Contents

1 DONE 1 [2/2]

Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume eines Vektorraums V. zz:

1.1 DONE a) $U_1 \cup U_2 \leq V \Leftrightarrow U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1$

Proof. "$\Rightarrow$":
U_1 und U_2 sind Unterräume von V. $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von V.
Es ist somit sicher, dass $U_1, U_2 \neq \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$.
Seien $a, b \in U_1 \cup U_2$. per definitionem gilt:
$a + b \in U_1 \cup U_2 \forall a, b \in U_1 \cup U_2$. Das bedeutet:
$a + b \in U_1 \forall a, b \in U_1 \cup U_2 \vee a + b \in U_2 \forall a, b \in U_1 \cup U_2$
Das geht nur, wenn $U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1$.

"$\Leftarrow$":
Wenn ein Unterraum Teilmenge des anderen ist, dann ist die Vereinigung einfach die Obermenge (der Raum, der den anderen enthält). Da dieser p.d. ein Unterraum von V ist, ist also auch die Vereinigung ein Unterraum von V. □

1.2 DONE b) \($(\mathbf{U_1} + \mathbf{U_2}) \cap \mathbf{U_3} = \mathbf{U_1} + (\mathbf{U_{2\cap}}\ \mathbf{U_3}) \Leftrightarrow$

$\mathrm{U}_{1\subseteq}\ \mathrm{U}_3$ \) (Mir kommt das komisch vor, weil der Beweis nur über Mengenlehre läuft, nicht viel über Vektorraumeigenschaften)

Proof. "$\Rightarrow$":
Seien $v_1 \in U_1, v_2 \in U_3, v_1 + v_2 \in U_3$. Dann gilt $v_1 + v_2 \in (U_1 + U_2) \cap U_3$ und $v_1 + v_2 \in (U_1 + (U_2 \cap U_3))$ und somit $v_2 \in U_3$. Wegen $v_1 + v_2 \in U_3$ muss aber auch $v_1 \in U_3$ sein. Aus der linken Seite folgt also (mit $v_1 + v_2 \in U_3$), dass $U_1 \subseteq U_3$.

"$\Leftarrow$:" Beweis durch Kontraposition: zz.: $(U_1+U_2)\cap U_3 \neq U_1+(U_2\cap U_3) \Leftrightarrow U_1 \nsubseteq U_3$ Wenn linke Seite nicht gilt, dann für $v_1 \in U_1, v_2 \in U_2$:

$$v_1 + v_2 \notin U_3$$

denn dann ist $v_1 + v_2 \notin (U_1 + U_2) \cap U_3$ und $v_1 + v_2 \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$. Dh. $v_2 \in U_2 \cap U_3$ und $v_1 \notin U_2 \cap U_3$ (Wegen $v_1 + v_2 \notin U_3$), also $v_1 \notin U_3 \Rightarrow U_1 \nsubseteq U_3$ □

2 TODO 2 [0/2]

2.1 TODO a)

K Körper. Welche Vektoren sind jeweils linear abhängig, welche linear unabhängig im K-VR K^3.

1. $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 0, 0), v_3 = (0, 1, 0)$ Ein Erzeugendensystem von K^3 ist $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ (nach Vl.). Prüfe, ob für alle v_i gilt: $v_i \notin < E \setminus \{v_i\} >$.

    - v_1 Gilt nicht, denn v_1 lässt sich aus e_1 und e_3 linear kombinieren.
    - v_2 Gilt, denn v_2 lässt sich mit inversen Elementen bzgl. Addition von K linear kombinieren.
    - v_3 Gilt, denn $v_3 = e_2$ lässt sich nicht mit e_1 und e_3 linear kombinieren.

Es sind also nicht alle v_i linear unabhängig. Jedoch sind untereinander v_1 und v_3 linear unabhängig, da nur durch skalare Multiplikation mit 0 der Nullvektor erzeugt werden kann.

1. $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 4), v_3 = (-1, 1, -1)$ Prüfe ob für alle $\mathbb{K}$ gilt :$v_i \notin < E \setminus \{v_i\} >$.

2.2 TODO b)

Seien $v_1, ..., v_n$ paarweise verschiedene Vektoren aus einem $\mathbb{R}$-VR V.

1. v_1, v_2 linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $v_1 + v_2$ linear unabhängig und $v_1 - v_2$ linear unabhängig.

Proof. v_1, v_2 linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ Ersetze v_1 durch v_1+v_2 und v_2 durch v_1-v_2:

$$\begin{aligned} c_1(v_1 + v_2) + c_2(v_1 - v_2) = 0 \\ c_1 v_1 + c_1 v_2 + c_2 v_1 - c_2 v_2 = 0 \\ c_1 c_2(v_1) + c_1(-c_2)(v_2) = 0 \end{aligned}$$

Wegen v_1, v_2 linear unabhängig $c_1 = c_2 = 0$, also $c_1 c_2(v_1) + c_1(-c_2)(v_2) = 0$ □

3 TODO 3 [0/4]

In $\mathbb{R}^4$ betrachte $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ $v_2 = (1, 3, 1, -1)$ $v_3 = (3, 8, 5, 2)$ $v_4 = (2, 1, 3, 1)$

AuSSerdem $U =< v_1, v_2, v_3 >$ und $W =< v_3, v_4 >$. Bestimmen Sie Basen für:

3.1 TODO U

Da U ja sicher durch $\{v_1, v_2, v_3\}$ erzeugt wird muss nur noch folgenden Bedingung geprüft werden: Wenn v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, dann ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis.

(zz. v_1, v_2, v_3 linear unabhängig) Ansonsten ist klar, dass $\{e_i | i = 1, .., 4\}$ eine Basis ist, da $U \leq R^4$.

3.2 TODO W

Analog zu U

3.3 TODO U+W

$U + W =< U \cup W >$, dh prüfe ob alle $v \in U \cup W$ linear unabhängig. (Ist das nicht irgendwie offensichtlich, dass die linear unabhängig sind?) Dann sind wiederum die Einheitsvektoren eine Basis und $U \cup W$ selbst auch.

3.4 TODO $U \cap W$

4 TODO 4 Sei K endlicher Körper mit q Elementen [0/3]

- ☐ a) Bestimmen Sie die Anzahl der Basen im Vektorraum K^n
- ☐ b) Bestimmen Sie für jede natürliche Zahl k $\leq$ n die Anzahl der k-dimensionalen Unterräume des K^{n}
- ☐ c) Folgern Sie, dass es für jede natürliche Zahl k$\leq$ n genausoviele $(n-k)$-dimensionale Unterräume wie k-dimensionale Unterräume im K^{n} gibt.