Markowitz - Otimização de Portfólios

Prof. Carlos Schönerwald

Sabemos como analisar dados, chamar suas funções embutidas e aplicá-los aos problemas selecionados em uma análise de série temporal. Neste módulo, vamos usar e estender esse conhecimento para discutir uma aplicação prática importante: otimização de portfólios, ou em outras palavras, seleção de ativos.

Referências:

Daróczi, G. et al. (2013) Introduction to R for Quantitative Finance, Packt, Capítulo 2.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.

Para melhorar as habilidades de programação, implementaremos um algoritmo linha por linha usando dados reais para resolver um exemplo prático. Também usaremos os pacotes disponíveis no *R* no mesmo conjunto de dados.

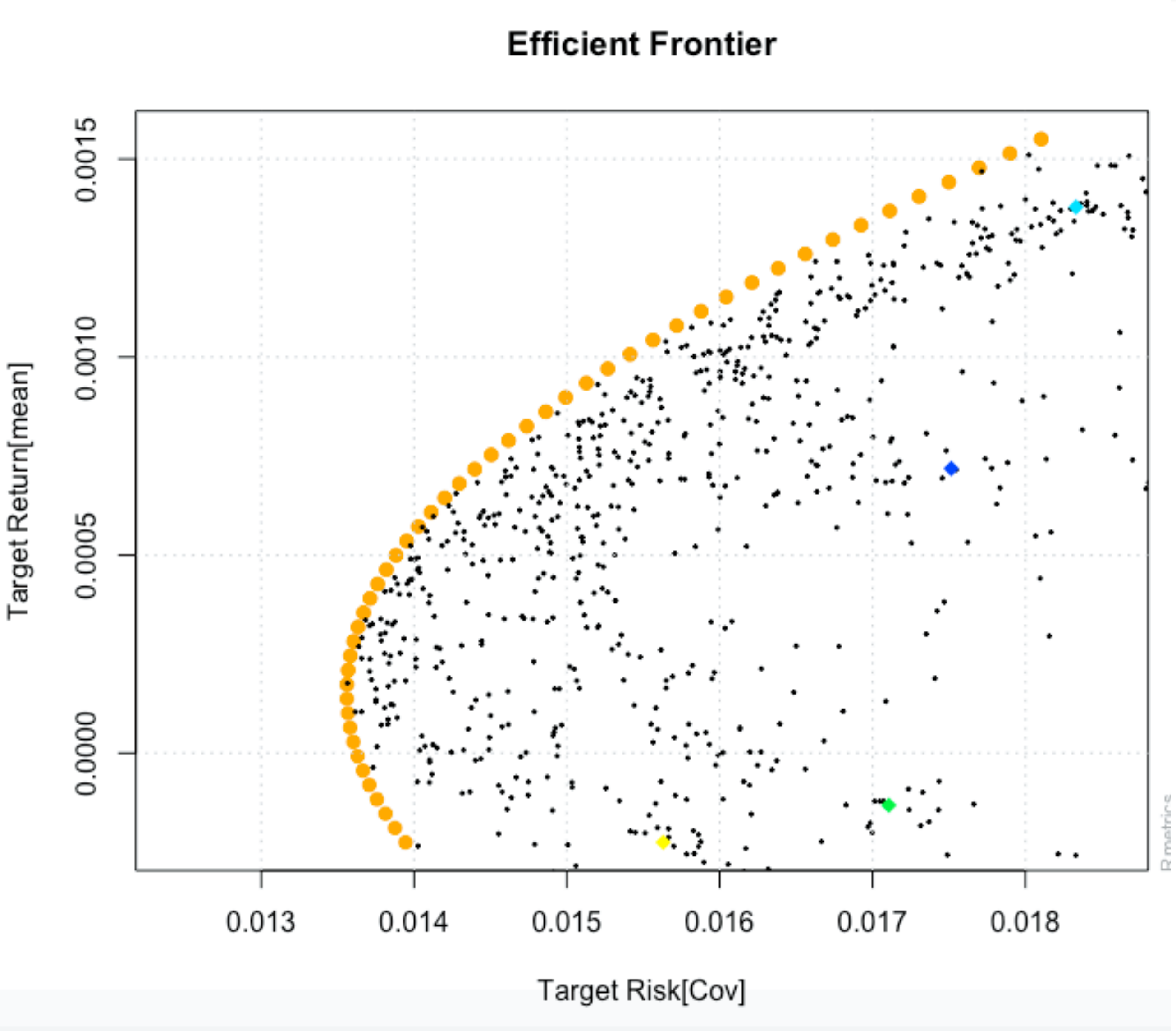
Imagine que vivemos em uma ilha tropical e temos apenas US $ 100 para investir. As possibilidades de investimento na ilha são muito limitadas; podemos investir todo o nosso dinheiro em sorvetes ou guarda-chuvas.

As recompensas (retornos) que dependem do clima são as seguintes:

weather	ice cream	umbrella
sunny	120	90
rainy	90	120

Se não podemos prever ou mudar o clima, as duas opções são claramente equivalentes e temos um retorno esperado de 5% =>{[(0,5 × 120 + 0,5 × 90) /100}-1=0,05] investindo em qualquer uma delas.

O modelo de Média-Variância de Markowitz (1952) é praticamente o exemplo de investimento em sorvete e guarda-chuvas em dimensões superiores. Para a formulação matemática, precisamos de algumas definições.


Efficient Frontier
Target Return[mean]
0.0015
0.0010
0.0005
0.0000
0.013
0.014
0.015
0.016
0.017
0.018
Target Risk[Cov]

Por ativo X_i queremos dizer uma variável aleatória com variância finita.

Por carteira, queremos dizer a combinação de ativos: $P = \sum w_i X_i$, onde $\sum w_i = 1$. A combinação pode ser linear ou convexa. No caso ser convexa, todos os pesos são não negativos.

Por otimização, entendemos um processo de escolha dos melhores coeficientes w_i (pesos) para que a carteira atenda às necessidades da relação risco-retorno (ou seja, tem um risco mínimo no retorno esperado dado ou tem o maior retorno esperado em um determinado nível de risco e assim por diante).

Sejam $X_1 + X_2, \dots, X_n$ as variáveis de retorno aleatórias com uma variância finita, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sua matriz de covariância, $r = (EX_1 + EX_2, \dots, EX_n)$ e $wr = \sum w_i r_i$.

Vamos nos concentrar nos seguintes problemas de otimização:

$$\min\{w^T Q w | w \in \mathbb{R}^n, w\vec{1} = 1\} \tag{1}$$

$$\max\{wr | w \in \mathbb{R}^n, w^T Q w = \sigma^2, w\vec{1} = 1\} \tag{2}$$

$$\min\{w^T Q w | w \in \mathbb{R}^n, w\vec{1} = 1, wr = \mu\} \tag{3}$$

$$\max\{wr - \lambda w^T Q w | w \in \mathbb{R}^n, w\vec{1} = 1\} \tag{4}$$

Onde $w^T Q w$ é a variância da carteira e wr é o retorno esperado.

Sejam $X_1 + X_2, \dots, X_n$ as variáveis de retorno aleatórias com uma variância finita, $Q \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ sua matriz de covariância, $r = (EX_1 + EX_2, \dots, EX_n)$ e $wr = \sum w_i r_i$.

Vamos nos concentrar nos seguintes problemas de otimização:

$$\min\{w^T Q w | w \in \mathbb{R}^n, w\vec{1} = 1\} \qquad (1)$$

Onde $w^T Q w$ é a variância da carteira e wr é o retorno esperado.

O problema (1) consiste em encontrar a carteira com risco mínimo. Pode ser não trivial se não houver ativo sem risco.

Sejam $X_1 + X_2, \dots, X_n$ as variáveis de retorno aleatórias com uma variância finita, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sua matriz de covariância, $r = (EX_1 + EX_2, \dots, EX_n)$ e $wr = \sum w_i r_i$.

Vamos nos concentrar nos seguintes problemas de otimização:

$$\max\{wr \mid w \in \mathbb{R}^n, w^T Q w = \sigma^2, w\vec{1} = 1\} \qquad (2)$$

Onde $w^T Q w$ é a variância da carteira e wr é o retorno esperado.

O problema (2) consiste em maximizar o retorno esperado em um determinado nível de variância.

Sejam $X_1 + X_2, \dots, X_n$ as variáveis de retorno aleatórias com uma variância finita, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sua matriz de covariância, $r = (EX_1 + EX_2, \dots, EX_n)$ e $wr = \sum w_i r_i$.

Vamos nos concentrar nos seguintes problemas de otimização:

$$\min\{w^T Q w \mid w \in \mathbb{R}^n, w\vec{1} = 1, wr = \mu\} \qquad (3)$$

Onde $w^T Q w$ é a variância da carteira e wr é o retorno esperado.

Uma abordagem ligeiramente diferente o objetivo é encontrar uma carteira com variância mínima em um nível desejado de retorno esperado.

Sejam $X_1 + X_2, \dots, X_n$ as variáveis de retorno aleatórias com uma variância finita, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sua matriz de covariância, $r = (EX_1 + EX_2, \dots, EX_n)$ e $wr = \sum w_i r_i$.

Vamos nos concentrar nos seguintes problemas de otimização:

$$\max\{wr - \lambda w^T Q w | w \in \mathbb{R}^n, w\vec{1} = 1\} \quad (4)$$

Onde $w^T Q w$ é a variância da carteira e wr é o retorno esperado.

O quarto problema é maximizar o retorno de uma função utilidade simples - λ * risco, onde λ é o coeficiente de tolerância ao risco; é um número arbitrário que expressa a atitude diante do risco. É praticamente igual ao primeiro problema.

Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g = (g_1, g_2, \dots g_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, (onde $m < n$) possui derivadas parciais contínuas e $a \in \{g(x) = 0\}$ é um ponto extremo relativo de $f(x)$ sujeito a $g(x) = 0$, sujeito ao $posto(g'(a)) = m$.

Então, existem os coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ tal que $f'^{(a)} + \sum \lambda_i g_i'(a) = 0$.

Em outras palavras, todas as derivadas parciais da função $L := f + \sum \lambda_i g_i := \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ são 0 (Simon & Blume (1994) cap.18).

Em nosso caso, a condição também é suficiente. A derivada parcial de uma função quadrática é linear, então a otimização leva ao problema de resolver um sistema linear de equações.

Theorem 18.1 Let f and h be C^1 functions of two variables. Suppose that $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ is a solution of the problem

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && f(x_1, x_2) \\ &\text{subject to} && h(x_1, x_2) = c \end{aligned}$$

Suppose further that (x_1^*, x_2^*) is not a critical point of h. Then, there is a real number μ^* such that (x_1^*, x_2^*, μ^*) is a critical point of the Lagrangian function

$$L(x_1, x_2, \mu) \equiv f(x_1, x_2) - \mu[h(x_1, x_2) - c].$$

In other words, at (x_1^*, x_2^*, μ^*)

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0.$$

Vamos ver como isso pode ser usado para resolver o terceiro problema:

$$\min\{w^T Q w | w \in \mathbb{R}^n, w\vec{1} = 1, wr = \mu\}$$

Pode-se mostrar que este problema é equivalente ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} Q & \vec{1} & \vec{r} \\ \vec{1} & 0 & 0 \\ \vec{r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \mu \end{bmatrix}$$

Duas linhas e duas colunas são adicionadas à matriz de covariância, então temos condições para determinar os dois multiplicadores de Lagrange também. Podemos esperar uma solução única para este sistema.

Aplicação no R