

Вопрос 3

Модель идеального газа. Опыты Штерна по измерению скоростей молекул. Исследования статистического распределения молекул по скоростям. Распределение Максвелла.

Идеальный газ — физическая модель, включающая в себя:

- 1) молекулы газа — материальные точки
- 2) молекулы хаотично и непрерывно двигаются, причем между столкновениями скорости не меняются
- 3) столкновения носят упругий характер без потерь механической энергии
- 4) силы взаимодействия между молекулами проявляются лишь при столкновении

Движение молекул такого газа подчиняется законам Ньютона.

Молекулы идеального газа двигаются с разными по модулю и направлению скоростями. Все направления движения молекулы равновероятны, поэтому число молекул, движущихся в выбранном направлении, равно количеству движущихся в противоположном направлении. Тогда $\frac{1}{6}$ всех молекул движется по каждой оси (Ox, Oy, Oz) в одном из двух направлений.

В своей работе «Пояснения к динамической теории газов» Дж. Максвелл доказал, что молекулы газа движутся с разными скоростями, при столкновении направления и модули векторов скорости меняются, но распределение молекул по скоростям остается неизменным. Максвелл вывел **закон распределения молекул газа по скоростям**, опирающийся на основные положения МКТ.

ВЫВОД ФУНКЦИИ МАКСВЕЛЛА

Распределение молекул по высоте

Рассмотрим вертикальный столб газа с площадью основания S, находящийся в состоянии равновесия.

Выделим слой малой толщины Δz на высоте z , в котором плотность газа постоянна.

Тогда в проекции на ось Oz: $p(z)S - p(z+\Delta z)S - \rho g S \Delta z = 0$ $p(z+\Delta z) = p(z) + \Delta p$ $\Delta p = -\rho g \Delta z$	По уравнению Клапейрона-Менделеева: $\rho = \frac{\mu p}{RT}$ $\frac{\Delta p}{\Delta z} = -\frac{\mu g}{RT} p$	$\frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} p$
---	--	---------------------------------------

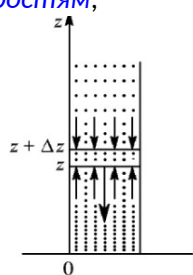


Рис. 70. Равновесие мысленно выделенного объема газа в поле тяжести

Получаем, что функция давления от высоты пропорциональна своей производной. Кроме этого,

давление при $z=0$ равно p_0 . Из этого следует, что при постоянных g и T $p(z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right)$.

Так как $\mu = m_0 N_A$, $R = N_A \cdot k$, можем записать так: $p(z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 g z}{k T}\right)$ - **барометрическая формула**.

Используя $p = n k T$, получим формулу распределения молекул по высоте: $n(z) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{m_0 g z}{k T}\right)$.

Распределение Больцмана $n(z) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_n}{k T}\right)$

Общая теория равновесных статистических распределений была создана Гиббсом. Он показал, что при температуре T закон распределения молекул по некоторой величине (координате, скорости, энергии) имеет экспоненциальный характер, причем в показателе находится отношение характерной для этой величины энергии к $k T$.

Распределение молекул по проекции скорости

$f(v_x) = a \cdot \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2 k T}\right)$ - **функция распределения молекул по проекции на ось Ox**

Чтобы вычислить среднее количество молекул с данной скоростью, используем формулу

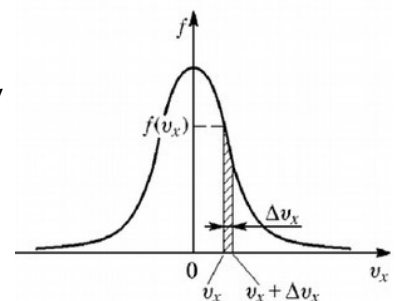
$$f(v_x) \Delta v_x = a \cdot \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2 k T}\right) \Delta v_x$$

Проинтегрируем функцию распределения по всем проекциям скоростей, приравняв результат концентрации молекул:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2 k T}\right) dv_x = a \cdot \sqrt{\frac{2 \pi k T}{m_0}} = n \Rightarrow a = n \cdot \sqrt{\frac{m_0}{2 \pi k T}}$$

Найдем вероятность того, что молекула имеет скорость в интервале $(v_x, v_x + \Delta v_x)$:

$$q(v_x) = \frac{f(v_x)}{n} = \sqrt{\frac{m_0}{2 \pi k T}} \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2 k T}\right)$$



Распределение молекул по трем проекциям скоростей

Так как движение хаотично, а состояние равновесное, можем считать, что распределения по всем трем осям равны.

Вычислим вероятность того, что молекула будет иметь скорость в заданных интервалах (все направления независимы):

$$q(v_x, v_y, v_z) = \sqrt{\frac{m_0}{2 \pi k T}} \exp\left(-\frac{m_0}{2 k T} \cdot (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right)$$

Распределение молекул по модулю скорости

Рассмотрим шаровой слой, соответствующий заданному модулю скорости. Его объем $V = 4\pi v^2 \Delta v$

Тогда вероятность нахождения молекулы в данном слое $q(v) \Delta v = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1,5} \exp \left(\frac{-m_0 v^2}{2kT} \right) v^2 \Delta v$

Среднее число молекул с таким модулем скорости $f(v) \Delta v = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1,5} \exp \left(\frac{-m_0 v^2}{2kT} \right) v^2 \Delta v$ в слое

Сократим на Δv , получим функцию количества молекул с таким модулем скорости.

КОНЕЦ ВЫВОДА

Функция распределения молекул по скоростям: $f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2$

Рассмотрим график этой функции. Значительное число молекул движется со скоростью близкой к $v_{н.в.}$. Эта скорость называется *наиболее вероятной скоростью*. Она зависит от температуры, а именно, при увеличении температуры, увеличивается наиболее вероятная скорость, что можно наблюдать на втором рисунке.

$$f(v)' = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1,5} \cdot \exp \left(\frac{-m_0 v^2}{2kT} \right) \left(2v + v^2 \left(\frac{-2m_0 v}{2kT} \right) \right) = 0$$

Найдем $v_{н.в.}$:

$$2 \cdot v \neq 0; \exp \left(\frac{-m_0 v^2}{2kT} \right) \neq 0; \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1,5} \neq 0 \Rightarrow 1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} = 0$$

$$v_{н.в.} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$$

Прямые измерения скоростей молекул были выполнены в 1920 году Отто Штерном.

Вокруг проволоки расположены 2 коаксиальных цилиндра: радиусом R_A с узкой щелью и радиусом R_B . Серебро испарялось в вакууме с поверхности платиновой проволоки, нагреваемой электрическим током. Атомы Ag, пролетевшие сквозь щель первого цилиндра, оседают на стенке второго и образуют узкую полоску около точки M_0 . При вращении цилиндра атомы Ag попадали на стенку внешнего цилиндра в новое место

M . Вычислим скорость движения атомов серебра: за время, равное отношению расстояния и скорости $\left(t = \frac{R_B - R_A}{v} \right)$, цилиндр повернется на угол $\varphi = \omega t$.

При этом полоска серебра сместится на длину дуги $(M M_0) = R_B \varphi = R_B \omega t = \frac{R_B (R_B - R_A)}{v}$.

Измерив длину дуги (l), можем выразить скорость: $v = \frac{R_B \omega (R_B - R_A)}{l}$

Можем сделать вывод, что смещение будет больше у тех атомов, у которых скорость меньше. То есть молекулы имеют различные скорости. По количеству осевшего серебра можно определить относительное количество атомов с данной скоростью.

Опыт Штерна хорошо согласовывается с распределением молекул по скоростям Максвелла.

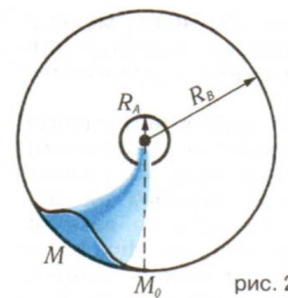
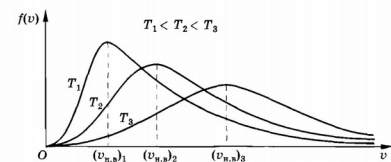
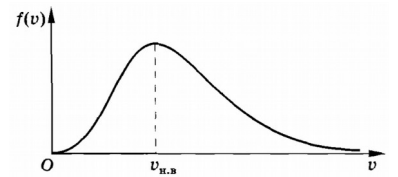
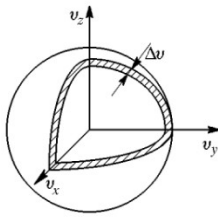


рис. 2.2