LÖSUNG 19. Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k^4+1}-\sqrt{k^4-1}\right)$$

Mit der dritten binomischen Formel ist

$$\begin{aligned}\sqrt{k^4+1}-\sqrt{k^4-1} &= \frac{(\sqrt{k^4+1}-\sqrt{k^4-1})(\sqrt{k^4+1}+\sqrt{k^4-1})}{\sqrt{k^4+1}+\sqrt{k^4-1}}\\ &= \frac{k^4+1-k^4+1}{\sqrt{k^4+1}+\sqrt{k^4-1}} = \frac{2}{\sqrt{k^4+1}+\sqrt{k^4-1}}\,.\end{aligned}$$

Da der Nenner sich etwa wie $2k^2$ verhält und die Reihe $\sum\frac{1}{k^2}$ konvergiert, wird eine konvergente Majorante gesucht.

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{\underbrace{\sqrt{k^4+1}}_{>1}+\sqrt{k^4-1}} < \frac{2}{1+\sqrt{k^4-1}}\\ &\overset{\text{da } -2k^2+1\leq -1}{\leq} \frac{2}{1+\sqrt{k^4-2k^2+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{(k^2-1)^2}} = \frac{2}{1+k^2-1} = \frac{2}{k^2}\end{aligned}$$

Da die Majorante $2\sum\frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert auch die obige Reihe.

LÖSUNG 20. Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k^2+1}-k\right)$$

Mit der dritten binomischen Formel ist

$$\sqrt{k^2+1}-k = \frac{(\sqrt{k^2+1}-k)(\sqrt{k^2+1}+k)}{\sqrt{k^2+1}+k} = \frac{k^2+1-k^2}{\sqrt{k^2+1}+k} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k}\,.$$

Der Nenner verhält sich etwa wie $2k$, und da die Reihe $\sum\frac{1}{k}$ divergiert, wird nach einer divergenten Minorante gesucht:

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k} > \frac{1}{\sqrt{k^2+2k+1}+k} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2}+k} = \frac{1}{k+1+k} > \frac{1}{3k}$$

Die Reihe $\frac{1}{3}\sum\frac{1}{k}$ ist divergent und eine Minorante. Damit divergiert die obige Reihe.

LÖSUNG 21. Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+k^2}{2^k}\right)$$

Mit dem Wurzelkriterium ist

$$\varrho = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{2+k^2}{2^k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{2+k^2}}{\sqrt[k]{2^k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{k^2(2/k^2+1)}}{2} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt[k]{2/k^2+1}}_{\to 1} = \frac{1}{2}\,,$$

und somit ist die Reihe konvergent.

LÖSUNG 22. Wenden Sie das Wurzelkriterium auf diese Reihe an:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Mit dem Wurzelkriterium ist

$$\varrho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}\,,$$

und somit ist die Reihe konvergent.

LÖSUNG 23. Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{k!}\right)$$

Mit dem Quotientenkriterium ist

$$\varrho=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k+3)}{(k+1)!}}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{k!}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k+3)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+3}{k+1}=2\,,$$

und daher divergiert die obige Reihe.

LÖSUNG 24. Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{(2k)!}\right)$$

Mit dem Quotientenkriterium ist

$$\varrho=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{4^{k+1}}{(2k+2)!}}{\frac{4^k}{(2k)!}}=\lim_{k\to\infty}\frac{4^{k+1}}{4^k}\cdot\frac{(2k)!}{(2k+2)!}=\lim_{k\to\infty}\frac{4}{(2k+1)(2k+2)}=0\,,$$

also konvergiert die obige Reihe.

LÖSUNG 25. Bestimmen Sie die Potenzreihe zu $f(x)$ zu $x_0=1$:

$$f(x)=\frac{x-1}{3+x}$$

Der Term wird auf eine geometrische Reihe umgeformt:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{3+x}&=\frac{x-1}{3+(x-1)+1}=\frac{x-1}{3+(x-1)+1}=\frac{x-1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x-1}{1-(-\frac{x-1}{4})}\\&=\frac{1}{4}(x-1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{x-1}{4})^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-1)^{k+1}}{4^{k+1}}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-1)^k}{4^k}\end{aligned}$$

LÖSUNG 26. Bestimmen Sie die Potenzreihe zu $f(x)$ zu $x_0=0$:

$$f(x)=\frac{x}{4+x^2}$$

Der Term wird auf eine geometrische Reihe umgeformt:

$$\frac{x}{4+x^2} = \frac{1}{4}\cdot x\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x^2}{4})} = \frac{x}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{x^2}{4})^k = \frac{x}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}x^{2k+1}$$

Lösung 27. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}(z-3)^{2k}\right)$$

Mit dem Quotientenkriterium ist

$$\varrho = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!}(z-3)^{2k+2}}{\frac{(k!)^2}{(2k)!}(z-3)^{2k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)}(z-3)^2 = \frac{1}{4}(z-3)^2 \overset{!}{<} 1\,.$$

Das ist erfüllt für $(z-3)^2 < 4$ oder $|z-3| < 2$. Damit ist der Konvergenzradius der Potenzreihe um $z_0 = 3$ gegeben durch $r = 2$.

Lösung 28. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k\cdot k!}{(k+2)!}(z-1)^k\right)$$

Mit dem Quotientenkriterium ist

$$\varrho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{4^{k+1}\cdot(k+1)!}{(k+3)!}(z-1)^{k+1}}{\frac{4^k\cdot k!}{(k+2)!}(z-1)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{4(k+1)}{(k+3)}|z-1| = 4|z-1| \overset{!}{<} 1\,.$$

Dies ist erfüllt für $|z-1| < \frac{1}{4}$, der Konvergenzradius zur Potenzreihe um $z_0 = 1$ beträgt $r = \frac{1}{4}$.

Lösung 29. Bestimmen Sie den Konvergenzkreis der Potenzreihe:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{(k+2)^k}(x+1)^k\right)$$

Mit dem Wurzelkriterium ist

$$\varrho = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{3^k}{(k+2)^k}(x+1)^k\right|} = \lim_{k\to\infty}\frac{3}{k+2}|x+1| = 0 < 1\,.$$

Daher ist der Konvergenzradius für die Potenzreihe um $x_0 = 1$ unendlich $r = \infty$.

Lösung 30. Bestimmen Sie den Konvergenzkreis der Potenzreihe:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{(1+\frac{1}{k})^k}(x+2)^{2k}\right)$$

Mit dem Wurzelkriterium ist

$$\varrho = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{(1+\frac{1}{k})^k}(x+2)^{2k}\right|} = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{k}}|x+2|^2 = 2|x+2|^2 \overset{!}{<} 1\,,$$

mit $|x+2|^2 < \frac{1}{2}$ oder $|x+2| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Der Konvergenzkreis um $x_0 = -2$ hat den Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.