Vorlesung 10(?) 10.1.20

BCC eines ungerichteten zusammenhängenden Graphen G=(V,E)
- Brücke - Artikulationspunkt
- BCC

Partition der Kantenmenge E,
$e_1 \sim e_2$ g.d.w es gibt einfachen Kreis C_s, der e_1 und e_2 enthält, oder $e_1 = e_2$

BCC := Äquivalenzklassen bzgl. ~

Zyklus: Teilgraph, jeder Knoten hat geraden Grad
Zyklenraum: $\mathbb{Z}_{\not\simeq}$-Vektorraum
T aufspannender Baum von G.
Fundamentalzyklus bzgl. T besteht aus einer Kante $e \in G - T$(e kommt also in dem aufspannenden Baum nicht vor.)
und dem einfachen Pfad in T, der die Endknoten von e verbindet.
Fundamentalzyklen bzgl. T bilden Basis des Zyklenraums

Wähle Wurzel in T (beliebig)
Elternrelation bzgl. T
Für v $\in V$ bezeichne p(v) den Elternknoten, für die Wurzel sei p(v) = NULL.

Relation R':
$e_1 R' e_2$ g.d.w. $e_1 = e_2$ oder es gibt einen Fundamentalzyklus, (bzgl. T), der beide Kanten e_1, e_2 enthält.

Lemma: $e_1 \sim e_2$ g.d.w $e_1 (R')^* e_2$

zu zeigen:

1. $e_1 \sim e_2 \rightarrow e_1 (R')^* e_2$
2. $e_1 (R')^* e_2 \rightarrow e_1 \sim e_2$

- a $e_1 = e_2$
  - $e_1 \sim e_2 => e_1 R' e_2 => e_1 (R')^* e_2$
- b $e_1 \neq e_2 =>$ es gibt einfachen Kreis C, der e_1 und e_2 enthält.

Da Fundamentalzyklen Basis sind, gilt $C = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots C_k$
$C_1, \ldots C_k$ Fundamentalzyklen.

Wir dürfen annehmen, dass C_L so nummeriert sind, dass es für alle $C_i, i \geq 2$ eine $C_j, j < i$, gibt, so dass C_i und C_j eine gemeinsame Kante haben, da G zusammenhängend ist. Sonst würden $C_1, \ldots, C_{i-1}$ und $C_i ... C_k$ disjunkte Komponenten ($\rightarrow$ BCC) bilden.

Behauptung:
Falls $e_1, e_2 \in C_1 \cup ... \cup C_l, l = 1..k$ so gilt $e_1 (R')^* e_2$

Induktionsbeweis:
l = 1: $e_1, e_2 \in C_1$, also $eR'e_2$, also $e_1(R')^*e_2$.
Induktionsanfang:
Bed. gelte für $1, ...l-1$. $e_1, e_2 \in C_1 \cup \cdots \cup C_{l-1} \cup C_l$

$e_1, e_2 \in C' => e_1(R')^*e_2$.
$e_1, e_2 \in C_l => e_1R'e_2 => e_1(R')^*e_2$
$e_1 \in C', e_2 \in C_l :$
es gitb $C_j, j \in \{1, .., l-1\}$, so dass C_l und C_j eine gemeinsame Kante e besitzen.

$e_1 \in C', e \in C_j \subseteq C'$
also nach Induktionsanfang:$e_1(R')^*e$

C_l Fundamentalzyklus also $eR'e_2$, also $e(R')^*e_2$

=> Transitivität von $(R')^*$: $e_1(R')^*e_2$

$e_2 \in C', e_1 \in C_l$ analog!

$e_1(R')^*e_2 => e_1 \sim e_2$

Beobachtung: $e_1R'e_2 => e_1 \sim e_2$ sonst: $e_1(R')^*e_2 =>$ es gibt Kanten $e^{(0)}, e^{(1)}, ..., e^{(i)}$, so dass $e_1 = e^{(0)}$
$e_2 = e^{(i)}$
und $e^{(j)}R'e^{(j+1)}, j = 0..i-1$

Also $e^{(j)} \sim e^{(j+1)}$ für j=0,..,i-1 und weil ~transitiv ist, auch $e_1 = e^{(0)} \sim e^{(i)} = e_2$

Es "genügt" also, sich Fundamentalzyklen anzuschauen.

Wir identifizieren Knoten in G mit ihrer PREORDER-Nummer bzgl. des Wurzelbaums T.
Tarjan & Vishkin betrachten weitere Relationen auf Kanten.
$R^{(i)}$
{v,w} $R^{(i)}$ zu {w,p(w)}
falls $\{v, w\} \in G - T$ und v R'$

Kantengraphen:
G' = (E,R') G" = (E,$R^{(ii)} \cup R^{(iii)}$)
Ausdünnen vermeidet quadritsch große Kantenmenge in Kantengraphen. $|R^{(ii)} \cup R^{(iii)}| = O(E)$

Äquivalenzklassen von ~ bzw. (R')*
= Zusammenhangskomponenten von (E,(R')*) z.z Zusammenhangskomponenten von (E,$R^{(i)} \cup R^{(ii)} \cup R^{(iii)}$)