Maturaarbeit
Fraktale Geometrie

Ambros Anrig

12. September 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Unendliche zieht die Menschen schon eh und je an, so ebenfalls mich. Es ist unbeschreiblich, jedoch spielen/rechnen wir damit gerne. Dazu kommt das unsere Technik immer besser und leistungsfähiger wird. Dies spielt sich zu, denn desto mehr Leistung man hat, umso schneller und näher kann man sich der Unendlichkeit angleichen. Ich bin schon seit ich klein bin von komplexeren Mathematischen Vorgängen verwundert, deshalb schaue ich in meiner Freizeit gerne YouTube-Videos über solche. Eines Tages sah ich das Buddha-Brot auf einem Titelbild eins Videos, als ich das dann ansah, verstand ich nichts, es war auf Englisch, so beschäftigte ich mich vorerst nur mit der Mandelbrot-Menge. Erst als ich in der Schule die Fraktalen kennenlernte, verstand ich es besser. Nun mit mehr Erfahrung in der Mathematik und ebenfalls in der Informatik, setzte ich mir zum Ziel ein Zoom reinzurechnen. Jedoch finde ich ein Zoom geht schon, es soll anspruchsvoller sein. So entschloss ich mich die schnellste Methode zu suchen, da das Rendern länger geht als die vom Mandelbrot. Ich werde vorerst versuchen dies rein mathematisch hinzukriegen und nur leichte Hilfe von Programmiertricks nehmen, jedoch würde ich am Schluss es gerne mit einer Methode vergleichen, die auf Optimierung des Codes und vielen Tricks der Informatik beinhaltet, denn dies kann in Kombination das Schnellste sein. Ich werde dies in der Programmiersprache Julia programmieren, eine schnelle und verständlich zu lesende Sprache.

2 Präliminarien

2.1 Komplexe Zahlen

Wenn man mit den Zahlen arbeitet, die jeder kennt aus dem Alltag, bekommt man Probleme, wenn man die Wurzel einer negativen Zahl zieht. Jedoch haben Mathematiker im 16. Jahrhundert eine Lösung dafür entdeckt, indessen wir unseres Zahlensystems erweitern mit dem imaginären Zahlen und mit der imaginären Einheit i. Addieren und Subtrahieren zweier imaginären Zahlen funktioniert genau gleich wie, wenn man mit einer Variabel rechnet, jedoch beim Multiplizieren, Dividieren und beim somit entstehenden Rechnen mit Potenzen muss man aufpassen, denn es gilt für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{4n} &= 1 \\ \mathrm{i}^{4n+1} &= \mathrm{i} \\ \mathrm{i}^{4n+2} &= -1 \\ \mathrm{i}^{4n+3} &= -\mathrm{i} \end{aligned}$$

Dies ist dann zu ersetzen. Hier sieht man gut, dass die imaginären Zahlen zu reellen Zahlen werden können, wie es auch andersrum war. Wenn man nun eine imaginäre Zahl $\mathrm{i}b$ mit einer reellen Zahl a zusammenaddiert, bekommt man eine komplexe Zahl $a + \mathrm{i}b$ mit dem Realteil a und dem Imaginärteil $\mathrm{i}b$. a und b sind hier reelle Zahlen.
Nun merkt man, dass diese Zahl vergleichbar ist mit einem Vektor, denn um die Zahl darstellen zu können benutzt man die 2-Dimensionale komplexe Ebene, daraus schliesst sich das komplexe Zahlen 2-Dimensional sind. Hieraus sieht man, dass beim Multiplizieren und Potenzieren es Wort Wörtlich Komplex wird. Schaut man dies Auf der komplexe Ebene an, fängt der Punkt sich scheinbar unkontrolliert herumspringen, folgt jedoch weiterhin logischen Regeln, beim Quadrieren verschiebt sich der Punkt in die positive Richtung, Gegenuhrzeigersinn. Ebenfalls kann, da die Zahl vergleichbar ist mit einem Vektor, den Absoluten Wert der komplexen Zahl c bestimmt werden:

$$|c| = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$$

2.2 Fraktale Geometrie

2.2.1 Allgemein

Um zum Buddhabrot zu kommen, brauchen wir noch einen weiteren Begriff zu klären, das Fraktal.
Würde bei einem $3n$ grossem Strich der mittlere Teil fehlen, stattdessen den Rest eines gleichseitigen Dreiecks dort stehen, hat man eine Kochkurve. Ich werde man nun in die n grosse Striche die gesamte Kochkurve einfügen, muss man dies ab nun immer wieder machen, sodass es schwer vorstellbar wird. Wenn man jedoch nun in die Kockurve reinzoomt, findet man die Kochkurve immer wieder. Ein rekursives Bild oder eben ein Fraktal. Man definiert nun das Fraktal als eine Figur, bei der sehr oft Selbstähnlichkeit auffindbar ist (das heisst, dass das gesamte Fraktal oder Teile davon mehrfach im Fraktal vorkommen) und das Fraktal selbst eine gebrochene und somit keine ganzzahlige Dimension besitzt.

In der Abbildung 1 ist die Entstehung der Kochkurve zu sehen.

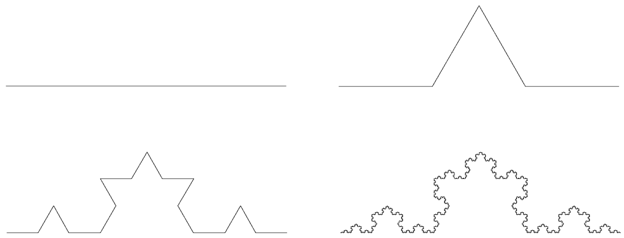

Abbildung 1: Kochkurve

2.2.2 Mandelbrotmenge

Die nach dem Mathematiker Benoît B. Mandelbrot (*20.11.1924; †14.10.2010) bennanten Menge ($\mathbb{M}$), beinhaltet jede Zahl c die nicht bestimmt divergiert im unendlichen für folgende Folge:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 0 \\
z_{n+1} &= z_n^2 + c
\end{aligned}
$$

3 Kapitel 1

So sieht eine Formel im Text aus: $\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$. Und so als „schöne“ Formel:

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

Mit Nummerierung:

$$\int_M \mathrm{d}w = \int_{\delta w} w \tag{1}$$

3.1 Unterkapitel 1

3.2 Unterkapitel 2

3.2.1 UnterUnterKapitel

4 Literaturverzeichnis

[1] Peter Bundschuh, *Einführung in die Zahlentheorie*, Springer, 2008.