LÖSUNG 1. Bestimmen Sie in $\mathbb{C}$ die Scheitelpunktsform, Nullstellen und Faktorisierung von

$$f(x) = x^2 + 4x + 13\,.$$

Eine quadratische Ergänzung liefert

$$f(x) = (x^2 + 2 \cdot 2x + 4) - 4 + 13 = (x+2)^2 + 9.$$

Der Scheitelpunkt liegt auf $S(-2|9)$. Die Nullstellen können mit der p, q-Formel bestimmt werden:

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$$

Die Nullstellen sind also $x_1 = -2 + 3i$ und $x_2 = -2 - 3i$. Die Faktorisierung von lautet

$$f(x) = (x + 2 - 3i)(x + 2 + 3i)\,.$$

LÖSUNG 2. Bestimmen Sie in $\mathbb{C}$ die Scheitelpunktsform, Nullstellen und Faktorisierung von

$$f(x) = x^2 + 6x + 13\,.$$

Die quadratische Ergänzung liefert

$$f(x) = (x^2 + 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 13 = (x+3)^2 + 4\,.$$

Damit ist der Scheitelpunkt $S(-3|4)$. Die Nullstellen werden mit der p, q-Formel bestimmt:

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2i$$

Die Nullstellen sind $x_1 = -3 + 2i$ und $x_2 = -3 - 2i$. Die Faktorisierung lautet

$$f(x) = (x + 3 - 2i)(x + 3 + 2i)\,.$$

LÖSUNG 3. Berechnen Sie für $z = 3 + 4i$ den Real- und Imaginärteil von

$$\frac{z + \operatorname{Re}(z \cdot z)}{2z - \bar{z}}\,.$$

Berechnung der einzelnen Bestandteile:

- $z \cdot z = (3+4i)(3+4i) = 9 + 12i + 12i + 16i^2 = 9 - 16 + 24i = -7 + 24i$
- $z + \operatorname{Re}(zz) = 3 + 4i + \operatorname{Re}(-7 + 24i) = 3 + 4i - 7 = -4 + 4i$
- $2z - \bar{z} = 2(3+4i) - (3-4i) = 6 + 8i - 3 + 4i = 3 + 12i$

Insgesamt ergibt sich:

$$\frac{z + \operatorname{Re}(z \cdot z)}{2z - \bar{z}} = \frac{-4+4i}{3+12i} = \frac{(-4+4i)(3-12i)}{(3+12i)(3-12i)} = \frac{-12+48+12i+48i}{9+144} = \frac{36}{153} + \frac{60}{153}i = \frac{4}{17} + \frac{20}{51}i$$

LÖSUNG 4. Berechnen Sie für $z_1 = 1 - 2i$ und $z_2 = 3 - 4i$ den Real- und Imaginärteil von

$$\frac{z_1 z_2 + \frac{z_1}{z_2}}{z_1 \bar{z}_1}\,.$$

Berechnung der einzelnen Bestandteile:

- $z_1 z_2 = (1-2i)(3-4i) = 3 - 8 - 6i - 4i = -5 - 10i$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3-4i} = \frac{(1-2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+8-6i+4i}{9+16} = \frac{11-2i}{25}$
- $z_1 z_2 + \frac{z_1}{z_2} = -5 - 10i + \frac{11-2i}{25} = \frac{-125+11-250i-2i}{25} = \frac{-114-252i}{25}$
- $z_1 \bar{z}_1 = (1-2i)(1+2i) = 1 + 4 = 5$

Insgesamt ergibt sich:

$$\frac{z_1 z_2 + \frac{z_1}{z_2}}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{\frac{-114-252i}{25}}{5} = -\frac{114}{125} - \frac{252}{125}i$$

LÖSUNG 5. Geben Sie die Polarkoordinaten zur Zahl $z = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ und die komplexe Zahl mit den Polarkoordinaten $r = 3$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ an.

Da $\operatorname{Re} z < 0$ ist, können wir das Argument von z nicht direkt ausrechnen. Dafür ist $w = -z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$ auf der richtigen Seite der komplexen Ebene und damit ist

$$\varphi_w = \arg w = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}\,.$$

Damit ist $\varphi_z = \arg z = \arg w + \pi = \frac{2}{3}\pi$. Der Betrag von z berechnet sich zu

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1\,.$$

Die gesuchte komplexe Zahl lautet $u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 3\cos\frac{3\pi}{4} + 3i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,i.$

LÖSUNG 6. Geben Sie die Polarkoordinaten zur Zahl $z = -1 + i$ und die komplexe Zahl mit den Polarkoordinaten $r = 2$, $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ an.

Da $\operatorname{Re} z < 0$ ist, können wir das Argument von z nicht direkt ausrechnen. Dafür ist $w = -z = 1 - i$ auf der richtigen Seite der komplexen Ebene und damit ist

$$\varphi_w = \arg w = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \arctan \frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Damit ist $\varphi_z = \arg z = \arg w + \pi = \frac{3}{4}\pi$. Der Betrag von z berechnet sich zu

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}\,.$$

Die gesuchte komplexe Zahl lautet $u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\cos\frac{5\pi}{4} + 2i\sin\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i.$

LÖSUNG 7. Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Monotonie und Beschränktheit:

$$a_n = \frac{1 - n + n^2}{n+1}\,.$$

Zur Monotonie wird die Differenz $a_{n+1} - a_n$ untersucht:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{1-(n+1)+(n+1)^2}{(n+1)+1} - \frac{1-n+n^2}{n+1} \\
&= \frac{n^2+n+1}{n+2} - \frac{n^2-n+1}{n+1} \\
&= \frac{(n^2+n+1)(n+1) - (n^2-n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{n^3+n^2+n\ +n^2+n+1\ -n^3+n^2-n\ -2n^2+2n-2}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{n^2+3n-1}{n^2+3n+2} = \frac{(n^2+3n+2)-3}{n^2+3n+2} = 1 - \frac{3}{\underbrace{n^2}_{\geq 1} + \underbrace{3n}_{\geq 3} + 2} \geq \frac{3}{6} = \frac{1}{2} > 0
\end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen aus $n \geq 1$ ist die Differenz immer positiv und damit ist die Folge streng monoton steigend. Für die Untersuchung der Beschränktheit ist eine Polynomdivision sinnvoll:

$$\begin{array}{cccccc}
n^2 & -n & +1 & = & (n+1)(n-2)+3 \\
n^2 & +n & & & \\
-- & -- & & & \\
 & -2n & +1 & & \\
 & -2n & -2 & & \\
 & -- & -- & & \\
 & & 3 & &
\end{array}$$

Damit ist

$$a_n = \frac{1-n+n^2}{n+1} = n-2+\frac{3}{n+1} > n-2\,.$$

Da $n-2$ beliebig anwächst, wird auch a_n beliebig anwachsen und ist damit unbeschränkt.

Mit dem Ergebnis aus der Polynomdivision ist auch die Frage der Monotonie leichter zu beantworten:

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= (n+1)-2+\frac{3}{(n+1)+1}-n+2-\frac{3}{n+1} \\
&= 1+\frac{3(n+1)-3(n+2)}{(n+2)(n+1)} = 1+\frac{-3}{\underbrace{(n+2)}_{\geq 3}\underbrace{(n+1)}_{\geq 2}} \geq 1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Auch auf diese Weise ist ersichtlich, dass die Folge streng monoton steigt.

LÖSUNG 8. Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Monotonie und Beschränktheit:

$$a_n = \frac{1+6n+2n^2}{(n+3)n}\,.$$

Eine Polynomdivision vereinfacht den Ausdruck:

$$\begin{array}{cccccc}
2n^2 & +6n & +1 & = & (n^2+3n)(2)+1 \\
2n^2 & +6n & & & \\
-- & -- & -- & & \\
 & & 1 & &
\end{array}$$

Damit ist $a_n = 2 + \frac{1}{n^2+3n}$. Untersuchung der Monotonie:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= 2 + \frac{1}{(n+1)^2 + 3(n+1)} - 2 - \frac{1}{n^2+3n} \\
&= \frac{1}{n^2+2n+1+3n+3} - \frac{1}{n^2+3n} \\
&= \frac{1}{n^2+5n+4} - \frac{1}{n^2+3n} \\
&= \frac{n^3+3n-n^2-5n-4}{(n^2+5n+4)(n^2+3n)} \\
&= \frac{\overbrace{-2n-4}^{<0}}{\underbrace{(n^2+5n+4)(n^2+3n)}_{>0}} < 0
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge streng monoton fallend.

Da $n^2+3n > 1$ ist $\frac{1}{n^2+3n} < 1$ und somit $2 + \frac{1}{n^2+3n} < 2+1 = 3$. Und da $n^2+3n > 0$ ist auch $\frac{1}{n^2+3n} > 0$ und somit $2 + \frac{1}{n^2+3n} > 2+0 = 2$. Damit ist $2 < a_n < 3$, also sicher $|a_n| < 3$, demnach ist a_n beschränkt.

LÖSUNG 9. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (b_n), falls er existiert:

$$b_n = \frac{1-n+n^2}{n(n+1)}\,.$$

Nach Kürzen der höchsten Potenz kann der Grenzwert für die einzelnen Terme bestimmt werden:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n+n^2}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}^2(\overbrace{1}^{\to 1} - \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0})}{\cancel{n}^2(\underbrace{1}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0})} = 1$$

LÖSUNG 10. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (b_n), falls er existiert:

$$b_n = \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^2+1}{n-1}\,.$$

Die Brüche werden auf einen Hauptnenner gebracht und anschließend die höchste Potenz gekürzt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)(n-1) - (n^2+1)(n+3)}{(n+3)(n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n^2-n+1-n^3-3n^2-n-3}{n^2+2n+3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-4n^2-2n-2}{n^2+2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}^2(\overbrace{-4}^{\to -4} - \overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\to 0})}{\cancel{n}^2(\underbrace{1}_{\to 1} + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0})} = -4
\end{aligned}$$

LÖSUNG 11. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n\,.$$

Hier kann der Grenzwert nicht direkt berechnet werden, da ein Ergebnis der Art „$\infty - \infty$“ alles mögliche ergeben könnte. Differenzen mit Wurzeln sind oft mit der dritten binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ analysierbar:

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

Jetzt können im Zähler und Nenner wieder die höchsten Potenzen ausgeklammert werden:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n} \cdot \overbrace{1}^{\to 1}}{\cancel{n}(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1} + \underbrace{1}_{\to 1})} = \frac{1}{2}$$

Ein Hinweis zum Ausklammern aus Wurzeln:

$$\sqrt{x^2+2x+3} = \sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})} = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

Die Betragsstriche (wegen z.B. $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$) können oben wegfallen, da n beim Grenzübergang gegen $+\infty$ irgendwann positiv angenommen werden kann.

Lösung 12. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+4n}\,.$$

Die dritte binomische Formel hilft auch hier:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+4n} &= \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+4n}\right)\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+4n}\right)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+4n}} \\ &= \frac{n^2+1-n^2-4n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+4n}} = \frac{-4n+1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+4n}}\end{aligned}$$

Durch Ausklammern der höchsten Potenz in Zähler und Nenner wird der Grenzwert berechnet:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+4n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-4n+1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+4n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(\overbrace{-4}^{\to -4} + \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0})}{\cancel{n}(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}_{\to 1} + \underbrace{\sqrt{1+\frac{4}{n}}}_{\to 1})} = -\frac{4}{1+1} = -2\end{aligned}$$

Lösung 13. Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2+2 & , \quad x < -1 \\ \exp(x+1)+2 & , \quad x \geq -1 \end{cases}\end{aligned}$$

In den Bereichen $(-\infty, -1)$ und $(-1, \infty)$ ist die Funktion als Komposition von Standardfunktionen in deren Definitionsbereich stetig. Es verbleibt der kritische Punkt $x = -1$. Die links- und rechtsseitigen

Grenzwerte ergeben:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} x^2+2 = 3$$
$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \exp(x+1)+2 = 3$$

Da die beiden Grenzwerte übereinstimmen, ist die Funktion auch an $x=-1$ stetig, und somit auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

LÖSUNG 14. Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \begin{cases} x\sin(\pi x) & , \quad x<1 \\ \sqrt{x-1} & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

In den Bereichen $(-\infty,1)$ und $(1,\infty)$ ist die Funktion als Komposition von Standardfunktionen in deren Definitionsbereich stetig. Es verbleibt der kritische Punkt $x=1$. Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte ergeben:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x\sin(\pi x) = 0$$
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x-1} = 0$$

Da die beiden Grenzwerte übereinstimmen, ist die Funktion auch an $x=1$ stetig, und somit auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

LÖSUNG 15. Untersuchen Sie g auf Nullstellen, stetige Ergänzbarkeit, Pole und Asymptoten:

$$g(x)=\frac{x^3-x^2-2x}{x^2+4x+3}\,.$$

Die Funktion ist nur definiert, wenn der Nenner nicht 0 wird. Daher werden zuerst die Nullstellen des Nenners untersucht:

$$x_{1/2} = -\frac{4}{2}\pm\sqrt{4-3} = -2\pm 1$$

Damit ist g für $x_1=-1$ und $x_2=-3$ nicht definiert. An diesen Definitionslücken können Pole oder ergänzbare Stellen sein. Die Faktorisierung des Nenners lautet:

$$x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$$

Die Funktion kann Nullstellen haben, wenn der Zähler 0 wird, soweit nicht auch den Nenner an gleicher Stelle ebenfalls 0 wird. Bei einem Polynom 3. Grades muss eine Nullstelle erraten werden und dann der entsprechende Faktor heraus dividiert werden. Hier ist offensichtlich $x_1=0$ eine Nullstelle, und bei Polynomdivision durch x ergibt sich das verbleibende Zählerpolynom x^2-x-2 mit den Nullstellen

$$x_{2/3} = \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$$

$x_2=2$ und $x_3=-1$. Die Faktorisierung des Zählers lautet

$$x^3-x^2-2x = x(x-2)(x+1)$$

und insgesamt

$$g(x)=\frac{x(x-2)(x+1)}{(x+1)(x+3)}\,.$$

Die Mengen der Nullstellen für Zähler und Nenner überschneiden sich in $x = -1$, daher kann hier alles passieren. Für $x \neq -1$ können wir Zähler und Nenner kürzen:

$$g(x) = \frac{x(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+3)} \overset{x\neq -1}{=} \frac{x(x-2)}{(x+3)}$$

Bei links- und rechtsseitigem Grenzwert liegt keine Singularität mehr vor, daher ist die Funktion an $x = -1$ stetig ergänzbar, hat Nullstellen für $x = 0$ und $x = 2$. Es gibt einen Pol an $x = -3$.

Für die Bestimmung von Asymptoten wird eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{cccccc}
x^3 & -x^2 & -2x & & = & (x^2+4x+3)(x-5)+15x+15 \\
x^3 & +4x^2 & +3x & & & \\
-- & -- & -- & & & \\
 & -5x^2 & -5x & & & \\
 & -5x^2 & -20x & -15 & & \\
 & -- & -- & -- & & \\
 & & 15x & +15 & &
\end{array}$$

Damit ist für $|x| \to \infty$

$$g(x) = x - 5 + \underbrace{\left(\frac{15(x+1)}{x^2+4x+3}\right)}_{\to 0} \approx x - 5$$

und somit hat $g(x)$ die Asymptote $h(x) = x - 5$ für $|x| \to \infty$.

Lösung 16. Untersuchen Sie g auf Nullstellen, stetige Ergänzbarkeit, Pole und Asymptoten:

$$g(x) = \frac{2x^2+2x-24}{x^2-x-2}\,.$$

Die Funktion ist nur definiert, wenn der Nenner nicht 0 wird. Daher werden zuerst die Nullstellen des Nenners untersucht:

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Damit ist g für $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ nicht definiert. An diesen Definitionslücken können Pole oder ergänzbare Stellen sein. Die Faktorisierung des Nenners lautet:

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

Die Funktion kann Nullstellen haben, wenn der Zähler 0 wird, soweit nicht auch den Nenner an gleicher Stelle ebenfalls 0 wird. Für das Zählerpolynom $2(x^2 + x - 12)$ erhalten wir die Nullstellen

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$x_1 = 3$ und $x_2 = -4$. Die Faktorisierung des Zählers lautet

$$2x^2 + 2x - 24 = 2(x-3)(x+4)$$

und insgesamt

$$g(x) = \frac{2(x-3)(x+4)}{(x+1)(x-2)}\,.$$

Die Mengen der Nullstellen für Zähler und Nenner überschneiden sich nicht. Daher gibt es keine hebbaren Definitionslücken. Die Funktion hat Nullstellen für $x = 3$ und $x = -4$. Sie hat Pole an $x = -1$ und $x = 2$.

Für die Bestimmung von Asymptoten wird eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{cccl} 2x^2 & +2x & -24 & = \quad (x^2 - x - 2)(2) + 4x - 20 \\ 2x^2 & -2x & -4 & \\ -- & -- & -- & \\ & 4x & -20 & \end{array}$$

Damit ist für $|x| \to \infty$

$$g(x) = 2 + \underbrace{\left(\frac{4x - 20}{x^2 - x - 2}\right)}_{\to 0} \approx 2$$

und somit hat $g(x)$ die Asymptote $h(x) = 2$ für $|x| \to \infty$.

LÖSUNG 17. Zeigen Sie, dass $u(x) = |x|$ eine Asymptote zu v ist:

$$v(x) = \sqrt{x^2 + 1}\,.$$

Sei zunächst $x > 0$, dann ist $|x| = x$ und

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} v(x) - u(x) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{1}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to\infty} + \underbrace{x}_{\to\infty}} = 0 \end{aligned}$$

und damit ist die asymptotische Eigenschaft für $x \to \infty$ nachgewiesen.

Ist $x < 0$, so ist $|x| = -x$ und analog

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} v(x) - u(x) &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\sqrt{x^2+1} - x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{1}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to\infty} \underbrace{-x}_{\to\infty}} = 0 \end{aligned}$$

also ist $u(x)$ auch für $x \to -\infty$ eine Asymptote zu $v(x)$.

LÖSUNG 18. Zeigen Sie, dass $u(x) = |x + 1|$ eine Asymptote zu v ist:

$$v(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}\,.$$

Sei zunächst $x > -1$, dann ist $|x+1| = x+1$ und

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} v(x) - u(x) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+2} - (x+1) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2} + (x+1)\right)}{\sqrt{x^2+2x+2} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+2-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+2} + (x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{1}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{x^2+2x+2}}_{\to\infty} + \underbrace{(x+1)}_{\to\infty}} = 0
\end{aligned}$$

und damit ist die asymptotische Eigenschaft für $x \to \infty$ nachgewiesen.

Ist $x < -1$, so ist $|x+1| = -(x+1)$ und analog

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} v(x) - u(x) &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+2} + (x+1) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2} + (x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)\right)}{\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+2-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{1}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{x^2+2x+2}}_{\to\infty} \underbrace{-(x+1)}_{\to\infty}} = 0
\end{aligned}$$

also ist $u(x)$ auch für $x \to -\infty$ eine Asymptote zu $v(x)$. Die Wurzel ist übrigens für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, da $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$ und damit die Wurzel auch in den reellen Zahlen immer existiert.