Билет 14. Момент силы. Момент инерции тела. Теорема Штейнера. Основное уравнение динамики вращательного движения. Кинетическая энергия вращательного движения.

Статика — раздел механики, в котором изучается равновесие АТТ.

Абсолютно твердое тело — тело, взаимное расположение частей которого не изменяются.

Тело можно считать абсолютно твердым, если расстояния между любыми точками тела неизменны.

Любое движение АТТ можно разложить на поступательное и вращательное движения.

Поступательное движение — движение АТТ, при котором любой отрезок прямой линии, жестко связанный с телом, все время перемещается параллельно самому себе.

Вращательное движение — движение АТТ, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых находятся на одной прямой (оси вращения), перпендикулярной плоскостям этих окружностей.

Если не вращается только одна точка, она называется точкой вращения.

Рассмотрим вращательное движение АТТ.

Угол поворота $\Delta\vec{\phi}$ — вектор, модуль которого равен углу, на который повернулось тело, направление совпадает с осью вращения. Направление определяется с помощью правила буравчика: если правый винт вращать по направлению вращения тела, то его поступательное движение укажет направление $\Delta\vec{\phi}$.

Мгновенная угловая скорость — векторная физическая величина, равная отношению угла поворота тела за достаточно малый промежуток времени Δt, начинающийся сразу после момента времени t, к длительности промежутка.

$$\vec{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t}=\frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

Мгновенное угловое ускорение — векторная физическая величина, равная пределу отношения изменения угловой скорости к промежутку времени Δt, за которое совершается поворот, при условии, что Δt стремиться к 0.

$$\vec{\beta}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

При малых угловых перемещениях $\Delta\vec{\phi}$ пройденное точкой тела расстояние $\Delta s=\Delta\phi R$, где R — модуль радиус-вектора этой точки.

Тогда $v=\omega R$, $a_\tau=\beta R$ - направлены по касательной к окружности радиусом R.

Также $a_n=\dfrac{v^2}{R}=\omega^2 R$

Принято считать тело, *находящимся в равновесии*, если оно либо покоиться, либо движется прямолинейно и равномерно, либо равномерно вращается вокруг закрепленной оси.

Условия равновесия тела:

1. Векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю.

$$\sum\vec{F}_i=\vec{0} \qquad a_{\vec{ц.м.}}=\frac{\sum\vec{F}_i}{m}=\frac{\sum\Delta m_i\vec{a}_i}{\sum\Delta m_i}=0 \Rightarrow \vec{v}_{ц.м.}=\overrightarrow{const}$$

2. Сумма моментов этих сил равна нулю. $\sum\vec{M}_{F_i}=\vec{0}$

   Момент силы $\vec{F}$ относительно точки (оси) вращения — векторное произведение радиус-вектора точки на силу. $J\vec{\beta}=\sum\vec{M}_{F_i}=\vec{0} \Rightarrow \vec{\beta}=\vec{0}$

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки вращения (оси вращения) — физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора точки на силу.

$$\vec{M}=[\vec{r}\cdot\vec{F}]=\vec{r}\times\vec{F}$$
$$|\vec{M}|=|\vec{r}|\cdot|\vec{F}|\cdot\sin\alpha$$
α — минимальный угол от $\vec{r}$ до $\vec{F}$

Направление вектора $\vec{M}$ определяется по *правилу буравчика*: если отложить $\vec{r}$ и $\vec{F}$ от одной точки, поставить в нее правый винт и вращать от первого вектора ко второму, то поступательное движение винта покажет направление момента силы.

Разобьем вращающееся тело на малые элементарные тела Δm_i. Расстояния до оси вращения r_i, модули линейных скоростей — v_i.

Тогда кинетическую энергию тела запишем так: $E_к=\sum\dfrac{\Delta m_i v_i^2}{2}=\sum\dfrac{\Delta m_i(r_i\omega)^2}{2}=\dfrac{\omega^2}{2}\sum\Delta m_i r_i^2$

Момент инерции — скалярная физическая величина, численно равная сумме произведений элементарной массы на квадрат расстояния до оси вращения.

$J=\sum \Delta m_i r_i^2 \quad J=[кг\cdot м^2]$

Момент инерции — мера инертности при вращательном движении.

Основное уравнение динамики вращательного движения

Разложим ускорение на две составляющие: нормальную и тангенциальную. $\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau$

Тангенциальная составляющая характеризует изменение скорости по модулю, нормальная — по направлению.

Разделим тело на элементарные тела. Относительно оси вращения тела они двигаются по окружностям. Рассмотрим одно из элементарных тел.

Пусть его масса - m_i и радиус окружности - R. Тогда $a_n=\omega_i^2 R, a_\tau=\beta R$

Запишем второй закон Ньютона для проекций ускорений: $m_i a_n=F_n, m_i a_\tau=F_\tau$, F_τ - проекция силы на направление скорости, F_n - проекция силы на направление, перпендикулярное скорости. $m_i \beta R=F_\tau$

$M_{F_\tau}=r\cdot F_\tau\cdot \sin\alpha=F_\tau R=m_i\beta R^2=J_i\beta$

В векторном виде $\vec{M}_i=J_i\vec{\beta}$

Для всего тела: $\sum \vec{M}_i=J_c\vec{\beta}$ **- основное уравнение динамики вращательного движения АТТ.**

Теорема Штейнера

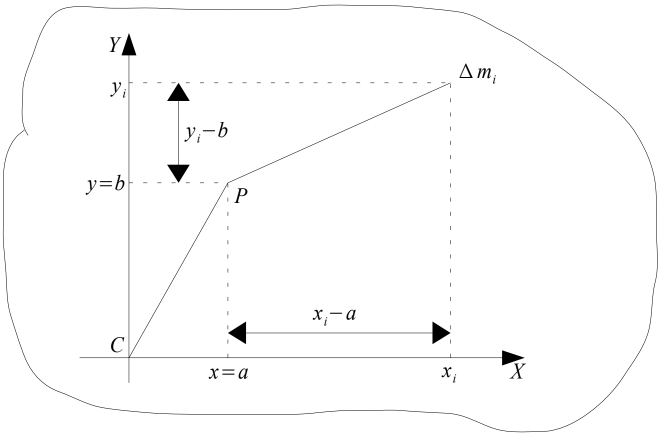
Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен моменту инерции этого же тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной оси, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.

$J_P=J_c+md^2$

Доказательство:

Рассмотрим сечение твердого тела. Выберем систему координат, с началом координат в центре масс тела C. Первая ось вращения проходит через центр масс, вторая через точку P, обе оси перпендикулярны плоскости CXY.

Разбиваем на малые элементарные элементы массой Δm_i.



$J_c=\sum \Delta m_i(x_i^2+y_i^2)$ (по определению)

$$J_P=\sum \Delta m_i\left[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2\right]=\sum \Delta m_i(x_i^2+y_i^2)+\sum \Delta m_i(a^2+b^2)-2a\sum \Delta m_i x_i-2b\sum \Delta m_i y_i=$$
$$=J_c+md^2$$

$E_к=\frac{J\omega^2}{2}$ - кинетическая энергия вращающееся тела относительно неподвижной оси.

При плоскопараллельном движении кинетическая энергия движущегося АТТ равна сумме кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс тела к перпендикулярной плоскости, в которых движутся все точки тела.

$E_к=\frac{mv_c^2}{2}+\frac{J_c\omega^2}{2}$