

## Contents

|  |          |
|--|----------|
| <b>1 Aufgabe 1</b>   | <b>1</b> |
| <b>2 Aufgabe 2</b>   | <b>1</b> |
| 2.1 a) zz: $g, h \in G : g \sim h \Leftrightarrow g = h \vee g = h^{-1}$ , $\sim$ Äquivalenzrelation       | 2        |
| 2.2 <b>TODO</b> b) zz.: $ G  = 2n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists g \in G - \{e\}$ mit $g^2 = e$ . . | 2        |
| 2.3 c) zz.: $g^2 = e \forall g \in G \Rightarrow G$ abelsch . . . . .                                      | 2        |
| <b>3 Aufgabe 3</b>   | <b>2</b> |
| 3.1 a) zz: $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper. . . . .   | 2        |
| 3.1.1 <b>TODO</b> Assoziativgesetz . . . . .   | 3        |
| 3.1.2 Existenz des neutralen Elements $e = (e_1, e_2)$ . . . . .   | 3        |
| 3.1.3 Existenz der Inversen . . . . .  | 3        |
| <b>4 Aufgabe 4</b>   | <b>4</b> |

## 1 Aufgabe 1

Sei  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$ . Sei  $e$  das neutrale Element von  $G$ . zz.:  
 $\forall m, n \in \mathbb{Z} : g^m g^n = g^{m+n}$

Beweis:

$$\text{IA } g^0 = e, g^1 = g \Rightarrow g^0 g^1 = g^{0+1} = g^1$$

$$\text{IV } g^m g^n = g^{m+n} \text{ gelte für feste } m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{IS zz.: } g^{m+1} g^{n+1} = g^{m+1+n+1}$$

• Beweis:

$$g^{m+1} g^{n+1} = g^m g^n g g = g^{m+n} g g = g^{m+n+2} = g^{m+1+n+1}$$

Geht so nur wenn  $G$  abelsch. Alternative:

$$g^{m+1} g^{n+1} = g^m g g^n g = g^m g^{n+1} g = g^m g^n g^2 = g^{m+n} g^2 = g^{m+n+2} = g^{m+1+n+1}$$

## 2 Aufgabe 2

Sei  $G$  eine Gruppe mit neutralem Element  $e$

**2.1 a) zz:**  $g, h \in G : g \sim h \Leftrightarrow g = h \vee g = h^{-1}$ ,  $\sim$  **Äquivalenzrelation**

Beweis:

$\sim$  **reflexiv**  $g \sim g \Leftrightarrow g = g \vee g = g^{-1}$  Immer wahr, da  $\backslash (g=g \vee g \in G \backslash \Rightarrow \sim$   
 $)$  reflexiv

$\sim$  **symmetrisch** zz.:  $g \sim h \Leftrightarrow h \sim g$  Beweis:

$$g \sim h \Leftrightarrow g = h \vee g = h^{-1} \Leftrightarrow h = g \vee h = g^{-1} \Leftrightarrow h \sim g$$

$\sim$  **transitiv** zz.:  $g, h, b \in G : g \sim h \wedge h \sim b \Rightarrow g \sim b$  Beweis:

$$\begin{aligned} g \sim h &\Leftrightarrow h \sim b \\ &\Leftrightarrow (g = h \vee g = h^{-1}) \wedge (h = b \vee h = b^{-1}) \\ &\Leftrightarrow (g = h \wedge h = b) \vee (g = h \wedge h = b^{-1}) \vee (g = h^{-1} \wedge h = b) \vee (g = h^{-1} \wedge h = b^{-1}) \\ &\Leftrightarrow (g = b) \vee (g = b^{-1}) \vee (b = g^{-1}) \vee (g^{-1} = b^{-1}) \\ &\Leftrightarrow g = b \vee g = b^{-1} \\ &\Leftrightarrow g \sim b \end{aligned}$$

**2.2 TODO b) zz.:  $|G| = 2n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists g \in G - \{e\}$  mit  $g^2 = e$**

**2.3 c) zz.:  $g^2 = e \forall g \in G \Rightarrow G$  abelsch**

Beweis: Sei  $b$  ein beliebiges Element aus  $G$  mit  $b \neq g$ .

$g^2 = e = ee = ggbb = (gb)^2 = (bg)^2 = bbgg$  und wenn  $(bg)^2 = (gb)^2$ , dann auch  $bgbg = bbgg$ . Also gilt Kommutativgesetz.

### 3 Aufgabe 3

**3.1 a) zz:  $(K, +, \cdot)$  ist ein Körper.**

**Lemma 1.**  $(K, +)$  ist eine Abelsche Gruppe.

*Proof.* Da nach Vorlesung  $(\mathbb{Q}, +)$  eine Abelsche Gruppe ist und die Elemente der Paare aus  $K$  einfach nur elementweise addiert werden, muss  $K$  auch eine Abelsche Gruppe sein.  $\square$

**Lemma 2.**  $(K, \cdot)$  ist eine Abelsche Gruppe.

### 3.1.1 TODO Assoziativgesetz

### 3.1.2 Existenz des neutralen Elements $e = (e_1, e_2)$

$$\begin{aligned}(a, b)(e_1, e_2) &= (a, b) \\ \Leftrightarrow (ae_1 - be_2, ae_2 + be_1) &= (a, b) \\ \Leftrightarrow ae_1 - be_2 &= a \wedge ae_2 + be_1 = b \\ \Leftrightarrow ae_1 - be_2 - a &= 0 \wedge ae_2 + be_1 = b \\ \Leftrightarrow e_2 = \frac{e_1 - 1}{b} \cdot a \wedge ae_2 + be_1 &= b \\ \Rightarrow a\left(\frac{e_1 - 1}{b} \cdot a\right) + be_1 &= b \\ \Leftrightarrow b^2(e_1 - 1) &= a^2(e_1 - 1) \\ \Leftrightarrow e_1(b^2 - a^2) &= b^2 - a^2 \\ \Leftrightarrow e_1 &= 1\end{aligned}$$

Dann ist  $e_2 = \frac{(1-1)a}{b} = 0$  Also:  $e = (1, 0)$

### 3.1.3 Existenz der Inversen

zz.: Zu jedem  $(a, b) \in K$  gibt es ein  $(x, y) \in K$  mit  $(a, b)(x, y) = e$ .

$$\begin{aligned}(a, b)(x, y) &= (1, 0) \\ \Leftrightarrow ax - by &= 1 \wedge ay + bx = 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{1 + by}{a} \wedge ay + bx &= 0 \\ \Rightarrow ay + b\left(\frac{1 + by}{a}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2y &= -b - b^2y \\ \Leftrightarrow y(a^2 + b^2) &= -b \\ \Leftrightarrow y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \\ \Rightarrow x = \frac{1 + b\left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)}{a} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - b}{a^3 + b^2a}\end{aligned}$$

Also  $(a, b)^{-1} = \left(\frac{1+by}{a}, \frac{a^2+b^2-b}{a^3+b^2a}\right)$  (Sieht komisch aus)

## 4 Aufgabe 4