Билет 3. Равноускоренное криволинейное движение (на примере движения тела, брошенного под углом к горизонту). Нормальное и тангенциальное ускорения.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Пусть тело в начальный момент времени находилось на высоте h и имело скорость v, направленную под углом α к горизонту.

Ускорение постоянно и равно $\vec{g}$.

Запишем основные уравнения кинематики:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad t_0=0$$

$$x_0=0$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}t \qquad y_0=h_0$$

Спроецируем на оси Ox и Oy:

$$v_{0x}=v_0\cos\alpha \qquad v_x(t)=v_0\cos\alpha$$

$$v_{0y}=v_0\sin\alpha \qquad v_y(t)=v_0\sin\alpha-gt$$

$$a_x=0 \qquad x(t)=v_0(\cos\alpha)t \qquad t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

$$a_y=-g \qquad y(t)=h+v_0(\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2}$$

1. *Уравнение траектории*

   Подставляем время в уравнение y координаты от времени $y(x)=h_0+x\,tg\,\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$

2. *Время подъема*

   В наивысшей точке $v_y=0 \rightarrow v_y=v_0\sin\alpha-g t_{под}=0 \rightarrow t_{под}=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$

3. *Время полета*

   В конце полета $y=0 \rightarrow y=h_0+v_0(\sin\alpha)t_{пол}-\frac{gt_{пол}^2}{2}=0 \rightarrow t_{пол}=\frac{v_0\sin\alpha+\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2gh}}{g}$

   Если $h_0=0$, то есть тело брошено с поверхности Земли, то $t_{пол}=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$

   $t_{пад}=t_{пол}-t_{под}$

4. *Дальность полета*

   Если $h_0=0$, то $t_{пол}=\frac{2v_0\sin\alpha}{g} \rightarrow l=t_{пол}\cdot v_x=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$

5. *Наибольшая высота подъема*

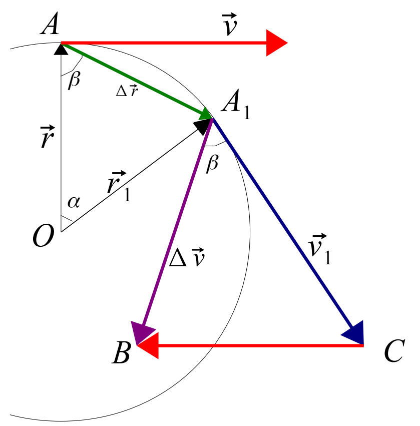
   Подставляем время подъема в уравнение $y(t) \rightarrow h_{max}=h_0+\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

Нормальное и тангенциальное ускорения

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости, направлено по касательной к траектории ($\vec{a}_\tau \parallel \vec{v}$).

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления скорости, направлено по нормали к скорости ($\vec{a}_n \perp \vec{v}$)

Рассмотрим траекторию тела и выделим малый участок, который совпадает с дугой окрежноси радиуса R. За время Δt точка А переместилась на $\Delta\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}$



$$\Delta AOA_1 \sim \Delta BCA_1 \qquad \begin{array}{l} BC=CA_1;\ OA=OA_1; \\ \measuredangle BA_1C=\measuredangle AA_1O \\ (AA_1\perp BA_1\ и\ OA_1\perp CA_1) \end{array}$$

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v}=\frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$$

$$\frac{1}{v}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\frac{1}{r}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

$$\frac{1}{v}a=\frac{1}{r}v$$

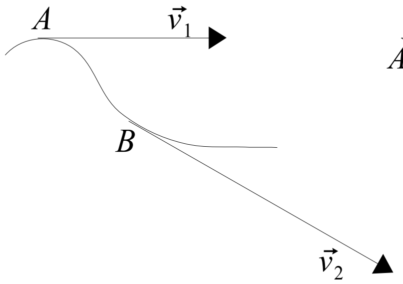
$$a=\frac{v^2}{r}$$

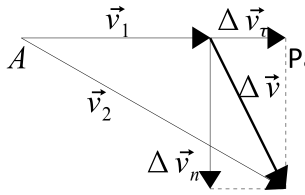
$$\Delta t \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0 \Rightarrow \beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{180^0 - \alpha}{2} = 90^0$$

То есть вектор мгновенного ускорения $\vec{a}$ направлен к центру окружности.

Разложение полного ускорения на нормальное и тангенциальное

Пусть в некоторый момент времени t точка занимает положение А и имеет скорость $\vec{v}_1$, а спустя малое время Δt точка переместилась в положение В и приобрела скорость $\vec{v}_2$.





Разложим $\Delta\vec{v}$ на составляющие $\vec{v}_\tau$ и $\vec{v}_{n.}$

$\Delta\vec{v}_\tau$ — тангенциальная составляющая вектора $\Delta\vec{v}$, направлена по касательной к траектории, проведенной в точке А.

$\Delta\vec{v}_n$ — нормальная составляющая вектора $\Delta\vec{v}$, направлена перпендикулярно тангенциальной.

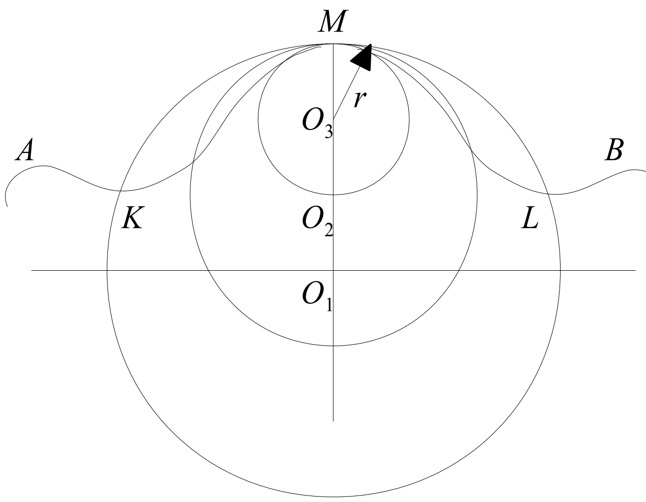
$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$

Разделим на Δt и перейдем к пределу ($\Delta t \to 0$)

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$ - каждое слагаемое есть составляющая ускорения

$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad \vec{a}_\tau \| \vec{v} \quad \vec{a}_n \perp \vec{v}$

Радиус кривизны



На кривой АВ выберем точку М и с обеих сторон точки К и L. Проводим через них единственную окружность.

Приближая точки К и L к точке М, получим окружности разных радиусов.

Вблизи точки М дуга окружности будет все меньше отличаться от кривой АВ.

При бесконечном приближении точек К и L, радиус окружности стремиться к предельному значению, которое называется радиусом кривизны r.

Тогда $a_n = \frac{v^2}{r}$

Модуль полного ускорения

По теореме Пифагора → $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

Классификация движений

$a_n = 0$	Движение по прямой линии ($r \to \infty$)
$a_n = a_\tau = 0, v \neq 0$	Движение по прямой и равномерное
$a_n \neq 0$	Движение криволинейное
$a_n \neq 0,\ a_\tau = 0$	Движение криволинейное и равномерное
$a_n = const,\ a_\tau = 0$	Движение по окружности и равномерное
$a_n \neq 0,\ a_\tau \neq 0$	Движение криволинейное и неравномероное