LÖSUNG 25. Welche Elemente sind in Menge A:

$$A = \big(\{x \in \mathbb{R} |\, x^2 < 25\} \cup [-12, 3)\big) \cap (\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N})$$

Die Ungleichung $x^2 < 25$ ist erfüllt für $|x| < 5$, also $x \in (-5, 5)$. Damit ist $(-5, 5) \cup [-12, 3) = [-12, 5)$. Auf der rechten Seite ist $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} |\, x < 1\} = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$. Der Schnitt beider Mengen ist damit

$$A = \{-12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}\,.$$

LÖSUNG 26. Finden Sie eine einfachere Beschreibung für die Menge A:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} |\, |x - 4| < 7\} \,\cap\, \big(\{x \in \mathbb{Z} |\, \exists y \in \mathbb{N} : x = y^2\} \,\triangle\, (-\infty, 1]\big)$$

Auf der linken Seite ist $|x - 4| < 7$ gerade $(-3, 11)$, darin sind die ganzen Zahlen $\{-2, -1, \ldots, 8, 9, 10\}$. Auf der rechten Seite wird ist die symmetrische Differenz der Menge der Quadratzahlen $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ zu $(-\infty, 1]$ gesucht, und das ist $(-\infty, 1) \cup \{4, 9, 16, \ldots\}$. Der Schnitt der beiden Seiten ergibt

$$A = \{-2, -1, 0, 4, 9\}\,.$$

LÖSUNG 27. Vereinfachen Sie diesen Ausdruck für Mengen A, B und C:

$$A \cup ((A \backslash B) \cap (A \backslash\, ((C \backslash B) \cup C)))$$

Mit $(C \backslash B) \cup C = C$ ist

$$\begin{aligned}
A \cup ((A \backslash B) \cap (A \backslash\, ((C \backslash B) \cup C))) &= A \cup ((A \backslash B) \cap (A \backslash C)) && \text{Hinweis}\\
&= A \cup (A \backslash (B \cup C)) && \text{De Morgan}\\
&= A && \text{Hinweis}
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt: $C = C \cup (C \backslash B)$.

$\subseteq$:
  Gegeben ist: $x \in C$
  Zu zeigen ist: $x \in C \cup (C \backslash B)$
  Da $x \in C$ ist $x \in C \cup (C \backslash B)$.

$\supseteq$:
  Gegeben ist: $x \in C \cup (C \backslash B)$
  Zu zeigen ist: $x \in C$
  Ist $x \in C \cup (C \backslash B)$, so gibt es zwei Fälle:
  (1) Ist $x \in C$, so ist die Konklusion erfüllt.
  (2) Ist $x \in (C \backslash B)$, so ist $x \in C$ und $x \notin B$. Die erste Aussage erfüllt die Konklusion.

LÖSUNG 28. Vereinfachen Sie diesen Ausdruck für Mengen A, B und C:

$$(A \backslash B) \cup ((B \backslash A) \cup C) \cup ((A \cup C) \cap (B \cup C))$$

$$\begin{aligned}
&(A\backslash B) \cup ((B\backslash A) \cup C) \cup ((A \cup C) \cap (B \cup C)) && \\
&= (A\backslash B) \cup ((B\backslash A) \cup C) \cup ((A \cap B) \cup C) && \text{Distributivität} \\
&= (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \cup C \cup (A \cap B) \cup C && \text{Assoziativität} \\
&= (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A) \cup C && \text{Kommutativität und Idempotenz} \\
&= A \cup B \cup C && \text{mit } (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A) = A \cup B
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A) = A \cup B$:

$\subseteq$:

Gegeben ist: $x \in (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A)$

Zu zeigen ist: $x \in A \cup B$

Ist $x \in (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A) = A \cup B$, so gibt es drei Fälle:

(1) Ist $x \in A\backslash B$, so ist $x \in A \subseteq A \cup B$ und damit $x \in A \cup B$.
(2) Ist $x \in A \cap B$, so ist $x \in A \cup B$, da $A \cap B \subseteq A \cup B$.
(3) Ist $x \in B\backslash A$, so ist $x \in B \subseteq A \cup B$ und damit $x \in A \cup B$.

$\supseteq$:

Gegeben ist: $x \in A \cup B$

Zu zeigen ist: $x \in (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A)$

Es gibt drei Fälle:

(1) Ist $x \in A$ und $x \notin B$, so ist $x \in A\backslash B \subseteq (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A)$.
(2) Ist $x \in A$ und $x \in B$, so ist $x \in A \cap B \subseteq (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A)$.
(3) Ist $x \notin A$ und $x \in B$, so ist $x \in B\backslash A \subseteq (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A)$.

LÖSUNG 29. Ist C eine Partition der Menge $A = \{1, 2, 3\}$?

$$C = (\mathcal{P}(A)\backslash\mathcal{P}(A\backslash\{1\}))$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \\
\mathcal{P}(A\backslash\{1\}) = \mathcal{P}(\{2, 3\}) &= \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}
\end{aligned}$$

Damit ist die Differenz

$$C = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

und da die Mengen paarweise einen Schnitt haben, kann es keine Partition sein.

LÖSUNG 30. Seien $A = \{1, 4, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(A) \triangle \mathcal{P}(B)|$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\} \\
\mathcal{P}(B) &= \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}
\end{aligned}$$

und damit ist die Kardinalität der symmetrischen Differenz

$$|\mathcal{P}(A) \triangle \mathcal{P}(B)| = |\{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}| = 8\,.$$

LÖSUNG 31. Auf der Menge $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sei die Relation R definiert durch

$$(a,b)\,R\,(c,d) \;\Leftrightarrow\; a \cdot d = b \cdot c\,.$$

Welche Eigenschaften hat sie?

Analyse der verschiedenen Eigenschaften:

Symmetrie: Seien $(x,y),(u,v) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ mit $(x,y)\,R\,(u,v)$, also $x\cdot v = y\cdot u$. Gilt jetzt $(u,v)\,R\,(x,y)$, also $u \cdot y = v \cdot x$? Ja, denn $u \cdot y = y \cdot u$ und $v \cdot x = x \cdot v$. Die Relation ist symmetrisch.

Antisymmetrie: Nein, sie ist nicht antisymmetrisch, denn $(2,1)\,R\,(4,2)$ und $(4,2)\,R\,(2,1)$, während $(4,2) \neq (2,1)$.

Reflexivität: Sei $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Dann ist $x \cdot y = x \cdot y$, also ist $(x,y)\,R\,(x,y)$. Die Relation ist reflexiv.

Transitivität: Seien $(a,b)\,R\,(c,d)$ und $(c,d)\,R\,(e,f)$. Dann sind $a \cdot d = b \cdot c$ und $c \cdot f = d \cdot e$. Gilt dann auch $a \cdot f = b \cdot e$?

$$(a \cdot f) \cdot d = (a \cdot d) \cdot f = b \cdot (c \cdot f) = b \cdot (d \cdot e) = (b \cdot e) \cdot d$$

Da $d \in \mathbb{N}$ gilt daher $a \cdot f = b \cdot e$, also auch $(a,b)\,R\,(e,f)$ und die Relation ist transitiv.

Linearität: Nein, es gilt weder $(1,2)\,R\,(3,4)$ noch $(3,4)\,R\,(1,2)$.

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. Es ist die Äquivalenz gleicher Brüche

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; a \cdot d = b \cdot c\,.$$

LÖSUNG 32. Welche Eigenschaften hat die Relation $x \mid y$ für x teilt y auf den natürlichen Zahlen?

Analyse der verschiedenen Eigenschaften:

Symmetrie: Sei $a,b \in \mathbb{N}$ mit $a|b$. Gilt dann auch $b|a$? Sei $a = 2$ und $b = 4$, dann gilt $2|4$ aber nicht $4|2$. Sie ist nicht symmetrisch.

Antisymmetrie: Seien $a,b \in \mathbb{N}$ mit $a|b$ und $b|a$. Es gibt also $p,q \in \mathbb{N}$, dass $a \cdot p = b$ und $b \cdot q = a$. Also ist $a = b \cdot q = a \cdot p \cdot q$. Also sind $p \cdot q = 1$ und da beide natürliche Zahlen sind, ist $p = q = 1$ und daher $a = b$. Die Relation ist antisymmetrisch.

Reflexivität: Sei $a \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a|a$, da $a = a \cdot 1$. Die Relation ist reflexiv.

Transitivität: Seien $a,b,c \in \mathbb{N}$ mit $a|b$ und $b|c$. Dann gibt es $p,q \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot p = b$ und $b \cdot q = c$. Dann ist aber auch $a \cdot p \cdot q = b \cdot q = c$. Also gilt $a|c$ und die Relation ist transitiv.

Linearität: Nein, sie ist nicht linear, da weder $2|3$ noch $3|2$ gilt.

LÖSUNG 33. Auf der Menge $M = \{1,2,3,4\}$ sei die Relation

$$R = \{\ (1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(4,4)\ \}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist, bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[3]_R$ und stellen Sie die Quotientenmenge M/R auf.

Zu zeigen sind die folgenden Eigenschaften:

Reflexivität: Für alle $x \in M$ soll $(x,x) \in R$ sein: Es ist $\{\ (1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\ \} \subseteq R$, ist also erfüllt.

Symmetrie: Für alle $x,y \in M$ mit $(x,y) \in R$ ist $(y,x) \in R$. Sei $x \neq y$ (sonst siehe Reflexivität), dann bleibt nur $(1,3) \in R$ und tatsächlich ist $(3,1) \in R$ und umgekehrt, ist also erfüllt.

Transitivität: Sei $x, y, z \in M$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$. Ist $x = y$ oder $y = z$ oder $x = z$, so ist (x, z) erfüllt. Für $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$ gibt es in R keine weitere Fälle. Also ist die Bedingung erfüllt.

Damit ist R eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse von 3 ist: $[3]_R = \{3, 1\}$. Die weiteren Äquivalenzklassen sind: $[2]_R = \{2\}$ und $[4]_R = \{4\}$. Die Quotientenmenge lautet daher:

$$M/R = \{ \ [2]_R, [3]_R, [4]_R \ \} = \{ \ \{2\}, \{3, 1\}, \{4\} \ \}$$

Lösung 34. Auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ sei die Relation

$$R = \{ \ (1, 4), (1, 1), (3, 2), (2, 2), (4, 4), (3, 3), (4, 1), (2, 3) \ \}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist, bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[2]_R$ und stellen Sie die Quotientenmenge M/R auf.

Zu zeigen sind die folgenden Eigenschaften:

Reflexivität: Für alle $x \in M$ soll $(x, x) \in R$ sein: Es ist $\{ \ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \ \} \subseteq R$, ist also erfüllt.

Symmetrie: Für alle $x, y \in M$ mit $(x, y) \in R$ ist $(y, x) \in R$. Sei $x \neq y$ (sonst siehe Reflexivität), dann bleibt $(1, 4) \in R$ und tatsächlich ist $(4, 1) \in R$ und umgekehrt, und $(3, 2) \in R$ und $(2, 3) \in R$ und umgekehrt, ist also erfüllt.

Transitivität: Sei $x, y, z \in M$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$. Ist $x = y$ oder $y = z$ oder $x = z$, so ist (x, z) erfüllt. Für $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$ gibt es in R keine weitere Fälle. Also ist die Bedingung erfüllt.

Damit ist R eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse von 2 ist: $[2]_R = \{2, 3\}$. Die weitere Äquivalenzklasse ist: $[1]_R = \{1, 4\}$. Die Quotientenmenge lautet daher:

$$M/R = \{ \ [1]_R, [2]_R \ \} = \{ \ \{1, 4\}, \{2, 3\} \ \}$$