Maturaarbeit
Fraktale Geometrie

Ambros Anrig

12. November 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Einleitung ist nicht zu beachten da sie nicht MA gemäss ist, gehen Sie zu den Präliminarien...

Das Unendliche zieht die Menschen schon eh und je an, so ebenfalls mich. Es ist unbeschreiblich, jedoch spielen/rechnen wir damit gerne. Dazu kommt das unsere Technik immer besser und leistungsfähiger wird. Dies spielt sich zu, denn desto mehr Leistung man hat, umso schneller und näher kann man sich der Unendlichkeit angleichen. Ich bin schon seit ich klein bin von komplexeren Mathematischen Vorgängen verwundert, deshalb schaue ich in meiner Freizeit gerne YouTube-Videos über solche. Eines Tages sah ich das Buddha-Brot auf einem Titelbild eins Videos, als ich das dann ansah, verstand ich nichts, es war auf Englisch, so beschäftigte ich mich vorerst nur mit der Mandelbrot-Menge. Erst als ich in der Schule die Fraktalen kennenlernte, verstand ich es besser. Nun mit mehr Erfahrung in der Mathematik und ebenfalls in der Informatik, setzte ich mir zum Ziel ein Zoom reinzurechnen. Jedoch finde ich ein Zoom geht schon, es soll anspruchsvoller sein. So entschloss ich mich die schnellste Methode zu suchen, da das Rendern länger geht als die vom Mandelbrot. Ich werde vorerst versuchen dies rein mathematisch hinzukriegen und nur leichte Hilfe von Programmiertricks nehmen, jedoch würde ich am Schluss es gerne mit einer Methode vergleichen, die auf Optimierung des Codes und vielen Tricks der Informatik beinhaltet, denn dies kann in Kombination das Schnellste sein. Ich werde dies in der Programmiersprache Julia programmieren, eine schnelle und verständlich zu lesende Sprache.

2 Präliminarien

2.1 Komplexe Zahlen

Wenn man mit den reelen Zahlen arbeitet, bekommt man Probleme, wenn man die Wurzel aus einer negativen Zahl zieht. Jedoch haben Mathematiker im 16. Jahrhundert eine Lösung dafür entdeckt, indem wir unseres Zahlensystems mit den imaginären Zahlen, die die imaginären Einheit i haben, erweitern. Addieren und Subtrahieren zweier imaginären Zahlen funktioniert genau gleich, wie wenn man mit einer Variabel rechnet. Dies heisst, dass man das i wie ein x beim Formeln vereinfachen behandeln kann. Jedoch beim Multiplizieren, Dividieren und beim somit entstehenden Rechnen mit Potenzen muss man aufpassen, denn es gilt für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{4n} &= 1 \\ \mathrm{i}^{4n+1} &= \mathrm{i} \\ \mathrm{i}^{4n+2} &= -1 \\ \mathrm{i}^{4n+3} &= -\mathrm{i} \end{aligned}$$

Dies ist dann zu ersetzen. Hier sieht man gut, dass man die Verknüpfung der imaginären Zahlen reel sein kann, wie es auch andersrum war. Wenn man nun eine imaginäre Zahl ib mit einer reellen Zahl a zusammenaddiert, bekommt man eine komplexe Zahl $c = a + ib$ mit dem Realteil a und dem Imaginärteil ib. a und b sind hier reelle Zahlen. Beim Addieren für die Komplexe Zahlen $z = a + \mathrm{i}b$ und $w = e + \mathrm{i}f$

$$\begin{gathered} z + w \\ a + \mathrm{i}b + e + \mathrm{i}f \\ a + e + (b + f)\mathrm{i} \end{gathered}$$

Nun merkt man, dass diese Zahl vergleichbar ist mit einem Vektor, denn um die Zahl darstellen zu können benutzt man die 2-Dimensionale komplexe Ebene, daraus schliesst sich das komplexe Zahlen 2-Dimensional sind. Schaut man dies in der komplexe Ebene an, fängt der Punkt sich scheinbar unkontrolliert herumspringen, folgt jedoch weiterhin logischen Regeln, beim Quadrieren verschiebt sich der Punkt in die positive Richtung, Gegenuhrzeigersinn. Ebenfalls kann, da die Zahl vergleichbar ist mit einem Vektor, den Absoluten Wert der komplexen Zahl c bestimmt werden:

$$|c| = |a + \mathrm{i}b| = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$$

2.2 Fraktale Geometrie

2.2.1 Allgemein

Um zum Buddhabrot zu kommen, müssen wir noch einen weiteren Begriff klären, das Fraktal. Würde bei einem $3n$ grossem Strich der mittlere Teil fehlen, stattdessen den Rest eines gleichseitigen Dreiecks dort stehen, hat man die erste Iteration einer Kochkurve. Ich werde man nun in die n grosse Striche die gesamte Kochkurve einfügen, muss man dies ab nun immer wieder machen, sodass es schwer vorstellbar wird. Wenn man jedoch nun in die Kockurve reinzoomt, findet man die Kochkurve immer wieder. Ein rekursives Bild oder eben ein Fraktal. Man definiert nun das Fraktal als eine Figur, bei der sehr oft Selbstähnlichkeit auffindbar ist (das heisst, dass das gesamte Fraktal oder Teile davon mehrfach im Fraktal vorkommen) und das Fraktal selbst eine gebrochene und somit keine ganzzahlige Dimension besitzt.

In der Abbildung 1 ist die Entstehung der Kochkurve zu sehen.

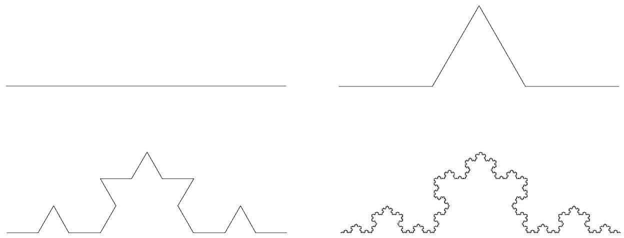

Abbildung 1: Kochkurve

2.2.2 Mandelbrotmenge

Die nach dem Mathematiker Benoît B. Mandelbrot (*20.11.1924; †14.10.2010) bennanten Menge ($\mathbb{M}$), beinhaltet jede Zahl c die nicht bestimmt divergiert im unendlichen für folgende Folge:

$$z_0 = 0$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

2.2.3 Buddhabrotmenge

3 Methode

3.1 Allgemeines Rechnen

Um diese Bilder zu generieren wurde mit der Programmiersprache Julia eine 2-Dimensionale Matrix erstell, bei dem jeder Wert der Matrix zu einem Pixel zugehört. Zuerst muss man jedoch wissen welche Punkte man iterieren muss, so rechnet man zuerst das Mandelbrot aus. Um Speicherplatz zu sparen, ordnet man ihnen die Werte 0 und 1 zu: 1 gehört nicht der Mandelbrotmenge an, 0 gehört der Mandelbrotmenge an. Alle Punkte, die ins Unendliche divergieren, werden nochmals iteriert, nun wird geschaut wo die Punkte durchgehen, am Ende wird geschaut, welcher Punkt die meisten treffer bekam, den dieser Wert braucht man um die Grauabstufung zu machen. Wie man sicher schon merkt, muss mal 3 Mal die riesige Matrix durchgehen und auch 2-Mal iterieren. Dies ist somit sehr rechenaufwändig im Vergleich zur Mandelbrotmenge bei der nur ein durchlauf nötig wäre.

3.2 Erstellen eines ersten Zoom

Hier wurde für den Zoom eine riesige Matrix , welches der Zoom im Quadrat so gross ist wie das erwartene Bild, erstellt mit all den Werten drin, die man braucht. Dann wurde der Teil ausgewählt, denn man haben möchte und lässt den Zeichen. Ein 16-Facher Zoom ist nicht mehr möglich, da die Matrix so gross wird, dass es nicht genügend RAM freiräumen kann. Ebenfalls dauert es dann schnell mal viel Zeit, ein 12-Facher Zoom, mit der Auflösung 4'001 auf 2'667 Pixel, zum Punk -1.25, dauerte etwa 45.6h. So wurde der Code folgend optimiert; Es wurde CUDA.jl hinzugefügt, um so mehrere Punkte gleichzeitig rechnen zu lassen. Dadurch das nun auf der Grafikkarte gerechnet wird, hat man weniger Speicherplatz zur Verfügung. Man kann nun nurnoch einen 6.5-Facher Zoom machen. Dies ist eigentlich egal, denn es geht ja drum die Rechenleistung zu verringern und einen Allfälliger Allgorythmus zu finden. Das gleiche Programm, ein 1-Facher Zoom, dauert nun anstellen von 3h nurnoch 2min.

3.3 Analyse

Da die Buddhabrotmenge als chaotisches System gilt, versucht man im Chaos ein muster zu finden. Als erstes wurde geschaut, ob ein gegebener Bereich einen überwiegender Einfluss hat auf einen Bereich, als die anderen Bereichen oder auch markant keinen Einfluss. So könnte man in einem Zoom, nurnoch den Bereich anschauen oder eben nicht. Dies wurde einfach bewertsteligt, indessen man Bilder erstellte, die zeigten wie sich Punkte aus den Bereichen iterierten. Zuerst wurden die 4 Quadranten als Startbereiche gewählt. Man merkt nun, dass die Bereiche eindeutiger Einfluss erheben.

Als zweites wurde noch zusätzlich die Überlegung gemacht, dass der absolute Wert von c ebenfalls einen Einfluss haben könnte, wie wenn der kleiner als 1 wäre. Dies wurde getestet und es zeigte sich das bei $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1 \ \& \ 1 >= \mathrm{Re}(z) >= 0 \ \& \ -1 <= \mathrm{Im}(z) <= 1\}$

4 Kapitel 1

So sieht eine Formel im Text aus: $\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$. Und so als „schöne“ Formel:

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

Mit Nummerierung:

$$\int_M \mathrm{d}w = \int_{\delta w} w \tag{1}$$

4.1 Unterkapitel 1

4.2 Unterkapitel 2

4.2.1 UnterUnterKapitel

5 Literaturverzeichnis

[1] Peter Bundschuh, *Einführung in die Zahlentheorie*, Springer, 2008.