Duale Hochschule Baden-Württemberg

Analysis und Lineare Algebra

2. Übungsblatt

1. Aufgabe: Wenden Sie das Majoranten- oder Minorantenkriterium auf diese Reihe an:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 - \sqrt{k^4+1}\right)$$

2. Aufgabe: Konvergiert diese Reihe?

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3-\frac{1}{k})^k}{2^{2k}}\right)$$

3. Aufgabe: Bestimmen Sie die Potenzreihe zu $f(x)$ um Entwicklungspunkt $x_0 = 2$:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{3+2x}$$

4. Aufgabe: Welchen Konvergenzkreis hat die Potenzreihe von $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^k k!}{(2k+1)!}(x+1)^{2k}$$

5. Aufgabe: Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^3 3^k}{(3k+1)!} z^{2k+1}\right)$$

Lösung 1. Übungsblatt

Lösung 1: Scheitelpunktsform: $p(x) = x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2 \cdot 1x + 1) - 1 + 5 = (x-1)^2 + 4$. Scheitelpunkt liegt auf $S(1|4)$. Bestimmung der Nullstellen: $x_{1/2} = +\frac{2}{2} \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$. Die Faktorisierung lautet damit $p(x) = (x-1-2i)(x-1+2i)$.

Lösung 2: Nach Multiplikation mit dem rechten Nenner ist

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{(1+i)(3+2i)}{(2-i)} = \frac{3+3i+2i-2}{2-i} = \frac{1+5i}{2-i} \\ &= \frac{(1+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+10i+i-5}{4+1} = -\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i\end{aligned}$$

und damit lautet konjugiert komplex die Lösung $z = -\frac{3}{5} - \frac{11}{5}i$.

Lösung 3: Eine Polynomdivision oder Vereinfachung ergibt

$$a_n = \frac{3n^2+4}{n^2+1} = \frac{3n^2+3}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+1} = 3 + \frac{1}{n^2+1}\,.$$

Da $\frac{1}{n^2+1} > 0$ ist $a_n = 3 + \frac{1}{1+n^2} > 3$. Da $n^2+1 > 1$, ist $\frac{1}{n^2+1} < 1$ und damit $a_n = 3 + \frac{1}{1+n^2} < 3 + 1 = 4$. Also ist sicher $|a_n| < 4$ und somit (a_n) beschränkt. Für die Monotonie wird die Differenz $a_{n+1} - a_n$ untersucht:

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= 3 + \frac{1}{(n+1)^2+1} - 3 - \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+2} - \frac{1}{n^2+1} \\ &= \frac{n^2+1-n^2-2n-2}{(n^2+2n+2)\cdot(n^2+1)} = -\frac{\overbrace{2n+1}^{>0}}{\underbrace{(n^2+1)}_{>0}\underbrace{(n^2+2n+2)}_{>0}} < 0\end{aligned}$$

Damit ist die Folge streng monoton fallend.

Lösung 4:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{n^2-2n+3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-\sqrt{n^2-2n+3})(n+\sqrt{n^2-2n+3})}{n+\sqrt{n^2-2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n^2+2n-3}{(n+\sqrt{n^2-2n+3})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(2-3/n)}{\cancel{n}(1+\sqrt{1-2/n+3/n^2})} = \frac{2}{1+1} = 1\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-2n+3}}{4n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{1-2/n+3/n^2}}{\cancel{n}(4+3/n)} = \frac{1}{4}$$

Lösung 5: Die Nullstellen des Nenners lauten $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Die Nullstellen des Zählers lauten $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$. Die faktorisierte Darstellung von $f(x)$ lautet daher $f(x) = \frac{x(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-2)}$. An $x = 2$ werden sowohl Zähler und Nenner 0, nach Kürzen des entsprechenden Terms für $x \neq 2$ ist $f(x) = \frac{x(x+3)}{x-1}$ und damit dann an $x = 2$ nicht mehr singulär. Damit ist an $x = 2$ eine hebbare Definitionslücke und $f(x)$ kann dort stetig zu $f(2) = 10$ ergänzt werden. Die Funktion hat Nullstellen an $x = 0$ und $x = -3$, sowie einen Pol an 1. Eine Polynomdivision ergibt $f(x) = x + 4 + \frac{4x-8}{x^2-2x+2}$ und damit ist $g(x) = x + 4$ die Asymptote von $f(x)$ für $|x| \to \infty$.