LÖSUNG 55. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \left(6x^2 + 2e^{-x} + e^{-x}\cosh(x)\right)\, dx\,.$$

Wegen der Linearität der Integration werden alle Summanden einzeln behandelt:

$$\int 6x^2\, dx = \frac{6}{3}x^3 = 2x^3 + C$$

Da die Funktion e^{-x} die Ableitung $-e^{-s}$ hat, können wir $-e^{-x}$ zu e^{-x} integrieren:

$$-2\int -e^{-x}\, dx = -2e^{-x} + C$$

Da die Funktion $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$ ist, ist $e^{-x}\cosh(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}$. Damit ist

$$-\frac{1}{4}\int -2e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{4}e^{-2x} + C\,, \quad \int \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + C$$

und insgesamt

$$\int \left(6x^2 + 2e^{-x} + e^{-x}\cosh(x)\right)\, dx = 2x^3 - 2e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x + C\,.$$

LÖSUNG 56. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{1+x^2}\right)\, dx\,.$$

Wegen der Linearität der Integration werden alle Summanden einzeln behandelt:

$$\int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x| + C\,, \quad \int \frac{3}{x^3}\, dx = -\frac{3}{2}x^{-2} + C\,, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$$

Insgesamt ist das Ergebnis:

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{1+x^2}\right)\, dx = 2\ln|x| - \frac{3}{2}x^{-2} + \arctan x + C$$

LÖSUNG 57. Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi/4} \frac{2\cos(2x)}{2+\sin(2x)}\, dx.$$

Die Ableitung vom Nenner $2+\sin(2x)$ gerade dem Zähler $2\cos(2x)$ entspricht, liegt hier ein logarithmisches Integral vor:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{2\cos(2x)}{2+\sin(2x)}\, dx = [\ln|2+\sin(2x)|]_0^{\pi/4} = \ln|2+\sin\frac{\pi}{2}| - \ln|2+\sin 0| = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

Das Integral kann auch mit einer Substitution $u(x) = 2+\sin(2x)$ berechnet werden.

LÖSUNG 58. Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^4 \frac{x+1}{x^2+2x}\, dx.$$

Die Ableitung vom Nenner x^2+2x ist $2x+2$, das kann man mit einem Faktor 2 im Zähler wiederfinden. Damit liegt ein logarithmisches Integral vor:

$$\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{2x+2}{x^2+2x}\, dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+2x|\right]_1^4 = \frac{1}{2}\ln 24 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{24}{3} = \frac{1}{2}\ln 8$$

Das Integral kann auch mit einer Substitution $u(x) = x^2+2x$ gelöst werden.

LÖSUNG 59. Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx\,.$$

Die Ableitung von $u(x) = \ln x$ ist $u'(x) = \frac{1}{x}$ und ist als Faktor vorhanden: Damit ist

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx \overset{\substack{u=\ln x\\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}}}{=} \int u^{1/2}\, du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}\,(\ln x)^{3/2} + C'$$

und das bestimmte Integral ist

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}\,(\ln x)^{3/2}\right]_1^e = \frac{2}{3}(\underbrace{\ln e}_{=1})^{3/2} - \frac{2}{3}(\underbrace{\ln 1}_{=0})^{3/2} = \frac{2}{3}\,.$$

LÖSUNG 60. Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\, dx\,.$$

Die Ableitung von $u(x) = x^2$ ist $u'(x) = 2x$ und ist bis auf einen Vorfaktor im Integranden vorhanden. Damit ist

$$\frac{1}{2}\int 2x\sin(x^2)\, dx \overset{\substack{u=x^2\\ \frac{du}{dx}=2x}}{=} \frac{1}{2}\int \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C'$$

und für das bestimmte Integral ergibt sich

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

LÖSUNG 61. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int x^2 e^x\, dx\,.$$

Das ist ein typischer Fall für eine partielle Integration, um die x^2 zu dezimieren:

$$\int x^2 e^x\, dx \overset{\substack{u=x^2,\quad u'=2x\\ v'=e^x,\quad v=e^x}}{=} x^2e^x - 2\int xe^x\, dx$$

$$\overset{\substack{u=x,\quad u'=1\\ v'=e^x,\quad v=e^x}}{=} x^2e^x - 2xe^2 + 2\int e^x\, dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

LÖSUNG 62. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int x\cos(2x)\, dx\,.$$

Dieses integral ist über partielle Integration zu lösen:

$$\int x\cos(2x)\, dx \overset{\substack{u=x,\qquad u'=1\\ v'=\cos(2x),\quad v=\frac{1}{2}\sin(2x)}}{=} \frac{x}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)\, dx = \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

LÖSUNG 63. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int x^3 \ln x \, dx \, .$$

Mit einer partiellen Integration kann man den Logarithmus ableiten:

$$\int x^3 \ln x \, dx \overset{\substack{u = \ln x, \quad u' = 1/x \\ v' = x^3, \quad v = \frac{1}{4}x^4}}{=} \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^3}{4} \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

LÖSUNG 64. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int x^2 \ln(2x) \, dx.$$

Mit einer partiellen Integration zur Ableitung des Logarithmus ergibt sich:

$$\int x^2 \ln(2x) \, dx \overset{\substack{u = \ln(2x), \quad u' = 1/x \\ v' = x^2, \quad v = \frac{1}{3}x^3}}{=} \frac{x^3}{3} \ln(2x) - \int \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln(2x) - \frac{x^3}{9} + C$$

LÖSUNG 65. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x} \, dx \, .$$

Dieses Integral kann mit einer Partialbruchzerlegung gelöst werden. Da der Grad des Nenners größer als der Grad des Zählers ist, ist keine Partialbruchzerlegung möglich. Der Nenner faktorisiert sich zu $x(x^2 + 1)$. Damit ist der Ansatz:

$$\frac{Ax + B}{1 + x^2} + \frac{C}{x} = \frac{Ax^2 + Bx + C + Cx^2}{(1 + x^2) \cdot x} = \frac{(A + C)x^2 + Bx + C}{(1 + x^2) \cdot x} \overset{!}{=} \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} A & & +C & = & 2 & & (1) \\ & B & & = & 1 & & (2) \\ & & C & = & 1 & & (3) \end{array}$$

Aus den Gleichungen (2), (3) folgt $B = 1$ und $C = 1$ und damit ist nach (1) auch $A = 1$. Also ist

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{x + 1}{1 + x^2} + \frac{1}{x}$$

und die einzelnen Integral ergeben

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C \, ,$$
$$\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \arctan x + C \, ,$$
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \, .$$

Insgesamt ergibt dies:

$$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x} \, dx = \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + \arctan x + \ln |x| + C$$

LÖSUNG 66. Bestimmen Sie die Stammfunktion

$$\int \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2}\, dx\,.$$

Dieses Integral kann mit einer Partialbruchzerlegung gelöst werden. Da der Grad des Nenners größer als der Grad des Zählers ist, ist keine Partialbruchzerlegung möglich. Der Nenner faktorisiert sich zu $x^2(x-1)$. Damit ist der Ansatz:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{(A+C)x^2 + (B-A)x - B}{x^2(x-1)} \overset{!}{=} \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{cccccc} A & & +C & = & 2 & (1) \\ -A & +B & & = & 1 & (2) \\ & -B & & = & -2 & (3) \end{array}$$

Aus (3) folgt $B = 2$, und damit aus (2) $A = 1$. Aus (1) ergibt sich dann $C = 1$. Damit ist

$$\frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

mit den einzelnen Integralen

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
$$\int \frac{2\,dx}{x^2} = -\frac{2}{x} + C$$
$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$$

und insgesamt

$$\int \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} = \ln|x| - \frac{2}{x} + \ln|x-1| + C\,.$$