AUD4/2 3q4t10n5 v1.0.0

Gruppe 2 (5 EH)

Kurzbeschreibung

Gegeben

In dieser Aufgabe wird es **mathematisch**. Es geht dabei ganz grundsätzlich darum, Systeme mit **mehreren Gleichungen** mit Hilfe des Computers zu lösen.

Als Input sollt ihr in eurer zentralen Methode ein **quadratisches 2D-Array $\boldsymbol{C}$** mit double-Zahlen im csv-Format **einlesen**, welches $n \geq 2$ Zeilen und Spalten haben kann:

Allgemein

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Beispiel

$$C = \begin{bmatrix} 2.0 & 7.0 & 1.0 \\ 3.0 & -2.0 & 8.0 \\ 1.0 & 5.0 & 3.0 \end{bmatrix}$$

Gesucht

Als Output soll eure zentrale Methode **zwei 2D-Arrays $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$** mit double-Zahlen im csv-Format **schreiben**, die jeweils genau wie C $n \geq 2$ Zeilen und Spalten haben.

Die beiden 2D-Arrays A und B sind Teil einer sogenannten **Matrix-Matrix-Multiplikation**.

$$A \cdot B = C$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Problem

Die **Werte von $\boldsymbol{C}$** berechnen sich in einer Matrix-Matrix-Multiplikation wie folgt:

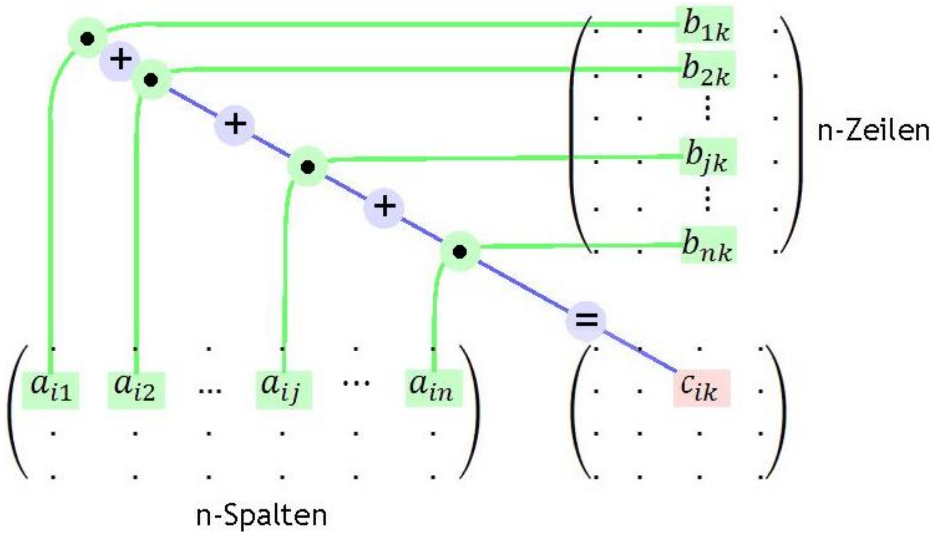

Abbildung 1: https://www.matopt.de/grundlagen/matrizenmultiplikation.html

Das bedeutet am **Beispiel** von c_{11} und c_{33}, dass für die beiden folgende Gleichungen entstehen:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

$$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33}$$

Allerdings ist es in unserem Fall so, dass die **Werte von $\boldsymbol{C}$ bekannt** sind, wohingegen die **Werte von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ unbekannt** sind. Wir haben hier also ein klassisches System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten vorliegen, je eine Gleichung pro c_{ij} für $i, j \in \mathbb{N}$.

Das Ganze wird jedoch dadurch **vereinfacht**, dass

1. Die Diagonale von A immer 1 ist, also $a_{ii} = 1$ für $i \in \mathbb{N}$.
2. Die Werte des rechten oberen Dreiecks von A immer 0 sind, also $a_{ij} = 0$ für $i, j \in \mathbb{N}, j > i$.
3. Die Werte des unteren linken Dreiecks von B immer 0 sind, also $b_{ij} = 0$ für $i, j \in \mathbb{N}, j < i$.

Die **Matrix-Matrix-Multiplikation vereinfacht sich** also zu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Das bedeutet für das **Beispiel** von c_{33} zwar immer noch:

$$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33}$$

Die Gleichung von c_{11} vereinfacht sich jedoch sehr stark zu:

$$\boldsymbol{c_{11}} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 1 \cdot b_{11} + 0 \cdot b_{21} + 0 \cdot b_{31} = \boldsymbol{b_{11}}$$

Mit diesen Vereinfachungen sind für das Beispiel mit $n = 3$ also folgende Gleichungen vorhanden:

Allgemein	**Beispiel**
$c_{11} = b_{11}$	$2.0 = b_{11}$
$c_{12} = b_{12}$	$7.0 = b_{12}$
$c_{13} = b_{13}$	$1.0 = b_{13}$
$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11}$	$3.0 = a_{21} \cdot b_{11}$
$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + b_{22}$	$-2.0 = a_{21} \cdot b_{12} + b_{22}$
$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + b_{23}$	$8.0 = a_{21} \cdot b_{13} + b_{23}$
$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11}$	$1.0 = a_{31} \cdot b_{11}$
$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22}$	$5.0 = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22}$
$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + b_{33}$	$3.0 = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + b_{33}$

Durch das **Umstellen der Gleichungen** lassen sich die einzelnen Werte von A und B nacheinander berechnen, die Zahl vor den Gleichungen gibt die Reihenfolge an, in der sie gerechnet werden können:

Allgemein	**Beispiel**
1. $c_{11} = \boldsymbol{b_{11}}$	**1.** $2.0 = \boldsymbol{b_{11}}$
2. $c_{12} = \boldsymbol{b_{12}}$	**2.** $7.0 = \boldsymbol{b_{12}}$
3. $c_{13} = \boldsymbol{b_{13}}$	**3.** $1.0 = \boldsymbol{b_{13}}$
4. $c_{21}/b_{11} = \boldsymbol{a_{21}}$	**4.** $3.0/b_{11} = \boldsymbol{a_{21}}$
6. $c_{22} - a_{21} \cdot b_{12} = \boldsymbol{b_{22}}$	**6.** $-2.0 - a_{21} \cdot b_{12} = \boldsymbol{b_{22}}$
7. $c_{23} - a_{21} \cdot b_{13} = \boldsymbol{b_{23}}$	**7.** $8.0 - a_{21} \cdot b_{13} = \boldsymbol{b_{23}}$
5. $c_{31}/b_{11} = a_{31}$	**5.** $1.0/b_{11} = \boldsymbol{a_{31}}$
8. $(c_{32} - a_{31} \cdot b_{12})/b_{22} = \boldsymbol{a_{32}}$	**8.** $(5.0 - a_{31} \cdot b_{12})/b_{22} = a_{32}$
9. $c_{33} - a_{31} \cdot b_{13} - a_{32} \cdot b_{23} = \boldsymbol{b_{33}}$	**9.** $3.0 - a_{31} \cdot b_{13} - a_{32} \cdot b_{23} = \boldsymbol{b_{33}}$

Ergebnis

Setzt man die Werte der berechneten a_{ij} und b_{ij} für $i, j \in \mathbb{N}$ nun nacheinander in die Gleichungen ein, so ergeben sich die beiden folgenden 2D-Arrays A und B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.12 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2.0 & 7.0 & 1.0 \\ 0 & -12.5 & 6.5 \\ 0 & 0 & 3.28 \end{bmatrix}$$

Hinweis

Denkt daran, dass das eingelesene 2D-Array **beliebig groß** sein kann, solange es quadratisch ist. Euer Code soll also nicht nur mit $n = 3$ sondern mit beliebigen n klarkommen.

Kick-off

Ihr werdet in zwei Teams kompetitiv gegeneinander antreten.

- Bildet aus Gruppe 2 (siehe „Gruppeneinteilung" in *Eduvidual*) zwei Teams[1].
- Wählt einen Teamleiter, welcher *Git* aufsetzt.
- Besprecht im Team die Herangehensweise an die Aufgabe.
- Teilt die Aufgaben (Dateien einlesen/schreiben, Testen, Datenstruktur aufbauen, Gleichungen lösen, für beliebiges n anpassen, …) im Team auf.

Grundlage der Bewertung werden neben den Ergebnissen vor allem die ***Git*-Commits mit sinnvollen Kommentaren** eines jeden Einzelnen aus dem Team sein. Diese bilden die Grundlage für die **Abschätzung des individuellen Arbeitsaufwandes**.

Den **Abschluss** des Projektes bildet der eigentliche ***Sales Pitch* in Deutsch**, indem alle Mitglieder aus der Gruppe ihren Teil der Präsentation vorstellen.

[1] Eventuell kann bei Bedarf mit jemandem aus Gruppe 3 getauscht werden.