

LÖSUNG 63. Bestimmen Sie für die Boolesche Teileralgebra D_{70} die Werte $2 \oplus 14$, $\neg 14$ und $35 \odot 10$.

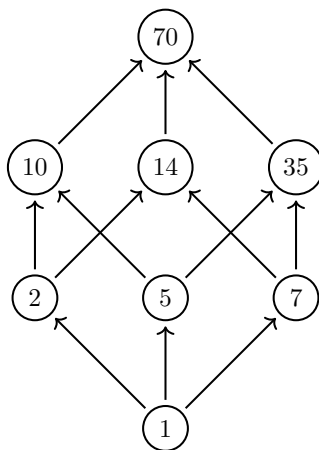
- $2 \oplus 14 = \text{kgV}(2, 14) = 14$
- $\neg 14 = \frac{70}{14} = 5$
- $35 \odot 10 = \text{ggT}(35, 10) = 5$

LÖSUNG 64. Bestimmen Sie für die Boolesche Teileralgebra D_{42} die Werte $6 \oplus 21$, $\neg 14$ und $6 \odot 42$.

- $6 \oplus 21 = \text{kgV}(6, 21) = 42$
- $\neg 14 = \frac{42}{14} = 3$
- $6 \odot 42 = \text{ggT}(6, 42) = 6$

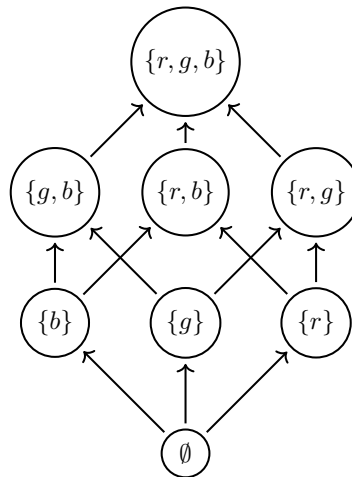
LÖSUNG 65. Mit der Relation $a \preceq b \Leftrightarrow a \odot b = a$ ergibt sich eine Teilordnung auf einer Booleschen Algebra. Erstellen Sie daraus ein Hassediagramm aller Elemente in D_{70} .

Die Beziehung $a \odot b = a$ bedeutet in D_{70} , dass $\text{ggT}(a, b) = a$, also a ein Teiler von b ist. Damit handelt es sich um ein Hassediagramm zur Teilbarkeit der Teiler von $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$:



LÖSUNG 66. Mit der Relation $a \preceq b \Leftrightarrow a \odot b = a$ ergibt sich eine Teilordnung auf einer Booleschen Algebra. Erstellen Sie daraus ein Hassediagramm aller Elemente in der Booleschen Mengenalgebra zu $\mathcal{P}(\{r, g, b\})$.

Die Beziehung $A \odot B = B$ bedeutet in $\mathcal{P}(\{r, g, b\})$, dass $A \cap B = A$, also A Teilmenge von B ist. Damit handelt es sich um ein Hassediagramm zur Teilmengenbeziehung der Potenzmenge über $\{r, g, b\}$.



LÖSUNG 67. Zeigen Sie, dass es in einer Booleschen Algebra B nur ein Element $e \in B$ gibt, so dass für alle $x \in B$ gilt: $x \oplus e = x$.

BEWEIS. Angenommen es gibt ein $d \in B$ mit $x \oplus d = x$ für alle $x \in B$.

- Dann gilt $e \oplus d = e$ und $d \oplus e = d$ nach Prämisse und Annahme.
- Wegen Kommutativität gilt $e = e \oplus d = d \oplus e = d$.
- Damit gilt für jedes (weitere) $d \in B$ mit der gewünschten Eigenschaft, dass $d = e = 0$, also ist es eindeutig.

□

LÖSUNG 68. Zeigen Sie, dass es in einer Booleschen Algebra B für jedes Element $x \in B$ die Gleichung $x \odot x = x$ gilt.

BEWEIS. Es gilt für alle $x \in B$:

$$\begin{aligned}
 x &= x \\
 &= x \odot 1 && \text{(Identität)} \\
 &= x \odot (x \oplus \neg x) && \text{(Komplement)} \\
 &= (x \odot x) \oplus (x \odot \neg x) && \text{(Distributivität)} \\
 &= (x \odot x) \oplus 0 && \text{(Komplement)} \\
 &= x \odot x && \text{(Identität)}
 \end{aligned}$$

□

LÖSUNG 69. Erstellen Sie eine Schaltung, die aus dezimal einstelligen 4-Bit Binärzahlen die einstelligen Primzahlen 2, 3, 5, 7 signalisiert.

Die Anforderungen von Eingängen (b_3, b_2, b_1, b_0) zu Ausgang p sind folgendermaßen:

x	b_3	b_2	b_1	b_0	p
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0

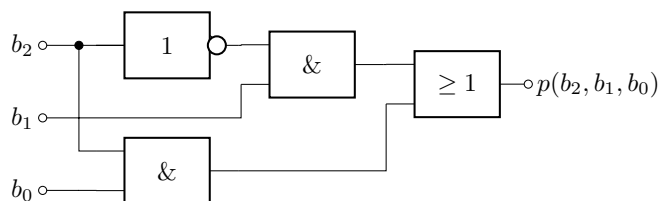
Als KV-Diagramm ergibt sich dann die folgende Tableau mit beliebigen Werten für die Bitkombinationen für $x > 9$:

		$b_1 b_0$			
		00	01	11	10
$b_3 b_2$	00	0	0	1	1
	01	0	1	1	0
	11	-	-	-	-
	10	0	0	-	-

Der mittlere Block hat $b_2 = 1$ und $b_0 = 1$, ergibt also $b_2 \wedge b_0$, der über die Kante hat $b_2 = 0$ und $b_1 = 1$ und ergibt $\overline{b_2} \wedge b_1$. Damit lautet der minimale boolesche Ausdruck, der b_3 überhaupt nicht benötigt:

$$p(b_3, b_2, b_1, b_0) = p(b_2, b_1, b_0) = (b_2 \wedge b_0) \vee (\overline{b_2} \wedge b_1)$$

Damit ergibt sich diese Schaltung:



LÖSUNG 70. Erstellen Sie eine Schaltung, die einen Wiederholungscode-Decoder mit Korrektur aus Beispiel 3.38 realisiert.

Die Anforderungen von Eingängen (d_0, d_1, d_2) zu Ausgang x sind folgendermaßen:

d_0	d_1	d_2	x
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

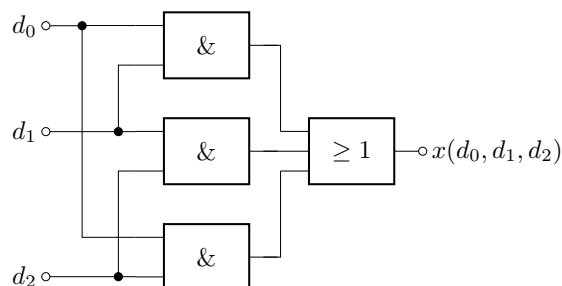
Als KV-Diagramm ergibt sich dann das folgende Tableau:

		$d_1 d_0$			
		00	01	11	10
d_2	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

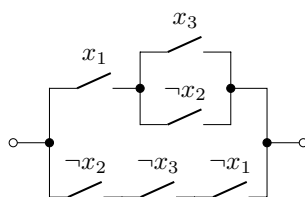
Als Blöcke ergeben sich $d_2 = 1, d_0 = 1$, also $d_0 \wedge d_2$, und $d_2 = 1, d_1 = 1$, also $d_1 \wedge d_2$ und $d_1 = 1, d_0 = 1$, also $d_0 \wedge d_1$, also wahrscheinlich nicht ganz unerwartet

$$x(d_0, d_1, d_2) = (d_0 \wedge d_2) \vee (d_1 \wedge d_2) \vee (d_0 \wedge d_1)$$

Damit ergibt sich diese Schaltung:



LÖSUNG 71. Formulieren Sie den zugehörigen booleschen Ausdruck zum gegebenen Schaltungsdiagramm, bestimmen Sie die disjunktiven und konjunktiven Normalformen. Können Sie mit Hilfe eines KV-Diagramms eine vereinfachte Schaltung ableiten?



Als boolescher Ausdruck ergibt sich:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3)) \vee (\overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_1})$$

Damit ergibt sich:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Die disjunktive Normalform lautet:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

Die konjunktive Normalform lautet:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

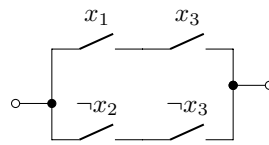
Damit ergibt sich das KV-Diagramm:

		$x_2 \ x_3$			
		00	01	11	10
x_1	0	1	0	0	0
	1	1	1	1	0

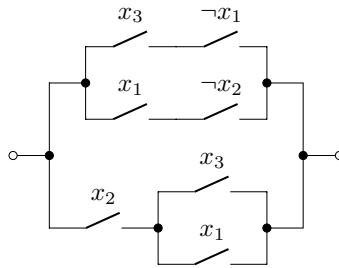
Die minimalen Terme lauten so für $x_2 = 0, x_3 = 0$ einmal $\overline{x_2} \wedge \overline{x_3}$ und mit $x_1 = 1, x_3 = 1$ dann $x_1 \wedge x_3$ und insgesamt

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge \overline{x_3})$$

und das entspricht der vereinfachten Schaltung:



LÖSUNG 72. Formulieren Sie den zugehörigen booleschen Ausdruck zum gegebenen Schaltungsdiagramm, bestimmen Sie die disjunktiven und konjunktiven Normalformen. Können Sie mit Hilfe eines KV-Diagramms eine vereinfachte Schaltung ableiten?



Als boolescher Ausdruck ergibt sich:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 \wedge \overline{x_1}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge (x_3 \vee x_1))$$

Damit ergibt sich:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Die disjunktive Normalform lautet:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

Die konjunktive Normalform lautet:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

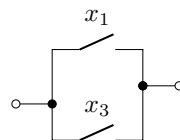
Damit ergibt sich das KV-Diagramm:

		$x_2 \ x_3$			
		00	01	11	10
x_1	0	0	1	1	0
	1	1	1	1	1

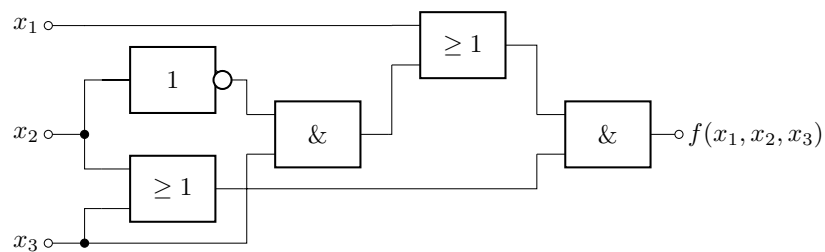
Nach dem Maxterm-Verfahren lautet der Term für $x_1 = 0, x_3 = 0$ dann $x_1 \vee x_3$ und insgesamt

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_3$$

und das entspricht der vereinfachten Schaltung:



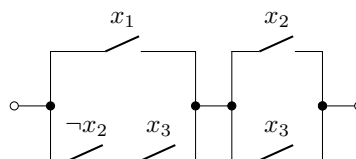
LÖSUNG 73. Formulieren Sie die folgende logische Gatterschaltung als booleschen Ausdruck und als Schaltungsdiagramm. Ermitteln Sie mit einem KV-Diagramm eine Minimalform und stellen Sie diese als Schaltung und mit Logikgattern dar:



Als boolescher Ausdruck ergibt sich:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)) \wedge (x_2 \vee x_3)$$

mit der Schaltung:



Damit ergibt sich:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

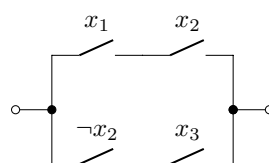
So lautet das KV-Diagramm:

		$x_2 x_3$			
		00	01	11	10
x_1	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	1

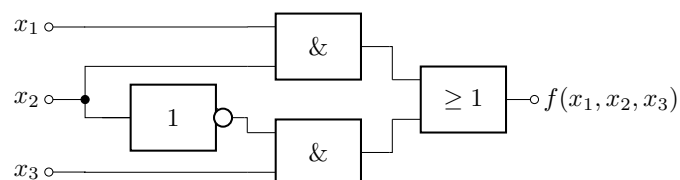
Nach dem Minterm-Verfahren lautet der Term für $x_2 = 0, x_3 = 1$ dann $\overline{x_2} \wedge x_3$ und für $x_1 = 1, x_2 = 1$ dann $x_1 \wedge x_2$ und insgesamt

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$$

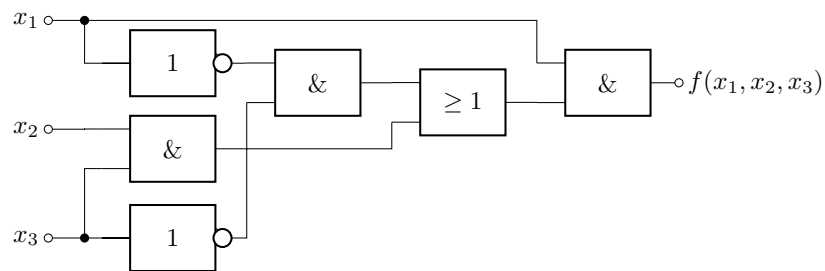
und das entspricht der vereinfachten Schaltung:



Mit Logikgattern ergibt sich dann diese Gatterschaltung:



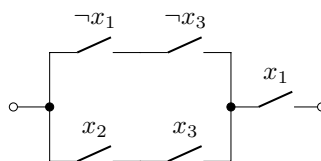
LÖSUNG 74. Formulieren Sie die folgenden logische Gatterschaltung als booleschen Ausdruck und als Schaltungsdiagramm. Ermitteln Sie mit einem KV-Diagramm eine Minimalform und stellen Sie diese als Schaltung und mit Logikgattern dar:



Als boolescher Ausdruck ergibt sich:

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((\overline{x_1} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_2 \wedge x_3)) \wedge x_1$$

mit der Schaltung:



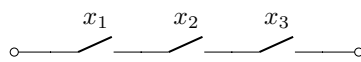
Damit ergibt sich:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

So lautet das KV-Diagramm:

		$x_2 x_3$			
		00	01	11	10
x_1	0	0	0	0	0
	1	0	0	1	0

Nach dem Minterm-Verfahren lautet der Term für $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ dann $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ und insgesamt $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ und das entspricht der vereinfachten Schaltung:



Mit Logikgattern ergibt sich dann diese Gatterschaltung:

