Méthode du maximum de vraisemblance

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon d'une v.a X suit une loi $\mathcal{L}(\theta)$ (continue ou discrète) et qui dépend d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une n-réalisation. On définit une fonction f telle que:

$$f(x) = f_\theta(x)$$

est la fonction densité de probabilité si X est une variable aléatoire continue.

$$f(x) = P(X = x)$$

est la probabilité si X est une variable aléatoire discrète.

Vraisemblance

Fonction vraisemblance

La fonction de vraisemblance est un produit de valeurs de la fonction f pour un n-réalisation $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ elle vaut :

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Log-vraisemblance

La fonction Log-vraisemblance notée $l(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ est le logarithme de la fonction vraisemblance:

$$\begin{aligned} l(x_1, \ldots, x_n; \theta) &= \ln(L(x_1, \ldots, x_n; \theta)) \\ &= \ln(\prod_{i=1}^{n} f(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f(x_i)) \end{aligned}$$

Estimation par la méthode du MV

L'estimation du maximum de vraisemblance de θ est la valeur $\widehat{\theta}_n$ qui rend maximale la fonction de vraisemblance. Alors $\widehat{\theta}_n$ est solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0; \\[2ex] \dfrac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = 0; \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta^2} < 0. \end{cases}$$

Exemple

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon d'une v.a $X \sim \mathcal{B}(p)$; $p \in]0,1[$; et $(x_1, \ldots, x_n)$ une n-réalisation. La variable X est discrète dans ce cas la fonction f est

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$$

Exemple

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon d'une v.a $X \sim \mathcal{B}(p)$; $p \in]0, 1[$; et $(x_1, \ldots, x_n)$ une n-réalisation. La variable X est discrète dans ce cas la fonction f est

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}$$

Objectif: Estimer p

Exemple

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon d'une v.a $X \sim \mathcal{B}(p)$; $p \in]0,1[$; et $(x_1, \ldots, x_n)$ une n-réalisation. La variable X est discrète dans ce cas la fonction f est

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$$

Objectif: Estimer p

Vraisemblance

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}$$

Exemple

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon d'une v.a $X \sim \mathcal{B}(p)$; $p \in]0,1[$; et $(x_1, \ldots, x_n)$ une n-réalisation. La variable X est discrète dans ce cas la fonction f est

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$$

Objectif: Estimer p

Vraisemblance

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^n (1-x_i)}$$

Log-vraisemblance

$$\begin{aligned} l(x_1, \ldots, x_n; \theta) &= \ln(p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^n (1-x_i)}) \\ &= \ln(p) \sum_{i=1}^{n} x_i + \ln(1-p) \sum_{i=1}^{n}(1-x_i) \end{aligned}$$

=

Dérivée de Log-vraisemblance

$$\frac{\partial l}{\partial p}(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p}(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

Elle s'annule pour

Dérivée de Log-vraisemblance

$$\frac{\partial l}{\partial p}(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p}(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

Elle s'annule pour

$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

On peut vérifier que: $\dfrac{\partial^2 l}{\partial p^2}(x_1, \ldots, x_n; \theta) < 0$

Dérivée de Log-vraisemblance

$$\frac{\partial l}{\partial p}(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p}(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

Elle s'annule pour

$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

On peut vérifier que: $\frac{\partial^2 l}{\partial p^2}(x_1, \ldots, x_n; \theta) < 0$

Conclusion

L'estimateur de p par la méthode de MV est

$$\hat{p}_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$