

Présentation de l'UE: « EDP et analyses multi-échelles »

- 5 Cours + 5 TP:

~~30/01~~

06/02

13/02

20/02

23/02

- Evaluation:

TPs (1/3)

Examen (2/3)

Présentation de l'UE: « EDP et analyses multi-échelles »

- Contenu
 - Une partie « Image »
 - Une partie « Maillage »: vision plus générale
 - Aspects théoriques: liens entre plusieurs domaines EDP, Fourier, géométrie
 - Applications: débruitage, inpainting

Les Travaux Pratiques

TP1 (1 séance ½)

Equation de la chaleur et filtre gaussien

TP2: (1 séance ½)

Restauration d'images

TP3: (2 séances)

Analyse de Fourier et EDP sur des surfaces

Objectifs

- Comprendre l'intérêt des EDP pour le traitement d'image et les mettre en œuvre
- S'initier aux problématiques de restauration d'images et voir que les EDP fournissent un cadre intéressant
- Généralisation aux maillages

Références

- *Les EDP en traitement d'images et vision par ordinateur*, Rachid Deriche & Olivier Faugeras, Rapport de recherche INRIA, 1996

Cours 1: Introduction aux EDP Equation de la chaleur et filtre gaussien

Julien Lefèvre

Julien.lefevre@univ-amu.fr



Laboratoire des sciences de l'Information et des Systèmes
UMR CNRS 7296

Plan du cours

1. Introduction aux EDP
2. Equation de la chaleur
3. Equations de réaction-diffusion

Préambule

- Mise en garde

L'auteur du cours signale tout de suite que les énoncés mathématiques qui vont suivre sont faits sans préciser rigoureusement les conditions de régularité des fonctions, des domaines de définition, des conditions limites etc

En effet, ce cours ne s'adresse pas à des mathématiciens et cherche avant tout à donner des applications d'approches mathématiques.

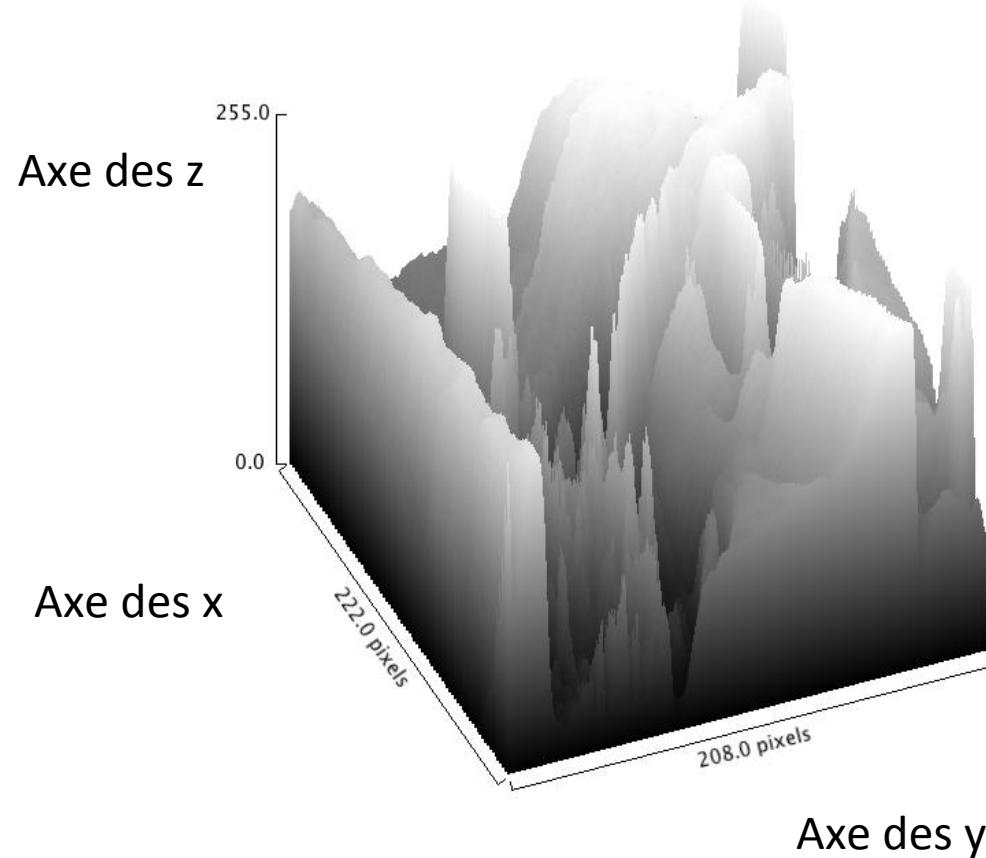
1. Introduction aux EDP

- Image vue comme une fonction **discrète** sur un domaine **discret**, sur laquelle on peut appliquer des opérateurs **discrets** (filtres).
- On peut voir aussi une image comme une fonction **continue par morceaux** définie sur un domaine **continu**.

1. Introduction aux EDP

Exemple

Une image peut être vue comme une fonction $z = I(x, y)$



1. Introduction aux EDP

Des équations différentielles aux EDP

Une équation différentielle est une équation reliant une fonction inconnue d'une variable et ses dérivées successives (avec des conditions initiales ou aux bords).

Exemples:

$y' + (RC)y = 0$ (tension aux bornes d'un condensateur)

$my'' + ky = 0$ (ressort de raideur k)

$mx'' = mg$ (chute libre d'un corps)

etc...

1. Introduction aux EDP

Dérivées partielles

Définition : Une dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables est la dérivée par rapport à **une seule** de ses variables, les autres étant gardées constantes.

Soit $f(x_1, \dots, x_n)$ une fonction à n variables, la dérivée partielle de f par rapport à x_i est :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

1. Introduction aux EDP

- EDP: équations aux dérivées partielles.
- Une EDP est une équation qui relie les dérivées partielles **spatiales** et souvent **temporelle** d'une fonction inconnue $u(x,y,t)$ définie sur un domaine Ω (par ex. une image).
- Besoin de conditions initiales et/ou au bord.

1. Introduction aux EDP

- Equations différentielles : 1 variable
- EDP : 2 ou plusieurs variables
- Expression générale (1 dimension spatiale, 1 dimension temporelle) :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D \frac{\partial u}{\partial t} + E \frac{\partial u}{\partial x} + F u = 0$$

1. Introduction aux EDP

Exemples issus de la physique

- Equation de Laplace

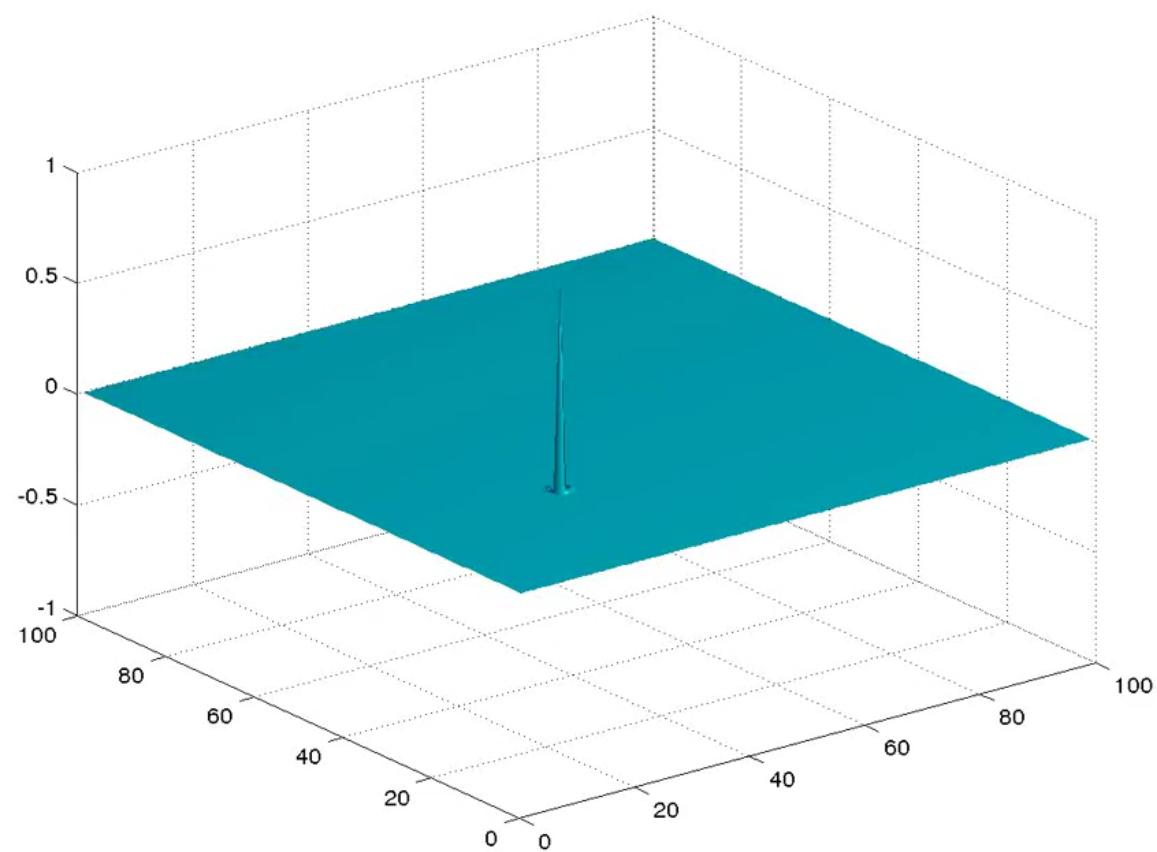
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

- Equation des ondes

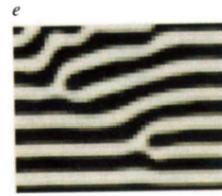
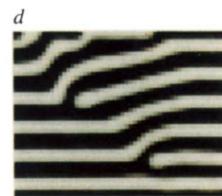
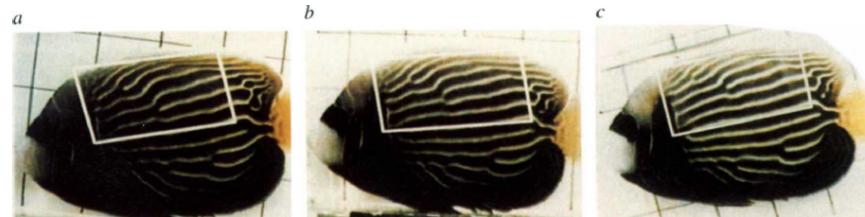
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$



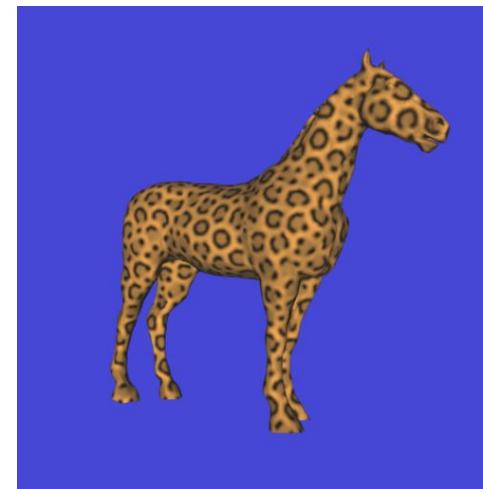
1. Introduction aux EDP

... et aussi de la biologie

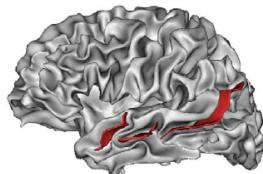
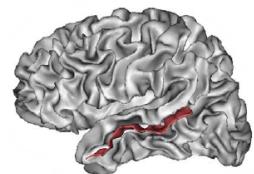
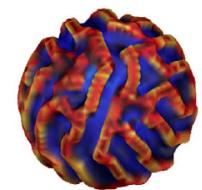
Equation de réaction-diffusion (Turing)



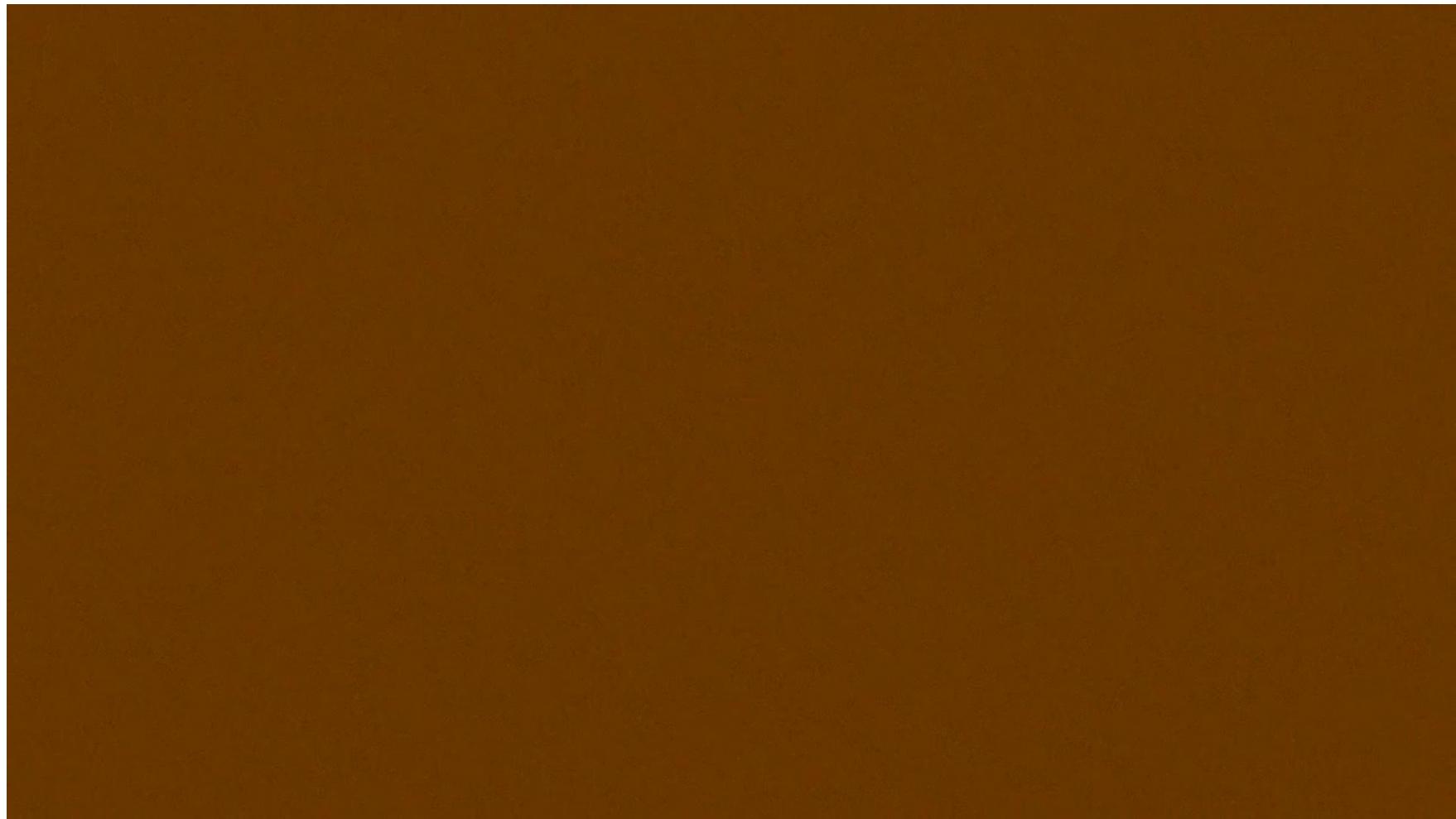
Kondo, Asai, 1995



Turk, 1991



Lefèvre, Mangin, 2010



1. Introduction aux EDP

Pourquoi des EDP en traitements d'image ?

Historique rapide et non exhaustif:

- Filtrage, traitement du signal puis des images
- Approches bio-inspirés, David Marr, « Primal sketch »
- Les approches mathématiques, P-L Lions (médaille Fields, 1994)

Interprétation physique simple

Propriétés mathématiques rigoureuses

Lien avec les problèmes d'optimisation

2. Equation de la chaleur

• Historique

Joseph Fourier, 1768-1830

THEORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.



A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE, MÉTALLURGIE
ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 54.

1822.

on parvient de cette manière à un résultat très remarquable exprimé par l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \pi q x = \sin x S(\sin x, qx, dx) + \sin 2x S(\sin 2x, qx, dx) \\ + \sin 3x S(\sin 3x, qx, dx), \dots + \sin ix S(\sin ix, qx, dx) + \text{etc.}; \quad (D)$$

le second membre donnera toujours le développement cherché de la fonction qx , si l'on effectue les intégrations depuis $x=0$, jusqu'à $x=\pi$.

On peut aussi vérifier l'équation précédente (D) (art. 220), en déterminant immédiatement les quantités a, a, a_2, \dots, a_i , etc., dans l'équation

$$qx = a_0 \sin x + a_1 \sin 2x + a_2 \sin 3x + \dots + a_i \sin ix + \dots \text{etc.};$$

pour cela on multipliera chacun des membres de la dernière équation, par $\sin ix \cdot dx$, i étant un nombre entier, et l'on prendra l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, on aura

$$S(qx \sin ix \cdot dx) = a_0 S(\sin x \sin ix \cdot dx) + a_1 S(\sin 2x \sin ix \cdot dx) \\ + \dots + a_i S(\sin ix \sin ix \cdot dx) + \dots \text{etc.}$$

Or on peut facilement prouver, 1^e que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre, ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a_i S(\sin ix \sin ix \cdot dx)$; 2^e que la valeur de $S(\sin ix \sin ix \cdot dx)$ est $\frac{1}{2} \pi$;



2. Equation de la chaleur

- Historique

Il s'agissait initialement de résoudre un problème lié à l'équation de la chaleur (cf cours du premier semestre) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Fourier a proposé d'écrire les solutions comme une somme de fonctions sinus avec des périodes différentes :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(t) \sin(kx)$$

2. Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur

Si la diffusivité D est constante, on aboutit à l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Laplacien !}$$

L'équation de la chaleur traduit l'évolution dans un domaine au cours du temps, d'une quantité comme la température.

Sans apport de chaleur extérieur, la température s'uniformise: c'est la propriété recherchée pour le traitement d'images

2. Equation de la chaleur

Une solution simple à l'équation de la chaleur

Soit l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$$

Avec la condition « initiale » : $u(x, y, 0.1) = 10e^{-\frac{x^2+y^2}{0.2}}$

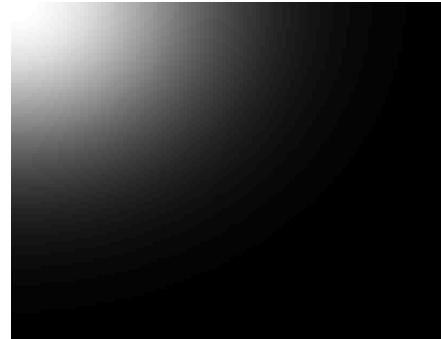
Alors il existe une solution unique donnée par la formule
(Exo) :

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}}$$

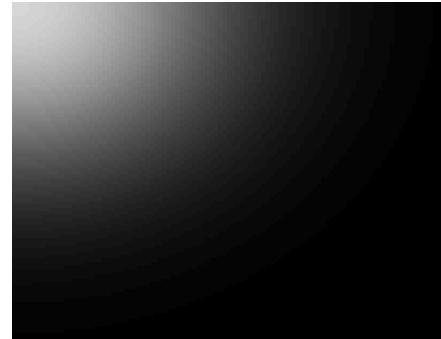
2. Equation de la chaleur

- **Résultats numériques**

$t=0.1$



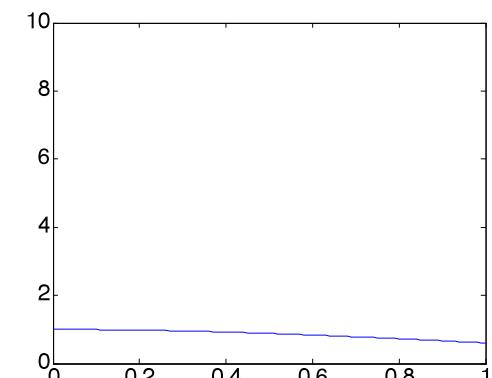
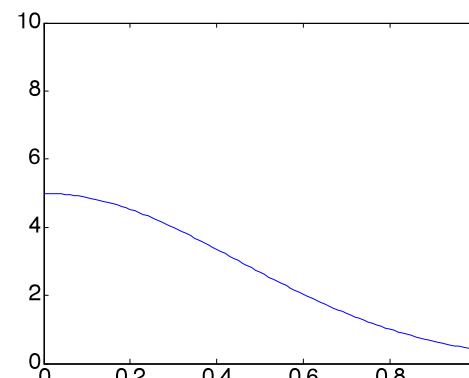
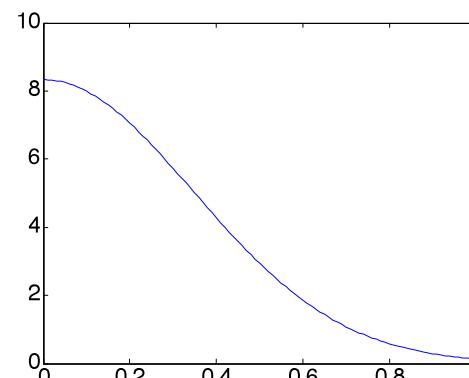
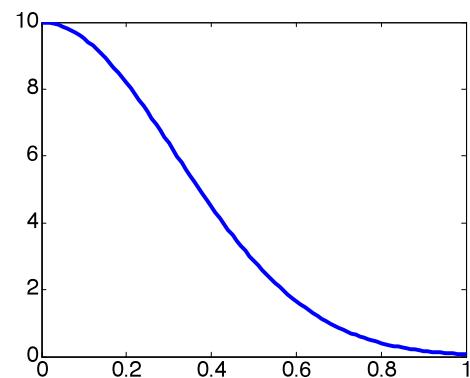
$t=0.12$



$t=0.2$



$t=1$



2. Equation de la chaleur

- **Aspects numériques**

Discrétisation de l'équation de la chaleur. On va construire une suite d'images telles que :

- Initialement $I_{i,j}^0 = I_{i,j}$
- La dérivée temporelle s'approxime par $\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{1}{\Delta t} (I_{i,j}^{n+1} - I_{i,j}^n)$
- Le laplacien est calculé par

$$\Delta u = -4I_{i,j}^n + I_{i-1,j}^n + I_{i+1,j}^n + I_{i,j-1}^n + I_{i,j+1}^n$$

\Leftrightarrow convolution avec le filtre

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

2. Equation de la chaleur

- **Implémentation**

A vous de jouer

Entrées: Image I, dt, n

Sortie: Image O

On déclare deux images, O=I, TMP

Pour i=1 à n

```
    TMP=filtre_laplacien(O)  
    O=O+dt*TMP
```

//Opération pixel par pixel
Pour x=1 à hauteur
Pour y=1 à largeur
 TMP[x,y]= ...
 O[x,y]=...

2. Equation de la chaleur

- **Implémentation**

Il faut recoder toutes les opérations de filtrage en **double**



2. Equation de la chaleur

- **Implémentation. Plusieurs stratégies**
 1. Changer le type Pixel dans OutilsPGM.h, de int à double.
 2. Réécrire les fonctions de Filtrage avec des double ** ou double * (en gérant correctement les indices). Faire une conversion de Image vers double ** (un peu lourd).
 3. Utiliser Matlab...

Remarque: les filtres sont en fait des images !

2. Equation de la chaleur

- **Résultats**

- Equation de la chaleur avec $\Delta t=0.01$



10 itérations



50 itérations



500 itérations

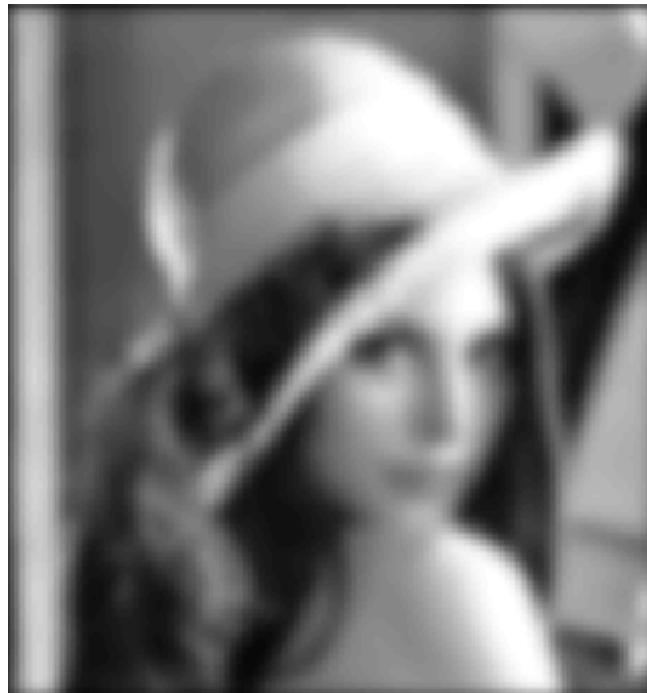
2. Equation de la chaleur

- **Résultats**

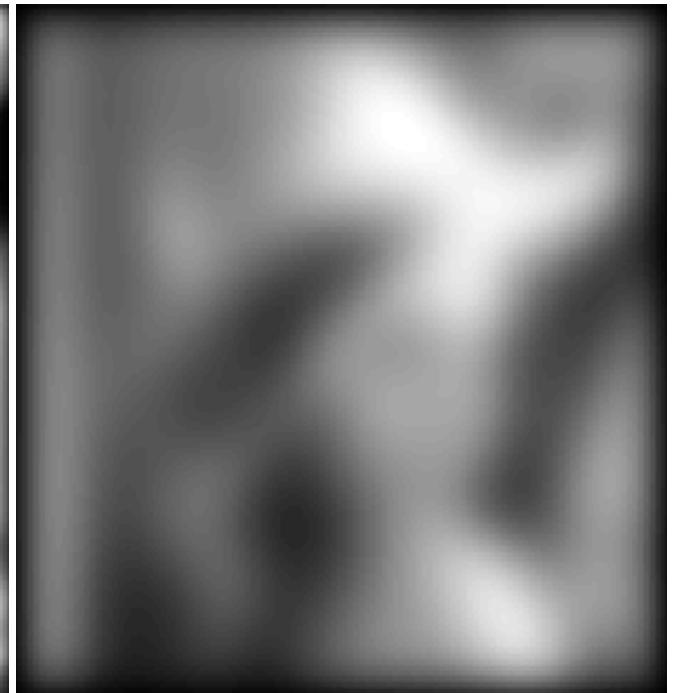
- Equation de la chaleur avec $\Delta t=0.1$



10 itérations



50 itérations

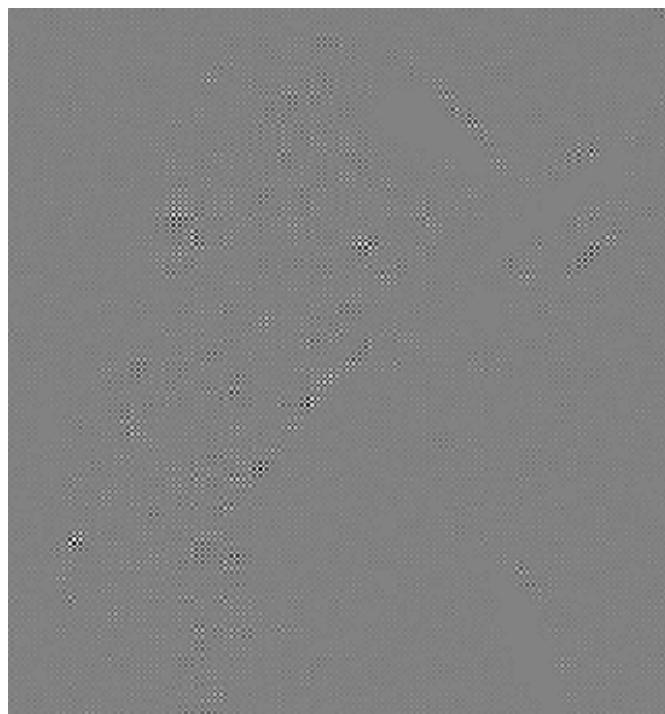


500 itérations

2. Equation de la chaleur

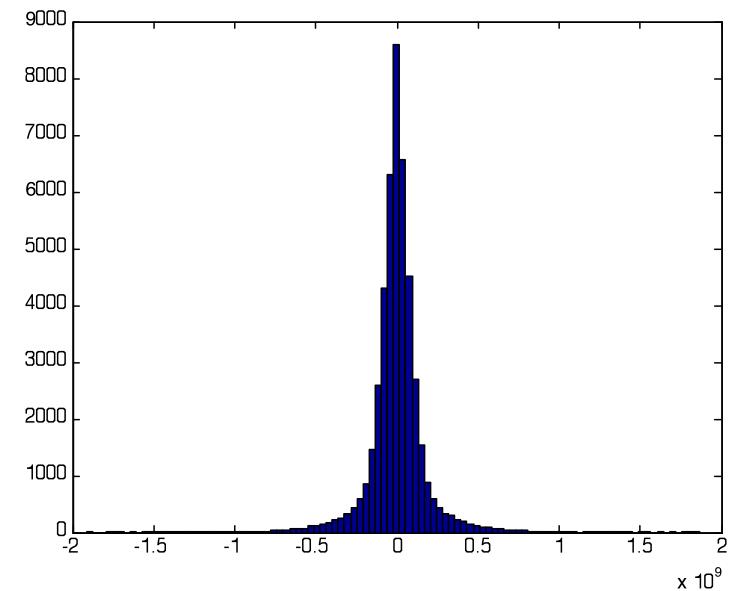
- **Résultats**

Equation de la chaleur avec $\Delta t=1$



10 itérations

Problème de convergence !



Histogramme

2. Equation de la chaleur

- **Propriétés**

Il existe des conditions théoriques sur la valeur de Δt pour assurer la convergence. Ce sont les conditions CFL (Courant-Friedrich-Lowy) : $\Delta t \leq 0.25$

Propriété importante de l'équation de la chaleur :

principe du maximum

$$\min_{x,y} I(x, y) \leq u(x, y, t) \leq \max_{x,y} I(x, y)$$

principe du maximum discret

$$\min_{i,j} I_{i,j} \leq I_{i,j}^n \leq \max_{i,j} I_{i,j}$$

2. Equation de la chaleur

- **Retour sur les aspects numériques**

- Schéma explicite :

$$\frac{1}{\Delta t} \left(I_{i,j}^{n+1} - I_{i,j}^n \right) = -4I_{i,j}^n + I_{i-1,j}^n + I_{i+1,j}^n + I_{i,j-1}^n + I_{i,j+1}^n$$

simple à implémenter MAIS stable pour les **conditions CFL**

- Schéma implicite :

$$\frac{1}{\Delta t} \left(I_{i,j}^{n+1} - I_{i,j}^n \right) = -4I_{i,j}^{n+1} + I_{i-1,j}^{n+1} + I_{i+1,j}^{n+1} + I_{i,j-1}^{n+1} + I_{i,j+1}^{n+1}$$

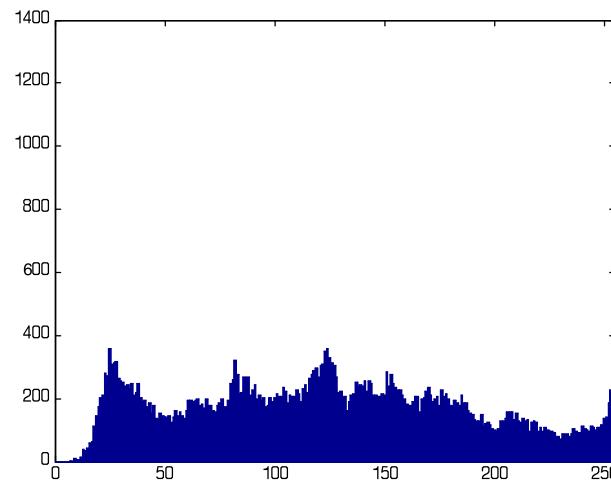
stable **inconditionnellement** MAIS inversion de matrice

2. Equation de la chaleur

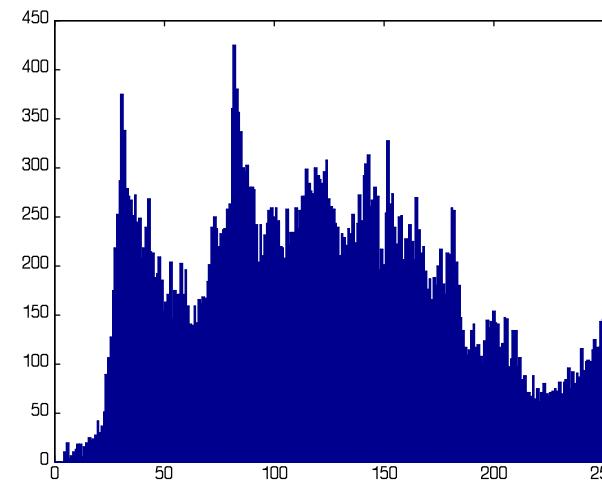
- **Propriétés**

Conséquence du principe du maximum :

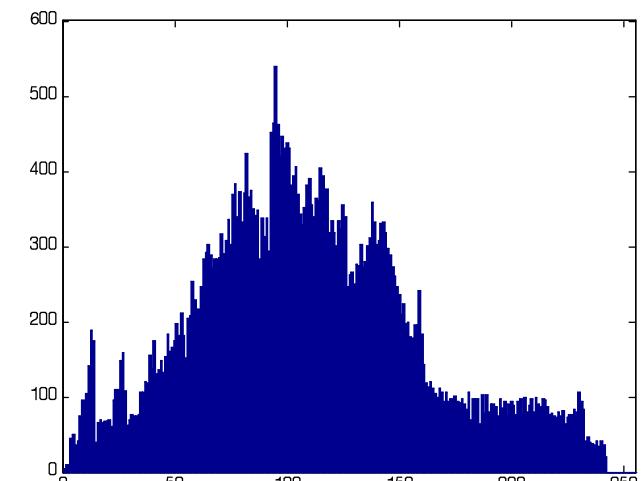
Pas besoin d'égalisation d'histogrammes



10 itérations



50 itérations



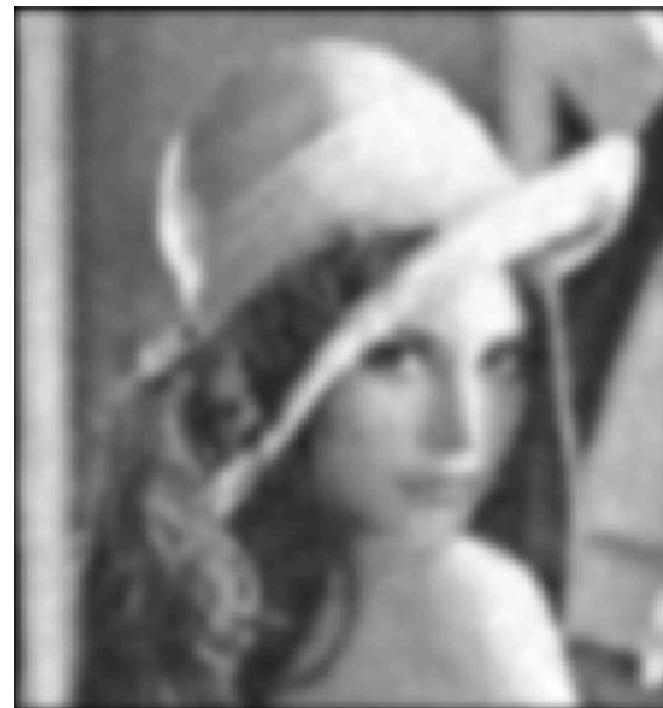
500 itérations

2. Equation de la chaleur

- **Bruit**



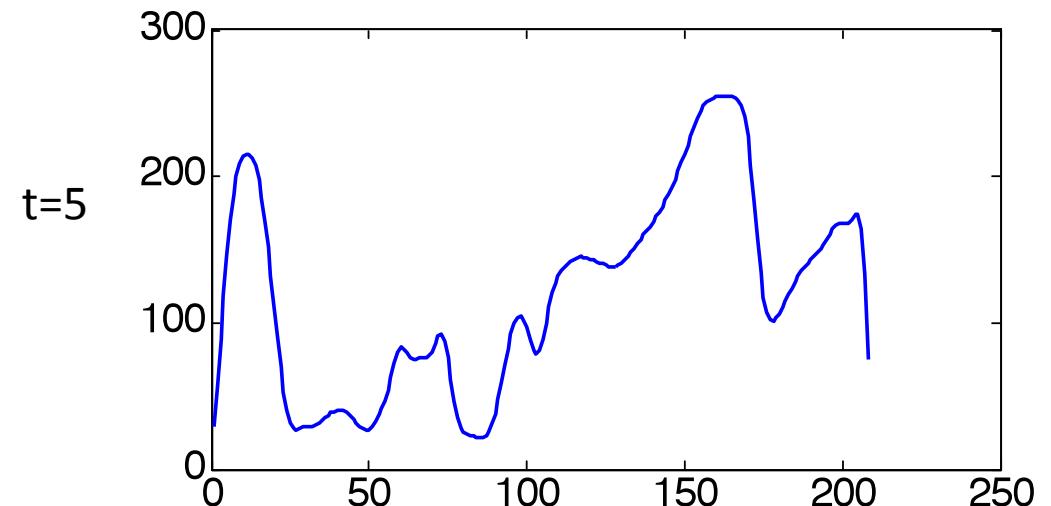
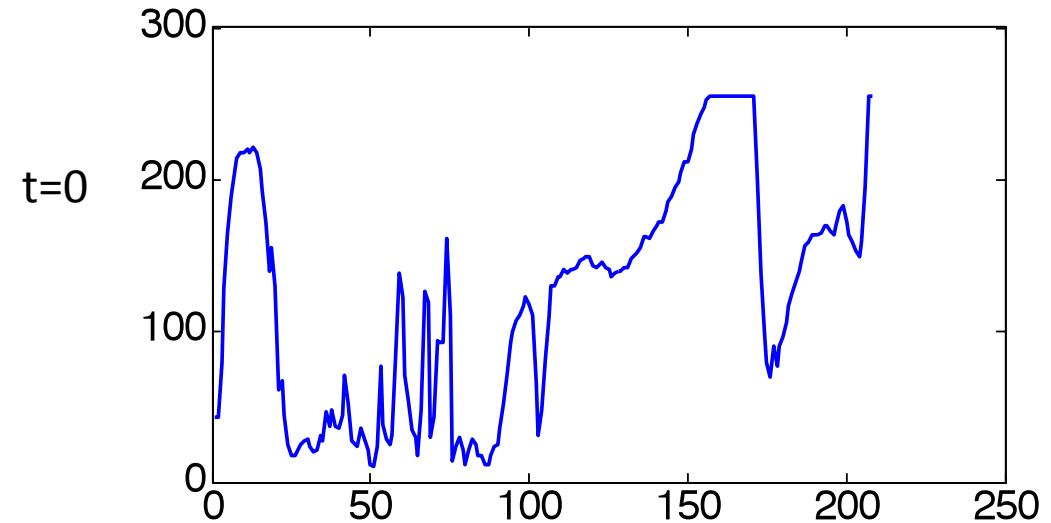
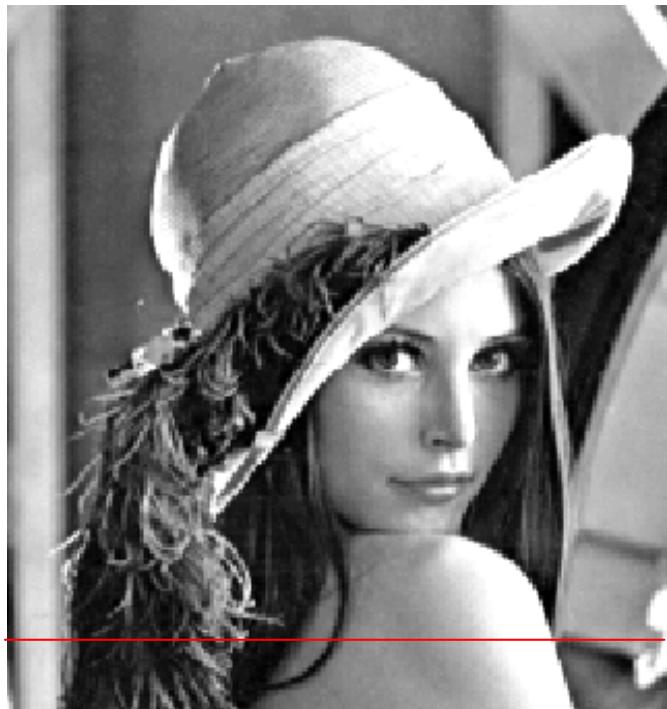
Bruit blanc (amplitude 100)



500 itérations, $\Delta t=0.01$

2. Equation de la chaleur

- **Contours**

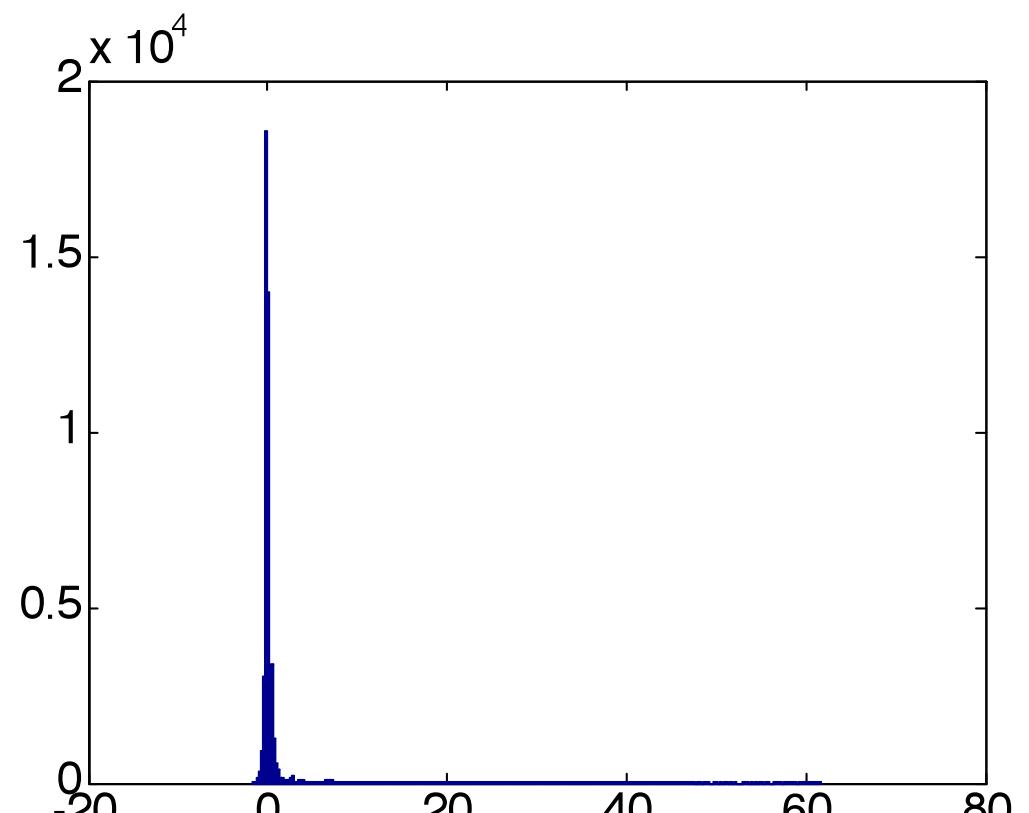


2. Equation de la chaleur

- **Comparaison avec le filtre gaussien**



Image des différences



Histogramme de l'image des différences

2. Equation de la chaleur

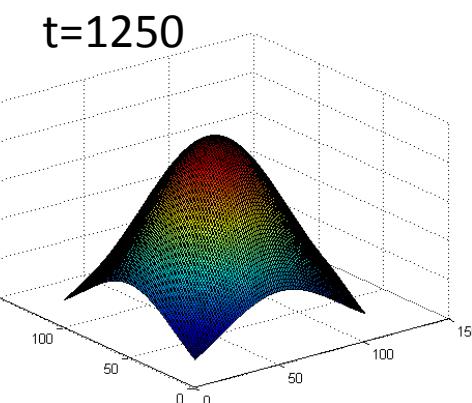
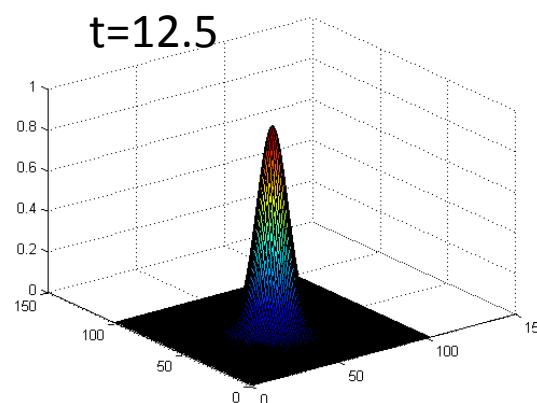
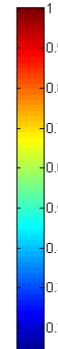
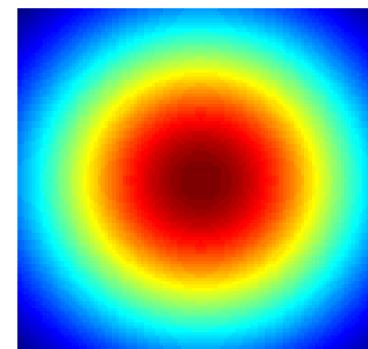
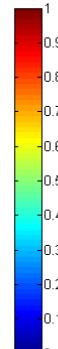
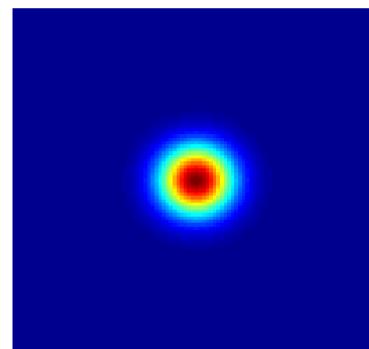
- **Implémentation: précaution importante**
 - 1- Les calculs numériques se font en flottant. L'affichage ensuite considère des entiers. Il faut bien découpler les deux aspects.
 - 2- Il y a une infinité de façon de discréteriser le laplacien continu. Mais les résultats sur les conditions CFL sont garanties avec ce filtre:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

3. Filtre gaussien

- **Le noyau gaussien**

On définit le noyau gaussien G_t par :
$$G_t(x, y) = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}}$$



3. Filtre gaussien

- **Cas général**

Condition initiale donnée par une fonction $I(x,y)$ (ce sera l'image que l'on cherche à traiter)

On définit la convolution de I par le noyau :

$$(G_t * I)(x, y) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \int_{v=-\infty}^{+\infty} I(x - u, y - v) G_t(u, v) du dv$$

On va voir ensuite le lien avec la convolution discrète = filtre

3. Filtre gaussien

- **Cas général**

La fonction $u(x, y, t) = (G_t * I)(x, y)$ est solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$$

Avec la condition initiale $u(x, y, 0) = I(x, y)$

On montre donc une équivalence entre le **filtrage gaussien** et une **évolution par l'équation de la chaleur**.

3. Filtre gaussien

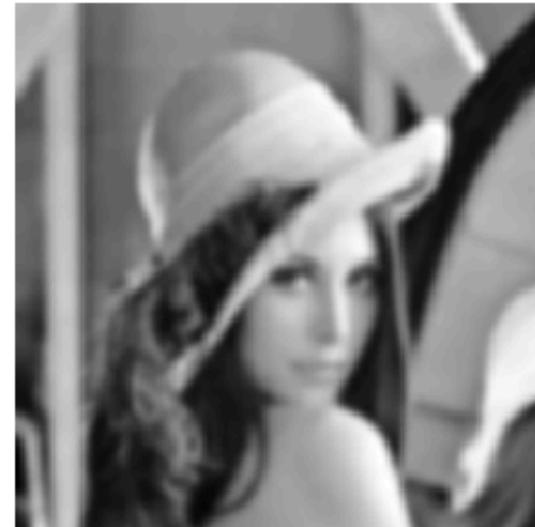
- Structure pyramidale.

On adopte la définition vue avant en prenant $2t$ au lieu de t .
$$G_t(x, y) = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}}$$

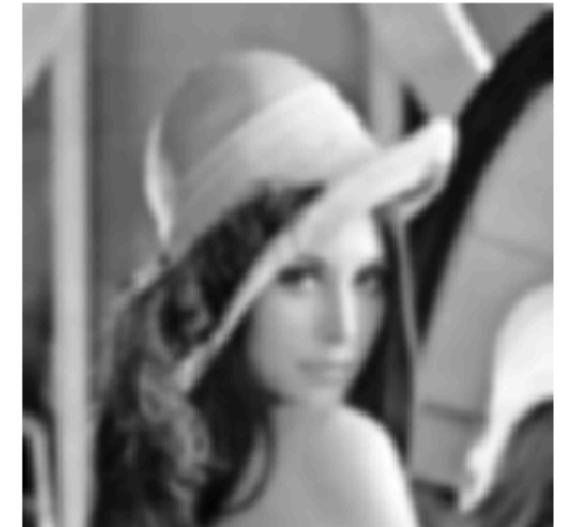
$$G_{t_1} * I$$



$$G_{t_2} * (G_{t_1} * I)$$



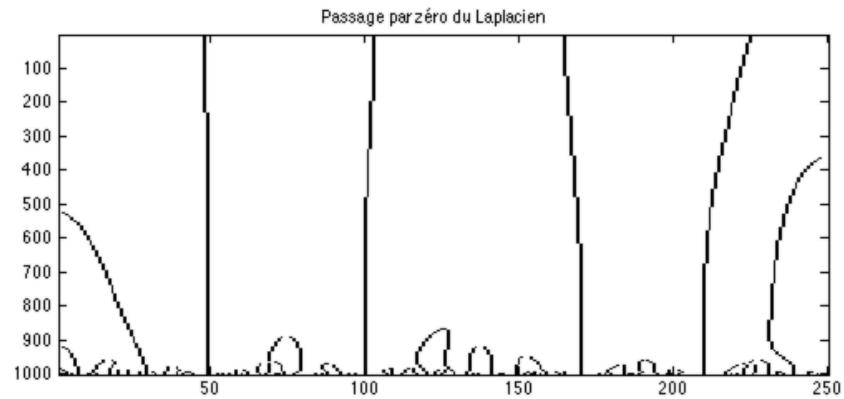
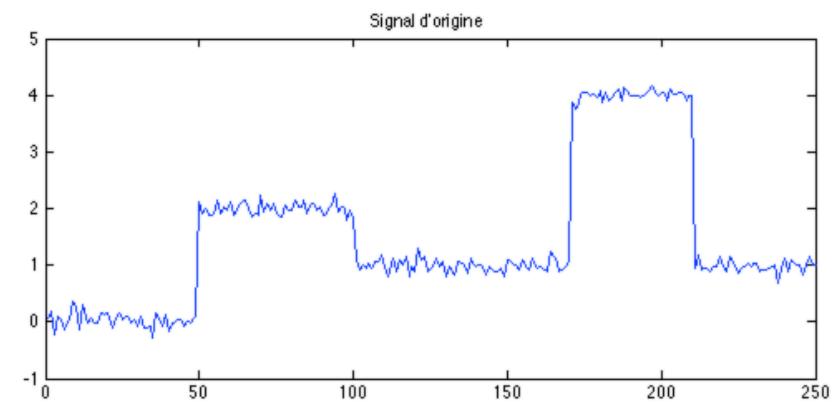
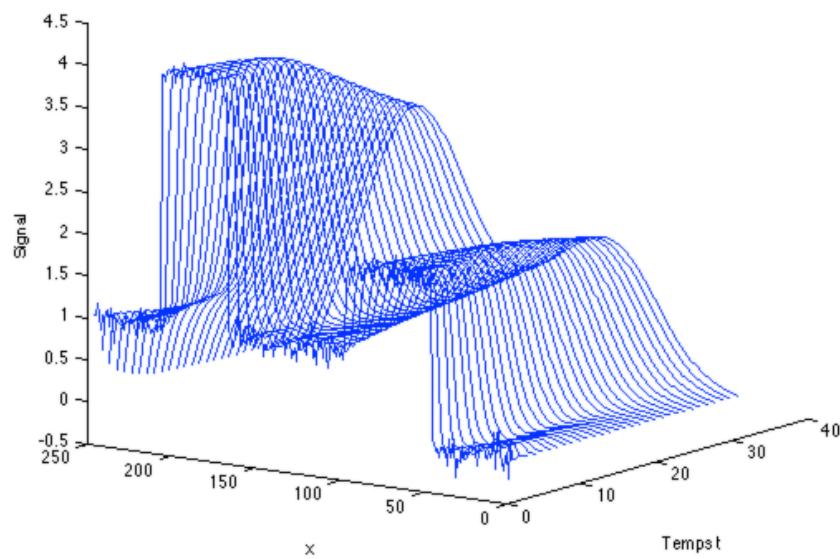
$$G_{t_1+t_2} * I$$



3. Filtre gaussien

- Comparaison locale

Les maxima décroissent, les minima croissent. Uniformisation

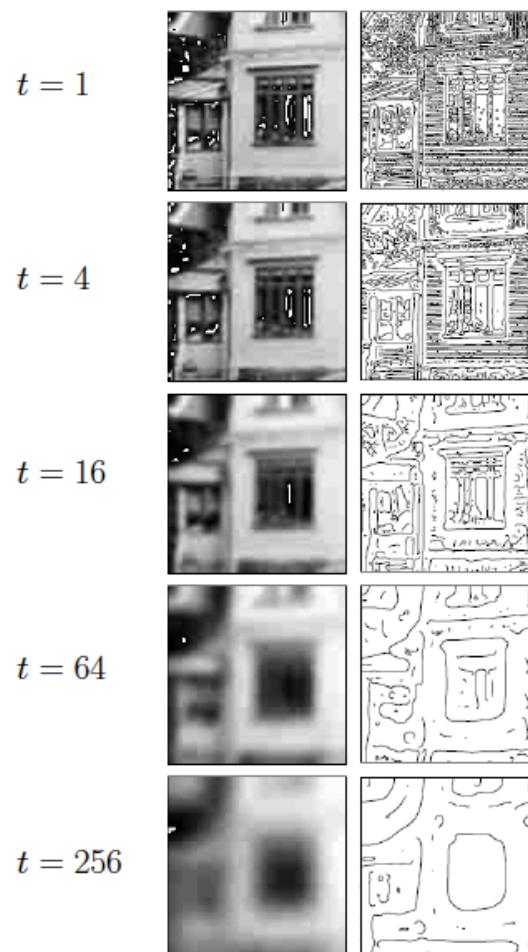


3. Filtre gaussien

- Comparaison locale

De même en 2D mais

- Forte régularisation
- Non-respect de la géométrie de l'image:
Délocalisation, isotropie



3. Filtre gaussien

- **Aspects numériques**

La convolution discrète (par exemple sur une image) s'écrit

$$(G_t * I)(x, y) = \sum_{u=-p}^{+p} \sum_{v=-p}^{+p} I(x - u, y - v) G_t(u, v)$$

On retrouve là une opération de filtrage.

Filtre gaussien de taille 3 ($t=1$) :

0.075	0.124	0.075
0.124	0.204	0.124
0.075	0.124	0.075

Approximé
parfois par

$$\frac{1}{20}$$

1	2	1
2	4	2
1	2	1

3. Filtre gaussien

- **Aspects numériques**

Pour t grand, la taille du filtre doit être choisie correctement.

t représente une variance. On veut en général avoir un support inclus dans $[-3\sigma, 3\sigma]$ donc la taille est de l'ordre de $3\sqrt{t}$

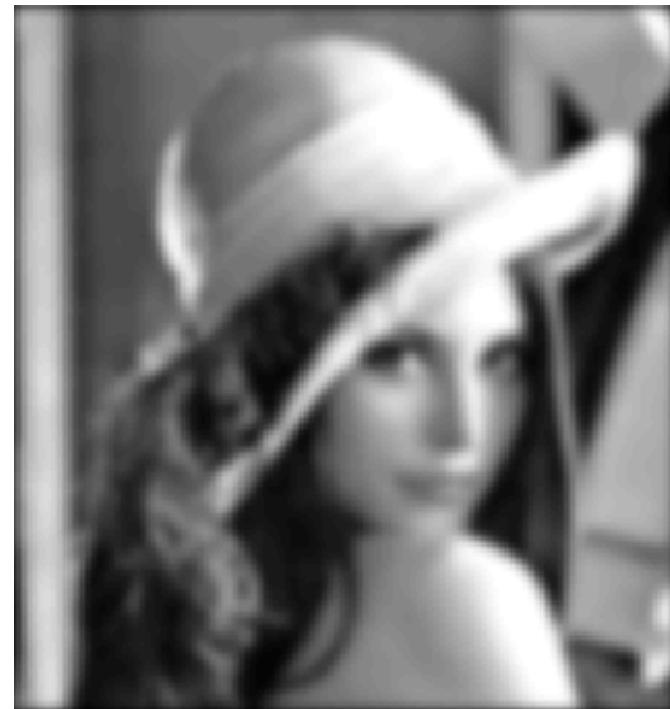
Ne pas oublier de normaliser pour avoir la somme des éléments égale à 1.

3. Filtre gaussien

- **Equation chaleur vs filtre gaussien**



Solution de l'équation de la chaleur
à $t=5$



Convolution avec un noyau 50x50
d'écart type 5

Conclusion

- **Bilan**

- L'équation de la chaleur agit de la même façon qu'un filtre gaussien.
- Diffusion **isotrope**, i.e. invariante dans toutes les directions
- Simple à implémenter
- Calculs rapides $O(\text{taille de l'image} \times \text{itérations})$
- Suppression du bruit
- Fort lissage des contours