, 60
Laplacetransformation, 54
Lebesgue-integrierbare Funktion, 49
Lebesguescher Konvergenzsatz, 53
leere Menge, 6
LGS, 61
linear abhängig, 59
linear unabhängig, 59
lineare Abbildung, 73
lineare Hülle, 59
lineares Gleichungssystem, 61
Linearfaktor, 11
Linearkombination, 59
lokales Maximum, 39
lokales Minimum, 39

M
Majoranten- und Minorantenkriterium, 27
Markov-Kette, 78
Maximum, 44
Minimum, 44
Monome, 10
monoton fallend, 22
monoton wachsend, 22

N
Nachschüssige konstante Renten, 25
Nachschüssige Renten, 25
natürliche Zahlen, 5
natürliche Zahlen mit Null, 5
natürliche Zahlen nach DIN, 5
Nenner, 6
Newton-Verfahren, 40
Norm, 60
Normalenform, 64
Nullfolge, 27
Nullmenge, 48
Nullstellen, 10

O
Oder, 5
offenes Intervall, 6
Ohne, 6
orthogonal, 60

P
Parabel, 10
Parameterdarstellung, 64
Partialsumme, 24
partiell differenzierbar, 44
partiell nach x_k differenzierbar, 44
Polarkoordinaten, 7
Polstelle, 13, 24
Polynom n-ten Grades, 9
Polynomdivision, 12
Potenzreihe, 29
Punktschreibweise, 11

Q
quadratische Gleichung, 12
Quotientenkriterium, 28

R
Rang, 63
Ratentilgung, 26
rationale Zahl, 6
Realteil, 6
reelle Zahl, 6
Regel von l'Hospital, 40
Reihe, 24
Reihenwert, 24
Rekursive Definition, 21
Renten, 25

Rentenbarwert, 25
Rentenbarwertfaktor, 25
Rentenendwert, 25
Rentenendwertfaktor, 25
Richtung, 64, 65

S
Sattelpunkt, 44
Scheitelpunktsform, 11
Schranke, 22
Sekante, 37
single, 68
Sinus, 14
Sinus hyperbolicus, 17
Skalarprodukt, 60
Sprung, 24
Stammfunktion, 50
Standardbasis, 59
Standardskalarprodukt, 60
Steigung, 10
stetig, 23
stetig differenzierbar, 38
stetig fortsetzen, 9
Stetigkeit von Parameterintegralen, 53
streng monoton, 22
surjektiv, 9

T
Tangens, 14, 16
Tangens hyperbolicus, 18
Tangente, 37
Taylorpolynom, 41
Taylorreihe, 43
Teilmenge, 7
Tilgung, 26
Tilgungsrechnung, 26
Transposition, 58
Treppenfunktion, 47
trigonometrische Funktion, 14

U
Umkehrfunktion, 9
Und, 5
unendlich, 6
Untervektorraum, 59

V
Vektor, 57
Vektorraum, 57
Verkettung von Funktionen, 8
Vorschüssige konstante Renten, 25
Vorschüssige Renten, 25

W
Wertemenge, 8
wohldefiniert, 49
Wurzelkriterium, 28

Z
Zähler, 6
Zinsen, 21
Zinseszinsrechnung, 21
Zinsperiode, 21
Zwischenwertsatz, 24