

## 第3章 线性几何变换

在第2章中提到，在我们所定义的全景拼接问题中，图像  $I_1$  和  $I_2$  能够拼在一起的前提是它们的对应像素点的坐标关系可以通过统一的线性几何变换  $H$  来表达，其中  $H$  是表达坐标变换的矩阵。首先来说一下什么是线性几何变换。在  $n$  维向量空间  $\mathbb{R}^n$  中，对其中的元素进行的几何变换  $T$  为线性几何变换的充要条件是存在可逆矩阵  $H$  使得，

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, T(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} \quad (3-1)$$

因此，能够表达线性几何变换的矩阵  $H$  必须是一个可逆矩阵。

由于本篇的主题是图像的全景拼接，因此我们会主要讨论二维平面上的线性几何变换，并还会以群论的视角来重新看待线性几何变换。之后，会把在二维情况下线性几何变换的有关结论推广到三维情况。在三维空间中的几何变换相关结论会在后续的单目测量、双目立体视觉等章节中用到。

### 3.1 平面上的线性几何变换

#### 3.1.1 旋转变换（Rotation transformation）

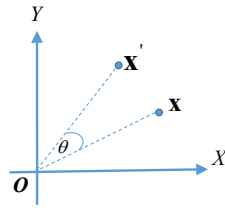


图 3-1：平面内一点  $\mathbf{x}$  绕坐标原点旋转到  $\mathbf{x}'$  关系示意图。

假设平面上有一点  $\mathbf{x} = (x, y)^T$ ，该点绕原点逆时针方向旋转  $\theta$  角后得到点  $\mathbf{x}' = (x', y')^T$ ，则

$\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}'$  之间的关系（如图 3-1 所示）可表达为，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

记矩阵  $R_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，则显然  $R_{2 \times 2}$  可以刻画平面内两点之间的旋转关系。这个矩阵

$R_{2 \times 2}$  的特点是：它是一个正交矩阵且它的行列式为 1。实际上，这个结论反过来也成立：如

果一个矩阵  $R_{2 \times 2}$  是行列式为 1 的正交矩阵，它可以用来表达一个平面内的**保持方向**

## （Orientation Preserving）的旋转。

我们强调表达保持方向旋转的正交矩阵  $R_{2 \times 2}$  的行列式要为 1。根据线性代数<sup>[1]</sup>的知识可知，正交矩阵的行列式要么是 1，要么是-1。那么，行列式为-1 的二维正交矩阵表达的几何变换是什么呢？这类正交矩阵表达的几何变换是平面内的旋转再复合一个反射变换。我们通过一个示例来理解一下。假设图 3-2（a）是变换之前的原始图像。图 3-2（b）是图像 3-2（a）

经过了由矩阵  $\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$ （其行列式为 1）定义的绕图像中心的几何变换得到的结果；

图 3-2（c）是图像 3-2（a）经过了由矩阵  $\begin{bmatrix} -\cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$ （其行列式为-1）定义的几何变

换得到的结果。在图像 3-2（a）中，花坛前的石头在“同济大学”这个矢量的顺时针一侧。在图像 3-2（b）中，该石头依然是在“同济大学”这个矢量的顺时针一侧。但在图像 3-2（c）中，该石头在“同济大学”这个矢量的逆时针一侧。因此，我们说图像图 3-2（a）到图像 3-2（b）的变换是保持方向的，而它到图像 3-2（c）的变换并没有保持方向。通过这个例子我们看到，行列式为 1 的正交矩阵可以表达平面内的旋转，而行列式为-1 的正交矩阵则不可以。在本书中，我们所定义的旋转变换为保向旋转变换，要求表达旋转变换的矩阵为行列式为 1 的正交矩阵。因此，旋转变换也可称为特殊正交变换（在机器人学中这个称呼用的比较多），其特殊性就在于表达旋转的正交矩阵的行列式必须为 1。

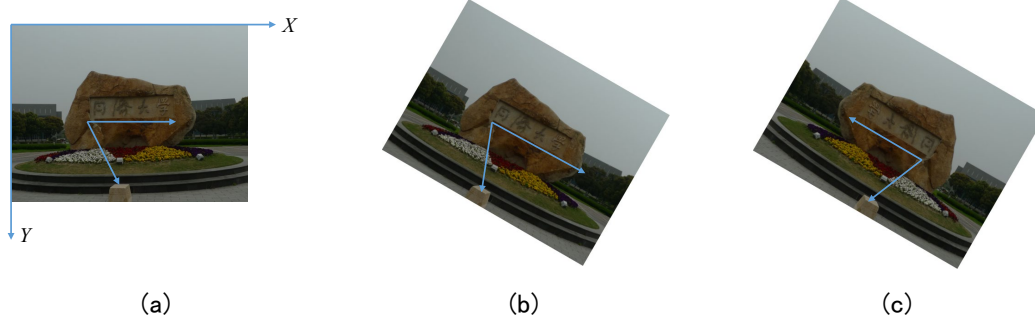


图 3-2：平面内的旋转变换与旋转和反射复合变换。（a）原始图像；（b）图像（a）经过一个平面内的旋转变换之后得到的结果；（c）图像（a）经过旋转复合反射之后得到的结果。

为了便于表达形式的统一和扩展，我们使用**齐次坐标**的方式来表达点的位置。对于二维平面上的点，其齐次坐标的表示为一个三维向量  $(x_1, x_2, x_3)^T$ 。如果  $x_3 = 0$ ，则说明这个点为一个**无穷远点**；如果  $x_3 \neq 0$ ，则说明该点为一个**正常点**。点的齐次坐标从形式上来说不具有唯

一性：如果一个点的齐次坐标为 $(x_1, x_2, x_3)^T$ ，则 $k(x_1, x_2, x_3)^T$ （ $k$ 为任意实数且 $k \neq 0$ ）也是该点的齐次坐标。对于一个正常点，给定它的齐次坐标 $(x_1, x_2, x_3)^T$ ，可以得出它的**规范化齐次坐标** $(x_1/x_3, x_2/x_3, 1)^T$ 。显然，对于一个正常点来说，虽然它的齐次坐标形式不唯一，但它有唯一的规范化齐次坐标形式。

正常点的齐次坐标与非齐次坐标可以相互转换。如果一个平面正常点的坐标为 $(x_1, x_2)^T$ ，则它的规范化齐次坐标为 $(x_1, x_2, 1)^T$ ，它的齐次坐标为 $k(x_1, x_2, 1)^T, k \neq 0$ 。如果一个平面正常点的齐次坐标为 $(x_1, x_2, x_3)^T$ ，则它的非齐次坐标表示为 $(x_1/x_3, x_2/x_3)^T$ 。

一般情况下，对于旋转变换，我们只考虑针对正常点的情况。设旋转变换之前的点 $(x, y)^T$ 的规范化齐次坐标为 $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$ ，变换之后的点 $(x', y')^T$ 的规范化齐次坐标为 $\mathbf{x}' = (x', y', 1)^T$ ，则旋转变换的表达式（3-2）可以重新表示为，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

简记为，

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} R_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3-4)$$

这样，我们便知，表达平面上的旋转关系的变换矩阵 $H$ 应该具有如下形式，

$$H_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} R_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

其中， $R_{2 \times 2}$ 为正交矩阵且 $\det(R_{2 \times 2})=1$ 。容易知道，平面内的旋转变换有1个自由度。

### 3.1.2 欧氏变换（Euclidean transformation）

在数学类书籍中，一般把同时考虑了旋转、反射与平移的几何变换称为欧氏变换。但在计算机视觉与机器人领域，一般不会考虑反射变换。因此，本书所讲的欧氏变换是由旋转和平移复合而成的，不考虑反射的情况。在机器人领域，这种复合了旋转和平移、而不考虑反射的几何变换也被称为**特殊欧氏变换**<sup>[2]</sup>。

对于欧氏变换，一般也只考虑针对正常点的情况。设变换之前点的规范化齐次坐标为 $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$ ，该点经历了一个绕原点的逆时针旋转，旋转角度为 $\theta$ ，之后又经历了一次平移，平移量为 $(t_x, t_y)^T$ 。设变换之后点的规范化齐次坐标为 $\mathbf{x}' = (x', y', 1)^T$ ，则 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x}'$ 的关系为，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

简记为，

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} R_{2 \times 2} & \mathbf{t}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3-7)$$

其中， $R_{2 \times 2}$  为正交矩阵且  $\det(R_{2 \times 2})=1$ ， $\mathbf{t}_{2 \times 1} = (t_x, t_y)^T$ 。

这样，我们便知，表达平面上的欧氏变换的矩阵  $H$  应该具有如下形式，

$$H_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} R_{2 \times 2} & \mathbf{t}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

其中的  $R$  和  $\mathbf{t}$  与公式 (3-7) 中相同。同旋转变换相比，欧氏变换多了两个刻画平移量的自由度，因此平面内的欧氏变换有三个自由度。同时，不难注意到，**旋转变换是欧氏变换的一个特例**。

### 3.1.3 相似变换 (Similarity transformation)

在式 (3-6) 所表达的欧氏变换 (依然不考虑反射) 的基础上再复合上一个各向同性 (isotropic) 的缩放，就得到了相似变换，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & t_x \\ s \sin \theta & s \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

其中， $s > 0$  是刻画缩放程度的标量。相应地，式 (3-9) 可简记为，

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} sR_{2 \times 2} & \mathbf{t}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3-10)$$

其中， $R_{2 \times 2}$  为正交矩阵且  $\det(R_{2 \times 2})=1$ ， $\mathbf{t}_{2 \times 1} = (t_x, t_y)^T$ 。

因此，表达平面上的相似变换的矩阵  $H$  应该具有如下形式，

$$H_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} sR_{2 \times 2} & \mathbf{t}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

其中的  $s$ 、 $R$  和  $\mathbf{t}$  与公式 (3-10) 中相同。同欧氏变换相比，相似变换多了一个控制缩放比例的自由度，因此平面内的相似变换有四个自由度。同时注意到，**欧氏变换是相似变换的一个特例**。

### 3.1.4 仿射变换 (Affine transformation)

可以看到，相似变换相较于欧氏变换来说，我们对变换矩阵左上角  $2 \times 2$  的子矩阵的要求放松了：在欧氏变换中，要求这个  $2 \times 2$  的子矩阵是个能表达旋转的矩阵 (正交且行列式为 1)，而在相似变换中，只要求这个  $2 \times 2$  的子矩阵是旋转矩阵的常数倍即可。如果我们继续放松对

这个子矩阵的要求，只要求它是一个 $2 \times 2$ 的非奇异矩阵，那么得到的相应矩阵所能刻画的线性几何变换就称为仿射变换。

我们也只考虑针对正常点来定义仿射变换。设变换之前点的规范化齐次坐标为 $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$ ，该点经历了一个仿射变换，设变换之后点的规范化齐次坐标为 $\mathbf{x}' = (x', y', 1)^T$ ，则 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x}'$ 的关系为，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

其中，左上角矩阵 $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 非奇异。式（3-12）可简记为，

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} A_{2 \times 2} & \mathbf{t}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3-13)$$

其中， $\mathbf{t}_{2 \times 1} = (t_x, t_y)^T$ 。

因此，表达平面上的仿射变换的矩阵 $H$ 应该具有如下形式，

$$H_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} A_{2 \times 2} & \mathbf{t}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

其中的 $A$ 和 $\mathbf{t}$ 与公式（3-13）中相同。由于矩阵 $A$ 包括了4个独立的元素， $\mathbf{t}$ 是一个二维向量，所以平面内的仿射变换总共有6个自由度。同时注意到，**相似变换是仿射变换的一个特例**。

我们可以进一步来理解一下矩阵 $A$ 所带来的四个自由度的几何意义。由于 $A$ 是二阶非奇异矩阵，它必然具有如下的奇异值分解形式，

$$A = UDV^T \quad (3-15)$$

其中， $U$ 和 $V$ 为正交矩阵， $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ ， $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 。因此 $A = UV^T V D V^T = UV^T (V D V^T)$ 。

由于 $V^T$ 是正交矩阵，从几何上来说，它表示某个旋转角为 $\phi$ 的旋转，记为 $R(\phi)$ 。那么，相

应地， $V$ 所表示的旋转一定是 $R(-\phi)$ 。 $UV^T$ 也是正交矩阵，它表示某个旋转角为 $\theta$ 的旋转，

记为 $R(\theta)$ 。这样， $A = R(\theta)R(-\phi) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} R(\phi)$ 。如果把 $A$ 作用在几何图形上，相当于先把该

图形绕原点旋转角度 $\phi$ ，之后再沿 $X$ 和 $Y$ 方向进行缩放，缩放系数分别为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ ，之后旋转回原来的位置，最后再旋转角度 $\theta$ 。

我们通过一个例子来感受一下仿射变换。在图 3-3 中，(a) 是原始图像，(b) 是经由矩

阵  $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  所定义的仿射变换得到的结果。可以看到，原来几乎是正圆形的盘子在这个

仿射变换之后，变成了椭圆形。由此可见，在仿射变换之下，角度有可能是不会被保持的。



图 3-3：仿射变换举例。(a) 原始图像；(b) 和 (c) 是对图像 (a) 进行仿射变换之后得到的结果，(b) 图像保持了原始图像的方向性，而 (c) 图像中方向发生了翻转。

在前面谈到旋转变换、欧氏变换和相似变换时，我们都强调了变换要保持方向性的问题。对于这三类变换来说，只有当其表达矩阵（式 3-5、式 3-8 和式 3-11）中的  $R$  的行列式为 1 的时候，变换才会保持图像的方向性。对于仿射变换，也有类似的结论。如果不对式 3-13 中的  $A$  加以约束，得到的仿射变换可能会改变图形的方向性。只有当  $\det(A) > 0$  时，对应的仿射变换才会保持图形的方向性；当  $\det(A) < 0$  时，图像的方向会改变。事实上，可以证明<sup>[3]</sup>：在平面上有两个方向不同的矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ ，当平面上发生了由式 3-13 所表达的仿射变换后， $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  两个矢量相应地变换为矢量  $\mathbf{a}'$  和  $\mathbf{b}'$ ，那么以矢量  $\mathbf{a}'$ 、 $\mathbf{b}'$  为邻边所围成的平行四边形的定向面积与以矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  为邻边所围成的平行四边形的定向面积之比为  $\det(A)$ 。所以，当  $\det(A) < 0$

时，变换之后图形的方向性会发生变化。比如，在图 3-3 中，对 (a) 图像施加由  $\begin{bmatrix} -0.9 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（其行列式小于零）所定义的仿射变换后得到 (c) 图像，可以看到 (c) 图像与 (a) 图像相比，图形的方向性发生了改变。因此，如果只考虑保持方向的仿射变换，需要要求  $\det(A) > 0$ 。

### 3.1.5 射影变换 (Projective transformation)

在之前的讨论中，表达线性几何变换的矩阵  $H$  都有一个共同的特点，那就是最后一行是  $(0,0,1)$ 。如果继续放松对矩阵  $H$  的要求，只要求它是一个非奇异的  $3 \times 3$  的矩阵，那么此时  $H$  所能表达的线性几何变换称为射影变换。与前面讨论的几种变换不同，射影变换不但可以定义在正常点上，也可以定义在无穷远点上。在射影变换下，不再区分正常点和无穷远点，

它可以把正常点变换到无穷远点，也可以把无穷远点变换到正常点。因此，我们对点的坐标表达就不再限定为规范化齐次坐标了（因为无穷远点没有规范化齐次坐标），而是使用一般化的齐次坐标表达。

假设变换之前点的齐次坐标为  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ，经过射影变换  $H$  之后，该点就变为了  $H\mathbf{x}$ 。我们注意到，由于点的齐次坐标不具有唯一性， $H\mathbf{x}$  与  $kH\mathbf{x}, \forall k \neq 0$  代表的都是同一个平面点。这也就意味着  $H$  与  $kH, \forall k \neq 0$  表达的实际上是同一个射影变换。因此，尽管从形式上看，射影变换矩阵  $H$  有 9 个元素，但实际上它只有 8 个自由度。

如果点  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  与点  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)^T$  可以由射影变换  $H$  对应起来，那么  $H\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}'$  之间是一个常数倍的关系，即必存在一个数  $c$ ，使得  $c\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$ 。也就是说，如果点  $\mathbf{x}$  经过射影变

$$\text{换 } H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \text{ 变换到了 } \mathbf{x}', \text{ 那么它们满足关系,}$$

$$c \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

其中， $c$  是一个与点  $\mathbf{x}'$  有关的数。

最后再来谈一下射影变换对图形方向性的保持问题。我们在前面提到，对于由式 3-13 所定义的仿射变换来说，可以根据  $\det(A)$  的符号来判断该变换是否能够保持图形的方向性。但对于射影变换来说，我们无法判定一个射影变换是否会保持图形的方向性<sup>[4]</sup>。

## 3.2 变换群与几何学

德国数学家费利克斯·克莱因（Flix. Klein）在 1872 年运用变换群的思想来区分各种几何学，他提出，每一种几何都是在研究图形在一定的变换群下不变的性质<sup>[3]</sup>。这就是著名的爱尔兰根纲领（Erlangen Program）。



图 3-4：费利克斯·克莱因（Felix Klein, 1849 年 4 月 25 日—1925 年 6 月 22 日），德国数学家。克莱因生于德国杜塞多夫，在爱尔兰根、慕尼黑和莱比锡当过教授，最后在哥廷根教授数学。他的主要课题是非欧几何、群论和复变函数论。他发布的爱尔兰根纲领将各种几何用它

们的基础对称群来分类，是对当时多个数学分支的一个综合导向，影响深远。

### 3.2.1 群的定义

群是一个代数学的概念。由于几何与代数的密切关系，这个概念对于几何学的研究不但重要的而且产生了深远的影响。

**定义 3.1** 群<sup>[5]</sup>。设有一个集合  $\mathcal{G}$ ，在其上元素之间定义操作“ $\circ$ ”，如果集合  $\mathcal{G}$  关于运算 $\circ$  满足下列条件：

- 1) 封闭性：  $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}, \exists g_3 \in \mathcal{G}$ ，使得  $g_3 = g_1 \circ g_2$ ；
- 2) 结合性：  $\forall g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}, g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ ；
- 3) 存在单位元：  $\exists e \in \mathcal{G}$ ，使得  $\forall g \in \mathcal{G}, e \circ g = g \circ e = g$ ， $e$  称为  $\mathcal{G}$  中的单位元；
- 4) 每个元素存在逆元：  $\forall g \in \mathcal{G}, \exists g^{-1} \in \mathcal{G}$ ，使得  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ 。

则称  $\mathcal{G}$  在运算 $\circ$ 之下构成一个群。

### 3.2.2 线性几何变换群

根据群的定义不难验证，在 3.1 节中定义的表达 5 种线性几何变换的矩阵元素在普通矩阵乘法运算之下均构成群，分别称为旋转变换群（也称为特殊正交群<sup>[2]</sup>，Special orthogonal group）、欧氏变换群（Euclidean group）<sup>1</sup>、相似变换群、仿射变换群和射影变换群。在机器人学中，刻画机器人的“保向”刚体运动是最基本的问题。因此，在该领域中，最常见的特殊正交群和特殊欧氏变换群都有着通用的表达记号。在二维空间（欧氏平面）中，特殊正交群被记为  $SO(2)$ ，特殊欧氏变换群被记为  $SE(2)$ ；在三维空间中，特殊正交群被记为  $SO(3)$ ，特殊欧氏变换群被记为  $SE(3)$ 。

作为例子，我们一起来验证一下表达平面内旋转变换的矩阵集合，

$$\mathcal{G} = \{R \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : |RR^T = I, \det(R) = 1\}$$

在普通矩阵乘法之下构成群。

1) 验证封闭性。假设  $g_1 = R_1 \in \mathcal{G}, g_2 = R_2 \in \mathcal{G}$ ，则  $g_1 g_2 = R_1 R_2$ ，则有

$$(g_1 g_2)(g_1 g_2)^T = (R_1 R_2)(R_1 R_2)^T = R_1 R_2 R_2^T R_1^T = I, \text{ 且 } \det(g_1 g_2) = \det(R_1 R_2) = \det(R_1) \det(R_2) = 1,$$

则  $g_1 g_2 \in \mathcal{G}$

---

<sup>1</sup> 一般数学类书籍中所说的欧氏变换会包含反射的情况。但本书中所说的欧氏变换不考虑反射的情况，这类欧氏变换群在机器人学中也称为特殊欧氏群（special Euclidean group）。



2) 验证结合性。在普通矩阵乘法之下，结合性显然成立。

3) 验证存在单位元。单位元为二阶单位矩阵  $I_{2 \times 2}$ 。

4) 验证每个元素存在逆元。设  $g = R \in \mathcal{G}$ 。我们验证  $R$  的逆矩阵  $R^{-1}$  也属于  $\mathcal{G}$ ：

$R^{-1}(R^{-1})^T = R^T R = I$ ，且  $\det(R^{-1}) = \frac{1}{\det(R)} = 1$ ，则  $R^{-1} \in \mathcal{G}$ 。另，由于  $gR^{-1} = RR^{-1} = I$ ，

$R^{-1}g = R^{-1}R = I$ ，则  $g$  的逆元为  $g^{-1} = R^{-1}$ 。

我们现在知道了前面提到的 5 种几何变换都构成群，那么就可以得到一个重要推论：

**推论 3.1** 由于群的封闭性，两个同类型的几何变换复合在一起，得到的复合变换依然是这个类型的几何变换。

比如，平面内两个欧氏变换复合在一起，得到的复合变换依然是平面内的欧氏变换，该复合变换的自由度依然是 3 个，它不会变成具有 4 个自由度的相似变换，也不会变成具有 6 个自由度的仿射变换。

另外，不难理解，我们提到的这 5 个变换群具有如下包含关系：

**推论 3.2** 旋转变换群  $\subset$  欧氏变换群  $\subset$  相似变换群  $\subset$  仿射变换群  $\subset$  射影变换群。

如克莱因指出的，每一种几何都是在研究图形在一定的变换群下不变的性质。那么接下来看一下，在我们所定义的 5 种变换群下，图形会具有哪些不变的几何性质。

显然，在旋转变换与欧氏变换之下，两点之间的距离是保持不变的。从距离这个基本不变量出发，我们可以推导出其他的不变量，比如两条线之间的夹角、图形的面积等。

在相似变换下，基本的几何不变量是**相似比**。假设变换之前有任意点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  和  $\mathbf{x}_4$ ，变

换之后它们的对应点分别为  $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3$  和  $\mathbf{x}'_4$ 。相似比不变指的是  $\frac{\|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\|}{\|\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4\|} = \frac{\|\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\|}{\|\mathbf{x}'_3\mathbf{x}'_4\|}$ 。由相似比这个

基本不变量，我们也可以推导出相似变换下的其他不变量，比如两条线之间的夹角、直线之间的平行关系等。

**定义 3.2** 简单比值<sup>[3]</sup>。设  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  是共线三点，在此直线上取定一个单位向量  $\mathbf{e}$ ，若  $\overline{\mathbf{ab}} = \lambda \mathbf{e}$ ，则称  $\lambda$  是线段  $\mathbf{ab}$  的代数长，就用  $\mathbf{ab}$  表示线段  $\mathbf{ab}$  的代数长。称  $\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{bc}}$  为共线三点  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  的简单比值，记作  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ，即  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{bc}}$ 。

在仿射变换下，基本的几何不变量是简单比值，即仿射变换保持共线三点的简单比值不变。由简单比值这个基本不变量，我们也可以推导出仿射变换下的其他不变量：直线之间的平行关系在变换前后保持不变；两个图形的面积比在变换前后保持不变；若  $\mathbf{c}$  是有向线段  $\overline{\mathbf{ab}}$  的中点，则变换之后它的对应点  $\mathbf{c}'$  也是对应有向线段  $\overline{\mathbf{a'b'}}$  的中点。需要格外注意的是，仿射变换不会保持角度，比如一个矩形在仿射变换之下可能会变成平行四边形。

在射影变换下，基本的几何不变量是**交比**。由于交比在本书中其他地方不会再涉及，我们就不再详加介绍了。相对于前面几种变换群来说，射影变换群是最大的，同时它能够保持的几何不变量是最少的。比如，在仿射变换下，直线的平行关系是可以被保持的，但一般的射影变换并不能保持直线间的平行关系，这就意味着一个矩形在射影变换之后可能会变成一个一般的四边形。但射影变换毕竟是线性几何变换，一些最基本的几何关系还是能被保持的，比如：它会把直线变换到直线，变换前是不重合的两点在射影变换后依然不重合等等。

### 3.3 三维空间中的线性几何变换

在 3.1 节中讲述的二维平面上的线性几何变换与在 3.2 节中讲述的关于变换群与几何学的有关结论，可以直接推广到三维空间。为了便于读者查阅，我们把在三维空间中的线性几何变换的有关结论总结在本节。

与二维情况一样，三维空间中的旋转变换、欧氏变换、相似变换和仿射变换都是针对正常点（非无穷远点）进行的。设变换之前三维空间点的规范化齐次坐标为  $\mathbf{x} = (x, y, z, 1)^T$ ，变换之后点的规范化齐次坐标为  $\mathbf{x}' = (x', y', z', 1)^T$ 。

在旋转变换下， $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}'$  的关系为，

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3-17)$$

其中， $R_{3 \times 3}$  为正交矩阵且  $\det(R_{3 \times 3}) = 1$ 。表达三维空间旋转变换的矩阵元素在普通矩阵乘法运算之下构成群，称为三维空间下的旋转变换群。

在欧氏变换下， $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}'$  的关系为，

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & \mathbf{t}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3-18)$$

其中， $R_{3 \times 3}$  为正交矩阵且  $\det(R_{3 \times 3}) = 1$ ， $\mathbf{t}_{3 \times 1} = (t_x, t_y, t_z)^T$  为平移向量。表达三维空间欧氏变换的矩阵元素在普通矩阵乘法运算之下构成群，称为三维空间下的欧氏变换群。在三维旋转变换群与欧氏变换群下，空间点之间的距离保持不变。

在相似变换下， $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}'$  的关系为，

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} sR_{3 \times 3} & \mathbf{t}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3-19)$$

其中， $R_{3 \times 3}$  为正交矩阵且  $\det(R_{3 \times 3}) = 1$ ， $\mathbf{t}_{3 \times 1} = (t_x, t_y, t_z)^T$  为平移向量， $s > 0$  为尺度缩放系数。表达三维空间相似变换的矩阵元素在普通矩阵乘法运算之下构成群，称为三维空间下的相似变换群。在三维相似变换群下，空间点之间距离的相似比保持不变。

在仿射变换下， $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}'$  的关系为，

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} A_{3 \times 3} & \mathbf{t}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3-20)$$

其中， $A_{3 \times 3}$  为非奇异矩阵且  $\det(A) > 0$ ， $\mathbf{t}_{3 \times 1} = (t_x, t_y, t_z)^T$  为平移向量。表达三维空间仿射变换的矩阵元素在普通矩阵乘法运算之下构成群，称为三维空间下的仿射变换群。在三维仿射变换群下，空间共线三点之间的简单比值保持不变。另外，与二维情况类似，可以证明：在三维空间中有三个不共面矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ ，当该空间发生了由式 3-20 所表达的仿射变换后， $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  三个矢量相应地变换为矢量  $\mathbf{a}'$ 、 $\mathbf{b}'$  和  $\mathbf{c}'$ ，那么以矢量  $\mathbf{a}'$ 、 $\mathbf{b}'$  和  $\mathbf{c}'$  为邻边所围成的平行六面体的定向体积与以矢量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  为邻边所围成的平行六面体的定向体积之比为  $\det(A)$ ，因此  $\det(A)$  也被形象地称为仿射变换的“变积系数” [5]。

表 3-1：二维空间与三维空间下的线性几何变换（ $n$  为空间维度， $n=2, 3$ ）

变换名称	矩阵表达式	二维情况下 自由度个数	三维情况下 自由度个数	不变量
旋转变换	$\begin{bmatrix} R_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix}$ ， $R$ 为正交矩阵且 $\det(R)=1$	1	3	长度，角度， 面积（体积）
欧氏变换	$\begin{bmatrix} R_{n \times n} & \mathbf{t}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix}$ ， $R$ 为正交矩阵且 $\det(R)=1$	3	6	长度，角度， 面积（体积）
相似变换	$\begin{bmatrix} sR_{n \times n} & \mathbf{t}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix}$ ， $R$ 为正交矩阵且 $\det(R)=1$ ， $s>0$	4	7	相似比，角度， 面积（体积） 比
仿射变换	$\begin{bmatrix} A_{n \times n} & \mathbf{t}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix}$ ， $A$ 为非奇异矩阵且 $\det(A)>1$	6	12	简单比，面积 （体积）比， 平行关系
射影变换	$H_{(n+1) \times (n+1)}$ ， $H$ 为非奇异矩阵	8	15	交比，共线关系

如果三维空间点（齐次坐标表示） $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  与点  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)^T$  可以由射影变

换  $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$  对应起来，那么它们满足关系，

$$c \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

其中， $c$  是一个与点  $\mathbf{x}'$  有关的数。表达三维空间射影变换的矩阵元素在普通矩阵乘法运算之下构成群，称为三维空间下的射影变换群。在三维射影变换群下，空间共线四点之间的交比值保持不变。

表 3-1 总结了二维空间与三维空间下的线性几何变换的主要相关结论。

### 3.4 习题

(1) 请证明形如式 3-8 所定义的表达平面内欧氏变换的矩阵元素集合构成群。

### 参考文献

- [1] 李世栋, 乐经良, 冯卫国, 王纪林, 线性代数, 科学出版社, 2000 年。
- [2] 高翔, 张涛等, 视觉 SLAM 十四讲: 从理论到实践 (第二版), 电子工业出版社, 2019 年。
- [3] 丘维声, 解析几何 (第二版), 北京大学出版社, 1996 年。
- [4] Richard Hartley, Andrew Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision (2<sup>nd</sup> Edition), Cambridge University Press, 2004.
- [5] 方德植, 陈奕培, 射影几何, 高等教育出版社, 1983 年。