Duale Hochschule Baden-Württemberg

Analysis und Lineare Algebra

4. Übungsblatt

1. Aufgabe: Bestimmen Sie die Taylorreihe um $x_0 = -1$ zur Funktion

$$f(x) = 3^x \, .$$

Hinweis: $f^{(n)}(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^n$

2. Aufgabe: Bestimmen Sie die Taylorpolynome um $x_0 = -1$ bis 3. Ordnung von

$$g(x) = \frac{1}{2x-1} \, .$$

3. Aufgabe: Stellen Sie zu $h(x)$ das Taylorpolynom 2. Ordnung an $x_0 = 0$ samt Lagrange'schem Restglied auf:

$$h(x) = x \exp(x) \, .$$

4. Aufgabe: Überprüfen Sie, dass die Ableitung zu $f(x) = \exp(-x^{-2})$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ durch $f'(x) = 2x^{-3}\exp(-x^{-2})$ gegeben ist. Sind $f(x)$ und $f'(x)$ an $x = 0$ stetig ergänzbar?

Hinweis: Verwenden Sie $f'(x) = \frac{2x^{-3}}{\exp(x^{-2})}$ bei der Grenzwertbetrachtung.

5. Aufgabe: Stellen Sie zu der stetig differenzierbar ergänzten Funktion $\tilde{f}(x)$ zu $f(x) = \exp(-x^{-2})$ aus der 4. Aufgabe unter Verwendung von $\tilde{f}^{(n)}(x_0) = 0$ für $n \geq 2$ die Taylorreihe an $x_0 = 0$ auf.

Lösung 3. Übungsblatt

Lösung 1: Mit der Quotientenregel ist

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1+e^x)\cdot(xe^{-x}+1)-(x+e^x)\cdot(e^{-x}-xe^{-x})}{(xe^{-x}+1)^2} \\
&= \frac{xe^{-x}+1+x+e^x-xe^{-x}+x^2e^{-.x}-1+x}{(xe^{-x}+1)^2} \\
&= \frac{2x+e^x+x^2e^{-.x}}{(xe^{-x}+1)^2}
\end{aligned}
$$

$$
f''(x) = \frac{\left(e^x+2+2xe^{-x}-x^2e^{-x}\right)\cdot(xe^{-x}+1)^2-2\,(xe^{-x}+1)\,(e^{-x}-xe^{-x})\cdot\left(e^x+2x+x^2e^{-x}\right)}{(xe^{-x}+1)^4}
$$

Etwas einfacher ist die Lösung $f(x)=\frac{x+e^x}{xe^{-x}+1}=\frac{e^x(xe^{-x}+1)}{(xe^{-x}+1)}=e^x$ mit $f'(x)=e^x$ und $f''(x)=e^x$.

Lösung 2: Es ist $g(x)=\sqrt[x]{\cos(x)}=(\cos(x))^{1/x}=\exp\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x}\right)$. Daher gilt:

$$
g'(x)=\exp\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x}\right)\cdot\left(\frac{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot x-\ln(\cos(x))\cdot 1}{x^2}\right)=-\sqrt[x]{\cos(x)}\cdot\left(\frac{x\tan(x)+\ln(\cos(x))}{x^2}\right)
$$

Lösung 3: Die partiellen Ableitungen sind $\frac{\partial p}{\partial x}(x,y)=2x-4\sin(x)e^y+y^3$ und $\frac{\partial p}{\partial y}(x,y)=4\cos(x)e^y+3xy^2$. So ist

$$
\operatorname{grad} p(x,y)=\begin{pmatrix} 2x-4\sin(x)e^y+y^3 \\ 4\cos(x)e^y+3xy^2 \end{pmatrix}.
$$

Lösung 4:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(-1)\cdot\left(3+x^2\right)-(1-x)\cdot(2x)}{(3+x^2)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(3+x^2)^2} \\
h''(x) &= \frac{(2x-2)\cdot\left(3+x^2\right)^2-\left(x^2-2x-3\right)\cdot 2\cdot\left(3+x^2\right)\cdot 2x}{(3+x^2)^4}
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind $x_1=-1$ und $x_2=3$. Es ist $h(x_1)=\frac{1}{2}$ und $h(x_2)=-\frac{1}{6}$. Da $f''(x_1)=-\frac{1}{4}<0$ ist $E_1(-1|\frac{1}{2})$ ein relatives Maximum. Mit $f''(x_2)=\frac{1}{36}>0$ ist $E_2(3|-\frac{1}{6})$ ein relatives Minimum.

Lösung 5: Die Newton-Vorschrift lautet hier:

$$
x_{n+1}=x_n-\frac{u(x_n)}{u'(x_n)}=x_n-\frac{2x_n^2-3}{4x_n}=\frac{1}{2}x_n+\frac{3}{4x_n}
$$

Mit $x_0=1$ ist $x_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$ und $x_2=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{25+24}{40}=\frac{49}{40}$.

Lösung 6: Mit $a^x=e^{x\cdot\ln a}$ ist

$$
\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{a^x-a^a}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to a}\frac{ax^{a-1}-a^x\cdot\ln a}{a^x\cdot\ln a}=\frac{a^a(1-\ln a)}{a^a\ln a}=\frac{1-\ln a}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}-1\,.
$$