Maturaarbeit
Zoom in das Buddhabrot

Ambros Anrig

28. November 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Einleitung ist nicht zu beachten da sie nicht MA gemäss ist, gehen Sie zu den Präliminarien...

Das Unendliche zieht die Menschen schon eh und je an, so ebenfalls mich. Es ist unbeschreiblich, jedoch spielen/rechnen wir damit gerne. Dazu kommt das unsere Technik immer besser und leistungsfähiger wird. Dies spielt sich zu, denn desto mehr Leistung man hat, umso schneller und näher kann man sich der Unendlichkeit angleichen. Ich bin schon seit ich klein bin von komplexeren Mathematischen Vorgängen verwundert, deshalb schaue ich in meiner Freizeit gerne YouTube-Videos über solche. Eines Tages sah ich das Buddha-Brot auf einem Titelbild eins Videos, als ich das dann ansah, verstand ich nichts, es war auf Englisch, so beschäftigte ich mich vorerst nur mit der Mandelbrot-Menge. Erst als ich in der Schule die Fraktalen kennenlernte, verstand ich es besser. Nun mit mehr Erfahrung in der Mathematik und ebenfalls in der Informatik, setzte ich mir zum Ziel ein Zoom reinzurechnen. Jedoch finde ich ein Zoom geht schon, es soll anspruchsvoller sein. So entschloss ich mich die schnellste Methode zu suchen, da das Rendern länger geht als die vom Mandelbrot. Ich werde vorerst versuchen dies rein mathematisch hinzukriegen und nur leichte Hilfe von Programmiertricks nehmen, jedoch würde ich am Schluss es gerne mit einer Methode vergleichen, die auf Optimierung des Codes und vielen Tricks der Informatik beinhaltet, denn dies kann in Kombination das Schnellste sein. Ich werde dies in der Programmiersprache Julia programmieren, eine schnelle und verständlich zu lesende Sprache.

2 Präliminarien

2.1 Komplexe Zahlen

Wenn man mit den reelen Zahlen arbeitet, bekommt man Probleme, wenn man die Wurzel aus einer negativen Zahl zieht. Jedoch haben Mathematiker im 16. Jahrhundert eine Lösung dafür entdeckt, indem wir unser Zahlensystem mit den imaginären Zahlen, die die imaginären Einheit i haben, erweitern. Addieren und Subtrahieren zweier imaginären Zahlen funktioniert genau gleich, wie wenn man mit einer Variabel rechnet. Dies heisst, dass man das i wie ein x beim Formeln vereinfachen behandeln kann. Jedoch beim Multiplizieren, Dividieren und beim somit entstehenden Rechnen mit Potenzen muss man aufpassen, denn es gilt für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{4n} &= 1 \\ \mathrm{i}^{4n+1} &= \mathrm{i} \\ \mathrm{i}^{4n+2} &= -1 \\ \mathrm{i}^{4n+3} &= -\mathrm{i} \end{aligned}$$

Hat man einer der Fälle, ist dies dann zu ersetzen. Hier sieht man gut, dass man die Verknüpfung der imaginären Zahlen reel sein kann, wie es auch andersrum war. Wenn man nun eine imaginäre Zahl ib mit einer reellen Zahl a zusammenaddiert, bekommt man eine komplexe Zahl $c = a + \mathrm{i}b$ mit dem Realteil a und dem Imaginärteil ib. a und b sind hier reelle Zahlen. Beim Addieren für die Komplexe Zahlen $z = a + \mathrm{i}b$ und $w = e + \mathrm{i}f$

$$z + w$$

$$a + \mathrm{i}b + e + \mathrm{i}f$$

$$a + e + (b + f)\mathrm{i}$$

Nun merkt man, dass diese Zahl mit einem Vektor vergleichbar ist, denn um die Zahl darstellen zu können benutzt man die 2-Dimensionale komplexe Ebene (Mathematik: Die faszinierende Welt der Zahlen 2015, S. 144). Daraus schliesst sich, dass komplexe Zahlen 2-Dimensional sind. Schaut man dies in der komplexe Ebene an, fängt der Punkt an, sich scheinbar unkontrolliert herumspringen, folgt jedoch weiterhin logischen Regeln, beim Quadrieren verschiebt sich der Punkt in die positive Drehrichtung(Gegenuhrzeigersinn). Ebenfalls kann, da die Zahl vergleichbar mit einem Vektor ist, den absoluten Betrag der komplexen Zahl c bestimmt werden, welcher mit dem Pythagoras berechnet wird (Ein Weg zur fraktalen Geometrie 1989,S. 22):

$$|c| = |a + \mathrm{i}b| = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$$

2.2 Fraktale Geometrie

2.2.1 Allgemein

Um zum Buddhabrot zu kommen, müssen wir noch einen weiteren Begriff klären, das Fraktal. Würde bei einem $3n$ grossem Strich der mittlere Teil fehlen, stattdessen der Rest eines gleichseitigen Dreiecks dort stehen, hätte man die erste Iteration einer Kochkurve. Würde man nun in die n grosse Striche die gesamte Kochkurve einfügen, muss man dies ab nun immer wieder machen, sodass es schwer vorstellbar wird. Wenn man jedoch in die Kockurve reinzoomt, findet man die Kochkurve immer wieder: ein rekursives Bild oder eben ein Fraktal. Man definiert nun das Fraktal als eine Figur, bei der sehr oft Selbstähnlichkeit auffindbar ist, dass heisst, dass das gesamte Fraktal oder Teile davon mehrfach im Fraktal vorkommen und das Fraktal selbst eine gebrochene und somit keine ganzzahlige Dimension besitzt.

In der Abbildung 1 ist die Entstehung der Kochkurve zu sehen.

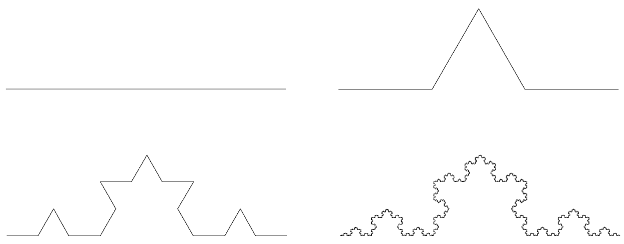

Abbildung 1: Kochkurve

2.2.2 Mandelbrotmenge

Die nach dem Mathematiker Benoît B. Mandelbrot (*20.11.1924; †14.10.2010) bennante Menge ($\mathbb{M}$) beinhaltet jede Zahl c die nicht gegen ∞ divergiert für folgende Folge:

$$z_0 = 0$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Man fand heraus, dass wenn $|z_n| > |c|$ oder $|z_n| > 2$ gilt, wird die Folge gegen ∞ divergieren.
Das erstellte Bild, mit ein bisschen Farbe jenachdem dazu, ergibt es ein sehr schönes Gebilde, dass den deutschprachigen Leute an einem 'Apfelmännchen' errinerte, weshalb es so auch genannt wird. Denn es sieht so aus, als ob mehrere Äpfel aufeinander gestapellt sind.
Das $\mathbb{M}$ ist selbstähnlich. Man findet das erst gesehen Bild der Menge beim reinzoomen immer wieder, somit ist es eine Art Fraktal. Ebenfalls findet man immer wieder mal verschiedene Julia Mengen mit dem Zugehörigem c. Diese sind ebenfalls Fraktale und sehen dazu auch noch für die Norm der Menschheit schön aus. $\mathbb{M}$ besitzt durch die vorgegebene Formel ein chaotisches System.
All dies führte dazu, dass es einige YouTube-Viedeos gab, die einen Zoom in die Menge zeigen, welche auch viel Rechenleistung brauchen.

2.2.3 Buddhabrotmenge

Schaut man den Namen als Erstes an, wird gemerkt, dass das Wort Buddha vom meditierendem Buddha kommt, den dieser ist in der Menge ersichtlich. Ebenfalls das Wort Brot fällt auf, dies ist eine Andeutung, dass diese Menge etwas mit dem Mandelbrot zu tun hat.
Das Abbild entseht indessen mand nochmals das Mandelbrot berechnet, jedoch nur die Punkte, die bei der Mandelbrotberechnung gegen die ∞ divergieren. Nun wird auch nicht mehr geschaut nach wievielen Schritten es ins unendliche abdriftet, sondern bei welchen Punkten es nach jeder Iteration landet.
Ebenfalls durch das chaotische System von $\mathbb{M}$ und die fraktalen und selbstähnlichen Eigenschaften der Buddhabrotmenge ist ein Zoom ebenfalls intressant.

3 Methode

3.1 Allgemeines Rechnen

Um Bilder vom Buddhabrot zu generieren wurde mit der Programmiersprache Julia eine 2-Dimensionale Matrix erstellt, bei dem jeder Wert der Matrix zu einem Pixel zugehört. Zuerst muss man jedoch wissen, welche Punkte man iterieren muss, so rechnet man zuerst das Mandelbrot aus. Um Speicherplatz zu sparen, ordnet man ihnen die Werte 0 und 1 zu: 1 gehört nicht der Mandelbrotmenge an, 0 gehört der Mandelbrotmenge an. Alle Punkte, die ins Unendliche divergieren, werden nochmals iteriert, nun wird geschaut wo die Punkte durchgehen. Am Ende wird geschaut, welcher Punkt die meisten Treffer bekam, den dieser Wert braucht man um die Grauabstufung zu machen. Wie man sicher schon merkt, muss mal 3 Mal die riesige Matrix durchgehen und auch 2-Mal iterieren. Dies ist somit im Vergleich zur Mandelbrotmenge sehr rechenaufwändig bei der nur ein Durchlauf nötig wäre.

3.2 Erstellen eines ersten Zoom

Beim ersten Ansatz wurde für den Zoom eine riesige Matrix, welche der Zoom im Quadrat so gross ist wie das erwartene Bild, erstellt mit all den Werten drin, die man braucht. Dann wurde der Teil ausgewählt, den man haben möchte und lässt den Zeichnen. Ein 16-Facher Zoom ist nicht mehr möglich, da die Matrix so gross wird, dass es nicht genügend RAM freiräumen kann. Ebenfalls dauert es dann schnell mal viel Zeit, ein 12-facher Zoom, mit der Auflösung 4'001 auf 2'667 Pixel, zum Punk -1.25, dauerte etwa 45.6h. So wurde der Code folgender weise optimiert: Es wurde CUDA.jl hinzugefügt, um so mehrere Punkte gleichzeitig rechnen zu lassen. Dadurch, dass nun auf der Grafikkarte gerechnet wird, hat man weniger Speicherplatz zur Verfügung. Man kann nur noch einen 6.5-fachen Zoom machen. Dies ist eigentlich egal, denn es geht ja darum, die Rechenleistung zu verringern und einen Allfälliger Allgorythmus zu finden. Das gleiche Programm, ein 1-facher Zoom, dauert nun anstelle von 3 Stunden nurnoch 2 Minuten.

3.3 Analyse

Da die Buddhabrotmenge als chaotisches System gilt, versucht man im Chaos ein Muster zu finden. Als erstes wurde geschaut, ob ein gegebener Bereich einen überwiegender Einfluss hat auf einen Bereich, als die anderen Bereichen oder auch markant keinen Einfluss. So könnte man in einem Zoom, nur noch diesen Bereich anschauen oder eben nicht. Dies wurde einfach bewertstelligt, indessen man Bilder erstellte, die zeigten, wie sich Punkte aus diesen Bereichen iterierten. Zuerst wurden die 4 Quadranten als Startbereiche gewählt. Man merkt nun, dass die Bereiche eindeutigen Einfluss erheben.

Als zweites wurde noch zusätzlich die Überlegung gemacht, dass der absolute Wert von c ebenfalls einen Einfluss haben könnte, wie wenn der kleiner als 1 wäre. Dies wurde getestet und es zeigte sich das vom Bereich $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1 \; \& \; 1 >= \mathrm{Re}(z) >= 0 \; \& \; -1 <= \mathrm{Im}(z) <= 1\}$ nur ein maximaler Treffer von 4 erreicht wird. Somit kann dieser Bereich vernachlässigt werden in der Berechnung, da 4 von in der Norm 69 Maximum sehr wenig ist und vor allem der Beinflusste Bereich nicht wirklich erkenntlich ist beim Anblick des Buddhabrotes.

3.4 Analyseergebnisse ins Programm Implementieren

Dazu wurde geschaut in welchen Bereichen auf den Analysenbilder es Schwarz ist oder nur ein Treffer gezeigt wird. Danach wurde diese Fläche zu einer Funktion umgewandelt. Mit dieser wird geschaut, ob der massgebende Eckpunkt des Zoomsbereich in der Fläche ist.

4 Kapitel 1

So sieht eine Formel im Text aus: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Und so als „schöne“ Formel:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Mit Nummerierung:

$$\int_M \mathrm{d}w = \int_{\delta w} w \tag{1}$$

4.1 Unterkapitel 1

4.2 Unterkapitel 2

4.2.1 UnterUnterKapitel

5 Literaturverzeichnis

[1] Reinhart Behr, *Ein Weg zur fraktalen Geometrie*, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart.

[2] Bertram Maurer, *Mathematik: Die faszinierende Welt der Zahlen*, Fackelträger Verlag GmbH, Köln, Emil-Hoffmann-Strasse 1, D-50996 Köln, 2015.