Duale Hochschule Baden-Württemberg

Logik und Algebra

2. Übungsblatt

1. Aufgabe: In einem sozialen Medium mit einigen Teilnehmerinnen und Teilnehmern definiere das Prädikat $F(x, y)$ die Aussage x folgt y. Beschreiben Sie die folgenden Aussagen formal und bestimmen Sie alle Implikationen zwischen den folgenden Aussagen:
   (a) Es gibt eine Person, dem niemand folgt.
   (b) Die Aussage „Jeder hat eine Person, der sie oder er nicht folgt.“ ist falsch.
   (c) Alle haben keine Follower.
   (d) Jeder hat (mind. eine(n)) Follower.
   (e) Es gibt jemanden, der niemand folgt.
   (f) Es gibt eine Person, die einer anderen Person folgt.

2. Aufgabe: Beweisen Sie die beiden Aussagen
   (a) $\forall x : \forall y : P(x, y) \;\Rightarrow\; \forall y : \forall x : P(x, y)$
   (b) $\exists x : \exists y : P(x, y) \;\Rightarrow\; \exists y : \exists x : P(x, y)$
   (c) $\exists x : \forall y : P(x, y) \;\Rightarrow\; \forall y : \exists x : P(x, y)$

   tabellarisch unter Angabe der verwendeten Axiome.

3. Aufgabe: Zeigen Sie die Folgerung $\neg\forall x : P(x) \;\Rightarrow\; \exists x : \neg P(x)$ zunächst visuell, einzugeben als

   $$\frac{\texttt{(!x.P(x))->\ False}}{\texttt{?x.(P(x)->\ False)}},$$

   und anschließend tabellarisch unter Angabe der verwendeten Axiome.

4. Aufgabe: Beweisen Sie oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Ist p eine Primzahl, so ist $6p^2 + 36p + 1$ auch eine Primzahl.
   (b) Die Differenz zweier aufeinander folgender Quadratzahlen ist ungerade.
   (c) Die Zahl $100!$ hat genau 24 Nullen am Ende.

5. Aufgabe: Zeigen Sie den Beweis durch Widerspruch $\neg(A \wedge \neg B) \;\Leftrightarrow\; A \to B$ visuell

   $$\frac{\texttt{A->\ B}}{\texttt{(A\&(B->\ False))->\ False}} \qquad \frac{\texttt{(A\&(B->\ False))->\ False}}{\texttt{A->\ B}}$$

   und formulieren Sie daraus den schriftlichen Beweis für die Äquivalenz der Beweistechnik.

Lösen Sie zusätzlich die restlichen Aufgaben der Lektion 6 auf `http://incredible.pm/`.

Lösung 1. Übungsblatt

Lösung 1: Die formalisierten Aussagen, deren Negation und sprachliche Beschreibung lauten:

(a) $S \leftrightarrow \neg N$. Dies entspricht $(S \wedge \neg N) \vee (\neg S \wedge N)$, und die Negation lautet $(\neg S \vee N) \wedge (S \vee \neg N) = (S \wedge N) \vee (\neg S \wedge \neg N)$: Genau dann wenn das Programm gespeichert ist, fehlt das Netzteil.

(b) $\neg S \to L$. Dies entspricht $S \vee L$, und die Negation lautet $\neg S \wedge \neg L$: Das Programm ist nicht gespeichert und der Laptopakku ist nicht fast leer.

(c) $N \to L \wedge \neg S$. Dies entspricht $\neg N \vee (L \wedge \neg S)$, und die Negation lautet $N \wedge (\neg L \vee S)$: Das Netzteil fehlt und dabei gilt der Laptopakku ist nicht fast leer oder das Programm ist gespeichert.

(d) $(S \wedge \neg N) \vee (\neg S \wedge L)$. Die Negation lautet $(\neg S \vee N) \wedge (S \vee \neg L) = (S \wedge N) \vee (\neg S \wedge \neg L)$: Entweder das Programm ist gespeichert und das Netzteil fehlt, oder das Programm ist nicht gespeichert und der Laptopakku ist nicht fast leer.

Lösung 2: Die Aussagen dafür, dass Emma, Sascha, Ralf oder Nicki dabei sind, seien E, S, R und N. Dann lauten die Aussagen:

$$(1)\, \neg S \to \neg E\,, \quad (2)\, \neg R \to \neg S\,, \quad (3)\, R \to N\,, \quad (4)\, S \wedge N \to \neg R\,, \quad (5)\, \neg E \wedge \neg S \to \neg N$$

1. Gilt S, so folgt aus (2) R und aus (3) N. Damit soll wegen (4) dann aber $\neg R$ folgen, das ist ein Widerspruch!
2. Gilt $\neg S$, so folgt aus (1) $\neg E$. Somit folgt aus (5) $\neg N$ und aus (3) $\neg R$. Damit soll wegen (2) dann aber $\neg S$ folgen, damit ist Peter ziemlich alleine.

Peter wird in dieser Gruppe nur alleine lernen können und sollte sich unbedingt eine andere Lerngruppe suchen.

Lösung 3: Die Wahrheitstabellen lauten:

				(a)		(b)		(c)
A	B	C	$B \to C$	$A \to (B \to C)$	$A \to B$	$(A \to B) \to C$	$C \to A$	$(A \to B) \to (C \to A)$
f	f	f	w	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	f	f
f	w	f	f	w	w	f	w	w
f	w	w	w	w	w	w	f	f
w	f	f	w	w	f	w	w	w
w	f	w	w	w	f	w	w	w
w	w	f	f	f	w	f	w	w
w	w	w	w	w	w	w	w	w

Lösung 4: Zu zeigen ist $(A \wedge (\neg B \to \neg A)) \to B$:

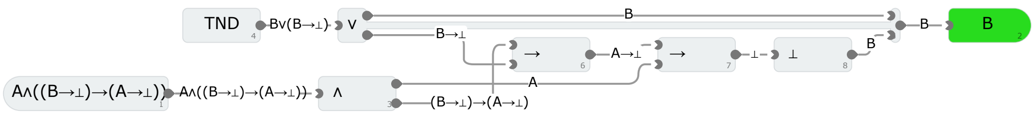
(a) Mit einer Wahrheitstabelle:

A	B	$\neg B \to \neg A$	$A \wedge (\neg B \to \neg A)$	$(A \wedge (\neg B \to \neg A)) \to B$
f	f	w	f	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
w	w	w	w	w

(b) Mit logischen Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
(A \wedge (\neg B \to \neg A)) \to B &= \neg(A \wedge (B \vee \neg A)) \vee B && \text{Hinweis} \\
&= (\neg A \vee (\neg B \wedge A)) \vee B && \text{de Morgan} \\
&= ((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee A)) \vee B && \text{Distributivität} \\
&= ((\neg A \vee \neg B) \wedge \mathsf{w}) \vee B && \text{Tautologie} \\
&= (\neg A \vee \neg B) \vee B && \text{Neutralität} \\
&= \neg A \vee (\neg B \vee B) && \text{Assoziativität} \\
&= \neg A \vee \mathsf{w} && \text{Tautologie} \\
&= \mathsf{w} && \text{Auslöschung}
\end{aligned}
$$

(c) Visueller Beweis: Gegeben ist $A \wedge ((B \to \perp) \to (A \to \perp))$ und zu zeigen ist B.



(d) Tabellarischer Beweis: Gegeben ist $A \wedge ((B \to \perp) \to (A \to \perp))$ und zu zeigen ist B.

Schritt	Aussage	Begründung
1	$A \wedge ((B \to \perp) \to (A \to \perp))$	Prämisse
2	A	KL 1
3	$(B \to \perp) \to (A \to \perp)$	KR 1
4	$B \vee (B \to \perp)$	TND
5.1	B	Annahme
5.1.1	B	Ziel trivial erfüllt
5.2	$B \to \perp$	Annnahme
5.2.1	$A \to \perp$	IE 3 5.2
5.2.2	$\perp$	IE 2 5.2.1
5.2.3	B	F 5.2.2
5	B	D 4 [5.1 5.1.1] [5.2 5.2.3]

Lösung 5: Gegeben ist $(A \to B) \to A$ und zu zeigen ist A.

1. Aus Regel TND folgt A oder $A \to \perp$.
2. Für diese Disjunktion wird für Regel D in beiden Fällen gezeigt, dass dann A gilt:
   (a) Im ersten Fall A erfüllt die Annahme schon die gewünschte Konklusion.
   (b) Der zweite Fall ist $A \to \perp$,
      i. hier kann mit Regel II die Aussage $A \to B$ gezeigt werden.
         A. Sei A gegeben,
         B. so folgt aus $A \to \perp$ mit IE die Aussage $\perp$.
         C. Mit Regel F kann B gefolgert werden.
      ii. Mit Regel IE folgt aus $A \to B$ und Prämisse $(A \to B) \to A$ mit IE die gewünschte Aussage A.
3. Damit ist die Konklusion A gezeigt, q.e.d. .