TP 2: Diffusion anisotrope (Malik et Perona)

Im4, EDP

2017-2018 Semestre 2

La diffusivité est constante dans l'équation de la chaleur mais on peut la faire varier en fonction de l'espace et d'une fonction f :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}\Big(f(x,y)\nabla u\Big)$$

Le filtrage par l'approche de Malik et Perona consiste en une généralisation du filtrage isotrope par l'équation de la chaleur. Etant donnée une fonction f dont on précisera ensuite le comportement, Malik et Perona ont proposé une équation aux dérivées partielles de type diffusion anisotroppe dont l'expression est donnée par :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \mathrm{div}\Big(f(\|\nabla I\|)\nabla I\Big) \tag{1}$$

Si on prend une fonction f constante, on retombe sur l'équation de la chaleur qui réalise un filtrage isotrope de l'image :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = f\mathrm{div}\Big(\nabla I\Big) = f\Delta I \tag{2}$$

Dans le cas général, il convient de choisir une fonction f qui possède les propriétés suivantes :

- f est proche de zéro dans les régions de fort gradient, ce qui induit un effet limité de la diffusion de sorte que les contours soient préservés.
- f est proche de 1 dans les régions homogènes où il convient de lisser l'image.

Dans leur article original, les auteurs proposent deux fonctions dépendant d'un paramètre λ (de l'ordre de 20) :

$$f(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{\lambda^2}} \text{ ou encore } f(x) = \exp\Big(-\frac{x^2}{\lambda^2}\Big) \tag{3}$$

Discrétisation

On peut utiliser le schéma de discrétisation suivant en temps et en espace :

$$u_{i,j}^{t+1} = u_{i,j}^{t} + \Delta t\Big[c_N\nabla_N u + c_S\nabla_S u + c_W\nabla_W u + c_E\nabla_E u\Big]_{i,j}^{t} \tag{4}$$

Avec

$$\begin{aligned}
(c_N)^t_{i,j} &= f(\|\nabla u^t_{i,j-1/2}\|)\\
(c_S)^t_{i,j} &= f(\|\nabla u^t_{i,j+1/2}\|)\\
(c_W)^t_{i,j} &= f(\|\nabla u^t_{i-1/2,j}\|)\\
(c_E)^t_{i,j} &= f(\|\nabla u^t_{i+1/2,j}\|)
\end{aligned}$$

et par exemple

$$\nabla u^t_{i,j-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\big(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\big) + \frac{1}{4}\big(u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}\big) \\ u^t_{i,j} - u^t_{i,j-1} \end{pmatrix}$$

La quantité précédente est un vecteur à deux coordonnées et peut-être adaptée de façon logique pour les trois autres expressions (faire un schéma si besoin).

Si vous êtes pris par le temps, vous pouvez essayer les approximations suivantes:

$$\begin{aligned}
(c_N)^t_{i,j} &= f(\nabla_N u_{i,j})\\
(c_S)^t_{i,j} &= f(\nabla_S u_{i,j})\\
(c_W)^t_{i,j} &= f(\nabla_W u_{i,j})\\
(c_E)^t_{i,j} &= f(\nabla_E u_{i,j})
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\nabla_N u &= u_{i,j-1} - u_{i,j}\\
\nabla_S u &= u_{i,j+1} - u_{i,j}\\
\nabla_W u &= u_{i-1,j} - u_{i,j}\\
\nabla_E u &= u_{i+1,j} - u_{i,j}
\end{aligned}$$

Pour expérimenter

Regarder l'influence du paramètre λ sur le résultat obtenu. On se contentera d'impressions qualitatives et on pourra essayer aussi des images bruitées.