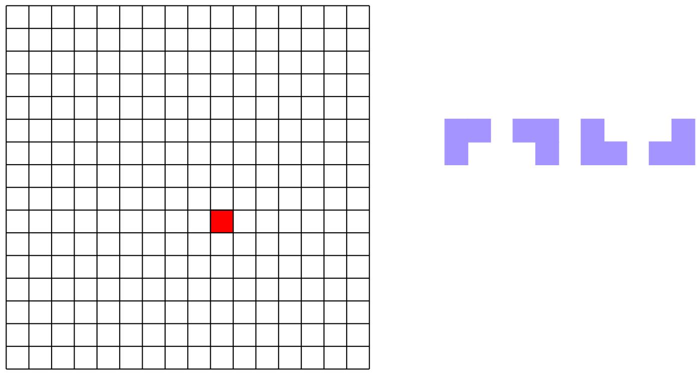
Übung 2

1. **Aufgabe**:

Gegeben sei die in der folgenden Abbildung dargestellte Fläche bestehend aus 16×16 Quadraten. Die Aufgabe ist, die Fläche so mit L-förmigen Kacheln aus 3 Quadraten exakt zu überdecken, dass genau das markierte Quadrat übrig bleibt.

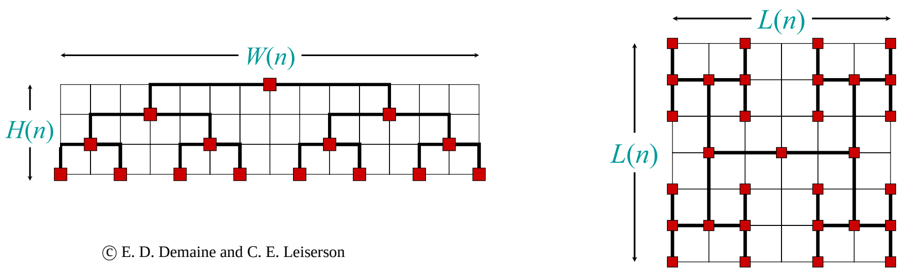


(a) Gibt es eine solche Kachelung?

(b) Betrachten Sie eine Fläche aus $2^n \times 2^n$ Quadraten, $n \geq 1$, bei der genau ein Quadrat markiert ist. Gibt es stets eine Kachelung mit den L-förmigen Kacheln, die alle Quadrate bis auf das markierte exakt überdeckt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

2. **Aufgabe**: VLSI LAYOUT

Wir betrachten ein Problem aus dem VLSI Entwurf. Wir möchten binäre Bäume mit n Blättern möglichst kompakt in ein Gitter einbetten und betrachten die in den beiden folgenden Abbildungen skizzierten rekursiv aufgebauten Einbettungen.



Bestimmen Sie jeweils den Platzbedarf abhängig von n (nehmen Sie an, dass n eine Zweierpotenz bzw. eine Viererpotenz ist), indem Sie Rekursionsgleichungen für die benötigten Seitenlängen angeben und diese lösen.

3. **Aufgabe**:

Benutzen Sie das Mastertheorem, um möglichst gute asymptotische Schranken für folgende Rekursionen anzugeben. Für $n \leq 10$ gelte $T(n) = \Theta(1)$.

(a) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$ (b) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$ (c) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3$

4. **Aufgabe**:

   Geben Sie asymptotische obere Schranken für $T(n)$ an, wenn $T(n)$ durch die folgenden Rekursionsgleichungen gegeben ist. Für $n \leq 10$ gelte $T(n) = \Theta(1)$. Geben Sie möglichst scharfe Schranken an und begründen Sie ihre Antworten.

   (a) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n \log n$
   (b) $T(n) = 3T(\frac{n}{5}) + (\log n)^2$
   (c) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 2^n$
   (d) $T(n) = 10T(\frac{n}{3}) + 17n^{1.2}$
   (e) $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^3$

5. **Aufgabe**:

   Benutzen Sie einen Rekursionsbaum, um eine möglichst gute asymptotische untere Schranke für die Funktion $T(n)$ abzuleiten, welche durch folgende Rekursion gegeben ist:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n < 9 \\ T(\frac{n}{5}) + T(\frac{4n}{5}) + n \log n & n \geq 9 \end{cases}$$