Contents

1

1.1 a) Bestimmen Sie die Dimensionen von U_1 und U_2

Idee: Vektoren in U_1 müssten so aussehen:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ x_3 \\ -a \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ b \\ x_3 \\ a \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -b \\ x_3 \\ -a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ x_3 \\ a \\ b \end{pmatrix} \forall a, b, x_3 \in \mathbb{R}$$

damit $x_1 + x_4 = 0 = x_2 + x_5$ erfüllt ist. Wenn das so stimmt, dann braucht man auf jeden Fall alle fünf Einheitsvektoren um U_1 erzeugen zu können, dh. dann wäre $\dim_{\mathbb{K}} U_1 = 5$.

2

Es seien U_1, U_2 und U_3 Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V.

2.1 a) zz.: $\dim_{\mathbb{K}} U_1 + U_2 + U_3 \leq \dim_{\mathbb{K}} U_1 + \dim_{\mathbb{K}} U_2 + \dim_{\mathbb{K}} U_3 - \dim_{\mathbb{K}} U_1 \cap U_2 - \dim_{\mathbb{K}} U_1 \cap U_3 - \dim_{\mathbb{K}} U_2 \cap U_3 + \dim_{\mathbb{K}} U_1 \cap U_2 \cap U_3$

3

3.1 $(\phi_1(f))(n) = f(n^2)$

Vermutung: Homomorphismus. Ich habe das auch versucht nachzurechnen, aber das sieht irgendwie so offensichtlich aus, dass das nachrechnen nur nach schön Aufschreiben aussieht.

3.2 $(\phi_2(f))(n) = (f(n))^2$

zz: $\phi(f+g)(n) = (f(n))^2 + (g(n))^2 \forall f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (Wiederkehrende Quantoren in Aussagen ab hier weggelassen) $(\phi(f+g)(n) = ((f+g)(n))^2)$
Kein Homomorphismus! Beweis durch Gegenbeispiel: $f(n) = 2n, g(n) = -n$
Dann:
$\phi_2(f+g)(n) = \phi_2(2n-n)(n) = \phi_2(n)(n) = n^2$
aber $\phi_2(2n) + \phi_2(-n) = (2n)^2 + (-n)^n = 5n^2 \neq n^2$

3.3 $\phi(f+g)(n) = n^2 \cdot f(n+1)$

(Nur Beweisskizze, sonst zu viel zu tippen)

3.3.1 Addition

$\phi(f+g)(n) = n^2((f+g))(n+1)$
$\phi(f) + \phi(g) = n^2 \cdot (f(n+1)) + n^2 \cdot (g(n+1)) = n^2(f(n+1) + g(n+1)) = n^2((f+g)(n+1))$ Fertig.

3.3.2 Skalare Multiplikation

$\phi(cf)(n) = n^2 cf(n+1)$
$c\phi(f)(n) = c(n^2 \cdot f(n+1)) = cn^2 f(n+1) = n^2 cf(n+1)$ Fertig

4

4.1 a) zz.: $\in End(\mathbb{R}^3)$

4.1.1 Addition

Ich habe den Eindruck, dass das ziemlich offensichtlich strukturverträglich ist (Ist mir etwas zu viel, das alles einzutippen.) Da das recht offensichtlich ist, könnte man noch mit den Körpereigenschaften argumentieren, das würde Schreibarbeit sparen.

4.1.2 Skalare Multiplikation

Analog

4.2 b)

Kern ist definiert als Kern $\alpha = \{v \in \mathbb{R}^3 | \alpha(v) = 0\}$ Also muss man dieses Gleichungssystem lösen: 2x-y+3z $=0$
3x+5y-z $=0$
-7x-16y+6z $=0$
Als ich das von Hand versucht habe, sind ziemlich krumme Werte herausgekommen, lag vielleicht an 2 Uhr nachts. NumPy sagt, die Lösung ist (0,0,0). Das wäre natürlich praktisch, weil dann dim(Kern α) $=0$ wäre (wegen $(0,0,0) = < \emptyset >$) und das natürlich zur Dimensionsformel passen würde und dann hätte man dim V $=$ dim Kern α $+$ dim Bild $=$ 0+3 . (Demnach wäre dann die Basis vom Bild sowas wie $\{\mathrm{e_i}\}$)