LÖSUNG 1. Sei die Aussage A das Ereignis, dass Sie im Pub-Quiz gewinnen, und B das Ereignis, dass Sie sich freuen. Formulieren Sie die folgenden zusammengesetzten Aussagen aus den beiden Aussagen:

(1) Weder freue ich mich, noch gewinne ich im Pub-Quiz.
(2) Ich gewinne im Pub-Quiz, wenn ich mich freue.
(3) Wenn ich im Pub-Quiz gewinne, so bin ich nicht froh.
(4) Keinesfalls werde ich im Pub-Quiz gewinnen.

(1) $\neg B \wedge \neg A$
(2) $B \to A$
(3) $A \to \neg B$
(4) $\neg A$

LÖSUNG 2. Sei A die Aussage, dass Sie für die Vorlesung üben, und B die Aussage, dass Sie in der Vorlesung aufpassen. Beschreiben Sie die folgenden Aussagen mit den Ereignissen:

(1) Falls ich für die Vorlesung übe, so träume ich in der Vorlesung.
(2) Niemals passe ich in der Vorlesung auf, ich übe aber dafür.
(3) Ich übe viel, wenn ich in der Vorlesung nicht aufpasse.
(4) Entweder übe ich, oder ich passe in der Vorlesung auf, aber nie beides.

(1) $A \to \neg B$
(2) $\neg B \wedge A$
(3) $\neg B \to A$
(4) $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

LÖSUNG 3. Modellieren Sie die folgenden Aussagen logisch und prüfen Sie, ob Felix am Raubzug beteiligt war: Nur Margot, Felix und Sascha können den Raub durchgeführt haben. Wenn Margot beteiligt war, jedoch Felix nicht, so war Sascha dabei. Sascha arbeitet nie alleine, aber Margot arbeitet nie mit Sascha.

Seien M, F und S die Aussagen, dass Margot, Felix oder Sascha am Raubzug dabei waren. Die Aussagen lauten:

(1) $M \vee F \vee S$
(2) $M \wedge \neg F \to S$
(3) $S \to M \vee F$
(4) $M \to \neg S$

Es gelte F, wenn dann M gilt, so gilt S wegen (4) nicht. Gilt M nicht, so kann S gelten oder nicht.

Es gelte F nicht. Gilt dann M, so muss wegen (2) S gelten und wegen (4) auch wieder nicht, das ist nicht möglich. Gilt M auch nicht, so muss wegen (1) S gelten, aber das widerspricht aber (3).

Somit ist F korrekt und Felix war am Raubzug beteiligt.

LÖSUNG 4. Formulieren Sie diese Aussagen mit Aussagenlogik und bewerten Sie den Schluss: Die Studierenden sind glücklich, wenn keine Klausur geschrieben wird. Der Dozent fühlt sich wohl, wenn die Studierenden glücklich sind. Wenn der Dozent sich wohl fühlt, so hat er keine Lust zu unterrichten. Wird aber keine Klausur geschrieben, so unterrichtet er gerne. Wird eine Klausur geschrieben?

Die Aussagen seien G für glückliche Studierende, K für das Schreiben der Klausur, W für das Wohlgefühl und L die Lust zum Unterricht des Dozenten. Die Aussagen lauten:

(1) $\neg K \to G$
(2) $G \to W$
(3) $W \to \neg L$
(4) $\neg K \to L$

Angenommen $\neg K$ gilt, so gilt wegen (4) L, aber wegen (1) auch G, aus (2) W und aus (3) $\neg L$. Das ist ein Widerspruch und nicht möglich. Somit muss K gelten, es wird eine Klausur geschrieben.

Lösung 5. Formulieren Sie diese Aussagen mit Aussagenlogik und bestimmen Sie, ob Sarah eine gute Note bekommt:

(1) Sarah bekommt genau dann in der Klausur eine gute Note, wenn sie lernt, alle Vorlesungen besucht und genug schläft.
(2) Sarah kann nicht gut schlafen, wenn sie ständig Abends am Computer spielt.
(3) Sarah besucht alle Vorlesungen, lernt, spielt ständig Abends am Computer und beteiligt sich sehr gut an der Vorlesungen.

Sei N die gute Note, V die besuchten Vorlesungen, L das Lernen, S genug Schlaf, B gute Beteiligung und C die Computerspiele:

(1) $L \wedge V \wedge S \leftrightarrow N$
(2) $C \to \neg S$
(3) $V \wedge C \wedge B$

Nach (3) gilt C und nach (2) damit $\neg S$. Damit ist die linke Seite von (1) nicht erfüllt, und somit gilt $\neg N$. Sie erhält keine gute Note.

Lösung 6. Der neue Diät-Tipp zur ausgewogenen Ernährung nur mit Kakao, Nachos und Erdnüssen in Boys Health lautet: Wenn es keinen Kakao zum Essen gibt, so muss es Nachos als Beilage geben. Wenn es Nachos als Beilage oder Kakao zum Trinken gibt, gibt es keine Erdnüsse. Genau dann wenn es Erdnüsse gibt oder keinen Kakao gibt, gibt es keine Nachos. Wie abwechslungsreich ist die Diät?

Sei K der Kakao, N die Nachos und E die Erdnüsse:

(1) $\neg K \to N$
(2) $N \vee K \to \neg E$
(3) $E \vee \neg K \leftrightarrow \neg N$

Gilt K, so gilt nach (2) $\neg E$. Damit ist die linke Seite von (3) nicht erfüllt und damit gilt N.

Gilt $\neg K$, so gilt nach (1) N, aber gleichzeitig auch nach (3) $\neg N$, das ist ein Widerspruch.

Somit gibt es jeden Tag nur Kakao und Nachos, die Diät ist nicht abwechslungsreich.

LÖSUNG 7. Leiten Sie für einen logischen Ausdruck A die **Auslöschung** $A \wedge \mathsf{f} = \mathsf{f}$ aus den Äquivalenzen der Aussagenlogik her.

$$\begin{array}{rrl} & A \wedge \neg A = \mathsf{f} & \text{Kontradiktion} \\ \Rightarrow & (A \wedge A) \wedge \neg A = \mathsf{f} & \text{Idempotenz} \\ \Rightarrow & A \wedge (A \wedge \neg A) = \mathsf{f} & \text{Assoziativität} \\ \Rightarrow & A \wedge \mathsf{f} = \mathsf{f} & \text{Kontradiktion} \end{array}$$

LÖSUNG 8. Leiten Sie für einen logischen Ausdruck A die **Auslöschung** $A \vee \mathsf{w} = \mathsf{w}$ aus den Äquivalenzen der Aussagenlogik her.

$$\begin{array}{rrl} & A \vee \neg A = \mathsf{w} & \text{Tautologie} \\ \Rightarrow & (A \vee A) \vee \neg A = \mathsf{w} & \text{Idempotenz} \\ \Rightarrow & A \vee (A \vee \neg A) = \mathsf{w} & \text{Assoziativität} \\ \Rightarrow & A \vee \mathsf{w} = \mathsf{w} & \text{Tautologie} \end{array}$$

LÖSUNG 9. Vereinfachen Sie den logischen Ausdruck $\neg(\neg A \wedge B) \wedge (A \vee B)$ mit Hilfe der Äquivalenzen der Aussagenlogik.

$$\begin{aligned} \neg(\neg A \wedge B) \wedge (A \vee B) &= (\neg\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) && \text{De Morgansche Regel} \\ &= (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) && \text{Doppelte Negation} \\ &= A \vee (\neg B \wedge B) && \text{Distributivität} \\ &= A \vee \mathsf{f} && \text{Kontradiktion} \\ &= A && \text{Neutralität} \end{aligned}$$

LÖSUNG 10. Vereinfachen Sie den logischen Ausdruck $(\neg A \wedge B) \vee \neg(A \vee B)$ mit Hilfe der Äquivalenzen der Aussagenlogik.

$$\begin{aligned} (\neg A \wedge B) \vee \neg(A \vee B) &= (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) && \text{De Morgansche Regel} \\ &= \neg A \wedge (B \vee \neg B) && \text{Distributivität} \\ &= \neg A \wedge \mathsf{w} && \text{Tautologie} \\ &= \neg A && \text{Neutralität} \end{aligned}$$

LÖSUNG 11. Belegen Sie die logische Adsorption $A \wedge (A \vee B) = A$ durch eine Wahrheitstabelle.

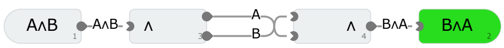
A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$	A
f	f	f	f	f
f	w	w	f	f
w	f	w	w	w
w	w	w	w	w

Lösung 12. Belegen Sie die logische Distributivität $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ durch eine Wahrheitstabelle.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
f	f	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	w	w	w	w	w	w	w

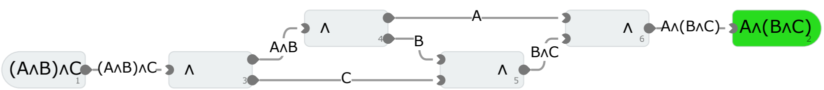
Lösung 13. Beweisen Sie die Kommutativität der Konjunktion visuell:

$$\frac{A \wedge B}{B \wedge A}$$



Lösung 14. Beweisen Sie die Assoziativität der Konjunktion visuell und als textuelle Beschreibung:

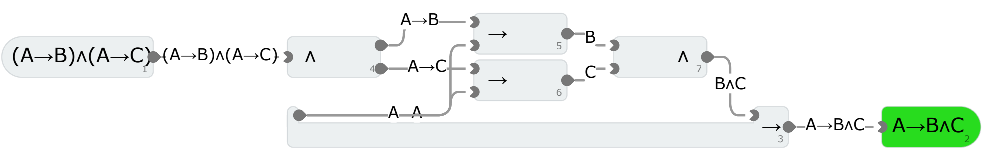
$$\frac{A \wedge (B \wedge C)}{(A \wedge B) \wedge C}$$



Aus der Prämisse $A \wedge (B \wedge C)$ folgt mit Regeln KL und KR, dass sowohl A als auch $B \wedge C$ erfüllt sind. Aus $B \wedge C$ folgt mit Regeln KL und KR, dass B und C erfüllt sind. Mit Regel K folgt aus A und B, dass $A \wedge B$ gilt, und aus $A \wedge B$ und C mit Regel K die gewünschte Aussage $(A \wedge B) \wedge C$. □

Lösung 15. Beweisen Sie, dass aus $(A \to B) \wedge (A \to C)$ die Aussage $A \to (B \wedge C)$ folgt, zeigen Sie also visuell und als tabellarische Beschreibung:

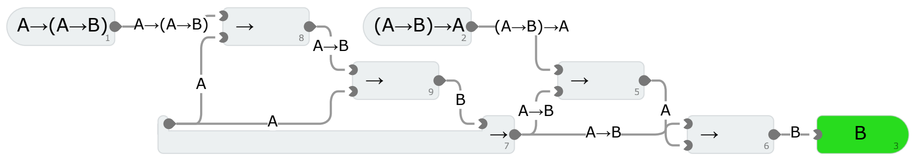
$$\frac{(A \to B) \wedge (A \to C)}{A \to (B \wedge C)}$$



Schritt	Aussage	Begründung
1	$(A \to B) \wedge (A \to C)$	Prämisse
2	$A \to B$	KL 1
3	$A \to C$	KR 1
4.1	A	Annahme
4.2	B	IE 2 4.1
4.3	C	IE 3 4.1
4.4	$B \wedge C$	K 4.2 4.3
4	$A \to (B \wedge C)$	II 4.1 4.4

Lösung 16. Beweisen Sie, dass aus der Äquivalenz $A \leftrightarrow (A \to B)$ folgt, dass B gilt, zeigen Sie also visuell und als tabellarische Beschreibung:

$$\frac{A \to (A \to B) \quad (A \to B) \to A}{B}$$



Schritt	Aussage	Begründung
1	$A \to (A \to B)$	Prämisse
2	$(A \to B) \to A$	Prämisse
3.1	A	Annahme
3.2	$A \to B$	IE 1 3.1
3.3	B	IE 3.2 3.1
3	$A \to B$	II 3.1 3.3
4	A	IE 2 3
5	B	IE 3 4

Es lässt sich also sogar zeigen, dass $A \wedge B$ gilt. Das überraschende Ergebnis ist, dass normalerweise aus $A \to C$ und $C \to A$ normalerweise nichts über unabhängige A oder C gesagt werden kann. Ist hingegen $C = A \to B$, so folgt aus diesem Beweis, dass dann A und B und entsprechend auch $C = A \to B$ gilt.

Lösung 17. Beweisen Sie visuell diese Aussage und formulieren Sie einen schriftlichen Beweis:

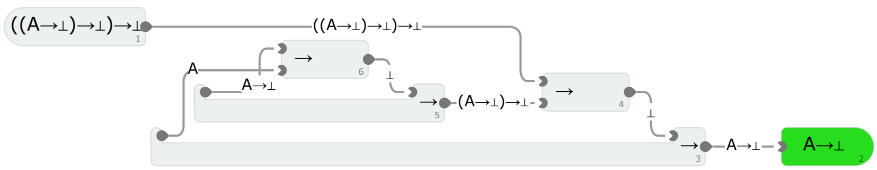
$$\frac{(A \to \bot) \to \bot}{A}$$

Gegeben ist: $\neg(\neg A)$
Zu zeigen ist: A

(1) Gemäß TND muss entweder A oder $\neg A$ gelten.
(2) Mit Regel D kann aus $A \vee \neg A$ die Aussage A gezeigt werden:
   (a) Gilt A, so ist die Konklusion erfüllt.
   (b) Es gelte $\neg A$,
      (i) Nun gilt $\neg A$ laut Prämisse gilt gleichzeitig mit dessen Negation $\neg(\neg A)$.
      (ii) Dies ist ein Widerspruch, bzw. falsche Aussage.
      (iii) Daraus kann laut Regel F alles gefolgert werden, insbesondere auch A
(3) Damit ist die Konklusion A für beide Fälle gezeigt.

Lösung 18. Beweisen Sie visuell diese Aussage ohne Verwendung von Tertium Non Datur und formulieren Sie einen schriftlichen Beweis:

$$\frac{((A \to \bot) \to \bot) \to \bot}{A \to \bot}$$



Gegeben ist: $\neg(\neg(\neg A)))$ oder $((A \to \bot) \to \bot) \to \bot$
Zu zeigen ist: $\neg A$ oder $A \to \bot$

(1) Mit Regel II soll gezeigt werden, dass $A \to \bot$ gilt:
   (a) Angenommen A gelte, so ist zu zeigen, dass dies auf die falsche Aussage führt.
   (b) Mit Regel II soll gezeigt werden, dass $(A \to \bot) \to \bot$ gilt.
      (i) Angenommen $A \to \bot$ gilt, zu zeigen ist, dass dies auf die falsche Aussage führt.
      (ii) Da sowohl A als auch $A \to \bot$ gilt, ergibt sich mit IE die falsche Aussage.
   (c) Damit gilt $(A \to \bot) \to \bot$.
   (d) Mit der Prämisse $((A \to \bot) \to \bot) \to \bot$ folgt mit Regel IE, dass dies auf die falsche Aussage führt.
(2) Damit gilt die gewünschte Konklusion $A \to \bot$.