

令和元年度 物質工学科 準学士論文

## 研究テーマ

Development of geodesic solver and analysis of  
stellar orbits in a black hole spacetime

学籍番号 15438 22 期生

応用数理科学研究室

物質工学科 5 年 32 番 森 楓

令和 2 年 1 月 24 日 (金)

指導教員 (主査): 高橋 労太 教授

副査: 平野 博人 教授

## Abstract

The purpose of this study is to analyze the stellar orbits in a black hole spacetime observed by a distant observer. In order to achieve this purpose, we first develop numerical code to solve the geodesic equation in Schwarzschild spacetime. In this code, ordinary differential equation is solved by the Runge-Kutta-Gill method and the trajectory of an object with a finite mass is calculated around a black hole under the approximation that the effect of relativity is negligible. In addition, we obtain the relativistic trajectory projected on the celestial sphere of the distant observer located at an arbitrary angle. Finally, we determine the line-of-sight velocity of the object which enable us to reconstruct the stellar orbit in three-dimensional space.

# 目次

第 1 章	緒言	3
1.1	相対性理論の概要	3
1.2	研究背景	3
第 2 章	相対性理論の基礎	7
2.1	特殊相対性理論	7
2.2	一般相対性理論	11
第 3 章	ニュートン力学での惑星楕円軌道	25
3.1	中心力場での運動	25
3.2	惑星の楕円軌道	26
3.3	3 次元空間内の質点の楕円軌道	29
3.4	遠方観測者の天球面に射影した軌道	30
第 4 章	一般相対性理論での惑星軌道	32
4.1	保存量	32
4.2	動径方程式	34
4.3	ニュートン力学との対応	34
4.4	軌道の方程式	36
4.5	相対論効果が小さい場合の軌道の方程式	37
4.6	近日点移動	40
4.7	3 次元空間内の質点の相対論的軌道と速度ベクトル	41
4.8	遠方観測者の点球面に投影した相対論的軌道	43
第 5 章	常微分方程式の数値解法	45
5.1	オイラー法	45
5.2	ルンゲ・クッタ法	45
5.3	ルンゲ・クッタ・ギル法	46
第 6 章	結果と考察	47
6.1	相対論効果を考慮した惑星軌道の数値シミュレーション	47
6.2	観測者が真上にいるときに見える軌道	47
6.3	観測者の天球面に射影した軌道	49

6.4	観測者への視線方向の速度ベクトル . . . . .	51
第 7 章	結言	52
第 8 章	今後の展望	53
	謝辞	54
	参考文献	55
付録 A	開発環境 . . . . .	55
付録 B	ソースコード . . . . .	56

# 第 1 章

## 緒言

### 1.1 相対性理論の概要

相対性理論は時間と空間についての理論であり、特殊相対性理論と一般相対性理論に大別できる。アインシュタインが特殊相対性理論を発表したのが 1905 年であり、この年は奇跡の年と呼ばれる。彼は同じ年に光電効果とブラウン運動についての論文も発表し、現代科学の発展に大きく貢献した。特殊相対性理論は相対性原理と光速不変の法則という 2 つの基本法則からなる。相対性原理はすべての物理法則が異なった慣性系に対し同じ形で表すことができるというものであり、光速不変はどのような慣性系で測定しても真空中の光速は一定であるという法則である。光速に比べてとても小さい速度で動いている我々が特殊相対性理論の効果を普段感じることはない。重力の効果が無視でき、物体の速度が光速に近い系で用いられる理論が特殊相対性理論である。

特殊相対性理論を重力の効果が無視できないときにでも用いることができるよう拡張したのが一般相対性理論である。一般相対性理論は等価原理と一般相対性原理に基づいた理論である。等価原理はアインシュタインが「思考実験」をすることで見出した。等価原理とは重力と、加速によって生じる慣性力の二つは等価であり区別できないという原理である。一般相対性原理はすべての物理法則は座標系によらず同じ形で表されるという原理であり、これは特殊相対性原理を拡張したものである。一般相対性理論が我々の直観と反するのは、重力は質量をもつ物体により周辺の時空が曲げられて生じたと解釈するところである。ニュートン力学では物体同士に万有引力という力が直接作用する遠隔作用を支持しているが、一般相対性理論はそれを否定し時空そのものが歪み、相互作用を及ぼす近接作用の考えを採用している。

### 1.2 研究背景

特殊相対性理論を用いることで初めて説明のつくものに宇宙線中の  $\mu$  粒子の寿命の延びが挙げられる。 $\mu$  粒子はほぼ光速で地上 20 から 100 km あたりから降ってくるものの、寿命が 50 万分の 1 秒と短いためにニュートン力学だと 6 km の間でしか存在できない。しかし実際には地表に降り注いできており、理論と観測結果は矛盾する。ここで特殊相対性理論の「速度をもつと時間が遅く流れる」ことを取り入れれば  $\mu$  粒子が地表に届くことの説明ができる [1]。

特殊相対性理論では重力の効果が大きい系について扱うことができなかったが、一般相対性理論はそれが可能な理論となっている。アインシュタインの発表した一般相対性理論は、物体があるとそのまわりの時空が湾曲すると解釈する。例えば重い物体によって曲げられた空間内を光が通ると、あたかもそこにレンズがあるかのように光

の軌道も湾曲する．これを重力がレンズのような役割をするという意味で「重力レンズ (gravitational lenses)」と呼んでいる [2]．重力レンズの効果を受けた天体が初めて観測されたのが 1979 年であり，これによりアインシュタインの相対性理論は大きく支持されるようになった．

他に一般相対性理論を取り入れることで初めて説明がついた現象として水星の近日点移動が挙げられる．近日点とは太陽と水星が最も近くなる点のことである．水星の軌道がニュートン力学で予想されるような綺麗な楕円軌道であれば近日点は常に同じ点になるはずだが，観測すると近日点は年々移動していることが分かった．この結果はニュートン力学ではどうしても説明できず，太陽系内にまだ未発見の惑星があるとまで仮定して説明を試みたが失敗に終わった．実際には一般相対性理論の効果でその楕円軌道自体が回転していることがわかり，一般相対性理論による予言は観測結果とほぼ一致している [1][3]．

工学的な応用として相対性理論の結果は全地球測位システム (GPS, Global Positioning System) に用いられている．例えば GPS では地上と衛星軌道の位置での重力の効果などが異なるので，地上に比べて，衛星の位置の方が時間の進み方がわずかに速い．その分を修正しないと 1 日で 11km 程度の差が生じてしまい使い物にならない．日常的に電子機器で位置情報を検索出来ているのは，相対性理論を用いて地上と宇宙空間での時間の進み方の違いを補正できているからである．

アインシュタインの相対性理論は奇妙な結論も残した．その代表例がブラックホールの予想である．太陽の質量の 3 倍程度以上の質量を持つ天体が重力崩壊を起こすと超新星爆発がおり，最終的にブラックホールとなる．また，前世紀からの宇宙観測により，数多くの銀河の中心に超巨大ブラックホールが発見されているが，それらの形成過程の全貌は解明されていない．2015 年 9 月 14 日，アメリカの LIGO(レーザー干渉重力波観測計) が重力波を初めて検出し，解析により衝突する 2 つのブラックホールの振動がもとになっていることが分かった．表 1.1 に今まで観測された重力波イベントをまとめた．なお，ブラックホール質量は太陽質量，地球からの距離は Gpc を用いた．1Gpc は光の速さで約 32.6 億年進んだ距離である．人類はアインシュタインすらも否定していた重力波の観測に成功しただけでなく，電波干渉計イベント・ホライズン・テレスコープ (EHT) により，日本時間 2019 年 4 月 10 日 22 時 07 分にブラックホール・シャドウをとらえることに成功した (図 1.1, 図 1.2)[6]．2018 年の EHT 参加局は，これに GLT (グリーンランド) を加えた SMT (アリゾナ)，APEX (チリ)，ALMA (チリ)，JCMT (ハワイ)，SMA (ハワイ)，LMT (メキシコ)，PV (スペイン)，SPT (南極) の計 9 局となっている．[4]

アインシュタインが相対性理論を発表して以来，一般相対性理論以外の重力理論も数多く提唱されている．本研究の究極的な目標は，アインシュタインの相対性理論が正しいのかどうかを判断するところにある．ある理論が正しいか否かを判断するためには，2 つの情報が必要である．一つはある理論の予言する結果，もう一つは実際に観測や実験で得られたデータであり，それらを照合して良い理論か否かを考える．本研究では前者に焦点をおき，これから観測されるであろうデータをあらかじめ予測するためのプログラムを作成することを目的としている．

内容としては，計算機の中にブラックホール時空を仮定し，中心天体であるブラックホールの周りを周回する星の軌道をシミュレーションした．ブラックホールの周りの星の軌道を見ること以外にも，重力波やブラックホール・シャドウの観測が相対性理論の検証の手段として有効である．しかし，後者については検出して得られたデータについての処理法や，ブラックホールの周りについての輻射輸送といったことについて考慮する必要がある，とても難関である．ブラックホールの周りを周回する星の軌道は，その星が放つ光を観測するだけでよく，周りに障害物も少ないためクリーンな環境になっている．そのため星の軌道を予測するには純粋な相対性理論の枠内で議論が収まり，曲がった時空中の力学に基づく議論だけで時空についての情報が得られる可能性がある観測対象と

して、我々の住む銀河の中心にある電波源、いて座 A\* 以降 Sgr A\* が注目されており、一般相対性理論の検証の場として精力的に観測されている。Sgr A\* の中心には巨大質量ブラックホールがあると予想されていて、その周りを S2 という星が周回している。S2 の軌道の観測などにより中心にブラックホールがあることが裏付けられ、ブラックホールについての新たな情報も分かってきている。これからは技術の進歩とともに望遠鏡の精度は上がると考えられており、Sgr A\* を周回する星が新たに見つかる可能性が指摘されている。将来的に、どのような星の軌道が観測されても対応できるようにするため、任意のパラメーターについてのシミュレーションができるようになっておく必要がある。

今回のシミュレーションで用いるブラックホールとして、球対称で静的なブラックホール解であるシュバルツシルト・ブラックホールを仮定した。本来は、自転するブラックホールを仮定した方がより現実的なシミュレーションが可能であるが、自転の効果はブラックホールからの距離の 3 乗に反比例するため、今回はブラックホールから十分離れた位置にある星の軌道を考えることで、自転の効果が影響しない場合を考えた。もし観測結果とシミュレーション結果が一致すれば、現実の時空は今回想定したものと同一といえるし、一致しなかった場合は、他の時空計量や重力理論を考える必要がある。今回はシュ・バルツシルト時空についてのみシミュレーションを行うため他の重力理論との比較はできないが、今後の計算を発展させることにより、より精密な議論が可能になると考えている。さまざまな理論的可能性について深く解明することができれば、ブラックホールについての新たな知見が得られる。また、ブラックホール時空において重力理論に関する新たな知見を得ることは、一般相対性理論による解釈が不可欠な初期宇宙やダークマター、ダークエネルギー等に関する研究を発展させる可能性もある。

表 1.1 観測された重力波 [5]

イベント名	合体前の質量		合体後の質量	合体後のスピン	地球からの距離
GW150914	35.6	30.6	63.1	0.69	0.43
GW151012	23.3	13.6	35.7	0.67	1.06
GW151226	13.7	7.7	20.5	0.74	0.44
GW170104	31.0	20.1	49.1	0.66	0.96
GW170608	10.9	7.6	17.8	0.69	0.32
GW170729	50.6	34.3	80.3	0.81	2.75
GW170809	35.2	23.8	56.4	0.70	0.99
GW170814	30.7	25.3	53.4	0.72	0.58
GW170818	35.5	26.8	59.8	0.67	1.02
GW170823	39.6	29.4	65.6	0.71	1.85



図 1.1 EHT によるブラックホール・シャドウの観測 [6]

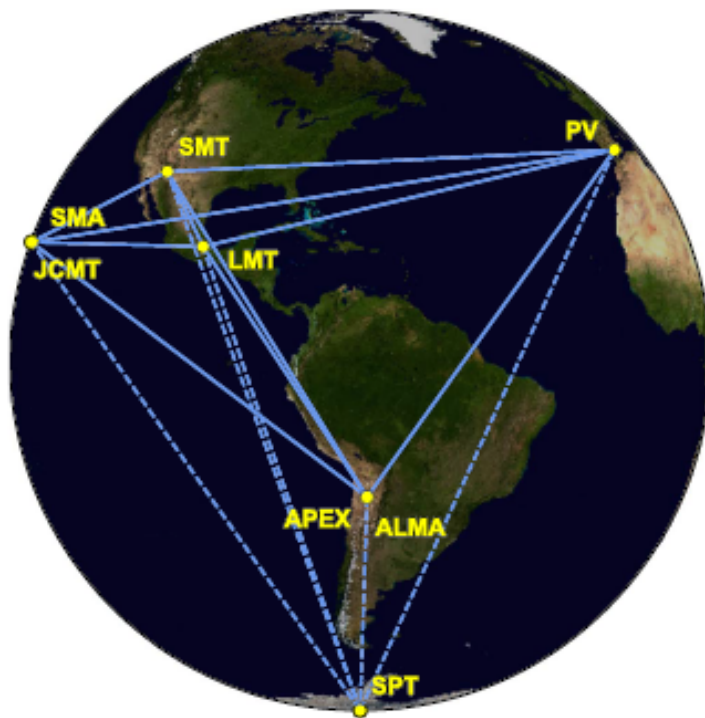


図 1.2 2017 時点での EHT 参加局 [6]



## 第 2 章

# 相対性理論の基礎

本節では主に、文献 [1], [3], [7], を参考にしている.

### 2.1 特殊相対性理論

ここでは、本研究で使う数学や物理について最低限知っておいてほしいことを述べる．以下では座標は時間座標  $t$  と空間座標  $(x, y, z)$  を合わせた時空中の座標  $(ct, x, y, z)$  を用いる．ここで、 $c$  は光速である．これからはしばしば 4 次元の位置ベクトルを次のように書く．これを 4 元位置ベクトルという．

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (2.1)$$

なぜ  $t$  ではなく  $ct$  としたかという、すべての次元を距離にそろえると都合がよいからである．時刻と空間座標を合わせたものを事象といい、2 つの事象間で物体の移動距離は次の  $d_{12}$  で与えられる．

$$d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.2)$$

この物体が  $t_1$  から  $t_2$  の間で光速で移動したとすれば  $d_{12} = c(t_2 - t_1)$  なので

$$-c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0 \quad (2.3)$$

という関係が得られる．これは別の慣性系  $S'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct', x', y', z')$  で考えても同じ関係式が得られる．

$$-c^2(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = 0 \quad (2.4)$$

この量を不変間隔  $s$  と呼び、不変間隔は慣性系によらず保存する．このような「距離」の定義をした時空をミンコフスキー時空という．相対性理論では、このような系 (もしくは観測者) によらない量 (不変量という) に注目することが本質的に重要となる．

縦軸に  $ct$  (光速×時間), 横軸に空間をとった図を時空図といい、光速で移動する物体はそのグラフの傾きが 1 もしくは  $-1$  になる．この二つの傾きからなる直線でできる円錐を光円錐と呼び、光円錐の内側を因果的領域と言う．

不変間隔が 0 よりも大きいと「空間的」といい、空間座標の隔たりが大きすぎて時間間隔  $t_2 - t_1$  では光さえも到達できないことを表す．これは光円錐の外側に値する．不変間隔が 0なのは物体が光速で移動しているときであり、光円錐の表面に値する．これを特別に「ヌル」と呼ぶ．不変間隔が 0 より小さい場合は、光よりも遅い速度で連絡がつくことを表し、「時間的」という．ここは光円錐の内側になる (図 2.1).

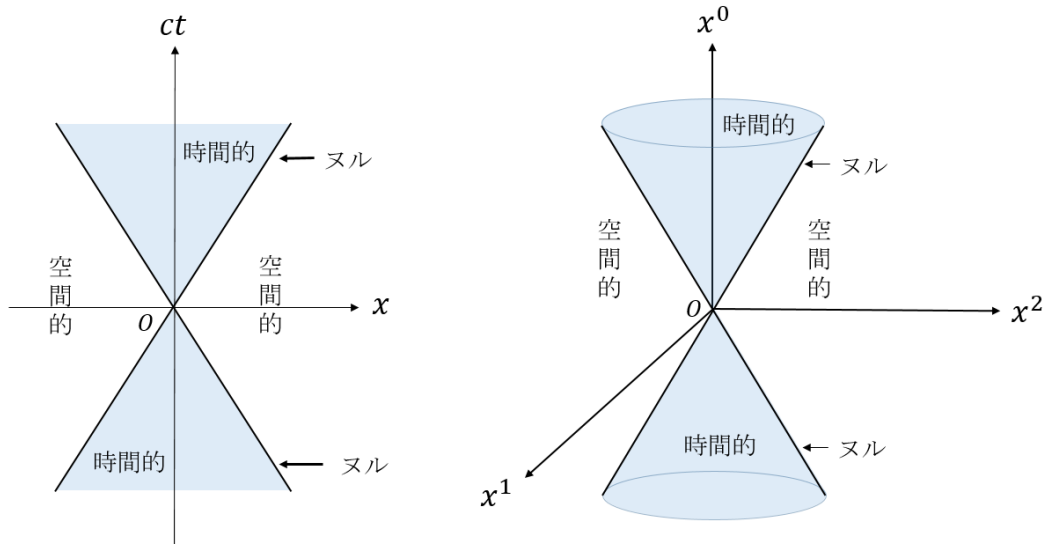


図 2.1 一次元時空と二次元時空の光円錐

不変間隔の微小変化は次のように表される．

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \quad (2.5)$$

ここでメトリック (計量) と呼ばれる行列  $\eta_{\mu\nu}$  を定義する．

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

特殊相対性理論でのメトリックは対角成分以外 0 になっている．これと式 (2.1) で定義した座標を用いて不変間隔の微小変化は次の式で与えられる．

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (2.7)$$

ここで上付きの添え字と下付きの添え字が同じ記号で出てきたときは座標の全成分について和をとる，というルールを導入する．これをアインシュタインの規約 (縮約) という．和をとる記号は何でも良いが，ここでは 4 次元ではギリシャ文字，3 次元ではアルファベットを用いて区別する．

さて，ここで扱っている  $t$  という時間は「誰にとっての時間なのか」を考えないと意味をなさない．時間が誰にとっても同じで，座標系によらないと仮定したときの座標変換のことをガリレイ変換という．例えば S 系に対し S' 系が速度  $v$  で  $x$  軸方向に運動していたとすると，2 つの座標系を結ぶガリレイ変換は次のようになる．

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2.8)$$

ところが，ガリレイ変換は上で述べた不偏間隔を保存しない．そこで，次のような行列で表される変換を仮定

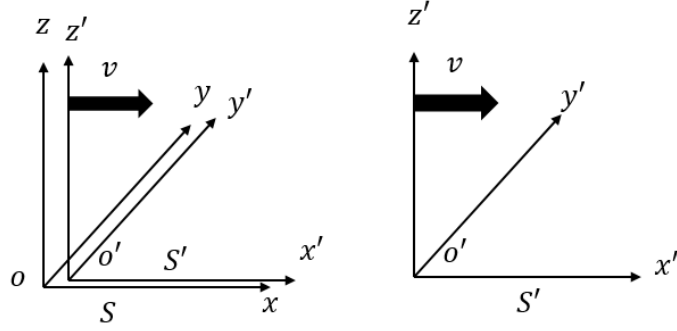


図 2.2 慣性系  $S$  に対し速度  $v$  で移動する慣性系  $S'$  のローレンツ変換

する.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

この変換では、時間と空間の 1 次項のみを考えている．もし、1 次以外の項があった場合、一方で等速直線運動をしている物体を他方から見ると加速度運動しているように見えてしまい相対性原理に反する．簡単のため、慣性系は図 2.2 のように  $x$  軸方向にのみ運動しているとす． $t = t' = 0$  のとき二つの座標は一致していたとし、 $x$  軸上でのみ運動をすることから常に  $y = y'$ 、 $z = z'$  が成り立つので式 (2.18) から

$$\begin{aligned} a_{20} &= a_{21} = a_{23} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = 0 \\ a_{02} &= a_{03} = a_{12} = a_{13} = 0 \\ a_{22} &= a_{33} = 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

とわかる．ここで、2 つめの式は相対性原理により逆変換をしても変換は同じ形になるということを用いた．以上のことから次のように整理できる．

$$\begin{aligned} ct' &= a_{00}ct + a_{01}x \\ x' &= a_{10}ct + a_{11}x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2.11)$$

加えて、 $x$  については  $\gamma$  を定数として  $x' = \gamma(x - vt)$  の形であることがわかる．ここで、 $v$  は  $S$  系からみた  $S'$  系の速度である．なぜならば、 $t$  秒時間が経過したとき  $S$  系にとっての  $S'$  系の原点の位置は  $x = vt$  であるが、 $S'$  系では常に 0 になるからである．簡略化のために  $a_{00}c = A$ 、 $a_{01} = B$  と表記する．ここで、

$$-(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0 \quad (2.12)$$

にこれまでの関係式を代入すると

$$\begin{aligned} &-(At + Bx)^2 + \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ &-(A^2t^2 + 2ABtx + B^2x^2) + \gamma^2(x^2 - 2vtx + v^2x^2) + y^2 + z^2 = 0 \\ &(\gamma^2v^2 - A^2)t^2 + (\gamma^2 - B^2)x^2 + y^2 + z^2 = 2(AB + \gamma^2v)tx \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる．ここで、この式は不変間隔が同じことから

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad (2.14)$$

を満たすことが分かる．よってこの2つの式は恒等的に等しくなるので

$$\begin{aligned}\gamma^2 v^2 - A^2 &= -c^2 \\ \gamma^2 - B^2 &= 1 \\ AB + \gamma^2 v &= 0\end{aligned}\tag{2.15}$$

という関係を満たすことが分かる． $B^2 = \gamma^2 - 1$ ， $A^2 = \gamma^4 v^2 / (\gamma^2 - 1)$  から  $\gamma$  について解くと

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\tag{2.16}$$

と求まる．同様にして

$$\begin{aligned}A &= \frac{c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ B &= -\frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\end{aligned}\tag{2.17}$$

と求めることができる．平方根をとる際に実際の符号は  $\pm$  の2通り登場するが，これは両辺の位置や時間の向きが一致するように選んでいる．例えば  $v \simeq 0$  のとき  $\gamma$  が負だと左辺と右辺で座標の向きが逆になってしまう．これまでの議論をまとめると，慣性系  $S$  と  $x$  軸方向に速度  $v$  で移動している慣性系  $S'$  間の変換は

$$\begin{aligned}ct' &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct - \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x \\ x' &= -\frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x \\ y' &= y \\ z' &= z\end{aligned}\tag{2.18}$$

となる．この変換をローレンツ変換という．軸の対称性から  $y$  軸や  $z$  軸の方に運動していても同様の議論で変換することができる．また， $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  は静止している観測者から見た時の時間の伸びを表す．加えて，これからしばしば  $v/c$  を  $\beta$  と表すことがある．

$$\beta \equiv \frac{v}{c}\tag{2.19}$$

$\beta$  は物体が光速に対してどれくらいの比で運動しているかを表し，ローレンツ・ベータとも呼ばれる．ローレンツ・ベータを用いれば  $\gamma$  は

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\tag{2.20}$$

と書くことができる．物体が光速に比べて十分遅いときは  $v \ll c$  となることから， $\beta \simeq 0$  となる．一方， $\gamma$  は

$$\gamma \simeq 1\tag{2.21}$$

になる．すなわちこれは慣性系  $S$  と  $S'$  の時間の間隔がほぼ等しいといえる．このとき式 (2.18) のローレンツ変換は

$$\begin{aligned}ct' &\simeq ct \\ x' &\simeq -vt + x \\ y' &= y \\ z' &= z\end{aligned}\tag{2.22}$$

と近似的に書ける．これは式 (2.8) のガリレイ変換と一致する．すなわち，ローレンツ変換はガリレイ変換を含む形で記述できていることが分かる．

相対性理論では固有時間という概念がしばしば登場する．固有時間は止まっている時計が刻む時間を表す．静止している慣性系に対し速度  $v$  で運動している慣性系での時間  $t$  は固有時間に比べ  $\gamma$  倍だけ遅くなるので，固有時間  $\tau$  を用いて速度  $v$  で運動している慣性系の時間の伸びは次のように書ける

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} d\tau \equiv \gamma d\tau \quad (2.23)$$

さて，4 元位置ベクトルを用いるとローレンツ変換は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma \left( x^0 - \frac{v}{c} x^1 \right) \\ x'^1 &= \gamma \left( x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (2.24)$$

ここで，新たな行列  $L_\nu^\mu$  を定義する．

$$L_\nu^\mu \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma(v/c) & 0 & 0 \\ -\gamma(v/c) & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$L_\nu^\mu$  を用いるとローレンツ変換は簡単に表記することができる．

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 L_\nu^\mu x^\nu \equiv L_\nu^\mu x^\nu \quad (2.26)$$

ただし，ここでも同じ添え字に対して和をとるアインシュタインの縮約を用いている．

## 2.2 一般相対性理論

ここでは，特殊相対性理論を一般座標変換に対し不変な形に拡張した理論である一般相対性理論について述べる．特に，本研究と密接に関連する事項のみを簡単にまとめる．まず，微分を拡張した概念である共変微分について述べた後，時空の曲がり具合を表す曲率についてまとめる．その後，粒子の軌道を記述する測地線方程式を導出し，シュバルツシルト時空中の測地線方程式の具体系を導く．

### 2.2.1 共変微分

ある座標は他の座標の関数として表すことができ，その変換を一般化座標変換と呼んでいる．変換則を  $f$  と書くとき，新たな座標はつぎのようにかける．

$$\tilde{x}^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.27)$$

この関係を用いれば新たにおいた座標  $\tilde{x}^\mu$  の全微分は元の座標  $x^\mu$  の全微分を用いて表すことができる．

$$d\tilde{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.28)$$

ここでもアインシュタインの縮約を用いて和の記号を省略している．一般座標変換に対して改めてスカラーとベクトルを定義する．スカラーは一般座標変換によって値が変わらないもののことをいい，座標上どの点でもこの関係が成り立つ場をスカラー場と呼ぶ．

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu) = \phi(x^\mu) \quad (2.29)$$

また、一般化座標変換によって以下のような変換をする量のことを反変ベクトル  $V^\mu$  と定義する。

$$\tilde{V}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (2.30)$$

共変ベクトル  $V_\mu$  も一般化座標変換に対し次のような変換をする量と定義する。

$$\tilde{V}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} V_\nu \quad (2.31)$$

反変ベクトルと共変ベクトルの同じ添え字でかけたものの総和を内積と定義する。内積はスカラーであるので一般化座標変換で不変である。反変ベクトルを  $V^\mu$ 、共変ベクトルを  $W_\mu$  と書けば内積は  $V^\mu W_\mu$  とである。これもアインシュタインの縮約を用いて総和を省略している。

ベクトルの一般化としてテンソルを定義する。一般化座標変換に対して  $n$  個の反変ベクトルの積と同じ変換性を示すものを、ランク  $n$  の反変テンソルという。共変テンソルについても同じく定義でき、反変テンソルと共変テンソルを合わせた変換性を示すものを混合テンソルと呼ぶ。例えばベクトルはランク 1 のテンソルであり、次に示す通りクロネッカーのデルタはランク 2 の混合テンソルである。クロネッカーのデルタとは、二つの添え字が同じときは 1、別のときは 0 になる関数である。

$$\delta^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \delta^\lambda_\kappa \quad (2.32)$$

クロネッカーのデルタは特殊相対性理論のメトリック  $\eta^{\mu\nu}$  とその逆行列  $\eta_{\mu\nu}$  を用いて次のように書ける。

$$\eta^{\mu\kappa} \eta_{\kappa\nu} = \delta^\mu_\nu \quad (2.33)$$

メトリック  $\eta^{\mu\nu}$  やその逆変換を表す  $\eta_{\mu\nu}$  は共変ベクトルと反変ベクトルを入れ替えることができる。すなわち

$$\begin{aligned} A^\mu &= \eta^{\mu\nu} A_\nu \\ B_\mu &= \eta_{\mu\nu} B^\nu \end{aligned} \quad (2.34)$$

という変換を行える。実際、反変ベクトルと共変ベクトルは  $x^0$  成分の符号が逆であるだけで、残りの成分は同じなので本質的には同じである。

スカラー場の微分を

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \phi \equiv \phi_{,\mu} \quad (2.35)$$

と表し、ベクトル場の微分も同じようにして

$$\partial_\nu V^\mu \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.36)$$

と書くことにする。このベクトルの微分を一般座標変換すると、

$$\tilde{\partial}_\nu \tilde{V}^\mu \equiv \frac{\partial \tilde{V}^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \left( \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} V^\lambda \right) = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left( \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} V^\lambda \right) \quad (2.37)$$

$$= \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} V^\lambda \quad (2.38)$$

$$= \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \partial_\kappa V^\lambda + \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} V^\lambda \quad (2.39)$$

となり、第 2 項が出てきているためこれはテンソルにはならない。微分をしたものも共変な形にかけようとした新たな微分、共変微分を定義する。微少量だけ離れた二つのベクトルを同じ点での差になるように平行移動することを考える。平行移動を

$$\bar{V}^\mu(x + \delta x) \equiv V^\mu(x) + \bar{\delta} V^\mu(x) \quad (2.40)$$

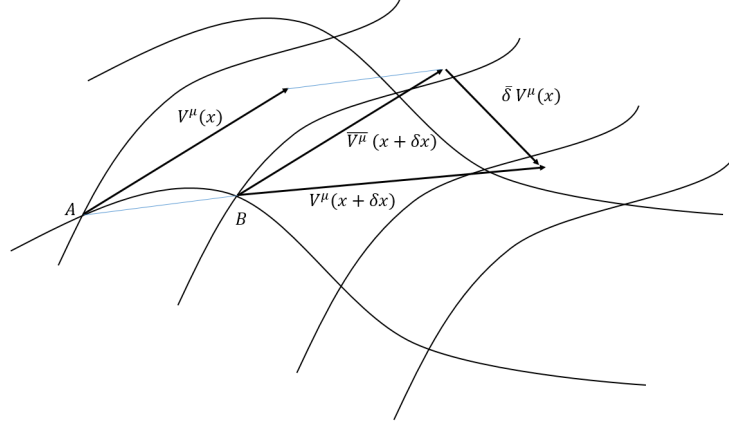


図 2.3 ベクトルの平行移動による新たな微分:共変微分

と表す (図 2.3). 右辺の 2 項目は  $V^\mu \delta x$  に比例する必要がある. なぜならば  $\delta x$  が 0 ならば移動無ということになり 2 項目は消えるからである. また, ベクトルがヌル (ゼロベクトル) の場合でも平行移動してもヌルであるはずなので  $V^\mu$  に比例する. よって一般的に表すと以下のように書ける.

$$\bar{\delta} V^\mu(x) \equiv -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) V^\nu(x) \delta x^\lambda \quad (2.41)$$

すなわち

$$\bar{V}^\mu(x + \delta x) = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) V^\nu(x) \delta x^\lambda \quad (2.42)$$

と表され, ここで比例係数  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  は接続と呼ばれる. 平行移動したベクトルを用いた新たな微分は

$$\nabla_\nu V^\mu \equiv V^\mu_{;\nu} \equiv \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \delta x) - \bar{V}^\mu(x + \delta x)}{\delta x^\nu} \quad (2.43)$$

$$= \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \delta x) - V^\mu(x) - \bar{\delta} V^\mu(x)}{\delta x^\nu} \quad (2.44)$$

$$= \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu V^\lambda \quad (2.45)$$

と表され,  $\nabla_\nu$  を共変微分と呼ぶ. ここで, 共変微分がテンソルになるためには接続がどのような変換性を持てばいいか考える. まず, 共変微分がテンソルである条件は

$$\tilde{\nabla}_\nu \tilde{V}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \nabla_\kappa V^\lambda \quad (2.46)$$

である. 左辺は

$$\tilde{\nabla}_\nu \tilde{V}^\mu = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{V}^\mu + \tilde{\Gamma}_{\kappa\nu}^\mu \tilde{V}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left( \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\eta} V^\eta \right) + \tilde{\Gamma}_{\kappa\nu}^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\kappa}{\partial x^\eta} V^\eta \quad (2.47)$$

$$= \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\eta} V^\eta + \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\eta} \frac{\partial V^\eta}{\partial x^\kappa} + \tilde{\Gamma}_{\kappa\nu}^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\kappa}{\partial x^\eta} V^\eta \quad (2.48)$$

$$= \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\eta} \frac{\partial V^\eta}{\partial x^\kappa} + \left( \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\eta} + \tilde{\Gamma}_{\kappa\nu}^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\kappa}{\partial x^\eta} \right) V^\eta \quad (2.49)$$

と変形でき, 右辺は

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \nabla_\kappa V^\lambda = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \left( \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\eta\kappa}^\lambda V^\eta \right) \quad (2.50)$$

と変形できる. よって

$$\left( \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\eta} + \tilde{\Gamma}_{\kappa\nu}^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\kappa}{\partial x^\eta} \right) V^\eta = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \Gamma_{\eta\kappa}^\lambda V^\eta \quad (2.51)$$

$V^\eta$  の係数を比較して

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\eta} + \tilde{\Gamma}_{\kappa\nu}^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\kappa}{\partial x^\eta} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \Gamma_{\eta\kappa}^\lambda \quad (2.52)$$

右辺のダミーを  $\kappa \Rightarrow \tau, \lambda \Rightarrow \kappa$  と付け替え、両辺に  $\partial x^\eta / \partial \tilde{x}^\lambda$  をかける。

$$\frac{\partial x^\eta}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\kappa}{\partial x^\eta} = \delta_\lambda^\kappa \quad (2.53)$$

を用いると

$$\tilde{\Gamma}_{\kappa\nu}^\mu \delta_\lambda^\kappa = \tilde{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu = \frac{\partial x^\eta}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\nu} \Gamma_{\eta\tau}^\kappa - \frac{\partial x^\eta}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\eta} \quad (2.54)$$

となる。第1項の  $\eta$  と  $\tau$ 、第2項の  $\lambda$  と  $\nu$  を入れ替えて

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu = \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\eta}{\partial \tilde{x}^\lambda} \Gamma_{\tau\eta}^\kappa - \frac{\partial x^\eta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\eta} \quad (2.55)$$

を得る。また、次の等式

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \delta_\nu^\mu = 0 = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left( \frac{\partial x^\eta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\eta} \right) \quad (2.56)$$

$$= \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial^2 x^\eta}{\partial \tilde{x}^\nu \partial x^\kappa} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\eta} + \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial x^\eta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\eta \partial x^\kappa} \quad (2.57)$$

$$= \frac{\partial^2 x^\eta}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\eta} + \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial x^\eta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\eta \partial x^\kappa} \quad (2.58)$$

を式 (2.55) に代入し、 $\eta$  を  $\kappa$  に置き換え整理することで満たすべき接続の変換性が得られる。

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\eta}{\partial \tilde{x}^\lambda} \Gamma_{\tau\eta}^\kappa + \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\lambda} \quad (2.59)$$

この式から、接続自身はテンソルではないことが分かる。

ここまで反変ベクトルの共変微分を求めていったが、同様の議論で共変ベクトルの共変微分を求めることができる。

$$\nabla_\nu V_\mu \equiv V_{\mu;\nu} \equiv \partial_\nu V_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda \quad (2.60)$$

ここで、混合テンソル  $V_\nu W^\mu$  の共変微分を考えてみると

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda (V_\mu W^\nu) &= \partial_\lambda (V_\mu W^\nu) - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa V_\kappa W^\nu + \Gamma_{\kappa\lambda}^\nu V_\mu W^\kappa \\ &= (\partial_\lambda V_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa V_\kappa) W^\nu + V_\mu (\partial_\lambda W^\nu + \Gamma_{\kappa\lambda}^\nu W^\kappa) \\ &= (\nabla_\lambda V_\mu) W^\nu + V_\mu (\nabla_\lambda W^\nu) \end{aligned} \quad (2.61)$$

となり、ライプニッツ則が成り立つことが分かる。

## 2.2.2 曲率

まず初めにリーマン曲率テンソルを定義する。

$$R_{\nu\lambda\kappa}^\mu = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu - \partial_\kappa \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\eta\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\kappa}^\eta - \Gamma_{\eta\kappa}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \quad (2.62)$$

これは空間がどれだけ曲がっているかを表し、曲がっていない空間ではこれは0になる。リーマン曲率の性質を挙げておく。

$$R_{\nu\lambda\kappa}^\mu = -R_{\nu\kappa\lambda}^\mu \quad (2.63)$$

$$R_{\nu\lambda\kappa}^\mu + R_{\kappa\nu\lambda}^\mu + R_{\lambda\kappa\nu}^\mu = 0 \quad (2.64)$$



特殊相対性理論では定数であったメトリックを一般相対性理論に拡張する．一般相対性理論でのメトリックは  $g_{\mu\nu}(x)$  と表記し，ランク 2 の対象共変テンソルである． $x^\mu$  と  $x^\mu + dx^\mu$  の距離  $ds$  はこれを用い以下のように表される．

$$ds^2 \equiv g(x)_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (2.65)$$

一般にメトリック  $g_{\mu\nu}(x)$  は  $x^\mu$  の関数になり， $\eta_{\mu\nu}$  同様に 反変ベクトルを共変ベクトルに変える役割をもつ．メトリックの反転テンソル  $g^{\mu\nu}$  は共変ベクトルを反変ベクトルに変えることができる．まとめると，

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad (2.66)$$

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \quad (2.67)$$

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda \quad (2.68)$$

ということになる．次に，接続をメトリックを用いて表すことを考える．ベクトルの大きさは平行移動しても同じなので

$$g_{\mu\nu}(x) V^\mu(x) V^\nu(x) = g_{\mu\nu}(x + dx) \bar{V}^\mu(x + dx) \bar{V}^\nu(x + dx) \quad (2.69)$$

という関係が成り立ち，

$$g_{\mu\nu}(x + dx) = g_{\mu\nu}(x) + \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) dx^\lambda \quad (2.70)$$

および式 (2.42) を代入すれば

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) V^\mu(x) V^\nu(x) &= (g_{\mu\nu}(x) + \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) dx^\lambda) (V^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) V^\nu(x) dx^\lambda) \\ &= (g_{\mu\nu}(x) V^\mu(x) - g_{\mu\nu}(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) V^\nu(x) dx^\lambda + V^\mu(x) \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) dx^\lambda) (V^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) V^\nu(x) dx^\lambda) \\ &= g_{\mu\nu}(x) V^\mu(x) V^\nu(x) - g_{\mu\nu}(x) V^\mu(x) \Gamma_{\mu\lambda}^\nu(x) V^\mu(x) dx^\lambda \\ &\quad - g_{\mu\nu}(x) V^\nu(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) dx^\lambda + V^\mu(x) V^\nu(x) \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) dx^\lambda \end{aligned} \quad (2.71)$$

なお， $dx$  の二次以降の項は無視した．これをまとめて添え字の入れ替えを行うと

$$\begin{aligned} 0 &= -g_{\mu\kappa}(x) V^\mu(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa(x) V^\nu(x) - g_{\kappa\nu}(x) V^\nu(x) \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa(x) V^\mu dx^\lambda + V^\mu(x) V^\nu(x) \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) dx^\lambda \\ &= -g_{\mu\kappa}(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa(x) - g_{\kappa\nu}(x) \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa(x) + \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (2.72)$$

となる．ゆえに

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\kappa} \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa - g_{\kappa\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.73)$$

左辺はメトリックの共変微分になっていることが分かる．この式の  $\nu$  と  $\lambda$  を入れ替えた式と， $\mu$  と  $\lambda$  を入れ替えた式は

$$\begin{aligned} \partial_\nu g_{\mu\lambda} - g_{\mu\kappa} \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa - g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\kappa &= 0 \\ \partial_\mu g_{\lambda\nu} - g_{\lambda\kappa} \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa &= 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

これらの 3 式のうち最初の 2 式を足して最後の 1 式を引くと次のような関係が得られる．

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\nu} - 2g_{\mu\kappa} \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa = 0 \quad (2.75)$$

接続は下の添え字を入れ替えても対象 ( $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu$ ) であることを用い，両辺にメトリックの逆行列  $g^{\mu\nu}$  をかけて変形すると以下の関係を得る．

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (\partial_\lambda g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\lambda} - \partial_\kappa g_{\lambda\nu}) \quad (2.76)$$

メトリックで記述された接続をクリストッフエル記号と呼ぶ。

また、リーマン曲率テンソルにメトリックをかけてできるものを共変リーマン曲率テンソルと呼び、クリストッフエル記号で次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\kappa} &= g_{\mu\tau} R_{\nu\lambda\kappa}^{\tau} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\nu} \partial_{\lambda} g_{\mu\kappa} + \partial_{\mu} \partial_{\kappa} g_{\nu\lambda} - \partial_{\mu} \partial_{\lambda} g_{\nu\kappa} - \partial_{\nu} \partial_{\kappa} g_{\mu\lambda}) + g_{\eta\tau} \left( \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

これを証明する。定義から

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\kappa} &= g_{\mu\tau} R_{\nu\lambda\kappa}^{\tau} \\ &= g_{\mu\tau} (\partial_{\lambda} \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} - \partial_{\kappa} \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} + \Gamma_{\eta\lambda}^{\tau} \Gamma_{\nu\kappa}^{\eta} - \Gamma_{\eta\kappa}^{\tau} \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}) \end{aligned} \quad (2.78)$$

ここで、

$$\begin{aligned} g_{\mu\tau} \partial_{\lambda} \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} &= g_{\mu\tau} \partial_{\lambda} \left( \frac{1}{2} g^{\tau\eta} (\partial_{\kappa} g_{\eta\nu} + \partial_{\nu} g_{\eta\kappa} - \partial_{\eta} g_{\kappa\nu}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\eta} \partial_{\lambda} (\partial_{\kappa} g_{\eta\nu} + \partial_{\nu} g_{\eta\kappa} - \partial_{\eta} g_{\kappa\nu}) + \frac{1}{2} g_{\mu\tau} (\partial_{\lambda} g^{\tau\eta}) (\partial_{\kappa} g_{\eta\nu} + \partial_{\nu} g_{\eta\kappa} - \partial_{\eta} g_{\kappa\nu}) \end{aligned} \quad (2.79)$$

となる。第二項目を  $\Gamma_{\nu\kappa}^{\tau}$  で書き表すために、

$$\partial_{\lambda} (g_{\mu\tau} g^{\tau\eta}) = \partial_{\lambda} (\delta_{\mu}^{\eta}) = 0 = (\partial_{\lambda} g_{\mu\tau}) g^{\tau\eta} + g_{\mu\tau} (\partial_{\lambda} g^{\tau\eta}) \quad (2.80)$$

より  $g_{\mu\tau} (\partial_{\lambda} g^{\tau\eta}) = -(\partial_{\lambda} g_{\mu\tau}) g^{\tau\eta}$  という関係を用いて

$$g_{\mu\tau} \partial_{\lambda} \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} = \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} \partial_{\kappa} g_{\mu\nu} + \partial_{\lambda} \partial_{\nu} g_{\mu\kappa} - \partial_{\lambda} \partial_{\mu} g_{\kappa\nu}) - (\partial_{\lambda} g_{\mu\tau}) \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} \quad (2.81)$$

と変形できる。同様に

$$g_{\mu\tau} \partial_{\kappa} \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} = \frac{1}{2} (\partial_{\kappa} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\kappa} \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\kappa} \partial_{\mu} g_{\lambda\nu}) - (\partial_{\kappa} g_{\mu\tau}) \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} \quad (2.82)$$

と求められるので、これを元の式に代入すると

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} \partial_{\nu} g_{\mu\kappa} - \partial_{\lambda} \partial_{\mu} g_{\kappa\nu} - \partial_{\kappa} \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} + \partial_{\kappa} \partial_{\mu} g_{\lambda\nu}) - (\partial_{\lambda} g_{\mu\tau}) \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} + (\partial_{\kappa} g_{\mu\tau}) \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} + g_{\mu\tau} \Gamma_{\mu\lambda}^{\tau} \Gamma_{\nu\kappa}^{\eta} - g_{\mu\tau} \Gamma_{\eta\kappa}^{\tau} \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \quad (2.83)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} -(\partial_{\lambda} g_{\mu\tau}) \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} + g_{\mu\tau} \Gamma_{\eta\lambda}^{\tau} \Gamma_{\nu\kappa}^{\eta} &= -(\partial_{\lambda} g_{\mu\tau}) \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} + g_{\mu\eta} \Gamma_{\tau\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} \\ &= -(\partial_{\lambda} g_{\mu\tau} - g_{\mu\eta} \Gamma_{\tau\lambda}^{\eta}) \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} \\ &= -g_{\eta\tau} \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} \end{aligned} \quad (2.84)$$

という変形を行う。同様に

$$(\partial_{\kappa} g_{\mu\tau}) \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} - g_{\mu\tau} \Gamma_{\eta\kappa}^{\tau} \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} = g_{\eta\tau} \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} \quad (2.85)$$

と求まるので、これを用いれば共変リーマン曲率テンソルは結局次のように書ける。

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\kappa} &= g_{\mu\tau} R_{\nu\lambda\kappa}^{\tau} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\nu} \partial_{\lambda} g_{\mu\kappa} + \partial_{\mu} \partial_{\kappa} g_{\nu\lambda} - \partial_{\mu} \partial_{\lambda} g_{\nu\kappa} - \partial_{\nu} \partial_{\kappa} g_{\mu\lambda}) + g_{\eta\tau} \left( \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\kappa}^{\tau} \right) \end{aligned} \quad (2.86)$$

共変リーマン曲率テンソルはリーマン・テンソル (Riemann tensor) とも呼ばれ、性質として以下のものが挙げられる。

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = -R_{\nu\mu\lambda\kappa} \quad (2.87)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = -R_{\mu\nu\kappa\lambda} \quad (2.88)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\mu\nu} \quad (2.89)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} + R_{\mu\kappa\nu\lambda} + R_{\mu\lambda\kappa\nu} = 0 \quad (2.90)$$

リーマン曲率テンソルの成分は  $4^4 = 64$  個存在するが、その中でも独立な成分は 20 であることが知られている。例えば前の添え字 2 組を  $M$ ，後ろの添え字 2 組を  $I$  で表せば， $R_{MI}$  と表すことができる。  $M = (mn)$ ， $I = (ij)$  と表記すれば，式 (2.87) および式 (2.88) より  $M$ ， $I$  の独立な成分は (01), (02), (03), (12), (13), (23) の 6 成分である。式 (2.89) から  $M$ ， $I$  の入れ替えは同じであることが分かる。つまり  $R_{MI}$  は  $6 \times 6$  の対象行列と考えることができ，成分は  $(6 \times 6 - 6)/2 + 6 = 21$  以下であり，式 (2.90) より自由度は 1 減らした 20 ということになる。これらの対称性により，4 次元時空なら独立なリーマン曲率テンソルは 64 個ではなく 20 個ということが分かる。リーマン曲率テンソルは曲がっていない時空で 0 になるテンソルであるが，これは例えば円柱の側面といった座標でも 0 になる。なぜならば円柱の側面上でベクトルの平行移動を行っても，これは曲がっていない空間での平行移動と同じになるからである。リーマン曲率テンソルが 0 になことと，時空が曲がっていないことは必要十分条件ではないことに注意する必要がある。

リーマン曲率テンソルの共変微分に関する式として，以下に示すビアンキ恒等式というものが成り立つ。

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\kappa\eta} + \nabla_\eta R_{\mu\nu\lambda\kappa} + \nabla_\kappa R_{\mu\nu\eta\lambda} = 0 \quad (2.91)$$

ビアンキ恒等式の縮約をとればこれはリッチテンソルとスカラー曲率と呼ばれるものによって表され，これを縮約したビアンキ恒等式という。

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\kappa\nu}^\kappa = g^{\kappa\eta} R_{\eta\mu\kappa\nu} \quad (2.92)$$

$$R \equiv R^\mu_\mu = g^{\mu\eta} R_{\eta\mu} \quad (2.93)$$

$$\nabla_\nu \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0 \quad (2.94)$$

### 2.2.3 測地線方程式

測地線とは 2 点間の最短距離の経路のことをいう。オイラー-ラグランジュ方程式 [7] は

$$\frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.95)$$

と書ける。まずは空間的な 2 点間の距離について考える。距離は  $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$  を積分すれば求めることができるので，パラメーターを  $u$  として

$$s = \int_P^Q ds = \int_P^Q \frac{ds}{du} du = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du}} du \quad (2.96)$$

と表される。ここで，ラグランジアン  $L$  は，

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du}} \quad (2.97)$$

であるが，少し工夫してオイラー-ラグランジュ方程式を求める。  $2L$  をオイラー-ラグランジュ方程式にかけて整理すると

$$\frac{d}{du} \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L^2}{\partial x} = 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{dL}{du} \quad (2.98)$$

となる．左辺は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} &= \frac{d}{du} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} (g_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda) \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda) \\
&= \frac{d}{du} (2g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu) - (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda \\
&= 2g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + 2(\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda - (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda \\
&= 2g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + 2\dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda \left( \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}) \right)
\end{aligned} \tag{2.99}$$

と変形できる．さらに  $dL/du = d(ds/du)/du = \ddot{s}$  であることと，パラメーターを  $u$  から  $s$  に変える操作をすれば測地線方程式が求まる．

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \tag{2.100}$$

上で仮定したラグランジアン  $L$  は，2点間の距離が空間的である場合にのみ用いることができる．2点間の距離が，時間的またはヌルのである場合には，ラグランジアンとして

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \tag{2.101}$$

を考えて同様の計算を行う．ここで， $\lambda$  はアフィン・パラメータと呼ばれる測地線に沿ったパラメータである．いま考えている2点間の距離が時間的なら微分を固有時間  $\tau$  で行えばよいので

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \tag{2.102}$$

と求めることができた．

次いで，光について考えることにする．光はヌルであるため， $ds = 0$  となり時間的と同じ積分計算を行うことができない．そこで，光の伝播の方向を表す波動ベクトルを  $k^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda$  とおくことにする．ここで， $(k^\mu) \equiv (\omega/c, \vec{k})$  と定義すると波動ベクトルは光の経路によらないので  $\delta k^\mu = (\partial k^\mu / \partial x^\nu) \delta x^\nu = 0$  すなわち  $\nabla_\nu k^\mu = 0$  を得る．よって次の式が成り立ち，

$$\frac{\partial k^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\kappa\nu}^\mu k^\kappa = 0 \tag{2.103}$$

両辺に  $\partial x^\nu / \partial \lambda$  をかければ

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\kappa\nu}^\mu k^\kappa k^\nu = 0 \tag{2.104}$$

となり， $k^\nu \equiv dx^\nu/d\lambda$  であるから光の測地線方程式が得られる．

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\kappa\nu}^\mu \frac{dx^\kappa}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{2.105}$$

測地線方程式を解くことで，重力場中の質点や光の経路を記述することができるようになる．

## 2.2.4 アインシュタイン方程式

ニュートン力学において，位置  $\mathbf{x}'$  に存在する質量密度  $\rho(\mathbf{x}')$  の物質が位置  $\mathbf{x}$  に及ぼす重力の重力ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  は，

$$\phi(\mathbf{x}) = - \int_V \frac{G\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \tag{2.106}$$

となる。ここで、 $G$  は万有引力定数、 $V$  は質量が分布している空間領域を表す。この式より、重力ポテンシャル  $\phi(\mathbf{x})$  は以下のポアソン方程式に従うことがわかる。

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}) \quad (2.107)$$

この式は物質の存在により重力場ができることを表している。これを 4 次元化かつ共変な形にすることを考える。ここで、4 次元の運動量すなわち 4 元運動量を以下のように定義する。

$$p^\mu = mu^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (\text{ただし } \mu = 0, 1, 2, 3) \quad (2.108)$$

$\tau$  は固有時間である。同様に密度という質量と関係した量も、圧力を用いて 4 元化することができる。これをエネルギー・運動量テンソルと呼び、 $T^{\mu\nu}$  と書く。これは流体ならば  $x^\nu$  一定の面を横切る 4 元運動量  $p^\mu$  の流れを表す。エネルギー・運動量テンソルはランク 2 のテンソルであり、これを定義することでポアソン方程式の右辺を共変な形で書けるようになる。

$$(T^{\mu\nu}) = \rho \begin{pmatrix} c^2 & cv^1 & cv^2 & cv^3 \\ cv^1 & (v^1)^2 & v^1v^2 & v^1v^3 \\ cv^2 & v^1v^2 & (v^2)^2 & v^2v^3 \\ cv^3 & v^1v^3 & v^2v^3 & (v^3)^2 \end{pmatrix} \quad (2.109)$$

エネルギー・運動量テンソルはメトリックを用いて次の形に書くことができる。

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2) u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (2.110)$$

また、局所ローレンツ系をとれば、エネルギー保存則はエネルギー・運動量テンソルを用いて

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.111)$$

と表せられる。

ポアソン方程式の右辺がランク 2 のテンソルで表されるなら左辺もランク 2 のテンソルで表されなくてはならないという観点から、 $\alpha\Lambda, \kappa$  を何らかの定数として重力場の方程式を次の形に仮定する。

$$R^{\mu\nu} + \alpha Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (2.112)$$

$\Lambda$  は宇宙項または宇宙定数といわれ、ここでは  $\Lambda = 0$  として扱う。エネルギー保存則  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$  より  $\nabla_\nu (R^{\mu\nu} + \alpha Rg^{\mu\nu}) = 0$  となる。式 (2.94) のビアンキ恒等式から

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad (2.113)$$

と求めることができた。 $\kappa$  は重力が低いときに方程式がニュートンの重力理論と等しくなるという考察から求める。重力場が弱い場合は  $g_{\mu\nu}$  がほとんど  $\eta_{\mu\nu}$  と等しいと考え

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.114)$$

とミンコフスキー時空からのずれを表す。クリストッフエル記号は次のように近似できる。

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\kappa} (\partial_\lambda g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\lambda} - \partial_\kappa g_{\lambda\nu}) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\kappa} (\partial_\lambda h_{\kappa\nu} + \partial_\nu h_{\kappa\lambda} - \partial_\kappa h_{\lambda\nu}) \quad (2.115)$$

$h_{\mu\nu}$  と  $dx^i/dx\tau$  の 2 次以上の項は微少量なので無視すると、測地線方程式の 2 項目は  $\nu = 0, \lambda = 0$  の場合のみを考えればよい。

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}\eta^{0\kappa} (\partial_0 h_{\kappa 0} + \partial_0 h_{\kappa 0} - \partial_\kappa h_{00}) = -\frac{1}{2}\partial_0 h_{00} = 0 \quad (2.116)$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\eta^{i\kappa}(\partial_0 h_{x0} + \partial_0 h_{\kappa 0} - \partial_\kappa h_{00}) = -\frac{1}{2}\partial^i h_{00} \quad (2.117)$$

と求められるので、測地線方程式は次の形になる．

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \quad (2.118)$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\partial^i h_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0 \quad (2.119)$$

ここで、 $dx^0/d\tau = c$  なので、式 (2.119) の左辺第 2 項は  $(1/2)c^2\partial^i h_{00}$  と書ける．また、ニュートンの運動方程式との比較から

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} \quad (2.120)$$

という関係が導ける．ここで、リッチテンソルの 00 成分は

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{0\kappa 0}^{\kappa} = \partial_\kappa \Gamma_{00}^\kappa - \partial_0 \Gamma_{0\kappa}^\kappa + \Gamma_{\eta\kappa}^\kappa \Gamma_{00}^\eta - \Gamma_{\eta 0}^\kappa \Gamma_{0\kappa}^\eta \\ &= \partial_i \Gamma_{00}^i = \partial_i \left( -\frac{1}{2}\partial^i h_{00} \right) = -\frac{1}{2}\partial_i \partial^i h_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta\phi \end{aligned} \quad (2.121)$$

これを反変テンソルに変換すれば以下の関係を得る．

$$R^{00} = g^{0\lambda} g^{0\kappa} R_{\lambda\kappa} = (-1)^2 R_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta\phi \quad (2.122)$$

また、式 (2.112) の両辺を縮約し

$$g_{\nu\mu} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = R - \frac{1}{2} \times 4R = -R = \kappa T_\nu^\nu \quad (2.123)$$

つまり

$$R^{\mu\nu} = \kappa \left( T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T_\eta^\eta \right) \quad (2.124)$$

という関係が成り立つことが分かる．この 00 成分が知りたいから、

$$R^{00} = \kappa \left( T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T_\eta^\eta \right) = \kappa \left( T^{00} + \frac{1}{2} T_\eta^\eta \right) \quad (2.125)$$

ここで、エネルギー・運動量テンソルは局所ローレンツ系を考えているので  $T^{\mu\nu} = (\rho c^2, 0, 0, 0)$  とすると

$$R^{00} = \kappa \left( \rho c^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \right) = \frac{1}{2} \kappa \rho c^2 \quad (2.126)$$

と分かる．今までの議論から

$$\frac{1}{c^2} \Delta\phi = \frac{1}{2} \kappa \rho c^2 \quad (2.127)$$

であり、ポアソン方程式  $\Delta\phi = 4\pi G\rho$  を用いて

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (2.128)$$

を得る．よって重力場の基礎方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (2.129)$$

と書かれ、これをアインシュタイン方程式と呼び一般相対性理論の基礎となる方程式が導かれた．

## 2.2.5 シュバルツシルト解

ここでは、本研究で仮定しているシュバルツシルト解について述べる。シュバルツシルト解は一般相対性理論の基礎方程式の厳密解である。ここでは、極座標  $(x^\mu) = (ct, r, \theta, \varphi)$  で記述される球対称な時空を仮定する。また、時空が静的であるということも仮定する。

ミンコフスキー時空での不変間隔は次のように表すことができる。

$$ds^2 = -(cdt^2) + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.130)$$

重力がある際は  $r$  のみの関数でメトリックが表されと考え、次のように拡張する。

$$ds^2 = g_{00}(r)(cdt^2) + g_{11}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.131)$$

重力源から離れたところではミンコフスキー時空と一致する必要があるので、 $g_{00} < 0$  かつ  $g_{11} > 0$  とわかる。ここで、 $r$  の関数として  $\nu(r)$  と  $\mu(r)$  を仮定し、 $g_{00} = -e^\nu$ 、 $g_{11} = e^\mu$  とおく。すなわち

$$ds^2 = -e^\nu(cdt^2) + e^\mu dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.132)$$

であり、メトリックは  $(g_{\mu\nu}) = (-e^\nu, e^\mu, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$  と書ける。また、 $(g^{\mu\nu}) = (-e^{-\nu}, e^{-\mu}, r^{-2}, r^{-2} \sin^{-2} \theta)$  である。

クリストッフェル記号は次のように求めることができる。

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{0\kappa} (\partial_1 g_{\kappa 0} + \partial_0 g_{\kappa 1} - \partial_\kappa g_{10}) \quad (2.133)$$

$$= \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00} \quad (2.134)$$

$$= \frac{1}{2} (-e^{-\nu}) \frac{\partial}{\partial r} (-e^\nu) \quad (2.135)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} \quad (2.136)$$

同様にして 0 でない成分をまとめれば

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\mu} \frac{d\nu}{dr}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{d\mu}{dr}, \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{-\mu}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-\mu} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \end{aligned} \quad (2.137)$$

また、リッチテンソルを求めると、0 でないものは次のようになる。

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{\nu-\mu} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d^2 \nu}{dr^2} - \frac{1}{4} \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\mu}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right\} = 0 \\ R_{11} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\mu}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\mu}{dr} = 0 \\ R_{22} &= -1 + e^{-\mu} \left( 1 + \frac{1}{2} r \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2} r \frac{d\mu}{dr} \right) = 0 \\ R_{33} &= -\sin^2 \theta + \sin^2 \theta e^{-\mu} \left( 1 + \frac{1}{2} r \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2} r \frac{d\mu}{dr} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.138)$$

第 1 式に  $e^{-\nu+\mu}$  をかけて第 2 式に足すと

$$e^{-\nu+\mu} R_{00} + R_{11} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\nu + \mu) = 0 \quad (2.139)$$

となる． $b$  を任意定数として

$$\nu + \mu = b \quad (2.140)$$

とかけるので，第 3 式に代入すれば

$$\begin{aligned} R_{22} &= -1 + e^{-\mu} \left( 1 - r \frac{d\mu}{dr} \right) \\ &= -1 + \frac{d}{dr} (r e^{-\mu}) = 0 \end{aligned} \quad (2.141)$$

を得る． $a$  を積分定数とすれば

$$\begin{aligned} -r + r e^{-\mu} + a &= 0 \\ \therefore e^{-\mu} &= 1 - a/r \end{aligned} \quad (2.142)$$

となる．したがって不変間隔はつぎのように書ける．

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{a}{r} \right) e^b (dx^0)^2 + \frac{1}{1 - a/r} (dr)^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.143)$$

$e^{b/2} x^0$  を改めて  $x^0$ ，積分定数  $a$  を  $r_g$  と書き直せば

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{a}{r} \right) (dx^0)^2 + \frac{1}{1 - a/r} (dr)^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.144)$$

と表せる．計量がこのように与えられているアインシュタイン方程式の解をシュバルツシルト解と呼ぶ．これは，重力源の外部で成り立つ解であることに注意したい．

$r_g$  とおいた積分定数はシュバルツシルト半径と呼ばれる．これは長さの次元を持つ．弱い重力のときニュートン力学と一致することから具体的に  $r_g$  を求める．式 (2.114) より，

$$g_{00} = - (1 - r_g/r) = \eta_{00} + h_{00} = - (1 + 2\phi/c^2) \quad (2.145)$$

であり，ニュートン力学で質点  $M$  が作る重力ポテンシャルは  $\phi = -GM/r$  であるから

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.146)$$

と分かる．例えば地球の半径  $R = 6400\text{km}$ ，質量  $M = 5.97 \times 10^{24}\text{kg}$  を代入すればシュバルツシルト半径は  $8.85\text{mm}$  と求めることができる．

## 2.2.6 測地線方程式から有限質量の物体の軌道を求める

惑星はほぼ円に近い楕円軌道を描き，恒星の周りを公転している．楕円の公転軌道の焦点の一つが恒星の位置と一致している．太陽に最も近づく点を近日点と呼び，近日点も少しづつ移動していることが観測により分かっている．水星の近日点移動は一世紀当たり  $574$  秒であり，そのうち  $531$  秒は説明がついたが，残りの  $43$  秒は当時の理論では説明ができなかった．そこで，一般相対性理論の効果を取り入れることで，太陽から最も重力の効果を受ける水星の近日点移動を説明できるようになった [1]．近日点移動の一般相対論の効果は，シュバルツシルト時空中での粒子軌道を調べることで理解することができる．ここでは，シュバルツシルト時空中の有限質量の粒子の軌道を記述する測地線方程式を導出する．

シュバルツシルト時空中の粒子の運動を表す測地線方程式は，ドットを固有時間での微分として

$$\ddot{t} + \frac{d\nu}{dr} \dot{t} \dot{r} = 0 \quad (2.147)$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2} e^{\nu-\mu} \frac{d\nu}{dr} (c\dot{t})^2 + \frac{1}{2} \frac{d\mu}{dr} \dot{r}^2 - r e^{-\mu} \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta e^{-\mu} \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (2.148)$$



$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (2.149)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cot\theta \dot{\theta}\dot{\varphi} = 0 \quad (2.150)$$

と表すことができる。  $\theta = \pi/2$  が解になっているのはすぐにわかる。次に、式 (2.150) について解くことを考える。  $\dot{\varphi} \neq 0$  として、両辺を  $\dot{\varphi}$  で割り、積分を実行すると

$$\int \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} d\tau + \int \frac{2}{r}\dot{r}d\tau + \int 2\cot\theta \dot{\theta}d\tau = \int \frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2 \int \frac{dr}{r} + 2 \int \frac{d\sin\theta}{\sin\theta} = \ln(\dot{\varphi} r^2 \sin^2\theta) = (\text{定数}) \quad (2.151)$$

と求められる。また、  $\theta = \pi/2$  であるから、  $r^2\dot{\varphi} = L$  という面積速度一定の式が求められる。

同様の操作で式 (2.147) を解くと

$$\begin{aligned} \int d\tau \left( \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \frac{d\nu}{dr}\dot{r} \right) &= \int \frac{d\dot{t}}{\dot{t}} + \int \frac{d\nu dr}{dr d\tau} d\tau = \ln \dot{t} + \int d\nu = \ln \dot{t} + \nu \\ &= \ln(\dot{t} e^\nu) = \ln \left[ \dot{t} \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \right] = (\text{定数}) \end{aligned} \quad (2.152)$$

という関係があることが分かる。これに定数  $c$  をかけても定数には変わらないので。

$$c\dot{t}(1 - r_g/r) = c\dot{t}e^\nu \equiv E \quad (2.153)$$

と書ける。これはエネルギー保存則を表している。  $\theta = \pi/2$  及び  $\mu + \nu = 0$  を用いて式 (2.148) を変形すると

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} + \frac{1}{2}(c\dot{t}e^\nu)^2 \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \dot{r}^2 - r e^\nu \dot{\varphi}^2 \\ &= \ddot{r} + \frac{1}{2} E^2 \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \dot{r}^2 - e^\nu \frac{1}{r^3} L^2 \end{aligned} \quad (2.154)$$

となり、両辺に  $e^{-\nu}\dot{r}$  をかければ

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-\nu}\dot{r} \left( \ddot{r} + \frac{1}{2} E^2 \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \dot{r}^2 - e^\nu \frac{1}{r^3} L^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left( e^{-\nu} \dot{r}^2 - E^2 e^{-\nu} + \frac{1}{r^2} L^2 \right) \end{aligned} \quad (2.155)$$

と変形できるので、積分すれば

$$-e^\nu (c\dot{t})^2 + e^{-\nu} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = (\text{定数}) \quad (2.156)$$

となる。この式は次の形とみることもできる。

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = (\text{定数}) \quad (2.157)$$

不変間隔と固有時間の関係  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(cd\tau)^2$  と比較すれば、定数は  $-c^2$  と分かるので、式 (2.157) の右辺を  $-c^2$  に書き換えて因数分解することで軌道を与える式が導ける。

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + c^2 \right) \quad (2.158)$$

この式を実際に解いてみる。  $\dot{r} = dr/d\tau = (dr/d\varphi)(d\varphi/d\tau) = (dr/d\varphi)(L/r^2)$  であり、  $u \equiv 1/r$  とすれば  $du/d\varphi = -(1/r^2)(dr/d\varphi)$  となる。この二つから

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{r^2} = -L \frac{du}{d\varphi} \quad (2.159)$$

と求められ、式 (2.157) に代入し整理すれば解くべき式が出てくる。

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{E^2 - c^2}{L^2} + \frac{r_g c^2}{L^2} u - u^2 + r_g u^3 \quad (2.160)$$

この両辺を  $\varphi$  で微分して  $2du/d\varphi$  で割ると

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{r_g c^2}{2L^2} + \frac{3}{2}r_g u^2 \quad (2.161)$$

という近日点の移動を表す微分方程式ができる。

## 第 3 章

# ニュートン力学での惑星楕円軌道

ここでは、ニュートン力学における中心天体まわりの惑星軌道を考える。この軌道は一般には、楕円形軌道、放物線形軌道、双曲線形軌道に分類されるが、今回は中心天体の周りで周回し続ける軌道を考えたいので、閉じた軌道である楕円軌道のみを考える。ニュートン力学での万有引力ポテンシャルの場合には、中心天体からの距離  $r$  の方向への速度  $\dot{r}$  の符号が変わる時間間隔と中心天体に対する回転方向を表す座標  $\varphi$  の方向への速度  $\dot{\varphi}$  の符号が変わる時間間隔が等しいため、閉じた惑星軌道は楕円軌道となる。以下では惑星を質点粒子と考えることにより運動を記述する。また、この節は主に文献 [7] を参考にした。

### 3.1 中心力場での運動

ポテンシャル・エネルギー  $U$  がある決まった固定点までの距離で決まるような場（中心力場）での質量  $m$  の粒子の運動を考える。このような場における粒子の軌道は一つの平面内にある。中心天体を原点として極座標  $(r, \varphi)$  を用いると粒子に対するエネルギー保存則と角運動量保存則は以下のようにかける。

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r), \quad (3.1)$$

$$L = mr^2\dot{\varphi}. \quad (3.2)$$

ここで、ドットは時間  $t$  による微分を表し、 $\dot{r}$ 、 $\dot{\varphi}$  はそれぞれ

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3.3)$$

である。式 (3.2) より、 $\dot{\varphi} = L/(mr^2)$  となり、これを式 (3.1) に代入すると

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r), \quad (3.4)$$

が得られる。右辺の第 1 項は粒子の運動エネルギー、第 2 項は遠心力のポテンシャル・エネルギー、第 3 項は中心力場のポテンシャル・エネルギーを表す。ここで、遠心力のポテンシャル・エネルギーと中心力場のポテンシャル・エネルギーの和として、以下の有効ポテンシャル  $V(r)$  を定義する。

$$V(r) \equiv U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (3.5)$$

このポテンシャルを用いると、 $\dot{r}$  について以下のように解くことができる。

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\{E - V(r)\}}. \quad (3.6)$$

粒子の運動は本来、平面上の 2 次元運動であるが、有効ポテンシャルを定義すると粒子運動の動径方向の運動は有効ポテンシャルの場合の 1 次元運動とみなすことができる（ただし、この場合は角運動量  $L$  に依存する）。また、 $\dot{r} = 0$  の点、つまり、 $V(r) = E$  となる点は  $r$  方向の増減が変わる点を表す。この点は、角運動量  $L$  を持った運動では粒子軌道の  $r$  方向の転回点を表す。

時間座標  $t$  と角度座標  $\varphi$  はともに動径座標  $r$  の関数として書くことができる。式 (3.6) より、時間  $t$  は  $r$  の関数として以下のように書くことができる。

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\{E - V(r)\}}} + C_1. \quad (3.7)$$

ここで、 $C_1$  は任意定数である。また、式 (3.2) より、

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt, \quad (3.8)$$

であることから、角度座標  $\varphi$  についても  $r$  の関数として書くことができ、以下の式が得られる。

$$\varphi = \pm \int \frac{L}{r^2 \sqrt{2m\{E - V(r)\}}} dr + C_2. \quad (3.9)$$

ここで、 $C_2$  は任意定数である。

## 3.2 惑星の楕円軌道

万有引力に対するポテンシャル・エネルギー

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (\alpha > 0)$$

の元での粒子の運動を考える。ここで、 $\alpha$  は正の定数で、万有引力定数  $G$ 、中心天体の質量  $M$ 、粒子の質量  $m$  を用いて  $\alpha = GMm$  である。このとき、有効ポテンシャルは

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (3.10)$$

となる。 $V(r) = 0$  の点である

$$r = \frac{L^2}{2m\alpha} \equiv r_1 \quad (3.11)$$

に対応する点で有効ポテンシャル  $V(r)$  の正負が入れかわる。極限計算から明らかなように

$$\lim_{r \rightarrow 0} V(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{L^2 - 2m\alpha r}{2mr^2} = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0, \quad (3.12)$$

となる。このことから、 $0 < r < r_1$  の領域で  $V(r) > 0$ 、 $r_1 < r$  で  $V(r) < 0$  であることがわかる。また、

$$V'(r) = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} \quad (3.13)$$

であることから、 $V'(r) = 0$  となる  $r$  は

$$r = \frac{L^2}{\alpha m} \equiv p \quad (3.14)$$

である。この  $r$  に対応する点で有効ポテンシャル  $V(r)$  は以下の極小値  $V_{\min}$  をとる。

$$V_{\min} = V(p) = -\frac{\alpha^2 m}{2L^2}. \quad (3.15)$$

上で見たように,  $V(r) = E$  の点が動径方向の転回点を表していることから,  $E < 0$  の場合に粒子軌道は  $r$  の有界な範囲に限定されることがわかる.

以下, 粒子の楕円軌道を表す式を導出する. 式 (3.9) より, 角度座標  $\varphi$  は以下の積分から計算される.

$$\varphi = \pm \int \frac{L}{r^2 \sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2m\alpha}{r}}} dr + C_2 \quad (3.16)$$

ここで,  $u = r^{-1}$  の変数変換を行うことにより,  $\varphi$  について以下の表現を得ることができる.

$$\varphi = \mp \int \frac{L}{\sqrt{2mE - L^2 u^2 + 2m\alpha u}} du + C_2 \quad (3.17)$$

$$= \mp \int \frac{L}{\sqrt{2mE - L^2 (u^2 - 2(m\alpha/L^2)u)}} du + C_2 \quad (3.18)$$

$$= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - (u^2 - 2(m\alpha/L^2)u)}} + C_2 \quad (3.19)$$

$$= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2}} + C_2 \quad (3.20)$$

$$= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{L^2} \left(2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}\right) - \left(u - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2}} + C_2 \quad (3.21)$$

$$= \pm \cos^{-1} \frac{L \left(u - \frac{m\alpha}{L^2}\right)}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}} + C_2 \quad (3.22)$$

これより,  $\varphi$  は

$$\varphi = \pm \cos^{-1} \frac{\frac{L}{r} - \frac{m\alpha}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}} + C_2 \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

となる. 上で定義した有効ポテンシャル  $V(r)$  の極小値を実現する動径座標  $p$  および

$$e \equiv \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad (3.25)$$

を用いると

$$\varphi = \pm \cos^{-1} \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r} - 1 \right) + C_2, \quad (3.26)$$

となる. この  $e$  は離心率と呼ばれる. ここで  $\varphi$  が増加する方向を上式の  $+$  を取ることにより指定し,  $\varphi$  の原点を  $C_2 = 0$  により指定すると,

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi, \quad (3.27)$$

となる.  $e = 0$  の場合,  $r = p$  の円軌道を表す. また,  $V_{\min} < E < 0$  の場合には,  $e < 1$  となり, 軌道は楕円軌道となる. 楕円軌道の場合,  $\varphi = 0$  で近日点,  $\varphi = \pi$  で遠日点となる. 近日点での動径座標  $r = r_{\text{perihelion}}$  および遠日点での動径座標  $r = r_{\text{aphelion}}$  はそれぞれ

$$r_{\text{perihelion}} = \frac{p}{1+e}, \quad r_{\text{aphelion}} = \frac{p}{1-e}, \quad (3.28)$$

である。楕円長半径を  $a$  とすると

$$a = \frac{r_{\text{perihelion}} + r_{\text{aphelion}}}{2} = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{-2E}, \quad (3.29)$$

となる。楕円の中心から焦点までの距離は  $ae$  で表される。また、楕円短半径を  $b$  とすると

$$b = \sqrt{a^2 - (ae)^2} = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}, \quad (3.30)$$

となる。

式 (3.7) より、時間座標は以下の積分で表される。

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} + \frac{2\alpha}{mr}}} + C_1. \quad (3.31)$$

この積分は以下のように計算することができる。

$$\begin{aligned} t &= \pm \int \frac{mr}{\sqrt{2mEr^2 + 2\alpha mr - L^2}} dr + C_1 \\ &= \pm \sqrt{\frac{mp}{\alpha}} \int \frac{r}{\sqrt{e^2 r^2 - (r - p)^2}} dr + C_1 \\ &= \pm \sqrt{\frac{mp}{\alpha}} \int \frac{r}{\sqrt{-(1 - e^2)r^2 + 2pr - p^2}} dr + C_1 \\ &= \pm \sqrt{\frac{mp}{\alpha(1 - e^2)}} \int \frac{r}{\sqrt{-r^2 + \frac{2pr}{1 - e^2} - \frac{p^2}{1 - e^2}}} dr + C_1 \\ &= \pm \sqrt{\frac{mp}{\alpha(1 - e^2)}} \int \frac{r}{\sqrt{-\left(r - \frac{p}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{p^2}{1 - e^2}}} dr + C_1 \\ &= \pm \sqrt{\frac{mp}{\alpha(1 - e^2)}} \int \frac{r}{\sqrt{\frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2} - \left(r - \frac{p}{1 - e^2}\right)^2}} dr + C_1 \\ &= \pm \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r}{\sqrt{e^2 a^2 - (r - a)^2}} dr + C_1 \end{aligned} \quad (3.32)$$

最初の式変形で、

$$L^2 = \alpha mp, \quad 2E = -\frac{m\alpha^2}{L^2}(1 - e^2) = -\frac{\alpha}{p}(1 - e^2) \quad (3.33)$$

となることを用いた。式 (3.32) の積分で

$$r - a = -ea \cos \xi \quad (3.34)$$

の置き換えをすると

$$\begin{aligned} t &= \pm \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e \cos \xi) d\xi + C_1 \\ &= \pm \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) + C_1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

ここで、 $\xi$  の増加方向を  $t$  の増加方向とそろえ、 $C_1 = 0$  となるように  $t$  の原点を決めると

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi), \quad r = a(1 - e \cos \xi), \quad \varphi = \cos^{-1} \left( \frac{\cos \xi - e}{1 - e \cos \xi} \right), \quad (3.36)$$

となる。  $\xi = 0$  のとき,  $r = a(1 - e) = r_{\text{perihelion}}$  となるので近日点に対応する。また,  $\xi = \pi$  のとき,  $r = a(1 + e) = r_{\text{aphelion}}$  となるので遠日点に対応する。また,

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = \frac{(1 - e^2) \sin^2 \xi}{(1 - e \cos \xi)^2} \quad \therefore \quad \sin \xi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi}{1 - e \cos \xi} \quad (3.37)$$

となることから, 直交座標  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  での表式は,

$$x = a(\cos \xi - e), \quad (3.38)$$

$$y = b \sin \xi, \quad (3.39)$$

となる。これより, 楕円の式

$$\frac{(x - ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.40)$$

が得られる。

### 3.3 3次元空間内の質点の楕円軌道

ここでは, 惑星の軌道を3次元空間内の  $xy$  平面内を運動する軌道として整理する。楕円軌道に沿って運動する質点の位置座標  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  は

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) = \left( \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}, \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}, 0 \right) \quad (3.41)$$

で表される場合を考える。ここで,  $r$  と  $\varphi$  には式 (3.27) の関係がある。このとき, 質点の速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (3.42)$$

となる。ここで,

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \{E - V(r)\} = \frac{\alpha e^2}{mp} \sin^2 \varphi \quad (3.43)$$

となることから

$$\dot{r} = e \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \varphi, \quad (3.44)$$

であることがわかる。ここで,  $\varphi = 0$  が近日点であることから  $\dot{r}$  の符号を決めた。また, 角運動量保存則より,

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{\sqrt{\alpha mp}}{mp^2} (1 + e \cos \varphi)^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{mp^3}} (1 + e \cos \varphi)^2 \quad (3.45)$$

である。これらより,  $\dot{r}$ ,  $\dot{\varphi}$  ともに  $\varphi$  の関数である。また, 速度ベクトル  $\mathbf{v}$  の各成分も以下の様に  $\varphi$  の関数として計算される。

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} = e \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \varphi \cos \varphi - \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \varphi (1 + e \cos \varphi) = -\sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \varphi, \quad (3.46)$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} (e + \cos \varphi), \quad (3.47)$$

$$v_z = \dot{z} = 0. \quad (3.48)$$

### 3.4 遠方観測者の天球面に射影した軌道

ここでは、3次元空間内の  $xy$  平面内を運動する惑星の軌道が遠方の観測者からどのように見えるのかを考える。まず、観測者 (observer) の位置は

$$\mathbf{r}_o = (x_o, y_o, z_o) = (d \sin \theta \cos \phi, d \sin \theta \sin \phi, d \cos \theta) \quad (3.49)$$

とする。ここで、 $d$  は中心天体から観測者までの距離、 $\theta$  と  $\phi$  は球座標の角度座標であり、それぞれ  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  の範囲を取る。観測者の天球面であるが、これは観測者の位置に原点をもつ直交座標系  $(X, Y, Z)$  を導入することで設定することができる。まず、 $Z$  方向は  $\mathbf{r}_o$  と同じ方向に設定する。また、 $\theta$  座標の極方向 ( $\theta = 0$  の方向) の軸を観測者の天球面に射影した方向が  $Y$  方向となるように  $Y$  方向を設定する。 $X$  方向は  $(X, Y, Z)$  の各方向が右手系となるように設定する。このように設定すると、 $Z$  方向の単位ベクトル  $\hat{\mathbf{Z}}$  は

$$\hat{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{r}_o}{|\mathbf{r}_o|} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (3.50)$$

となる。 $X$  方向の単位ベクトル  $\hat{\mathbf{X}}$  は、

$$\hat{\mathbf{X}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial \phi} \right|} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (3.51)$$

となる。同様に、 $Y$  方向の単位ベクトル  $\hat{\mathbf{Y}}$  は、

$$\hat{\mathbf{Y}} = -\frac{\frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial \theta} \right|} = (-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \quad (3.52)$$

これらの単位ベクトルより

$$\det(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}}) = \begin{vmatrix} -\sin \phi & -\cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1 \quad (3.53)$$

となり、正の値であることから、 $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}})$  は右手系であることが確認できる。

いま考えている直交座標系  $(X, Y, Z)$  の  $Z$  方向は  $\mathbf{r}_o$  の方向であるので、観測者は  $(X, Y)$  平面に射影された軌道を観測することになる。この平面に射影された軌道は、軌道の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  をこの平面に射影することで得られる。具体的には、軌道の位置を表す座標  $(X, Y)$  は以下のように計算される。

$$X = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{X}} = \frac{p \sin(\varphi - \phi)}{1 + e \cos \varphi}, \quad (3.54)$$

$$Y = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{Y}} = -\frac{p \cos \theta \cos(\varphi - \phi)}{1 + e \cos \varphi}. \quad (3.55)$$

観測者の方向が  $\theta = 0$ ,  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  の場合、

$$(X, Y) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \left( \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right), -\cos \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} (\cos \varphi, \sin \varphi) = (x, y) \quad (3.56)$$

となり、軌道を真上から観測することに対応する。また、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  の場合、

$$(X, Y) = \left( \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}, 0 \right) = (x, 0) \quad (3.57)$$



となり,  $x$  方向の運動のみ観測する軌道となる. 次に,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi = 0$  の場合,

$$(X, Y) = \left( \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}, 0 \right) = (y, 0) \quad (3.58)$$

となり,  $y$  方向の運動のみ観測する軌道となる.

射影された軌道の原点からの距離  $R$  は以下のように計算される.

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2(\varphi - \phi)}. \quad (3.59)$$

この距離の極値は一般に  $\varphi = 0$  の近日点の位置からずれて存在することから, 射影された軌道の原点から最も近い位置と近日点の位置は一般には一致しない.

また, 軌道の視線方向 (line of sight) の速度  $V_{\text{LOS}}$  は速度ベクトル  $\mathbf{v}$  を  $\hat{\mathbf{Z}}$  方向に射影することにより,

$$V_{\text{LOS}} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{Z}} \quad (3.60)$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} (-\sin \varphi, e + \cos \varphi, 0) \cdot (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (3.61)$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \theta \{e \sin \phi + \sin(\phi - \varphi)\}, \quad (3.62)$$

となる.

## 第 4 章

# 一般相対性理論での惑星軌道

ここでは、一般相対性理論においてシュバルツシルト時空で記述される中心天体まわりの惑星軌道を考える。今回は中心天体の周りで周回し続ける軌道を考えたいので、閉じた軌道のみを考える。粒子は一般には重力は放出によってエネルギーを失うが、今回は重力波放出の効果は考えない。以下では惑星を質点粒子と考えることにより運動を記述する。また、この節は主に文献 [1][8][9] を参考にした。

### 4.1 保存量

ここでは、有限質量の質点粒子の軌道に沿った保存量であるエネルギー  $E$  と角運動量  $L$  についてまとめる。シュバルツシルト時空中で運動する有限質量の質点粒子の 4 元運動量を  $p^\mu$ 、静止質量を  $m$  とすると、4 元運動量の規格化条件は

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2, \quad (4.1)$$

となる。4 元速度  $u^\mu$  と 4 元運動量  $p^\mu$  の関係は

$$p^\mu = m u^\mu, \quad (4.2)$$

であることから、4 元速度に対する規格化条件は

$$u^\mu u_\mu = -c^2, \quad (4.3)$$

となる。ここで、 $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  であり、有限質量の質点を考えているので、 $\tau$  は固有時間である。このとき、 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 、および

$$u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du^\nu}{d\tau}, \quad (4.4)$$

であることから、4 元速度の規格化条件を具体的に書くと

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(c \frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -c^2, \quad (4.5)$$

となる。ラグランジアン  $L$  は

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (4.6)$$

となる。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (4.7)$$

となる。ここで、2 倍したラグランジアン  $2L$  を具体的に書くと

$$2L = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (u^\varphi)^2 \quad (= -c^2). \quad (4.8)$$

となる。また、時間座標  $t$  および角度座標  $\theta$  が時空計量に現れていないことから、これらは循環座標である。つまり、これらの座標に対する保存量が存在する [8][9]。  $t$  と  $\varphi$  に対するオイラー・ラグランジュ方程式より、

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^t} = 0, \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\varphi} = 0, \quad (4.9)$$

となり、  $C_t$ ,  $C_\varphi$  を定数として

$$\frac{\partial L}{\partial u^t} = C_t, \quad \frac{\partial L}{\partial u^\varphi} = C_\varphi, \quad (4.10)$$

が得られる。具体的に計算すると

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) u^t = C_t, \quad \therefore -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = C_t, \quad (4.11)$$

$$r^2 \sin^2 \theta u^\varphi = C_\varphi, \quad \therefore r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = C_\varphi, \quad (4.12)$$

となる。

ここで、質点粒子のエネルギー  $E$  と角運動量  $L_z$  を以下の式で定義する。

$$E \equiv -cp_t, \quad L_z \equiv p_\varphi. \quad (4.13)$$

これらが定数であることは以下のようにわかる。まず、

$$p^t = g^{t\mu} p_\mu = g^{tt} p_t = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{E}{c}, \quad p^\varphi = g^{\varphi\mu} p_\mu = g^{\varphi\varphi} p_\varphi = \frac{L_z}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (4.14)$$

となり、これらは、それぞれ

$$p^t = mu^t = m \frac{dx^t}{d\tau} = mc \frac{dt}{d\tau}, \quad p^\varphi = mu^\varphi = m \frac{dx^\varphi}{d\tau} = m \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (4.15)$$

である。これより、

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{E}{c} = mc \frac{dt}{d\tau}, \quad \frac{L_z}{r^2 \sin^2 \theta} = m \frac{d\varphi}{d\tau}, \quad (4.16)$$

であることから、

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = -\frac{E}{mc^2}, \quad r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L_z}{m}, \quad (4.17)$$

が得られる。これらの右辺の量は循環座標の存在から得られた定数  $C_t$ ,  $C_\varphi$  と

$$-\frac{E}{mc^2} = C_t, \quad \frac{L_z}{m} = C_\varphi, \quad (4.18)$$

の関係があることから、  $E$  と  $L_z$  は定数であることがわかる。以上より、

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{E}{mc^2}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L_z}{mr^2 \sin^2 \theta}, \quad (4.19)$$

が得られる。

## 4.2 動径方程式

まず、粒子の軌道として球座標の赤道面  $\theta = \frac{\pi}{2}$  に束縛された軌道を考える。このような軌道を考えていい理由は以下の通りである。オイラー・ラグランジュ方程式の  $\theta$  成分、

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (4.20)$$

を具体的に計算すると

$$\frac{d}{d\tau} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) - \frac{L_z^2 \cos \theta}{m^2 r^2 \sin^3 \theta} = 0, \quad (4.21)$$

$$(4.22)$$

であるが、この式を満たすには  $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$  および  $\cos \theta = 0$  を満たせば良い。このような  $\theta$  として、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  がオイラー・ラグランジュ方程式の解となっている。

4 元速度の規格化条件 [式 (4.5)] に、エネルギー  $E$  と  $L$  で記述される式 (4.19) および  $\theta = \frac{\pi}{2}$  を代入すると

$$\left( \frac{1}{c} \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{E^2}{m^2 c^4} - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( 1 + \frac{L_z^2}{m^2 c^2 r^2} \right), \quad (4.23)$$

または

$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{E^2}{m^2 c^2} - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( c^2 + \frac{L_z^2}{m^2 r^2} \right), \quad (4.24)$$

となる。これは動径方向の運動を記述する方程式（動径方程式）である。

ここで、単位静止質量あたりのエネルギー  $\tilde{E}$  および単位静止質量あたりの角運動量  $\tilde{L}$  を

$$\tilde{E} \equiv \frac{E}{m}, \quad \tilde{L} \equiv \frac{L_z}{m}, \quad (4.25)$$

と定義すると、動径方程式は

$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( \frac{\tilde{L}^2}{r^2} + c^2 \right), \quad (4.26)$$

となる。

## 4.3 ニュートン力学との対応

以下、上で導いた動径方程式とニュートン力学での方程式との対応関係を調べてみる。まず、式 (4.24) より、

$$\frac{E^2}{m^2 c^2} = \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( c^2 + \frac{L_z^2}{m^2 r^2} \right) \quad (4.27)$$

動径座標  $r$  が大きい極限がニュートン力学の式に対応するので、両辺から  $c^2$  を引き、極限を取ったときに右辺に  $c^2$  の項が残らないようにすると

$$\frac{E^2}{m^2 c^2} - c^2 = \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( c^2 + \frac{L_z^2}{m^2 r^2} \right) - c^2 \quad (4.28)$$

となる。この式の両辺に  $m/2$  をかけると

$$\frac{mc^2}{2} \left( \frac{E^2}{m^2 c^4} - 1 \right) = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{mc^2}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( 1 + \frac{L_z^2}{m^2 c^2 r^2} \right) - 1 \right\} \quad (4.29)$$

ここで、定数  $\mathcal{E}$  と有効ポテンシャル  $\mathcal{V}(r)$  を次式のように定義する。

$$\mathcal{E} \equiv \frac{mc^2}{2} \left( \frac{E^2}{m^2 c^4} - 1 \right), \quad \mathcal{V}(r) \equiv \frac{mc^2}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( 1 + \frac{L_z^2}{m^2 c^2 r^2} \right) - 1 \right\} \quad (4.30)$$

これより、

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \mathcal{V}(r) \quad (4.31)$$

となる。これが、ニュートン力学の式と対応する式である。また、有効ポテンシャル  $\mathcal{V}(r)$  を書き換えると

$$\mathcal{V}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha L_z^2}{m^2 c^2 r^3} \quad (4.32)$$

となる。ここで、 $\alpha = GMm$  としている。この式の最初の 2 項がニュートン力学の式に対応していることから、一般相対論の効果は  $r^{-3}$  に比例する第 3 項に現れていることがわかる。

次にエネルギーに関して、ニュートン力学との対応をみる。まず、一般相対論でのエネルギー  $E$  は質量エネルギー  $mc^2$  と運動エネルギーの両方が含まれている。一方で、ニュートン力学でのエネルギーは運動エネルギーであった。これらより、ニュートン力学でのエネルギーを  $E_{\text{Newton}}$  とすると

$$E = mc^2 + E_{\text{Newton}} \quad (4.33)$$

とすることで、ニュートン力学でのエネルギー  $E_{\text{Newton}}$  を定義する。この式より、

$$\mathcal{E} = E_{\text{Newton}} \left( 1 + \frac{E_{\text{Newton}}}{2mc^2} \right), \quad (4.34)$$

となることがわかる。質点粒子が光速よりもずっと遅い速度で運動する場合には  $E_{\text{Newton}} \ll mc^2$  であるので、この場合には  $\mathcal{E} \sim E_{\text{Newton}}$  となる。

次に、軌道の方程式に関するニュートン力学との対応を考える。上で導出した動径方程式 [式 (4.26)]

$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( \frac{\tilde{L}^2}{r^2} + c^2 \right), \quad (4.35)$$

より、

$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 - \frac{\tilde{L}^2}{r^2} + \frac{r_g c^2}{r} + \frac{r_g \tilde{L}^2}{r^3}, \quad (4.36)$$

が得られる。上で見たように、 $r^{-3}$  の項が一般相対論の効果を表す項となっている。つまり、この項を除いた式はニュートン力学での軌道を再現する。この場合、閉じた軌道の場合には、楕円軌道となる。以下、これを確かめる。まず、 $r^{-3}$  の項を除いた式は

$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 - \frac{\tilde{L}^2}{r^2} + \frac{r_g c^2}{r}, \quad (4.37)$$

となる。ここで、

$$u \equiv \frac{1}{r} \quad (4.38)$$

の置き換えを行うと、

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\tau} \quad (4.39)$$

となることから，動径方程式は

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = u^4 \left( \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 - \tilde{L}^2 u^2 + r_g c^2 u \right), \quad (4.40)$$

となる．この式の両辺を

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2} = \tilde{L} u^2 \quad (4.41)$$

の2乗で割り，式を整理すると

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(u - \frac{r_g c^2}{2\tilde{L}^2}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{L}^2} \left\{ \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 + \left(\frac{r_g c^2}{2\tilde{L}}\right)^2 \right\}, \quad (4.42)$$

となる．この式の解は，

$$u = \frac{r_g c^2}{2\tilde{L}^2} + \frac{1}{|\tilde{L}|} \left\{ \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 + \left(\frac{r_g c^2}{2\tilde{L}}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cos(\varphi + \varphi_0) \quad (4.43)$$

となる．この式より，

$$\frac{2\tilde{L}^2}{r_g c^2 r} = 1 + \left\{ 1 + \frac{4\tilde{L}^2}{r_g^2 c^4} \left( \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \cos(\varphi + \varphi_0) \quad (4.44)$$

が得られる．ここで， $\varphi_0$  は定数であり，この式がニュートン力学での式 (3.27) に対応する．つまり，定数を  $\varphi_0 = 0$  とし，

$$p \equiv \frac{2\tilde{L}^2}{r_g c^2}, \quad e \equiv \left\{ 1 + \frac{4\tilde{L}^2}{r_g^2 c^4} \left( \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.45)$$

と定義すると

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi \quad (4.46)$$

となり，ニュートン力学での軌道の式が得られる．式 (4.45) で定義した  $p$  と  $e$  で単位質量あたりのエネルギーと角運動量の2乗を表すと

$$\tilde{E}^2 = c^4 \left\{ 1 + \frac{r_g(e^2 - 1)}{2p} \right\}, \quad \tilde{L}^2 = \frac{r_g c^2 p}{2}, \quad (4.47)$$

となる．

## 4.4 軌道の方程式

一般相対論の場合の軌道の方程式について調べる．まず，

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 - \frac{\tilde{L}^2}{r^2} + \frac{r_g c^2}{r} + \frac{r_g \tilde{L}^2}{r^3}, \quad (4.48)$$

に式 (4.47) を代入して整理すると

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{c^2 r_g}{2p} \left\{ e^2 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2 + \frac{r_g p^2}{r^3} \right\}, \quad (4.49)$$

となる．式 (4.49) の両辺を

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2} \quad (4.50)$$

の2乗で割り，式を整理すると

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{\tilde{L}^2} \left( \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 - \frac{\tilde{L}^2}{r^2} + \frac{r_g c^2}{r} + \frac{r_g \tilde{L}^2}{r^3} \right), \quad (4.51)$$

となる．式 (4.47) を代入して整理すると

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{e^2 - 1}{p^2}\right) r^4 + \frac{2}{p} r^3 - r^2 + r_g r, \quad (4.52)$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{p^2} \left\{ e^2 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2 + \frac{r_g p^2}{r^3} \right\}, \quad (4.53)$$

となる．この式が， $e$  と  $p$  を用いて書いた  $r$  に対する動径方程式である．

また， $u = r^{-1}$  の変換をすると

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = u^4 \left( \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 + r_g c^2 u - \tilde{L}^2 u^2 + r_g \tilde{L}^2 u^3 \right), \quad (4.54)$$

となる．この式の両辺を

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2} = \tilde{L} u^2 \quad (4.55)$$

の2乗で割り，式を整理すると

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{L}^2} \left( \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - c^2 \right) + \frac{r_g c^2}{\tilde{L}^2} u - u^2 + r_g u^3, \quad (4.56)$$

となる．更に，式 (4.47) を代入して整理すると

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{e^2 - 1}{p^2} + \frac{2u}{p} - u^2 + r_g u^3, \quad (4.57)$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{p^2} \left\{ e^2 - (1 - pu)^2 + r_g p^2 u^3 \right\}, \quad (4.58)$$

となる．この式が， $e$  と  $p$  を用いて書いた  $u$  に対する動径方程式である．次に， $\varphi$  に関する2階微分方程式を導く．上式を  $\varphi$  で微分しすると，

$$2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{du}{d\varphi} \left( \frac{2}{p} - 2u + 3r_g u^2 \right), \quad (4.59)$$

となる．これより，

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - u + \frac{3r_g}{2} u^2, \quad (4.60)$$

となる．右辺の最後の第3項が相対論効果を表す項である．また，これは測地線方程式から求めた式 (2.161) と一致していることが分かる．

## 4.5 相対論効果が小さい場合の軌道の方程式

中心天体から十分遠い距離を保ったまま運動する質点粒子の軌道は，相対論効果が小さいとする近似が成り立つ．ここでは，相対論効果が小さい場合の解を導出する．まず，ニュートン力学での解を  $u_N$  とすると

$$u_N = \frac{1}{p} (1 + \cos \varphi), \quad (4.61)$$

であり,

$$\frac{du_N}{d\varphi} = -\frac{e}{p} \sin \varphi, \quad (4.62)$$

この解は

$$\frac{d^2 u_N}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - u_N \quad (4.63)$$

を満たす．一般相対論の解  $u$  との差を

$$u_{\text{GR}} = u - u_N \quad (4.64)$$

と置き,  $u_N$  に比べて十分小さいと仮定する．一般相対論の解は式 (4.60) であることから,

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}(u_N + u_{\text{GR}}) = \frac{1}{p} - (u_N + u_{\text{GR}}) + \frac{3r_g}{2}(u_N + u_{\text{GR}})^2, \quad (4.65)$$

が成り立つが,  $u_{\text{GR}}$  が  $u_N$  に比べて十分小さいという近似のもとでは右辺第 3 項で

$$(u_N + u_{\text{GR}})^2 \sim u_N^2, \quad (4.66)$$

という近似が成り立つ．このとき, 一般相対論の効果を表す  $u_1$  は

$$\frac{d^2 u_{\text{rmGR}}}{d\varphi^2} = -u_{\text{GR}} + \frac{3r_g}{2}(u_N)^2 \quad (4.67)$$

で記述される．この式は, ニュートン力学での解  $u_0$  を代入すると

$$\frac{d^2 u_{\text{GR}}}{d\varphi^2} + u_{\text{GR}} = \frac{3r_g}{2p^2}(1 + e \cos \varphi)^2, \quad (4.68)$$

となる．まず, この方程式の一般解を求めてみる．齊次方程式

$$\frac{d^2 u_{\text{GR}}}{d\varphi^2} + u_{\text{GR}} = 0, \quad (4.69)$$

の基本解は

$$u_1(\varphi) = \cos \varphi, \quad u_2(\varphi) = \sin \varphi, \quad (4.70)$$

であることから, ロンスキー行列式は

$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = 1, \quad (4.71)$$

となる．よって, 非齊次方程式の特殊解  $u_0$  は

$$u_0(\varphi) = p(\varphi)u_1(\varphi) + q(\varphi)u_2(\varphi) \quad (4.72)$$

で与えられる．ここで,

$$p(\varphi) = \int \frac{-u_2(\varphi)}{W(u_1, u_2)} \cdot \frac{3r_g}{2p^2}(1 + e \cos \varphi)^2 d\varphi, \quad q(\varphi) = \int \frac{u_1(\varphi)}{W(u_1, u_2)} \cdot \frac{3r_g}{2p^2}(1 + e \cos \varphi)^2 d\varphi, \quad (4.73)$$

であり, 以下のように計算される．

$$\begin{aligned} p(\varphi) &= -\frac{3r_g}{2p^2} \int \sin \varphi (1 + e \cos \varphi)^2 d\varphi, \\ &= \frac{r_g}{2p^2} \left( \frac{1}{e} + 3 \cos \varphi + 3e \cos^2 \varphi + e^2 \cos^3 \varphi \right), \\ q(\varphi) &= \frac{3r_g}{2p^2} \int \cos \varphi (1 + e \cos \varphi)^2 d\varphi, \\ &= \frac{3r_g}{2p^2} \left\{ \sin \varphi + e(\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + e^2 \left( \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \right\}, \end{aligned}$$



これより，特殊解は

$$u_0(\varphi) = \frac{r_g}{2p^2} \left\{ \frac{1}{e} \cos \varphi + 3 + 3e(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) + e^2(1 + \sin^2 \varphi) \right\},$$

となる．これより， $C_1$ ， $C_2$  を定数とすると， $u_{\text{GR}}(\varphi)$  の一般解は

$$u_{\text{GR}}(\varphi) = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{3r_g}{2p^2} \left\{ 1 + e\varphi \sin \varphi + \frac{e^2}{3}(1 + \sin^2 \varphi) \right\}, \quad (4.74)$$

$$= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{3r_g}{2p^2} \left\{ 1 + e\varphi \sin \varphi + \frac{e^2}{6}(3 - \cos 2\varphi) \right\}, \quad (4.75)$$

となる．この解を  $\varphi$  で微分すると

$$\frac{du_{\text{GR}}}{d\varphi} = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \frac{3r_g}{2p^2} \left\{ e \sin \varphi + e\varphi \cos \varphi + \frac{e^2}{3} \sin 2\varphi \right\}, \quad (4.76)$$

が得られる．

一方， $u = u_{\text{N}} + u_{\text{GR}}$ ，および， $\varphi$  で微分した式は，

$$u(\varphi) = \frac{1}{p}(1 + e \cos \varphi) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{3r_g}{2p^2} \left\{ 1 + e\varphi \sin \varphi + \frac{e^2}{6}(3 - \cos 2\varphi) \right\}, \quad (4.77)$$

$$\frac{du(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{e}{p} \sin \varphi - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \frac{3r_g}{2p^2} \left\{ e \sin \varphi + e\varphi \cos \varphi + \frac{e^2}{3} \sin 2\varphi \right\}, \quad (4.78)$$

となる．この式で  $\varphi = 0$  のとき，

$$u(0) = \frac{1}{p}(1 + e) + C_1 + \frac{3r_g}{2p^2} \left( 1 + \frac{e^2}{3} \right), \quad \left. \frac{du(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = C_2, \quad (4.79)$$

である．また， $e = 0$  のとき，

$$u(\varphi) = \frac{1}{p} + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{3r_g}{2p^2}, \quad \frac{du(\varphi)}{d\varphi} = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi, \quad (4.80)$$

となる． $e = 0$  となる軌道が円軌道となるためには， $u$  が  $\varphi$  に依存しないことが必要であり，この場合，

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0 \quad (4.81)$$

となる．この場合， $\varphi = 0$  のとき，

$$u(0) = \frac{1}{p}(1 + e) + \frac{3r_g}{2p^2} \left( 1 + \frac{e^2}{3} \right), \quad \left. \frac{du}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0, \quad (4.82)$$

となり，解  $u$  は，

$$u(\varphi) = \frac{1}{p}(1 + e \cos \varphi) + \frac{3r_g}{2p^2} \left\{ 1 + e\varphi \sin \varphi + \frac{e^2}{6}(3 - \cos 2\varphi) \right\}, \quad (4.83)$$

となる．この式が，相対論効果が弱い場合の解である．つまり， $\frac{r_g}{p}$  が 1 次のオーダーまでの式である．右辺の第 1 項がニュートン力学に対応する項，第 2 項が相対論効果を表す項となっている．

## 4.6 近日点移動

ここでは、上で導いた解  $u(\varphi)$  に対し、軌道が円軌道に近い場合、つまり、 $e \ll 1$  の場合の軌道を調べる。まず、 $e$  の 1 次の項のみを残すと、

$$u(\varphi) = \frac{1}{p}(1 + e \cos \varphi) + \frac{3r_g}{2p^2}(1 + e \varphi \sin \varphi), \quad (4.84)$$

となる。 $e$  でまとめると、

$$u(\varphi) = \frac{1}{p} \left( 1 + \frac{3r_g}{2p} \right) + \frac{e}{p} \left( \cos \varphi + \frac{3r_g}{2p} \varphi \sin \varphi \right), \quad (4.85)$$

となる。ここで、 $x \ll 1$  に対する関数

$$f(x) = \cos(\varphi - x) \quad (4.86)$$

のマクローリン展開を考える。この関数より、

$$f'(x) = \sin(\varphi - x), \quad f''(x) = -\cos(\varphi - x), \quad f'''(x) = -\sin(\varphi - x), \quad \dots, \quad (4.87)$$

となることから、 $x = 0$  周りの展開は、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots, \quad (4.88)$$

であることから、

$$\cos(\varphi - x) = \cos \varphi + x \sin \varphi - \frac{1}{2}x^2 \cos \varphi - \frac{1}{6}x^3 \sin \varphi + \dots, \quad (4.89)$$

となる。この式で  $x$  の 1 次までの式は、

$$\cos(\varphi - x) \sim \cos \varphi + x \sin \varphi \quad (4.90)$$

となる。この展開式を  $u(\varphi)$  の解に適用することにより、相対論効果が弱く ( $r_g/p \ll 1$ )、かつ、軌道が円軌道に近い ( $e \ll 1$ ) 場合の近似式、

$$u(\varphi) \sim \frac{1}{p} \left( 1 + \frac{3r_g}{2p} \right) + \frac{e}{p} \cos \left\{ \left( 1 - \frac{3r_g}{2p} \right) \varphi \right\}, \quad (4.91)$$

が得られる。この式より、1 周後、軌道が同じ半径に戻ってくるときの  $\varphi$  の値は、

$$\left( 1 - \frac{3r_g}{2p} \right) \varphi = 2\pi, \quad (4.92)$$

より、

$$\varphi = \frac{2\pi}{1 - \frac{3r_g}{2p}} \sim 2\pi \left( 1 + \frac{3r_g}{2p} \right) \equiv 2\pi + \Delta\varphi, \quad (4.93)$$

となり、 $2\pi$  よりもわずかに大きい。1 周後、多く回転している角度  $\Delta\varphi$  は、

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi r_g}{p}, \quad (4.94)$$

である。中心天体から近日点までの距離  $r_{\text{perihelion}}$  と遠日点までの距離  $r_{\text{aphelion}}$  はそれぞれ、

$$r_{\text{perihelion}} = \frac{1}{u(0)} = \frac{p}{1 + \frac{3r_g}{2p} + e}, \quad r_{\text{aphelion}} = \frac{1}{u(\pi)} = \frac{p}{1 + \frac{3r_g}{2p} - e}, \quad (4.95)$$

となることより，軌道長半径  $a$  は，

$$a = \frac{r_{\text{perihelion}} + r_{\text{aphelion}}}{2} = \frac{p}{\left(1 + \frac{3r_g}{2p}\right)^2 - e^2} \left(1 + \frac{3r_g}{2p}\right) \sim \frac{p}{1 - e^2}, \quad (4.96)$$

となる．これを用いると，

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi r_g}{a(1 - e^2)} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}, \quad (4.97)$$

となる．

## 4.7 3次元空間内の質点の相対論的軌道と速度ベクトル

ここでは，相対論効果が弱い場合の式 (4.83) を用い，惑星の軌道を 3 次元空間内の  $xy$  平面内を運動する軌道として整理する．まず，式 (4.83) より，

$$u(\varphi) = \frac{1}{p}(1 + e \cos \varphi) + \frac{3r_g}{2p^2} f_1(\varphi, e), \quad (4.98)$$

である．ここで，関数  $f_1(\varphi, e)$  は，

$$f_1(\varphi, e) = 1 + e\varphi \sin \varphi + \frac{e^2}{6} (3 - \cos 2\varphi), \quad (4.99)$$

とした．また， $\alpha = GMm$  であることから，

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2\alpha}{c^2 m}, \quad (4.100)$$

となる．これを用いると，

$$u(\varphi) = \frac{1}{p}(1 + e \cos \varphi) + \frac{3\alpha}{c^2 m p^2} f_1(\varphi, e), \quad (4.101)$$

となる．これより，

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} - \frac{3r_g}{2(1 + e \cos \varphi)^2} f_1(\varphi, e) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} - \frac{3\alpha}{c^2 m (1 + e \cos \varphi)^2} f_1(\varphi, e) \quad (4.102)$$

となる．これより，軌道に沿って運動する質点の位置座標  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  は

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) = \mathbf{r}_N + \mathbf{r}_{\text{GR}}, \quad (4.103)$$

となる．ここで， $\mathbf{r}_N$  はニュートン力学での軌道を表すベクトルで， $\mathbf{r}_{\text{GR}}$  は相対論的補正である．これらはそれぞれ以下のように与えられる．

$$\mathbf{r}_N = \left( \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}, \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}, 0 \right), \quad (4.104)$$

$$\mathbf{r}_{\text{GR}} = -\frac{r_g}{2} \left( \frac{3f_1(\varphi, r) \cos \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}, \frac{3f_1(\varphi, e) \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}, 0 \right), \quad (4.105)$$

$$= -\frac{\alpha}{c^2 m} \left( \frac{3f_1(\varphi, r) \cos \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}, \frac{3f_1(\varphi, e) \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}, 0 \right). \quad (4.106)$$

相対論的項は  $r_g/p$  の 1 次の効果として現れる．

次に、相対論効果が弱い場合の式 (4.83) を用い、質点粒子の速度ベクトルについて整理する。式 (4.19) および (4.49) より、

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 1 + \frac{r_g}{2p} (3 + 4e \cos \varphi + e^2), \quad (4.107)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{c^2 r_g}{2p} \left\{ e^2 \sin^2 \varphi + \frac{r_g}{p} f_2(\varphi, e) \right\}, \quad (4.108)$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (4.109)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{c^2 r_g}{2p^3} (1 + e \cos \varphi)^4 \left\{ 1 + \frac{6r_g f_1(\varphi, e)}{p(1 + e \cos \varphi)} \right\} \quad (4.110)$$

ここで、

$$f_2(\varphi, e) = (1 + e \cos \varphi)^3 - 3e \cos \varphi f_1(\varphi, e), \quad (4.111)$$

である。また、

$$\frac{r_g}{r} = r_g u = \frac{r_g}{p} \left\{ 1 + e \cos \varphi + \frac{3r_g}{2p} f_1(\varphi, e) \right\}, \quad (4.112)$$

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} = 1 + \frac{2r_g}{p} (1 + e \cos \varphi), \quad (4.113)$$

$$e^2 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2 + \frac{r_g p^2}{r^3} = e^2 \sin^2 \varphi + \frac{r_g}{p} f_2(\varphi, e), \quad (4.114)$$

$$\frac{p^4}{r^4} = (pu)^4 = (1 + e \cos \varphi)^4 \left\{ 1 + \frac{6r_g f_1(\varphi, e)}{p(1 + e \cos \varphi)} \right\} \quad (4.115)$$

であることを用いた。また、 $\alpha = GMm$  であることから、

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2\alpha}{c^2 m}, \quad (4.116)$$

となる。これを用いると、

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{c^2 mp} (3 + 4e \cos \varphi + e^2), \quad (4.117)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\alpha}{mp} \left\{ e^2 \sin^2 \varphi + \frac{2\alpha}{c^2 mp} f_2(\varphi, e) \right\}, \quad (4.118)$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (4.119)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{\alpha}{mp^3} (1 + e \cos \varphi)^4 \left\{ 1 + \frac{12\alpha f_1(\varphi, e)}{c^2 mp(1 + e \cos \varphi)} \right\} \quad (4.120)$$

となる。これらより、

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha}{mp} \left[ e^2 \sin^2 \varphi + \frac{\alpha}{c^2 mp} \{ 2f_2(\varphi, e) - (3 + 4e \cos \varphi + e^2) e^2 \sin^2 \varphi \} \right], \quad (4.121)$$

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0, \quad (4.122)$$

$$\dot{\phi}^2 = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2, \quad (4.123)$$

$$= \frac{\alpha}{mp^3} (1 + e \cos \varphi)^4 \left[ 1 + \frac{\alpha}{c^2 mp(1 + e \cos \varphi)} \{ 12f_1(\varphi, e) - (1 + e \cos \varphi) (3 + 4e \cos \varphi + e^2) \} \right], \quad (4.124)$$

となる。これより、

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} e \sin \varphi \left[ 1 + \frac{\alpha}{2c^2 mpe^2 \sin^2 \varphi} \{ 2f_2(\varphi, e) - (3 + 4e \cos \varphi + e^2) e^2 \sin^2 \varphi \} \right], \quad (4.125)$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{\alpha}{mp^3}}(1 + e \cos \varphi)^2 \left[ 1 + \frac{\alpha}{2c^2 mp(1 + e \cos \varphi)} \{12f_1(\varphi, e) - (1 + e \cos \varphi)(3 + 4e \cos \varphi + e^2)\} \right] \quad (4.126)$$

となる．軌道が円軌道  $e = 0$  のとき， $\dot{r}$  の相対論的補正項は発散する（この場合は， $\dot{r} = 0$ ）ので上の式は  $e > 0$  に対してのみ適用可能である．速度ベクトルに対する相対論的補正は  $r_g/p$  の 1.5 次の項として現れる．一方，軌道の式では 1 次の効果として現れていた．これより，速度の効果は軌道の形状よりも，より高次の相対論的效果として現れることがわかる．よって，以下では，簡単のため，速度ベクトルの相対論的效果は考えない．つまり，ニュートン力学と同じ式，

$$\dot{r} = e\sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{\alpha}{mp^3}}(1 + e \cos \varphi)^2, \quad (4.127)$$

を用いることとする．このとき，速度ベクトル  $\mathbf{v}$  の各成分も以下の様に  $\varphi$  の関数として計算される．

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} = e\sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \varphi \cos \varphi - \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \varphi (1 + e \cos \varphi) = -\sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \varphi, \quad (4.128)$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{\alpha}{mp}}(e + \cos \varphi), \quad (4.129)$$

$$v_z = \dot{z} = 0. \quad (4.130)$$

## 4.8 遠方観測者の点球面に投影した相対論的軌道

ここでは，ニュートン力学の場合に考察したように遠方の観測者の天球面に射影した軌道を考える．ブラックホールの近傍では光の軌道は湾曲するため，本来は光の輸送に関しても相対論的に扱うべきであるが，ここでは，軌道が中心天体から十分に遠い場合を考え，光の軌道の湾曲の効果は無視する．

天球面の直交系の基本ベクトルは，ニュートン力学の場合と同様に

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \\ \hat{\mathbf{Y}} &= (-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, \sin \theta), \\ \hat{\mathbf{Z}} &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \end{aligned} \quad (4.131)$$

を用いる．この場合，軌道を表すベクトル

$$\mathbf{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0), \quad (4.132)$$

を観測者の天球面に射影した座標  $(X, Y)$  は以下のように計算される．

$$X = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{X}} = r \sin(\varphi - \phi), \quad (4.133)$$

$$Y = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{Y}} = -r \cos \theta \cos(\varphi - \phi). \quad (4.134)$$

ここで， $r$  は式 (4.102) で与えられる．

射影された軌道の原点からの距離  $R$  は以下のように計算される．

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = r \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2(\varphi - \phi)}. \quad (4.135)$$

この距離の極値は一般に  $\varphi = 0$  の近日点の位置からずれて存在することから，射影された軌道の原点から最も近い位置と近日点の位置は一般には一致しない．

また，軌道の視線方向（line of sight）の速度  $V_{\text{LOS}}$  は速度ベクトル  $\boldsymbol{v}$  を  $\hat{\boldsymbol{Z}}$  方向に射影することにより，

$$V_{\text{LOS}} = \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{Z}} = \sqrt{\frac{\alpha}{mp}}(-\sin \varphi, e + \cos \varphi, 0) \cdot (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \theta \{e \sin \phi + \sin(\phi - \varphi)\}, \quad (4.136)$$

となる．

## 第 5 章

# 常微分方程式の数値解法

ここでは、常微分方程式を数値的に解くための手法であるオイラー法、ルンゲ・クッタ法およびルンゲ・クッタ・ギル法についてまとめる。本研究の次節以降の計算では、ブラックホール周囲の粒子軌道を計算する数値解法としてルンゲ・クッタ・ギル法を用いた。

### 5.1 オイラー法

以下の一階常微分方程式を数値的に解くことを考える。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5.1)$$

$\Delta x$  が十分に小さければ差分近似は次のように書け、これを等式とみて変形すれば近似式が出てくる。

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \quad (5.2)$$

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x f(x, y(x)) \quad (5.3)$$

初期条件を代入し、繰り返し近似式を用いることで微分方程式の近似解が分かる。このような導関数を差分で  $x$  の 1 次の項まで近似する方法をオイラー法といい、オイラー法は精度が 1 である、という。

### 5.2 ルンゲ・クッタ法

一階微分方程式を解く最も簡単な方法は三次曲線の描写の際に用いたオイラー法である。しかしオイラー法は精度が低く、誤差も蓄積されるために解析として用いることはほとんどない。精度を 2 まで拡張したのが Heun 法である。これは次のような公式で表される。

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + h) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)h \end{aligned} \quad (5.4)$$

また、精度は同じ 2 次だが、オイラー法を改良した修正オイラー法というものもよく知られている。

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\ y_{n+1} &= y_n + (k_1 + k_2)\frac{h}{2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

オイラー法の考え方を拡張した方法が (4 次の) ルンゲ・クッタ法であり, これは簡単さとオイラー法よりも良い精度で計算できるので一階微分方程式を解くのに最も多く利用される [10]. ルンゲ・クッタ法の公式は次のようになる.

$$\begin{aligned} Y_0 &= y_0 \\ Y_{i+1} &= Y_i + h\Phi(x_i, Y_i) \\ \Phi(x_i, Y_i) &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (5.6)$$

ただし,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, Y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, Y_i + hk_3) \end{aligned} \quad (5.7)$$

である. ルンゲ・クッタ法は次数が 4 なので

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i) + O(h^5) \quad (5.8)$$

と書ける.

### 5.3 ルンゲ・クッタ・ギル法

ルンゲクッタ法の中の  $k_3$  と  $k_4$  間の一次従属性を利用し, 計算の手間を 1 つ省いた手法をルンゲ・クッタ・ギル法という. ルンゲ・クッタ・ギル法の公式は次のように書ける [11].

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, Y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_1h + \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2h\right) \\ k_4 &= f\left(x_i + h, Y_i + \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2h + \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_3h\right) \\ \Phi(x_i, Y_i) &= \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2 + \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_3 + \frac{1}{6}k_4 \end{aligned} \quad (5.9)$$



## 第 6 章

# 結果と考察

ここでは、これまでの議論で得られた式を用いてシュバルツシルト時空での惑星の運動をシミュレーションする。まず初めに観測者が真上にいるときの軌道を求め、それを任意の角度から見た観測者の天球面に射影する。最後に観測者の視線方向の速度を求めて、その大きさに軌道を色分けする。

### 6.1 相対論効果を考慮した惑星軌道の数値シミュレーション

本研究の目的は緒言でも述べた通り、アインシュタインの相対性理論の検証にある。望遠鏡の精度の向上により、ブラックホールの周りを周回する星がこれから数多く見つかる予想されている。第一に様々なパラメータを持った星についてシミュレーションを行う。これは式 (4.60) をルンゲ・クッタ・ギル法で解いた。

同じ軌道も観測者の見る角度によって見かけの軌道が異なるので、観測者の天球面に対して射影する必要がある。実際に観測されるのは星の動きとスペクトルのみなので、そこから星のパラメータを求めるための方法として視線方向の速度を考える。射影の計算には式 (4.133, 4.134)、視線方向の速度の計算には式 (4.136) を用いた。

想定しているのはシュバルツシルト時空であり、長さについてはシュバルツシルト半径を基準とし無次元化を行った。すなわち全ての結果は半径 1 のシュバルツシルト・ブラックホールの周りをまわる星の軌道として出力されている。

シミュレーションには C 言語を用い、グラフを出力する際には gnuplot を読み込んだ。また、コンパイルは gcc で行った。

### 6.2 観測者が真上にいるときに見える軌道

まず、観測者が軌道を真上から見たときの軌道を求めた。これをもとめるのに式 (4.60) をルンゲ・クッタ・ギル法で解いた。軌道を描く際にはシュバルツシルト半径を基準に無次元化したので、以下の図にはブラックホールとして半径 1 の黒い円を描いた。1/p をさらに  $r_g$  で割った値を  $1/2l^2$  と書くことにする。

$$\frac{1}{pr_g} = \frac{1}{2l^2} = \frac{2L^2}{r_g c^2} = \frac{1}{a(1-e^2)} \quad (6.1)$$

これは相対性理論の効果を表す項であり、 $a$  や  $e$  が変化すると相対性理論の効果が変化することを意味している。 $a$  や  $e$  を変化させると、相対性理論の効果は次のようなグラフになる。

この図から分かる通り、 $a$  が大きいと  $e$  が小さいと相対性理論の効果が小さくなっていることが分かる。 $a$  が大きいとブラックホールからの距離が遠いため影響が少なく、 $e$  が小さいと円軌道に近くなるため近日点移動が

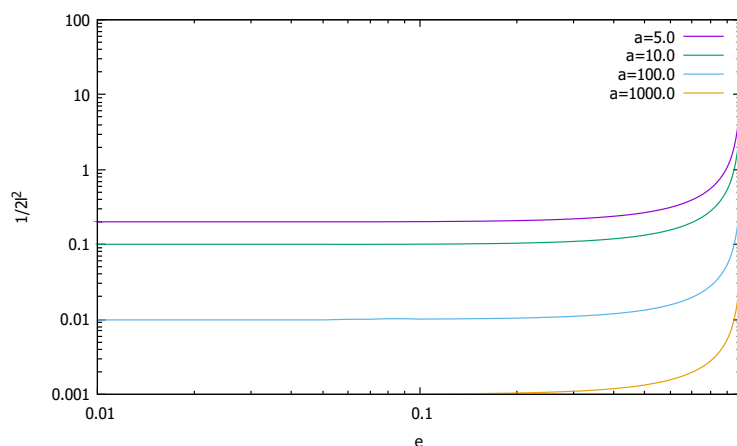


図 6.1  $e$  と  $a$  を変えた時の相対性理論の効果  $1/2l^2$  の変化

見えにくくなるのが原因である。シミュレーションする際にはそれらに注意してパラメータを選んだ。

まずは自分の作ったコードが相対性理論の効果が小さいときにニュートン力学と一致するかどうかを確認した。その時の結果が図 6.2 から図 6.5 である。水色の線がニュートン力学、紫色の線が相対性理論を入れた軌道にである。これらを見て分かる通り、相対性理論の効果がかなり小さいパラメータを選んでいるがゆえに、ニュートン力学とほぼ一致した軌道になっている。また、図 6.2, 図 6.3 では同じ離心率に関わらず、ずれが図 6.3 の方が小さくなっている。この理由は明らかに  $a$  の違いである。図 6.1 からみてとれるように、 $a = 100, e = 0.01$  では若干相対性理論の項が残った値になるが、 $a = 1000, e = 0.01$  となると値はほぼ 0 に近い値をとり、ニュートン力学と一致することが分かる。このことから、軌道を求める式はニュートン力学を含んだ形になっていることが分かった。

近日点移動が大きく表れてくるパラメータは  $e = 0.7$  より上といったところである。そこで、 $e = 0.9$  というかなり離心率の高いパラメータを用いて軌道をシミュレーションした。結果は図 6.4 および図 6.5 に示した通りである。ニュートン力学とはまったく一致しない結果となった。大きく曲がった軌道になり、相対性理論の効果を無視したときの楕円長半径と、見かけの楕円長半径が大きく異なっていることが分かる。また、 $a = 30$  と小さくなると途中で星の軌道がブラックホールに飲み込まれていることが分かる。ブラックホールの内側での星の軌道を求めるのは今後の課題とする。

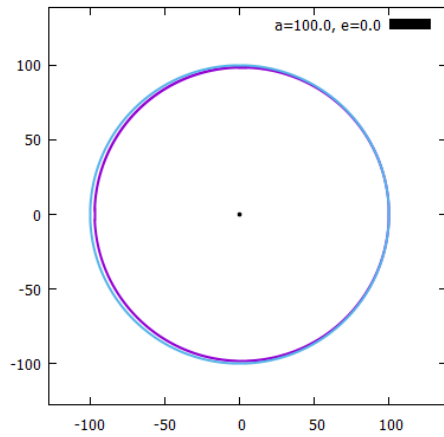


図 6.2  $a=100$ ,  $e=0.01$  のときのルンゲクッタ・ギル法による軌道

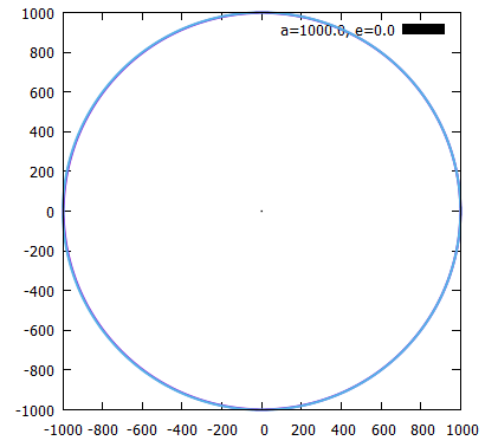


図 6.3  $a=1000$ ,  $e=0.01$  のときのルンゲクッタ・ギル法による軌道

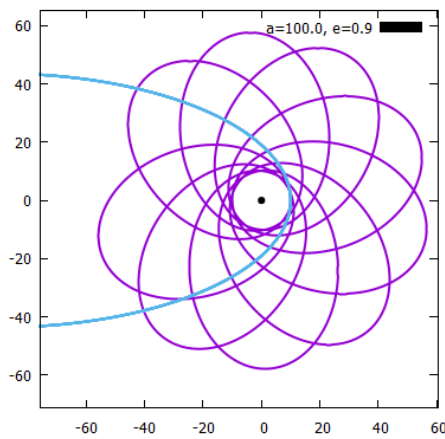


図 6.4  $a=100$ ,  $e=0.9$  のときのルンゲクッタ・ギル法による軌道

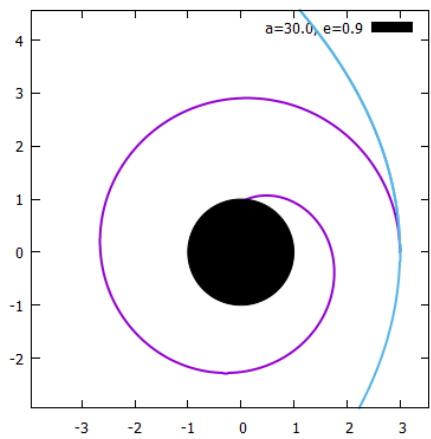


図 6.5  $a=30$ ,  $e=0.9$  のときのルンゲクッタ・ギル法による軌道

### 6.3 観測者の天球面に射影した軌道

次に、観測者が軌道に対し角度をもって星を見た時の見かけの軌道をシミュレーションし、結果を次に示した。実際には近日点移動がみえるのは  $e$  が大きすぎないという条件が絡むが、ここでは任意の角度から見た時の変化の妥当性を判断するためにあえて大きめのパラメータを用いた。見て分かる通り、見かけの軌道が回転もしくはつぶれて観測されている。また、図 6.10 は軌道と平行に見た時の図である。もちろん、軌道はある平面状を移動するから、真横から見た際は軌道が極限までつぶれて直線に見える。実際にシミュレーション結果は直線になっていることからコードおよびそれまでの議論は正しいと考えられる。

ここまでの議論により、ルンゲ・クッタ・ギル法を用いて任意の角度から見た有限質量の物体の軌道を求めることが確認できた。

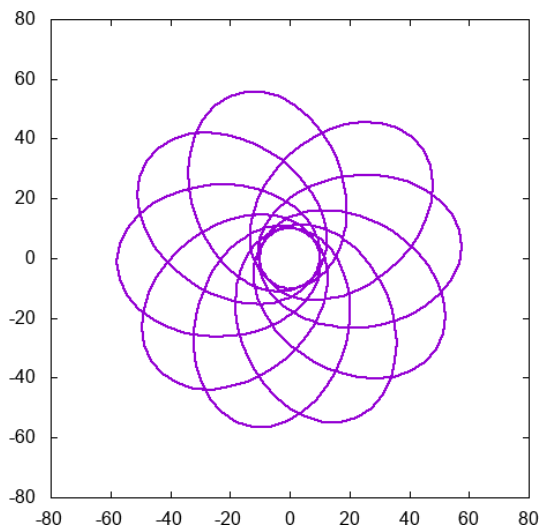


图 6.6  $a = 100, e = 0.9, \theta = 0^\circ, \phi = 0^\circ$

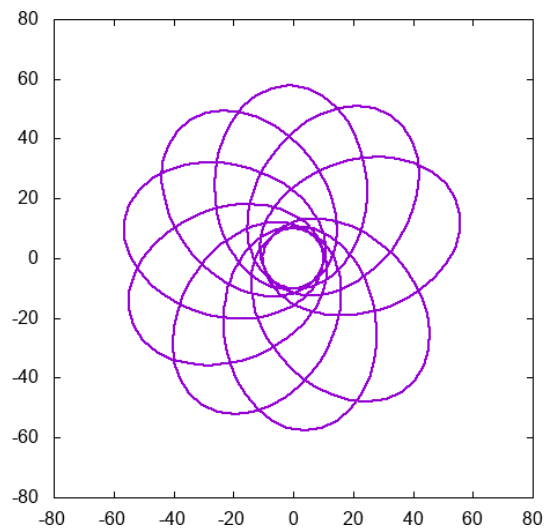


图 6.7  $a = 100, e = 0.9, \theta = 0^\circ, \phi = 90^\circ$

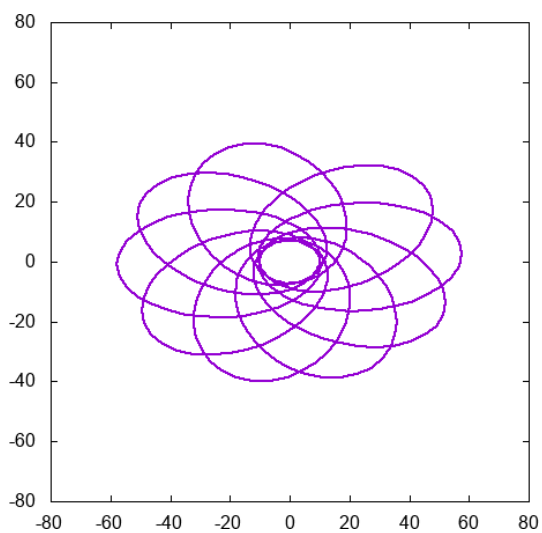


图 6.8  $a = 100, e = 0.9, \theta = 45^\circ, \phi = 0^\circ$

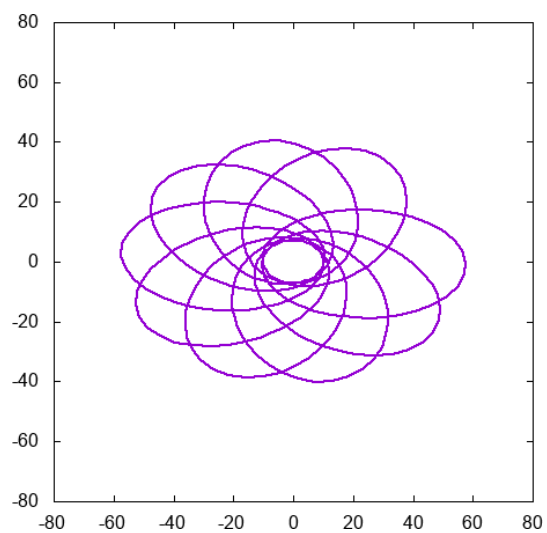


图 6.9  $a = 100, e = 0.9, \theta = 45^\circ, \phi = 45^\circ$

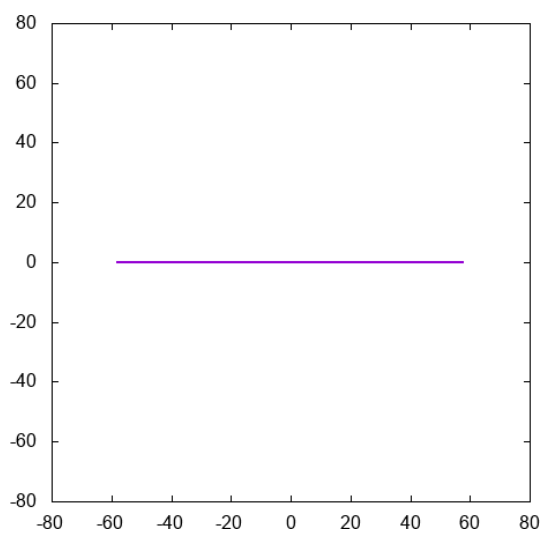


图 6.10  $a = 100, e = 0.9, \theta = 90^\circ, \phi = 0^\circ$

## 6.4 観測者への視線方向の速度ベクトル

最後に、任意の角度から見たときの軌道に視線方向の速度ベクトルの情報を含めてシミュレーションを行った。速度ベクトルを求める式は  $e \ll 1$  を仮定しているの、あまり大きくない  $e$  で計算した。また、 $e = 0$  では  $\dot{r}$  の相対的補正項は発散するので  $e$  は 0 以外で適用できる。前の節でも見た通り、 $e$  が小さいと近日点移動をグラフから見ることは難しいので、 $e = 0.3$  を選んだ。

速度ベクトルは軌道の色で表現した。観測者にとって星が離れていく場合は青色、近づく場合は赤になるように設定した。真上 ( $\theta = 0^\circ$ ) から見た時はもちろん視線方向の物体の速度は存在しないので観測されるスペクトルは変化しない。また、 $\theta$  を大きくしていくと視線に角度がつくので、物体は視線方向に速度を持ち始める。図の色の濃さから分かる通り、角度をつけていくと視線方向の速度が大きくなっているのが分かる。すなわち、線の濃さ(スペクトルの変化)は星の軌道に対し観測者がどのような角度から見ているかの情報を含むと考えることができる。また、近日点同士の距離を見ることで  $a$  や  $e$  の情報が出てくると推測できる。定量的に議論したいが、角度がついた状態で軌道を観測した際、見かけの近日点と実際の近日点が異なることに注意しなくてはならないので、観測データから星の情報を出す方法は今後の課題にしたい。 $e$  がある程度小さいときの任意のパラメータについては軌道が出せるので、実際の観測データとの比較をしてパラメータを決めることはできそうである。

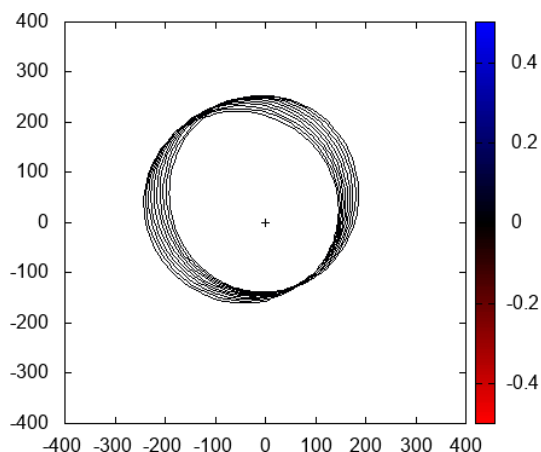


図 6.11  $a = 200, e = 0.3, \theta = 0^\circ, \phi = 0^\circ$

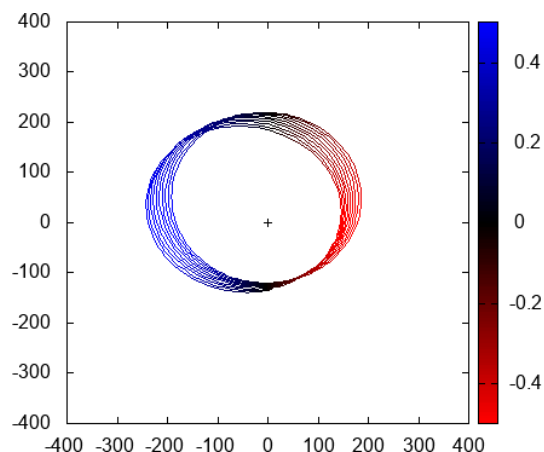


図 6.12  $a = 200, e = 0.3, \theta = 30^\circ, \phi = 0^\circ$

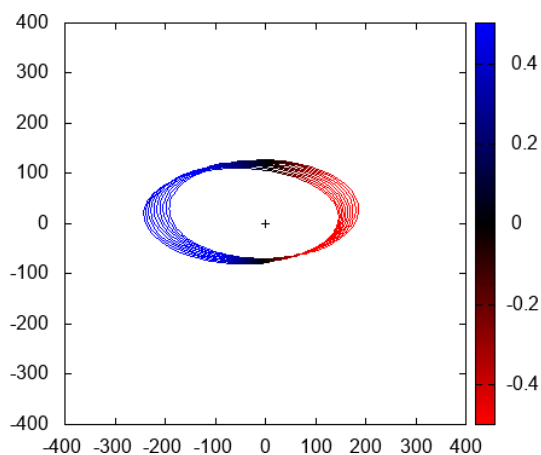


図 6.13  $a = 200, e = 0.3, \theta = 60^\circ, \phi = 0^\circ$

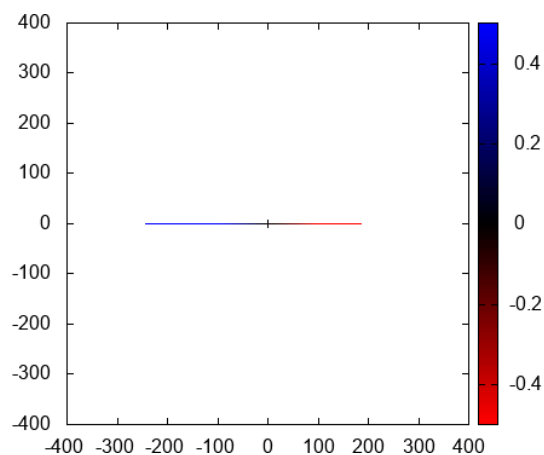


図 6.14  $a = 200, e = 0.3, \theta = 90^\circ, \phi = 0^\circ$

## 第 7 章

### 結言

本研究はシュバルツシルト・ブラックホールの周りの粒子の軌道をシミュレーションすることを目的として行った。まずは軌道を求めるための測地線方程式の導出を行い、考えている系についての解を求めた。ルンゲ・クッタ・ギル法を用いて数值的に軌道をシミュレーションすることができた。

また、任意の角度から見た時の見かけの軌道をシミュレーションすることに成功した。視線方向の速度を色の情報として付加し、相対性理論の効果が小さいときの任意のパラメータでシミュレーションができるコードができた。

実際に得られたデータとの比較や、観測データから直接星のパラメータを求める方法の検討についてはこれからの課題にしたい。

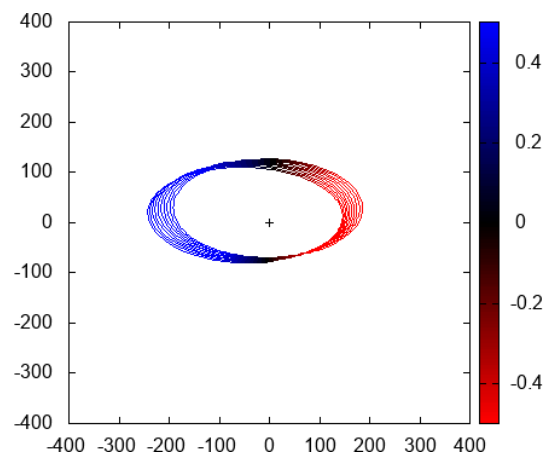


図 7.1 シュバルツシルト・ブラックホールの周りの惑星の軌道と視線方向の速度 ( $a = 200, e = 0.3, \theta = 60^\circ, \phi = 0^\circ$ )

## 第8章

# 今後の展望

本研究では重力理論として一般相対論を仮定し、時空計量として球対称ブラックホール時空を記述するシュバルツシルト時空を仮定した。現実の宇宙に存在するブラックホールは、角運動量を持った物質を吸い込むことから自転していると考えられている。より現実的な計算を行うためには、本研究を拡張し、自転するブラックホールの時空を記述するカー時空を仮定した計算を行う必要がある。それらの計算を元に、実際に観測されている銀河中心の星の軌道の観測データと理論計算を比較することが重要となるだろう。

本研究で視線方向の速度を求めることが成功したので、これを光のドップラー効果に適用すると軌道が傾いているのかどうか分かる。そこで、軌道の傾きが違うが、地球から見た像が似た者を選び、そのスペクトルの差をとることで「このパラメータの星同士は区別がつく」といった情報がわかると予想している。本研究を進めていけば、望遠鏡にどれだけのスペクトルの分解能があれば星の軌道やブラックホールについての情報が得られるか、といったことを理論的に求めることができるだろう。

また、本研究では有限質量の物体の軌道を求めたが、光の軌道を解くこともできる。光の軌道を解く際には固有時間を用いることができないので、測地線方程式はアフィンパラメーターを用いた形になる。ブラックホールの周りでの光の軌道を解くことができたなら、ブラックホールの影、すなわちブラックホール・シャドウや降着円盤などといったブラックホールの外見に関する情報を得ることができる。輻射輸送などといった難しい内容を含むが、ブラックホールの影がとられた今、注目されている宇宙物理学の分野の一つである。

アインシュタインの相対性理論を検証する有力な観測物には上に挙げたブラックホール・シャドウもあるが、重力波も注目されている。ブラックホール同士、ブラックホールと中性子星など、宇宙内での激しい現象が起こると重力波が検出される。実際にはブラックホールの衝突などのイベント以外では、重力波のさざめきは小さすぎて観測には至っていないが、いずれ可能となったときにデータを予測しておくことは重要である。本研究でシミュレーションした有限質量の物体も、本質的には重力波を出しているはずなので、それを求めることで様々な角度から相対性理論の検証ができるようになる。

# 謝辞

本論文を作成するにあたり，ご指導を頂いた卒業論文指導教員の総合自然科学系教授，高橋労太先生および，日常の議論を通じて多くの知識や示唆を頂戴しました応用数理科学研究室の皆様へ深く感謝致します。

また，日頃の物理の理解を助けてくれた総合自然科学系教授，長澤智明先生，総合自然科学系準教授 有馬隆司先生，心よりお礼申し上げます。

論文やプログラムの組み方についてのアドバイスをくれただけでなく，研究に使う PC が壊れた際に修理してくださった電気電子系準教授 伊藤芳浩先生にも厚くお礼を申し上げます。

そして，化学系にいらながらも宇宙物理学の研究をすることを許して下さった応用化学・生物系教授 平野博人先生をはじめとした，教職員皆様に深く感謝いたします。本当にありがとうございました。



# 参考文献

- [1] 講談社基礎物理学シリーズ 9 相対性理論, 杉山 直 著, 講談社, 2013
- [2] Gravitational Lenses, P.Schneider, Ehlers, Falco 共著
- [3] 一般相対性理論を一步一步数式で理解する, 石井 俊全, ベレ出版, 2017
- [4] EHT-Japan 研究の背景-Event Horizon Telescope とは? <https://www.miz.nao.ac.jp/eht-j/c/pr/pr20120918/c03>
- [5] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, B.P.Abbot et al., arXiv:1811.12907(2018)
- [6] First M87 Event Horizon Telescope Results.I.The Shadow of the Supermassive Black Hole, The Event Horizon Telescope Collaboration, The Astrophysical Journal Letters, 875:L1 (17pp), 2019 April 10
- [7] ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第 3 版), エリ・デ・ランダウ イェ・エム・リフシッツ 著, 東京図書, 2000
- [8] ジェームズ・B・ハートル, 重力 (上) (下) アインシュタインの一般相対性理論入門, 株式会社日本評論社 (2016)
- [9] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, ランダウ-リフシッツ理論物理学教程, 場の古典論 (原著第 6 版), 東京図書株式会社 (1974)
- [10] C 言語による数値計算入門-解法・アルゴリズム・プログラム-, 皆本晃弥, サイエンス社, 2005
- [11] 数値解析の基礎 (理工学基礎シリーズ), 篠原 能材著, 日新出版, 1978

## 付録 A 開発環境

本研究では C 言語を用いてシミュレーションを行った。開発はコマンドプロンプト上で行い, gcc を用いてコンパイルを行った。グラフの描写には gnuplot を用い, まとめの文章を書く際には TeX を用いた。次の節に挙げるようなソースコードを実行するためにはこれらの環境が整っている必要がある。ここでは簡単に C 言語の開発環境を整えるための手順を書いておく。

### 付録 A.1 gcc のインストール

コンパイラである gcc のインストール方法はインターネット等に行っているのがあるのでそれを参考にしてほしい。こちら (<https://osdn.net/projects/mingw/downloads/68260/mingw-get-setup.exe/>) からインストールすることができる。gcc がインストールができたなら環境変数の設定をする必要がある。環境変数の設定が完了した後, コマンドプロンプト上で "gcc" と入力する。"gcc: fatal error: no input files compilation terminated." と出力

されたらインストールが正常にできている。

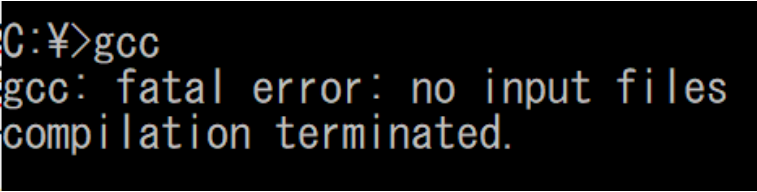


図 1 gcc 実行時の様子

gcc のインストールが完了したら、メモ帳などのテキストエディタを用いて次のコードを”hello. c” という名前で保存する。コマンドプロンプト上で”hello. c” ファイルのある場所へ移動し、”gcc hello. c” と入力後”a. exe” と入力すれば”hello world!” と出力されるはずである。これで C プログラミングの環境は整ったことになる。次節ではグラフの描写法に用いる gnuplot について説明する。

```
#include <. stdioh>

int main(int , argc char *args[])
{
    printf(", Hello world!\n");
    return 0;
}
```

### gnuplot のインストール

gnuplot はグラフを描くためのツールである。C 言語との相性が良く、様々な分野で用いられる。gnuplot はこちら (<https://gnuplot.softonic.jp/>) からダウンロードできる。gnuplot も gcc 同様にインストール後環境変数の設定が必要になる。これは用いるパソコン等によって変わってくるのでインストールの説明は省略する。gnuplot のパスが通れば、コマンドプロンプト上で”gnuplot” と入力すれば起動されるはずである。例えば”plot sin(x)” と入力して  $\sin x$  のグラフが表示されれば環境が整ったといえる。

## 付録 B ソースコード

### 付録 B.1 微分方程式を解くコード

以下に、微分方程式を解くためのコードを乗せておく。このコードは SOLVER () の中身の数字に合わせて実行する手法が異なる。0 ならオイラー法、1 なら Heun 法、2 なら修正オイラー法、3 なら 3 次のルンゲクッタ法、4 なら 4 次のルンゲクッタ法、5 ならルンゲクッタギル法を用いて計算する。基本的にルンゲクッタギル法でいいので通常は 5 を用いる。

```
//=====
//
// ODE sample : ellipse
```

```

//
//-----
// > gcc -g -o main00 main.c -lm
// > ./main00
//=====

#include <stdio.h>
#include <math.h>
//#include "header.h"

//-----
#define PI 3.1415926535897932384626433832795028841971
#define PI2 (2.0*PI)
#define PIH (0.5*PI)
#define EXP 2.718281828459
//-----
#define FD double
//-----
#define SOLVER (5)
//(0) Euler (1) Heun (2) Euler(2nd) (3) Runge-Kutta(3rd)
//(4) Runge-Kutta(4th) (5) Runge-Kutta-Gill
//-----
void exact_perihelion(FD , phFD c, []FD *u);
void diff_perihelion(FD , xFD y, []FD dydx, []FD c, []int n);
void diff(FD , xFD y, []FD dydx, []FD c, []int n);
//-----
void euler(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
          void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int));
void heun(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
          void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int));
void euler2(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
            void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int));
void rungekutta3(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
                 void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int));
void rungekutta4(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
                 void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int));
void rkg(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
         void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int));
//-----

int main(int , argc char *argv[])
{
    char outf[64];
    sprintf(, outf "result.dat");
    FILE *fpo = fopen(, outf"w");

    FD dx=1.e-2;
    FD xmax=5*PI;
    FD x=0.0;
    FD zero=0.0;

```

```

int i;

FD e=0.0;
FD a=100.0;
FD l2 = 0.5*a*(1.0-e*e);

FD c[2];
c[0] = e;
c[1] = a;

int n=2;
FD y[n];

y[0]=(1.0+e)*0.5/l2;
y[1]=0.0;

FD xnext;
FD ynext[n];
FD yexact;

exact_perihelion(, , xc&yexact);

FD xx = cos(x)/y[0];
FD yy = sin(x)/y[0];
FD xxexact = cos(x)/yexact;
FD yyexact = sin(x)/yexact;

fprintf(, fpo"%f %f %f %f %f %f %f %f \n", ,
        xyexact, [0]y, [1], , , xxyyxxexactyyexact);

while(x<=xmax){

    if(SOLVER==0) euler(, , , xydx&, , , xnextynextcndiff_perihelion);
    if(SOLVER==1) heun(, , , xydx&, , , xnextynextcndiff_perihelion);
    if(SOLVER==2) euler2(, , , xydx&, , , xnextynextcndiff_perihelion);
    if(SOLVER==3) rungekutta3(, , , xydx&, , , xnextynextcndiff_perihelion);
    if(SOLVER==4) rungekutta4(, , , xydx&, , , xnextynextcndiff_perihelion);
    if(SOLVER==5) rkg(, , , xydx&, , , xnextynextcndiff_perihelion);
    if(fabs(xx)<0.01 && fabs(yy)<0.01){
        break;
    }

    x=xnext;
    for(i=0;i<n;i++) y[i] = ynext[i];

    exact_perihelion(, , xc&yexact);

    xx = cos(x)/y[0];
    yy = sin(x)/y[0];
    xxexact = cos(x)/yexact;

```

```

        yyexact = sin(x)/yexact;

        fprintf(, fpo"%f %f %f %f %f %f %f %f \n", ,
                xyexactly, [0]y, [1], , , xxyyxxexactlyyyexact);
    }

    fclose(fpo);

    return 0;
}
//-----
//-----
void exact_perihelion(FD , phFD c, []FD *u){

    FD e=c[0];
    FD a=c[1];
    FD l2 = 0.5*a*(1.0-e*e);

    *u=(1.0+e*cos(ph))*0.5/l2;
}

void diff_perihelion(FD , xFD y, []FD dydx, []FD c, []int n){

    FD e=c[0];
    FD a=c[1];
    FD l2 = 0.5*a*(1.0-e*e);

    dydx[0] = y[1];
    dydx[1] = -y[0]+0.5/l2+1.5*y[0]*y[0];
}

void diff(FD , xFD y, []FD dydx, []FD c, []int n){

    dydx[0] = y[1];
    dydx[1] = -4.0*y[0];
}
//-----
void euler(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
           void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int)){

    int i;

    FD dydx[n];

    (*diff)(, , , , xydydxcn);

    x += dx;

    for(i=0;i<n;i++) y[i] += dydx[i]*dx;

```

```

    *xnext = x;

    for(i=0;i<n;i++)    ynext[i] = y[i];
}

void heun(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
        void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int)){

    int i;

    FD dydx1[n];

    (*diff)(, , , xydydx1cn);

    FD x2;
    FD y2[n];
    FD dydx2[n];

    x2 = x+dx;
    for(i=0;i<n;i++)    y2[i] = y[i]+dydx1[i]*dx;

    (*diff)(, , , x2y2dydx2cn);

    x += dx;
    for(i=0;i<n;i++)    y[i] += (dydx1[i]+dydx2[i])*0.5*dx;

    *xnext = x;
    for(i=0;i<n;i++)    ynext[i] = y[i];
}

void euler2(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
        void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int)){

    int i;

    FD dydx1[n];

    (*diff)(, , , xydydx1cn);

    FD x2;
    FD y2[n];
    FD dydx2[n];
    FD dx2=0.5*dx;

    x2 = x+dx2;
    for(i=0;i<n;i++)    y2[i] = y[i]+dydx1[i]*dx2;

    (*diff)(, , , x2y2dydx2cn);

    x += dx;

```

```

    for(i=0;i<n;i++)  y[i] += dydx2[i]*dx;

    *xnext = x;
    for(i=0;i<n;i++)  ynext[i] = y[i];
}

void rungekutta3(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
                void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int)){

    int i;

    FD dydx1[n];

    (*diff)(, , , , xydydx1cn);

    FD x2;
    FD y2[n];
    FD dydx2[n];
    FD dx2=0.5*dx;

    x2 = x+dx2;
    for(i=0;i<n;i++)  y2[i] = y[i]+dydx1[i]*dx2;

    (*diff)(, , , , x2y2dydx2cn);

    FD x3;
    FD y3[n];
    FD dydx3[n];

    x3 = x+dx;
    for(i=0;i<n;i++)  y3[i] = y[i]-dydx1[i]*dx+2.0*dydx2[i]*dx;

    (*diff)(, , , , x3y3dydx3cn);

    FD dx6=dx/6.0;

    x += dx;
    for(i=0;i<n;i++)  y[i] += (dydx1[i]+4.0*dydx2[i]+dydx3[i])*dx6;

    *xnext = x;
    for(i=0;i<n;i++)  ynext[i] = y[i];
}

void rungekutta4(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
                void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int)){

    int i;

    FD dydx1[n];

```

```

(*diff)(, , , xydydx1cn);

FD x2;
FD y2[n];
FD dydx2[n];
FD dx2=0.5*dx;

x2 = x+dx2;
for(i=0;i<n;i++) y2[i] = y[i]+dydx1[i]*dx2;

(*diff)(, , , x2y2dydx2cn);

FD x3;
FD y3[n];
FD dydx3[n];

x3 = x+dx2;
for(i=0;i<n;i++) y3[i] = y[i]+dydx2[i]*dx2;

(*diff)(, , , x3y3dydx3cn);

FD x4;
FD y4[n];
FD dydx4[n];

x4 = x+dx;
for(i=0;i<n;i++) y4[i] = y[i]+dydx3[i]*dx;

(*diff)(, , , x4y4dydx4cn);

FD e1 = 1.0/6.0;
FD e2 = 2.0/6.0;
FD e3 = 2.0/6.0;
FD e4 = 1.0/6.0;

x += dx;
for(i=0;i<n;i++)
    y[i] += (e1*dydx1[i] +e2*dydx2[i] +e3*dydx3[i] +e4*dydx4[i]) * dx;

*xnext = x;
for(i=0;i<n;i++) ynext[i] = y[i];
}

void rkg(FD , xFD y, []FD , dxFD *, xnextFD ynext, []FD c, []int , n
        void (*diff)(, FDFD , []FD , []FD , []int)){

    int i;

    FD dydx1[n];

```



```

(*diff)(, , , xydydx1cn);

FD x2;
FD y2[n];
FD dydx2[n];
FD dx2=0.5*dx;

x2 = x+dx2;
for(i=0;i<n;i++) y2[i] = y[i]+dydx1[i]*dx2;

(*diff)(, , , x2y2dydx2cn);

FD x3;
FD y3[n];
FD dydx3[n];
FD c1 = (-1.0+sqrt(2.0))*0.5;
FD c2 = 1.0-1.0/sqrt(2.0);

x3 = x + dx2;
for(i=0;i<n;i++) y3[i] = y[i] +c1*dydx1[i]*dx +c2*dydx2[i]*dx;

(*diff)(, , , x3y3dydx3cn);

FD x4;
FD y4[n];
FD dydx4[n];
FD d2 = -1.0/sqrt(2.0);
FD d3 = 1.0+1.0/sqrt(2.0);

x4 = x + dx;
for(i=0;i<n;i++) y4[i] = y[i] +d2*dydx2[i]*dx +d3*dydx3[i]*dx;

(*diff)(, , , x4y4dydx4cn);

FD e1 = 1.0/6.0;
FD e2 = (2.0-sqrt(2.0))/6.0;
FD e3 = (2.0+sqrt(2.0))/6.0;
FD e4 = 1.0/6.0;

x += dx;
for(i=0;i<n;i++)
    y[i] += (e1*dydx1[i] +e2*dydx2[i] +e3*dydx3[i] +e4*dydx4[i]) * dx;

*xnext = x;
for(i=0;i<n;i++) ynext[i] = y[i];
}

```

## 視線方向の速度を含めた有限質量の物体の軌道を描くプログラム

任意の角度から見た有限質量の物体の軌道を求めるプログラムを以下に示す。このプログラムは data ファイルに dat ファイルと png ファイルを自動で複数枚同時に出力できるようになっている。これをそのままコンパイルし、実行ファイルを実行すれば軌道が得られる。

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define PI 3.1415926535897932384626433832795028841971
#define PI2 (2.0*PI)
#define EXP 2.718281828459
#define FD double

void output_data();
void make_image_by_gnuplot_with_colors();
void make_image_by_gnuplot();
void include_data();

int main(void) {

    output_data();

    make_image_by_gnuplot_with_colors();
    printf("Calculations Done.\n");

    return 0;
}

void output_data(){

    int idata;
    int ndata=9;
    FD e;
    FD a;
    FD th;
    FD ph;

    for(idata=0; idata<=ndata; idata++){

        a=200.0;
        e=0.3;
        ph=PI*0.5;
        //ph=-PI*0.25;
        //ph=0.0;
```

```

th=(FD)(idata*PI*0.5/ndata);

char outfile[64];
sprintf(, outfile "data/data%04d.dat, "idata);
FILE *fpo = fopen(, outfile"w");

FD varphi;
FD dvarphi = 2.*PI/128.;
FD varphi_max = 20.*PI+dvarphi;
FD X;
FD Y;
FD VLOS;
FD p=a*(1.-e*e);
FD r;
FD u;

for(varphi=0.0;varphi<varphi_max;varphi+=dvarphi){

    u=(1.+3./p+e*cos(varphi*(1-3./p)))/p;
    r=1./u;

    X=r*sin(varphi-ph);
    Y=-r*cos(th)*cos(varphi-ph);
    VLOS=sin(th)*(e*sin(ph)+sin(ph-varphi));

    fprintf(, fpo "%e %e %e , " , X , Y VLOS);
    fprintf(, fpo "\n");
}

fclose(fpo);
}

void make_image_by_gnuplot_with_colors(){

    int idata;

    for(idata=0;idata<=9;idata++){

        FILE *gnuplot;
        gnuplot = popen("gnuplot, "w");

        fprintf(, gnuplot"reset\n");

        fprintf(, gnuplot "set terminal png size , 500500 enhanced crop \n");
        fprintf(, gnuplot "set output 'data/image%04d.png' \n, "idata);
        fprintf(, gnuplot "set palette defined (-0.5 'red, ' 0 'black, ' 0.5 'blue')\n");
        fprintf(, gnuplot "set size square\n");
        //fprintf(, gnuplot "set nocolorbox\n");
    }
}

```

```

fprintf(, gnuplot "set xrange[-400:400]\n");
fprintf(, gnuplot "set yrange[-400:400]\n");
fprintf(, gnuplot "set zrange[-99:99]\n");
fprintf(, gnuplot "set label 1 point pt 1 ps 1 at , 00\n");
fprintf(, gnuplot "set cbrange[-0.5:0.5]\n");
fprintf(, gnuplot "set pm3d implicit\n");
fprintf(, gnuplot "plot 'data/data%04d.dat' u 1:2:3 w l notitle palette z \n, "idata);

pclose(gnuplot);
}

```