LÖSUNG 35. Auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ sei die Relation

$$R = \{ \ (1,1), (1,3), (1,4), (1,2), (2,2), (3,3), (3,4), (3,2), (4,4) \ \}$$

gegeben. Ist R eine Ordnung, und was für eine? Gibt es minimale, maximale, kleinste oder größte Elemente?

Prüfung der Eigenschaften:

Reflexivität: Für alle $x \in M$ soll $(x,x) \in R$ sein: Es ist $\{ \ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \ \} \subseteq R$, ist also erfüllt.

Transitivität: Sei $x, y, z \in M$ mit $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$. Ist $x = y$ oder $y = z$ oder $x = z$, so ist (x,z) erfüllt. Für $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$ gibt es folgende Möglichkeiten:

$$(1,3), (3,2) \in R \ \Rightarrow \ (1,2) \in R \ \surd$$
$$(1,3), (3,4) \in R \ \Rightarrow \ (1,4) \in R \ \surd$$

Damit ist R eine Quasiordnung.

Antisymmetrie: Seien $x, y \in M$ mit $(x,y), (y,x) \in R$, dann soll $x = y$ sein. Es gibt in R keine Elemente $x \neq y$, wo (x,y) und (y,x) in R ist, also ist die Bedingung erfüllt.

Damit ist R eine Halbordnung.

Linearität: Für alle $x, y \in M$ soll $(x,y) \in R \ \vee \ (y,x) \in R$ sein. Es ist aber $(2,4) \notin R$ und $(4,2) \notin R$, die Bedingung ist nicht erfüllt.

Daher ist R keine Vollordnung.

- Das Element 1 ist kleinstes und damit einziges minimales Element, da für alle $x \in M$ gilt: $(1,x) \in R$: $\{ \ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) \ \} \subseteq R$.
- Das Element 2 ist maximales Element, da es kein $y \in M$ mit $y \neq 2$ gibt mit $(2,y) \in R$.
- Das Element 4 ist maximales Element, da es kein $y \in M$ mit $y \neq 4$ gibt mit $(4,y) \in R$.
- Damit gibt es kein größtes Element, da es zwei maximale Elemente gibt.

LÖSUNG 36. Auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ sei die Relation

$$R = \{ \ (1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4) \ \}$$

gegeben. Ist R eine Ordnung, und was für eine? Gibt es minimale, maximale, kleinste oder größte Elemente?

Prüfung der Eigenschaften:

Reflexivität: Für alle $x \in M$ soll $(x,x) \in R$ sein: Es ist $\{ \ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \ \} \subseteq R$, ist also erfüllt.

Transitivität: Sei $x, y, z \in M$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$. Ist $x = y$ oder $y = z$ oder $x = z$, so ist (x, z) erfüllt. Für $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$ gibt es folgende Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}
(2,3),(3,4) \in R &\Rightarrow (2,4) \in R \surd \\
(2,3),(3,1) \in R &\Rightarrow (2,1) \in R \surd \\
(2,4),(4,3) \in R &\Rightarrow (2,3) \in R \surd \\
(2,4),(4,1) \in R &\Rightarrow (2,1) \in R \surd \\
(3,4),(4,1) \in R &\Rightarrow (3,1) \in R \surd \\
(4,3),(3,1) \in R &\Rightarrow (4,1) \in R \surd
\end{aligned}$$

Damit ist R eine Quasiordnung.

Antisymmetrie: Seien $x, y \in M$ mit $(x, y), (y, x) \in R$, dann soll $x = y$ sein. Da $(3, 4) \in R$ und $(4, 3) \in R$ und $3 \neq 4$ ist die Bedingung nicht erfüllt.

Damit ist R keine Halbordnung.

- Das Element 2 ist kleinstes und damit einziges minimales Element, da für alle $x \in M$ gilt: $(2, x) \in R$: $\{\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\ \} \subseteq R$.
- Das Element 1 ist größtes und damit einziges maximales Element, da für alle $x \in M$ gilt: $(x, 1) \in R$: $\{\ (1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\ \} \subseteq R$.

Lösung 37. Gegeben seien die Relationen $U, V, W \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned}
U &= \{\ (1,4),(2,3),(3,3),(3,2),(4,1)\ \} \\
V &= \{\ (1,2),(2,3),(3,1),(4,2)\ \} \\
W &= \{\ (2,1),(3,1),(1,2),(4,2)\ \}
\end{aligned}$$

(1) Welche der Relationen sind Funktionen?
(2) Untersuchen Sie die Funktionen auf Injektivität und Surjektivität.

Relation U: Es ist $(3, 2) \in U$ und $(3, 3) \in U$, damit kann U keine Funktion sein.
Relation V:

- Von jedem Element aus $\{1, 2, 3, 4\}$ besteht eine Relation auf genau ein Element in $\{1, 2, 3\}$, also ist V eine Funktion.
- Zu jedem Element in $\{1, 2, 3\}$ gibt es eine Relation, also ist V surjektiv.
- Es ist $(1, 2) \in V$ und $(4, 2) \in V$, also ist V nicht injektiv.

Relation W:

- Von jedem Element aus $\{1, 2, 3, 4\}$ besteht eine Relation auf genau ein Element in $\{1, 2, 3\}$, also ist W eine Funktion.
- Zum Element 3 aus $\{1, 2, 3\}$ gibt es keine Relation, also ist W nicht surjektiv.
- Es ist $(2, 1) \in W$ und $(3, 1) \in W$, also ist W nicht injektiv.

Lösung 38. Gegeben seien die Relationen $U, V, W \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned}
U &= \{\ (1,4),(2,3),(3,1),(2,3)\ \} \\
V &= \{\ (1,2),(2,3),(1,2),(2,3)\ \} \\
W &= \{\ (2,1),(3,4),(1,2)\ \}
\end{aligned}$$

(1) Welche der Relationen sind Funktionen?
(2) Untersuchen Sie die Funktionen auf Injektivität und Surjektivität.

Relation U:
- Von jedem Element aus $\{1,2,3\}$ besteht eine Relation auf genau ein Element in $\{1,2,3,4\}$. Damit ist U eine Funktion.
- Zum Element 2 aus $\{1,2,3,4\}$ gibt es keine Relation, also ist U nicht surjektiv.
- Jedes erreichte Element aus $\{1,2,3,4\}$ wird von nur einem Element aus $\{1,2,3\}$ erreicht, damit ist U injektiv.

Relation V: Vom Element $3 \in \{1,2,3\}$ gibt es keine Relation, also kann V keine Funktion sein.
Relation W:
- Von jedem Element aus $\{1,2,3\}$ besteht eine Relation auf genau ein Element in $\{1,2,3,4\}$, also ist W eine Funktion.
- Zum Element 3 aus $\{1,2,3,4\}$ gibt es keine Relation, also ist W nicht surjektiv.
- Jedes erreichte Element aus $\{1,2,3,4\}$ wird von nur einem Element aus $\{1,2,3\}$ erreicht, damit ist W injektiv.

LÖSUNG 39. In S_5 sind diese beiden Permutationen gegeben:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \ \tau = (14)(23)$$

(1) Schreiben Sie σ in Zyklenschreibweise und τ in ausführlicher Matrixform.
(2) Bestimmen Sie σ^{-1} und $\tau \circ \sigma$.
(3) Bestimmen Sie das Urbild von $\{1,2,5\}$ unter τ.

(1) Es ist $\sigma = (13)(45)$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
(2) Es ist $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \sigma$ und $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (12345)$.
(3) Es ist $\tau^{-1}(\{1,2,5\}) = \{4,3,5\}$.

LÖSUNG 40. In S_5 sind diese beiden Permutationen gegeben:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \ \tau = (142)(35)$$

(1) Schreiben Sie σ in Zyklenschreibweise und τ in ausführlicher Matrixform.
(2) Bestimmen Sie τ^{-1} und $\sigma \circ \tau$.
(3) Bestimmen Sie das Bild von $\{2,3,4\}$ unter σ.

(1) Es ist $\sigma = (1342)$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) Es ist $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (124)(35)$, $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (12354)$.

(3) Es ist $\sigma(\{2, 3, 4\}) = \{1, 4, 2\}$.