Contents

1

1.1 a) Bestimmen Sie die Dimensionen von U_1 und U_2

Idee: Vektoren in U_1 müssten so aussehen:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_3 \\ -a \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ b \\ x_3 \\ a \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -b \\ x_3 \\ -a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ x_3 \\ a \\ b \end{pmatrix} \forall a, b, x_3 \in \mathbb{R}$$

damit $x_1 + x_4 = 0 = x_2 + x_5$ erfüllt ist. Wenn das so stimmt, dann braucht man auf jeden Fall alle fünf Einheitsvektoren um U_1 erzeugen zu können, dh. dann wäre $\dim_{\mathbb{K}} U_1 = 5$.

Bei U_2 hänge ich daran fest, dass x_3 = -(x_2+x_4) = -(x_1+x_5). Ich vermute, dass man hier auch irgendwie ein Gleichungssystem lösen kann, aber ich sehe nicht wie das helfen würde. Mit etwas Herumrechnen sieht es auch hier für mich so aus, als ob hier entweder alle Elemente 0 sein müssen oder keines, was dazu führen würde, dass auch hier alle fünf Einheitsvektoren benötigt werden. Kommt mir komisch vor.

1.2 b)

Da ich a) nicht vernünftig gelöst habe, kann mein Lösungvorschlag hier natürlich auch nicht zuverlässig sein. Ich versuche es trotzdem: Man muss die Vektoren finden, die in Basen von U_1, U_2 lin.unabh. sind. Die müssen natürlich auch in U_1 und in U_2 sein. Also müsste man die Bedingungen in den Mengenkomprehensionen als ein Gleichungssystem lösen können. (Ich hab keine Ahnung, was ich tue)

$x_1 + x_4 = 0$
$x_2+x_5 = 0$
$x_2+x_3+x_4 = 0$
$x_1+x_3+x_5 = 0$\\dot{W}enn ich das löse, komme ich (o Wunder) auf x_3=0.

1.3 c) Vermutung: Genausoviele wie U1∩ U_2

2

Es seien U_1, U_2 und U_3 Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V.

2.1 a) zz.: $\dim_{\mathbb{K}} U_1 + U_2 + U_3 \leq \dim_{\mathbb{K}} U_1 + \dim_{\mathbb{K}} U_2 + \dim_{\mathbb{K}} U_3 - \dim_{\mathbb{K}} U_1 \cap U_2 - \dim_{\mathbb{K}} U_1 \cap U_3 - \dim_{\mathbb{K}} U_2 \cap U_3 + \dim_{\mathbb{K}} U_1 \cap U_2 \cap U_3$

Leider gar keine Ahnung. Man bräuchte diesen Basiserweiterungssatz, den ich nicht verstanden habe.

3

3.1 $(\phi_1(f))(n) = f(n^2)$

Vermutung: Homomorphismus. Ich habe das auch versucht nachzurechnen, aber das sieht irgendwie so offensichtlich aus, dass das nachrechnen nur nach schön Aufschreiben aussieht.

3.2 $(\phi_2(f))(n) = (f(n))^2$

zz: $\phi(f+g)(n) = (f(n))^2 + (g(n))^2 \forall f, g \in \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (Wiederkehrende Quantoren in Aussagen ab hier weggelassen) $(\phi(f+g)(n) = ((f+g)(n))^2)$
Kein Homomorphismus! Beweis durch Gegenbeispiel: $f(n) = 2n, g(n) = -n$
Dann:
$\phi_2(f+g)(n) = \phi_2(2n-n)(n) = \phi_2(n)(n) = n^2$
aber $\phi_2(2n) + \phi_2(-n) = (2n)^2 + (-n)^n = 5n^2 \neq n^2$

3.3 $\phi(f+g)(n) = n^2 \cdot f(n+1)$

(Nur Beweisskizze, sonst zu viel zu tippen)

3.3.1 Addition

$\phi(f+g)(n) = n^2((f+g))(n+1)$
$\phi(f) + \phi(g) = n^2 \cdot (f(n+1)) + n^2 \cdot (g(n+1)) = n^2(f(n+1) + g(n+1)) = n^2((f+g)(n+1))$ Fertig.

3.3.2 Skalare Multiplikation

$\phi(cf)(n) = n^2 cf(n+1)$
$c\phi(f)(n) = c(n^2 \cdot f(n+1)) = cn^2 f(n+1) = n^2 cf(n+1)$ Fertig

4

4.1 a) zz.: $\alpha \in End(\mathbb{R}^3)$

4.1.1 Addition

Ich habe den Eindruck, dass das ziemlich offensichtlich strukturverträglich ist (Ist mir etwas zu viel, das alles einzutippen.) Da das recht offensichtlich ist, könnte man noch mit den Körpereigenschaften argumentieren, das würde Schreibarbeit sparen.

4.1.2 Skalare Multiplikation

Analog

4.2 b)

Kern ist definiert als Kern $\alpha = \{v \in \mathbb{R}^3 | \alpha(v) = 0\}$ Also muss man dieses Gleichungssystem lösen: 2x-y+3z = 0
3x+5y-z = 0
-7x-16y+6z = 0
Als ich das von Hand versucht habe, sind ziemlich krumme Werte herausgekommen, lag vielleicht an 2 Uhr nachts. NumPy sagt, die Lösung ist (0,0,0). Das wäre natürlich praktisch (und natürlich funktioniert es mit (0,0,0), ist nur die Frage ob das reicht, ist ja trivial), weil dann dim(Kern α) = 0 wäre (wegen $(0,0,0) =< \emptyset >$) und das natürlich zur Dimensionsformel passen würde und dann hätte man dim V = dim Kern α + dim Bild = 0+3 . (Demnach wäre dann die Basis vom Bild sowas wie $\{\mathrm{e_i}\}$)

4.3 c)

Könnte eine Fangfrage sein. Ich würde sagen, die Wahl des Körpers ist egal, Körper ist Körper, sonst würden die ganzen Sachen, die darauf aufbauen ja nicht funktionieren (So kann man das natürlich nichts aufs Blatt schreiben.). Eine Überlegung wäre hier noch, dass es mit bestimmten endlichen Körpern nicht geht, also sowas wie $\mathbb{Z}mod2$, aber ich habe noch keine konkrete Idee, wie man zeigt was dann passiert. Vielleicht ist dann einfach das Gleichungssystem nicht lösbar.

5

zz: Sind $W_1, W_2 \in \mathbb{W}$ mit $W_1 \leq W_2$, so gilt:
$\dim W_1 - \dim(U \cap W_1) \leq \dim W_2 - \dim(U \cap W_2)$

Wir wissen $W_1 \leq W_2$ Nach Satz 5.14(b) gilt dann: $\dim W_1 \leq dimW_2$) $\dim(U \cap W_1) \geq \dim(U \cap W_2)$ (Selbstverständlich muss man davon ausgehen, dass Dimensionen nicht negativ sein können.) Der Tipp ist, dass man die Schnitte jeweils zu einer Basis von W_i erweitern soll. Wenn ich die Vorlesung richtig verstehe, ist das was dann passiert, dass man natürlich eine Basis von $\mathrm{W_i}$ erhält, die aber auch die gleiche Mächtigkeit wie jede andere hat. In dem Fall würde dann die Dimension, die man erhält jeweils gleich $\dim W_i$ werden, und somit hätte man auf beiden Seiten 0. Damit wäre die Gleichheit in dem "$\leq$" Ausdruck gezeigt. Ich vermute für "$<$" kann man jetzt auch noch weiter mit diesem Erweiterungssatz argumentieren, aber mir ist auch dessen Bedeutung noch nicht ganz klar.