Contents

1 Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Sei e das neutrale Element von G. zz.: $\forall m, n \in \mathbb{Z} : g^m g^n = g^{m+n}$

Beweis:

IA $g^0 = e, g^1 = g \Rightarrow g^0 g^1 = g^{0+1} = g^1$

IV $g^m g^n = g^{m+n}$ gelte für feste $m, n \in \mathbb{Z}$

IS zz.:$g^{m+1} g^{n+1} = g^{m+1+n+1}$

- Beweis:

$$g^{m+1} g^{n+1} = g^m g^n g g = g^{m+n} g g = g^{m+n+2} = g^{m+1+n+1}$$

Geht so nur wenn G abelsch. Alternative:

$$g^{m+1} g^{n+1} = g^m g g^n g = g^m g^{n+1} g = g^m g^n g^2 = g^{m+n} g^2 = g^{m+n+2} = g^{m+1+n+1}$$

2 Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e

2.1 a) zz: $g, h \in G : g \sim h \Leftrightarrow g = h \vee g = h^{-1}$, $\sim$ Äquivalenzrelation

Beweis:

~ **reflexiv** $g \sim g \Leftrightarrow g = g \vee g = g^{-1}$ Immer wahr, da \(g=g ∀ g ∈ G\ $\Rightarrow \sim$) reflexiv

~ **symmetrisch** zz.: $g \sim h \Leftrightarrow h \sim g$ Beweis:

$g \sim h \Leftrightarrow g = h \vee g = h^{-1} \Leftrightarrow h = g \vee h = g^{-1} \Leftrightarrow h \sim g$

~ **transitiv** zz.: $g, h, b \in G : g \sim h \wedge h \sim b \Rightarrow g \sim b$ Beweis:

$g \sim h \Leftrightarrow h \sim b$
$\Leftrightarrow (g = h \vee g = h^{-1}) \wedge (h = b \vee h = b^{-1})$
$\Leftrightarrow (g = h \wedge h = b) \vee (g = h \wedge h = b^{-1}) \vee (g = h^{-1} \wedge h = b) \vee (g = h^{-1} \wedge h = b^{-1})$
$\Leftrightarrow (g = b) \vee (g = b^{-1}) \vee (b = g^{-1}) \vee (g^{-1} = b^{-1})$
$\Leftrightarrow g = b \vee g = b^{-1}$
$\Leftrightarrow g \sim b$

2.2 TODO b) zz.: $|G| = 2n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists g \in G - \{e\}$ mit $g^2 = e$

2.3 c) zz.: $g^2 = e \forall g \in G \Rightarrow G$ abelsch

Beweis: Sei b ein beliebiges Element aus G mit $b \neq g$.
$g^2 = e = ee = ggbb = (gb)^2 = (bg)^2 = bbgg$ und wenn $(bg)^2 = (gb)^2$, dann auch $bgbg = bbgg$. Also gilt Kommutativgesetz.

3 Aufgabe 3

3.1 a) zz: $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Lemma 1. *$(K, +)$ ist eine Abelsche Gruppe.*

Proof. Da nach Vorlesung $(\mathbb{Q}, +)$ eine Abelsche Gruppe ist und die Elemente der Paare aus K einfach nur elementweise addiert werden, muss K auch eine Abelsche Gruppe sein. □

Lemma 2. *$(K, \cdot)$ ist eine Abelsche Gruppe.*

3.1.1 TODO Assoziativgesetz

3.1.2 Existenz des neutralen Elements $e = (e_1, e_2)$

$$
\begin{aligned}
&(a,b)(e_1,e_2) = (a,b)\\
\Leftrightarrow&(ae_1 - be_2, ae_2 + be_1) = (a,b)\\
\Leftrightarrow&ae_1 - be_2 = a \wedge ae_2 + be_1 = b\\
\Leftrightarrow&ae_1 - be_2 - a = 0 \wedge ae_2 + be_1 = b\\
\Leftrightarrow&e_2 = \frac{e_1 - 1}{b} \cdot a \wedge ae_2 + be_1 = b\\
\Rightarrow&a(\frac{e_1 - 1}{b} \cdot a) + be_1 = b\\
\Leftrightarrow&b^2(e_1 - 1) = a^2(e_1 - 1)\\
\Leftrightarrow&e_1(b^2 - a^2) = b^2 - a^2\\
\Leftrightarrow&e_1 = 1
\end{aligned}
$$

Dann ist $e_2 = \frac{(1-1)a}{b} = 0$ Also: $e = (1,0)$

4 Aufgabe 4