Lösung 19. Drücken Sie die beiden Aussagen mit Hilfe von Quantoren und dem Prädikat $L(x,y)$ für x liebt y aus. Überlegen Sie nicht-formal, ob eine Aussage aus der anderen gefolgert werden kann und führen Sie dann den formalen Nachweis. Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel, dass die Rückrichtung nicht stimmt.

(1) Jede(r) liebt jemanden nicht.
(2) Da ist eine Person, die von nicht eine(m/r) geliebt wird.

Direkt übersetzt ergeben sich folgende Prädikatenaussagen:

(1) $\forall x: \exists y: \neg L(x,y)$
(2) $\exists y: \neg\exists x: L(x,y)$

Es erscheint naheliegend, dass wenn der erste Fall für alle vorliegt, es auch die einzelne nicht-geliebte Person im zweiten Fall gibt, aber der Schein trügt: Die zweite Aussage lässt sich gemäß Satz 1.37 umformen:

$$\begin{aligned} & \exists y: \neg\exists x: L(x,y) \\ \Leftrightarrow\quad & \exists y: \forall x: \neg L(x,y) \end{aligned}$$

Mit Satz 1.36 gilt nun

$$\begin{aligned} & \exists y: \forall x: \neg L(x,y) \\ \Rightarrow\quad & \forall x: \exists y: \neg L(x,y) \end{aligned}$$

und damit folgt die erste Aussage aus der zweiten.

Ein Gegenbeispiel sieht so aus: Bei drei Personen u, v, w lieben sich die Personen im Kreis in die eine Richtung, d.h. $L(u,v)$, $L(v,w)$ und $L(w,u)$, und sie lieben sich in Gegenrichtung nicht, d.h. $\neg L(v,u)$, $\neg L(w,v)$ und $\neg L(u,w)$. Dann ist die erste Aussage erfüllt, aber es gibt die Person aus der zweiten Aussage nicht, die von keinem geliebt wird.

Lösung 20. Drücken Sie die beiden Aussagen mit Hilfe von Quantoren und dem Prädikat $L(x,y)$ für x liebt y aus. Überlegen Sie nicht-formal, ob eine Aussage aus der anderen gefolgert werden kann und führen Sie dann den formalen Nachweis. Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel, dass die Rückrichtung nicht stimmt.

(1) Die Aussage, dass es für alle jemanden gibt, den sie oder er liebt, ist falsch.
(2) Jede(r) wird von jemande(m/r) nicht geliebt.

Es erscheint ziemlich schwierig, hier eine Ableitbarkeit in die eine oder andere Richtung naiv zu erkennen. Formal ergeben sich diese Ausdrücke:

(1) $\neg\forall x: \exists y: L(x,y)$
(2) $\forall y: \exists x: \neg L(x,y)$

Mit Hilfe von Satz 1.37 kann die erste Aussage umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & \neg\forall x: \exists y: L(x,y) \\ \Leftrightarrow\quad & \exists x: \neg\exists y: L(x,y) \\ \Leftrightarrow\quad & \exists x: \forall y: \neg L(x,y) \end{aligned}$$

Mit Satz 1.36 gilt nun

$$\begin{aligned} & \exists x:\ \forall y:\ \neg L(x,y) \\ \Rightarrow\quad & \forall y:\ \exists x:\ \neg L(x,y) \end{aligned}$$

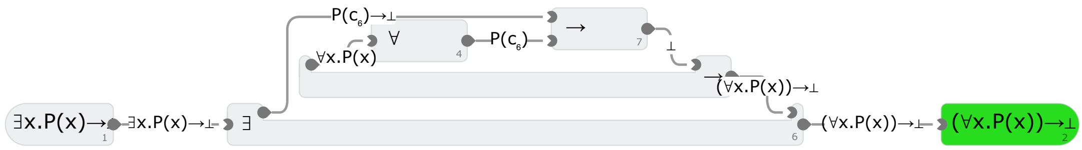
und damit folgt die zweite Aussage aus der ersten.

Ein Gegenbeispiel sieht so aus: Bei drei Personen u, v, w lieben sich die Personen im Kreis in die eine Richtung, d.h. $L(u,v)$, $L(v,w)$ und $L(w,u)$, und sie lieben sich in Gegenrichtung nicht, d.h. $\neg L(v,u)$, $\neg L(w,v)$ und $\neg L(u,w)$. Hier ist die zweite Aussage erfüllt, und jeder liebt jemanden, also ist die erste Aussage nicht erfüllt.

LÖSUNG 21. Zeigen Sie die Folgerung $\exists x:\ \neg P(x)\ \Rightarrow\ \neg\forall x:\ P(x)$, zunächst visuell, einzugeben als

$$\frac{\texttt{?x.(P(x)->False)}}{\texttt{(!x.P(x))->False}}\quad ,$$

und anschließend tabellarisch unter Angabe der verwendeten Axiome.

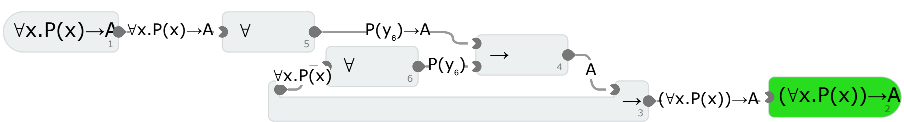


Schritt	Aussage	Begründung
1	$\exists x:\ P(x) \to \perp$	Prämisse
2.1	Es gelte $P(t) \to \perp$	Annahme
2.2.1	Es gelte $\forall x:\ P(x)$	Annahme
2.2.2	Es gilt $P(s)$ für s beliebig	AE 2.2.1
2.2.3	Mit $s = t$, gilt $\perp$	IE 2.1 2.2.2
2.2	$(\forall x:\ P(x)) \to \perp$	II 2.2.1 2.2.3
2	$(\forall x:\ P(x)) \to \perp$	EE 1 2.1 2.2

LÖSUNG 22. Zeigen Sie die Folgerung $\forall x:\ (P(x) \to A)\ \Rightarrow\ (\forall x:\ P(x)) \to A$ zunächst visuell, einzugeben als

$$\frac{\texttt{!x.(P(x)->A)}}{\texttt{(!x.P(x))->A}}\quad ,$$

und anschließend tabellarisch unter Angabe der verwendeten Axiome.



Schritt	Aussage	Begründung
1	$\forall x: (P(x) \to A)$	Prämisse
2	Es gilt $P(t) \to A$ für t beliebig	AE 1
3.1	Es gelte $\forall x: P(x)$	Annahme
3.2	Es gilt $P(s)$ für s beliebig	AE 3.1
3.3	Mit $s = t$, gilt A	IE 2 3.2
3	$(\forall x: P(x)) \to A$	II 3.1 3.3

LÖSUNG 23. Zeigen Sie, dass $2^n \geq n^2$ für alle ganzen Zahlen $n \geq 4$ gilt.

Induktionsanfang $n = 4$: Die Aussage gilt für $n = 4$, denn $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$.

Induktionsschritt $n \to n + 1$:

Gegeben ist: Es gelte die Aussage $2^n \geq n^2$ für ein festes $n \geq 4$.

Zu zeigen ist: $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$.

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n && \text{Definition der Potenz} \\
&\geq 2 \cdot n^2 && \text{Laut Prämisse} \\
&= n^2 + n \cdot n \\
&\geq n^2 + 4 \cdot n && \text{Laut Prämisse} \\
&= n^2 + 2 \cdot n + 2 \cdot n \\
&\geq n^2 + 2 \cdot n + 2 \cdot 4 && \text{Laut Prämisse} \\
&= (n^2 + 2 \cdot n + 1) + 7 \\
&= (n + 1)^2 + 7 && \text{Binomische Formel} \\
&\geq (n + 1)^2
\end{aligned}$$

LÖSUNG 24. Zeigen Sie, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gerade n^2 ergibt.

Induktionsanfang $n = 1$: Die Aussage gilt für $n = 1$, denn die erste ungerade Zahl ist 1 und das entspricht $1^2 = 1$.

Induktionsschritt $n \to n + 1$:

Gegeben ist: Es gelte die Aussage $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$ für ein festes $n \geq 1$.

Zu zeigen ist: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k - 1) = (n + 1)^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k - 1) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(2k - 1)\right) + 2n + 1 && \text{Definition der Summe} \\
&= n^2 + 2n + 1 && \text{Laut Prämisse} \\
&= (n + 1)^2 && \text{Binomische Formel}
\end{aligned}$$