## Contents



# 1 Aufgabe 1

Sei $G$ eine Gruppe und $g \in G$. Sei $e$ das neutrale Element von $G$. zz.: $\forall m, n \in \mathbb{Z} : g^m g^n = g^{m+n}$

Beweis:

**IA** $g^0 = e, g^1 = g \Rightarrow g^0 g^1 = g^{0+1} = g^1$

**IV** $g^m g^n = g^{m+n}$ gelte für feste $m, n \in \mathbb{Z}$

**IS** zz.:$g^{m+1} g^{n+1} = g^{m+1+n+1}$

- Beweis:

$g^{m+1}g^{n+1} = g^m g g^n g = g^m g^{n+1} g = g^m g^n g^2 = g^{m+n} g^2 = g^{m+n+2} = g^{m+1+n+1}$

Analog wird für $m, n < 0$ verfahren.

# 2 Aufgabe 2

Sei $G$ eine Gruppe mit neutralem Element $e$

## 2.1 a) zz: $g, h \in G : g \sim h \Leftrightarrow g = h \vee g = h^{-1}$ , $\sim$ Äquivalenzrelation

Beweis:

~ **reflexiv** $g \sim g \Leftrightarrow g = g \vee g = g^{-1}$ Immer wahr, da \(g=g ∀ g ∈ G\ ⇒ ∼ ) reflexiv

~ **symmetrisch** zz.: $g \sim h \Leftrightarrow h \sim g$ Beweis:

$g \sim h \Leftrightarrow g = h \vee g = h^{-1} \Leftrightarrow h = g \vee h = g^{-1} \Leftrightarrow h \sim g$

~ **transitiv** zz.: $g, h, b \in G : g \sim h \wedge h \sim b \Rightarrow g \sim b$ Beweis:

$g \sim h \Leftrightarrow h \sim b$
$\Leftrightarrow (g = h \vee g = h^{-1}) \wedge (h = b \vee h = b^{-1})$
$\Leftrightarrow (g = h \wedge h = b) \vee (g = h \wedge h = b^{-1}) \vee (g = h^{-1} \wedge h = b) \vee (g = h^{-1} \wedge h = b^{-1})$
$\Leftrightarrow (g = b) \vee (g = b^{-1}) \vee (b = g^{-1}) \vee (g^{-1} = b^{-1})$
$\Leftrightarrow g = b \vee g = b^{-1}$
$\Leftrightarrow g \sim b$

## 2.2 TODO b) zz.: $|G| = 2n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists g \in G - \{e\}$ mit $g^2 = e$

## 2.3 c) zz.: $g^2 = e \forall g \in G \Rightarrow G$ abelsch

Beweis: Sei $b$ ein beliebiges Element aus $G$ mit $b \neq g$.
$g^2 = e = ee = ggbb = (gb)^2 = (bg)^2 = bbgg$ und wenn $(bg)^2 = (gb)^2$, dann auch $bgbg = bbgg$. Also gilt Kommutativgesetz.

# 3 Aufgabe 3

## 3.1 a) zz: $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.

**Lemma 1.** *$(K, +)$ ist eine Abelsche Gruppe.*

*Proof.* Da nach Vorlesung $(\mathbb{Q}, +)$ eine Abelsche Gruppe ist und die Elemente der Paare aus $K$ einfach nur elementweise addiert werden, muss $K$ auch eine Abelsche Gruppe sein. $\square$

**Lemma 2.** *$(K, \cdot)$ ist eine Abelsche Gruppe.*

### 3.1.1 TODO Assoziativgesetz

### 3.1.2 Existenz des neutralen Elements $e = (e_1, e_2)$

$$
\begin{aligned}
&(a,b)(e_1,e_2) = (a,b) \\
\Leftrightarrow &(ae_1 - be_2, ae_2 + be_1) = (a,b) \\
\Leftrightarrow &ae_1 - be_2 = a \wedge ae_2 + be_1 = b \\
\Leftrightarrow &ae_1 - be_2 - a = 0 \wedge ae_2 + be_1 = b \\
\Leftrightarrow &e_2 = \frac{e_1 - 1}{b} \cdot a \wedge ae_2 + be_1 = b \\
\Rightarrow &a(\frac{e_1 - 1}{b} \cdot a) + be_1 = b \\
\Leftrightarrow &b^2(e_1 - 1) = a^2(e_1 - 1) \\
\Leftrightarrow &e_1(b^2 - a^2) = b^2 - a^2 \\
\Leftrightarrow &e_1 = 1
\end{aligned}
$$

Dann ist $e_2 = \frac{(1-1)a}{b} = 0$ Also: $e = (1, 0)$

#### 3.1.3 Existenz der Inversen

zz.: Zu jedem $(a,b) \in K$ gibt es ein $(x,y) \in K$ mit $(a,b)(x,y) = e$.

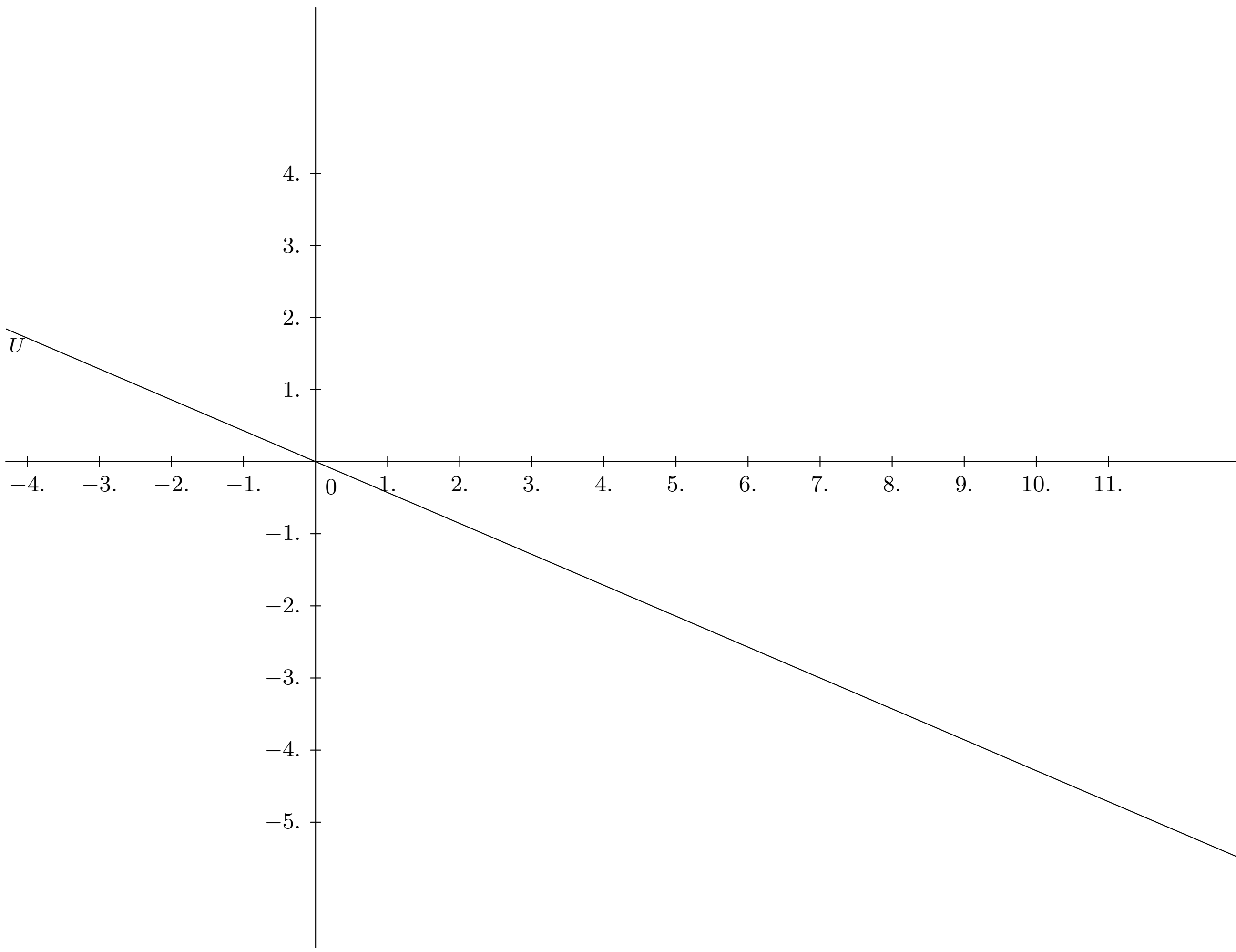
$$\begin{aligned}
&(a,b)(x,y) = (1,0) \\
\Leftrightarrow & ax - by = 1 \wedge ay + bx = 0 \\
\Leftrightarrow & x = \frac{1+by}{a} \wedge ay + bx = 0 \\
\Rightarrow & ay + b(\frac{1+by}{a}) = 0 \\
\Leftrightarrow & a^2y = -b - b^2y \\
\Leftrightarrow & y(a^2+b^2) = -b \\
\Leftrightarrow & y = \frac{-b}{a^2+b^2} \\
\Rightarrow & x = \frac{1+b(\frac{-b}{a^2+b^2})}{a} \\
\Leftrightarrow & \frac{a^2+b^2-b}{a^3+b^2a}
\end{aligned}$$

Also $(a,b)^{-1} = (\frac{1+by}{a}, \frac{a^2+b^2-b}{a^3+b^2a})$ (Sieht komisch aus)

# 4 Aufgabe 4

$U = (x,y) \in \mathbb{R} | 3x + 7y = 0$ Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

## 4.1 a)




## 4.2 b) Finden Sie zwei verschiedene Unterräume $W_1, W_2 \leq \mathbb{R}^2$ mit $U \oplus W_1 = \mathbb{R}^2 = U \oplus W_2$

Es gilt $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus U$ gdw. $\mathbb{R}^2 = W_1 + U \wedge U \cap W_1 = \{0\}$.

**Vermutung** So wie ich das interpretiere, ist die zweite Bedingung leicht zu erfüllen. Ich denke man muss nur sozusagen eine Gerade konstruieren, die $3x + 7y = 0$ im Punkt (0,0) schneidet, also z.B. x-y = 0. Die Herausforderung ist jetzt (wahrscheinlich Intention des Dozenten), die so zu wählen, dass die Unterräume eben $\mathbb{R}^2$ bilden.

# 5 Aufgabe 5

## 5.1 $U_1 = \{f \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) | f(n) = f(n+2) \forall n \in \mathbb{N}\}$

$U_1$ ist kein Unterraum von $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$, da $f(n) = f(n+2)$ keine Abbildung ist (einem Element aus N wird mehr als ein Element aus Q zugeordnet ) und so $U_1 = \emptyset$ .

## 5.2 $U_2 = \{f \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) | f(n) \neq f(n+2) \forall n \in \mathbb{N}\}$

Da $U_2 = \bar{U_1}$ ist nach analoger (s. $U_1$) Argumentation $U_2$ ein Unterraum von $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$.

## 5.3 $U_3 = \{f \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) | f(n) \leq f(n+1) \forall n \in \mathbb{N}\}$

1. $U_3 \neq \emptyset$ Es gibt Abbildungen, für die $f(n) \leq f(n+1) \forall n \in \mathbb{N}$ gilt (wachsende Funktionen).

2. $f_1 + f_2 \in U_3 \forall f_1, f_2 \in U_3$ Wenn $f(n) \leq f(n+1) \forall n \in \mathbb{N}$ für zwei Abbildungen $f_1, f_2$ gilt, dann ist auch $f_1 + f_2$ wachsend und damit in $U_3$.

3. $k \cdot f \in U_3 \forall k \in \mathbb{N}, f \in U_3$ Analog zu 2. (Bemerke: Mit natürlichen Zahlen lassen sich auch keine Steigungen umdrehen)

## 5.4 TODO $U_4 = \{f \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) | f(n) = 0$ für unendlich viele n $\in \mathbb{N}\}$

## 5.5 $U_5 = \{f \in Abb(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) | f(n) = 0$ für fast alle n $\in \mathbb{N}\}$

"Für fast alle" bedeutet "für alle bis auf endlich viele". In diesem Zusammenhang bedeutet das, dass in $U_5$ alle Funktionen enthalten sind, die fast alle natürlichen Zahlen auf 0 abbilden. Man kann diese Abbildungen also interpretieren als die Abbildungen, die die ersten n natürlichen Zahlen auf 0 abbilden und die restlichen auf andere rationale Zahlen. Diese kann man aber beliebig addieren und multiplizieren, ohne dass das Ergebnis eine Funktion sein kann, die fast keine n mehr auf 0 abbildet oder alle auf 0 abbildet, da $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist. Also ist $U_5$ ein Unterraum von $Abb(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$.