3.1.2 乘法运算

1. 原码一位乘法运算

- **原码一位乘法的法则:**

①乘积的符号为被乘数的符号位与乘数的符号位相异或;

②乘积的绝对值为被乘数的绝对值与乘数的绝对值之积。即

$$[X]_{原} \times [Y]_{原} = (X_0 \oplus Y_0)(|X| \times |Y|)$$

- 手工乘法运算

例　　若$[X]_{原}=0.1101$，$[Y]_{原}=1.1011$，求两者之积。

解：乘积的符号为$0 \oplus 1=1$

手算过程如下：

$$
\begin{array}{rl}
1101 & \\
\times\ 1011 & \\
\hline
1101 & \text{部分积} \\
1101 & \text{部分积} \\
0000 & \text{部分积} \\
1101 & \text{部分积} \\
\hline
.10001111 &
\end{array}
$$

综上，乘积的原码为：1.10001111

- 机器实现思路：部分积，右移，4位累加

例 $[X]_{原} = 0.1101$，$[Y]_{原} = 1.1011$，求两者之积。

解：$|X| = 1101$，$|Y| = 1011$，$X_S \oplus Y_S = 0 \oplus 1 = 1$

例　$[X]_{原} = 0.1101$，$[Y]_{原} = 1.1011$，求两者之积。

解：$|X| = 1101$，$|Y| = 1011$，$X_S \oplus Y_S = 0 \oplus 1 = 1$

	D				A			A_0	操作
0	0	0	0	0	1	0	1	1	$A_0=1$，$+X$

例 $[X]_原 = 0.1101$，$[Y]_原 = 1.1011$，求两者之积。

解：$|X| = 1101$，$|Y| = 1011$，$X_S \oplus Y_S = 0 \oplus 1 = 1$

	D				A			A_0	操作
0	0	0	0	0	1	0	1	1	A_0=1，+X
+0	1	1	0	1					
0	1	1	0	1					

例 $[X]_{原} = 0.1101$，$[Y]_{原} = 1.1011$，求两者之积。

解：$|X| = 1101$，$|Y| = 1011$，$X_S \oplus Y_S = 0 \oplus 1 = 1$

	D				A			A_0	操作
0	0	0	0	0	1	0	1	1	$A_0=1$, +X
+0	1	1	0	1					
0	1	1	0	1					
0	0	1	1	0	1	1	0	1	→右移一次

例　$[X]_{原} = 0.1101$，$[Y]_{原} = 1.1011$，求两者之积。

解：$|X| = 1101$，$|Y| = 1011$，$X_S \oplus Y_S = 0 \oplus 1 = 1$

	D				A			A_0	操作
0	0	0	0	0	1	0	1	1	$A_0=1$, +X
+0	1	1	0	1					
0	1	1	0	1					
0	0	1	1	0	1	1	0	1	→右移一次
+0	1	1	0	1					$A_0=1$, +X
1	0	0	1	1	1	1	0	1	

例 $[X]_{原} = 0.1101$，$[Y]_{原} = 1.1011$，求两者之积。

解： $|X| = 1101$，$|Y| = 1011$，$X_S \oplus Y_S = 0 \oplus 1 = 1$

	D				A			A_0	操作
0	0	0	0	0	1	0	1	1	$A_0=1$, +X
+0	1	1	0	1					
0	1	1	0	1					
0	0	1	1	0	1	1	0	1	→右移一次
+0	1	1	0	1					$A_0=1$, +X
1	0	0	1	1	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	1	1	1	0	→右移一次

例 $[X]_{原}=0.1101$，$[Y]_{原}=1.1011$，求两者之积。

解： $|X|=1101$， $|Y|=1011$，$X_S \oplus Y_S=0 \oplus 1=1$

	D				A			A_0	操作
0	0	0	0	0	1	0	1	1	A_0=1, +X
+0	1	1	0	1					
0	1	1	0	1					
0	0	1	1	0	1	1	0	1	→右移一次
+0	1	1	0	1					A_0=1, +X
1	0	0	1	1	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	1	1	1	0	→右移一次
0	0	0	0	0					A_0=0, +0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	

例 $[X]_{原} = 0.1101$，$[Y]_{原} = 1.1011$，求两者之积。

解： $|X| = 1101$，$|Y| = 1011$，$X_S \oplus Y_S = 0 \oplus 1 = 1$

	D				A			A_0	操作
0	0	0	0	0	1	0	1	1	$A_0=1$, +X
+0	1	1	0	1					
0	1	1	0	1					
0	0	1	1	0	1	1	0	1	→右移一次
+0	1	1	0	1					$A_0=1$, +X
1	0	0	1	1	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	1	1	1	0	→右移一次
0	0	0	0	0					$A_0=0$, +0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	1	→右移一次

例　$[X]_{原} = 0.1101$，$[Y]_{原} = 1.1011$，求两者之积。

解：$|X| = 1101$，$|Y| = 1011$，$X_S \oplus Y_S = 0 \oplus 1 = 1$

	D				A			A_0	操作
0	0	0	0	0	1	0	1	1	$A_0=1$，+X
+0	1	1	0	1					
0	1	1	0	1					
0	0	1	1	0	1	1	0	1	→右移一次
+0	1	1	0	1					$A_0=1$，+X
1	0	0	1	1	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	1	1	1	0	→右移一次
0	0	0	0	0					$A_0=0$，+0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	1	→右移一次
+0	1	1	0	1					$A_0=1$，+X
1	0	0	0	1	1	1	1	1	

例 $[X]_{原}=0.1101$，$[Y]_{原}=1.1011$，求两者之积。

解：$|X|=1101$，$|Y|=1011$，$X_S \oplus Y_S=0 \oplus 1=1$

	D				A			A_0	操作
0	0	0	0	0	1	0	1	1	$A_0=1$, +X
+0	1	1	0	1					
0	1	1	0	1					
0	0	1	1	0	1	1	0	1	→右移一次
+0	1	1	0	1					$A_0=1$, +X
1	0	0	1	1	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	1	1	1	0	→右移一次
0	0	0	0	0					$A_0=0$, +0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	1	→右移一次
+0	1	1	0	1					$A_0=1$, +X
1	0	0	0	1	1	1	1	1	
0	1	0	0	0	1	1	1	1	→右移一次

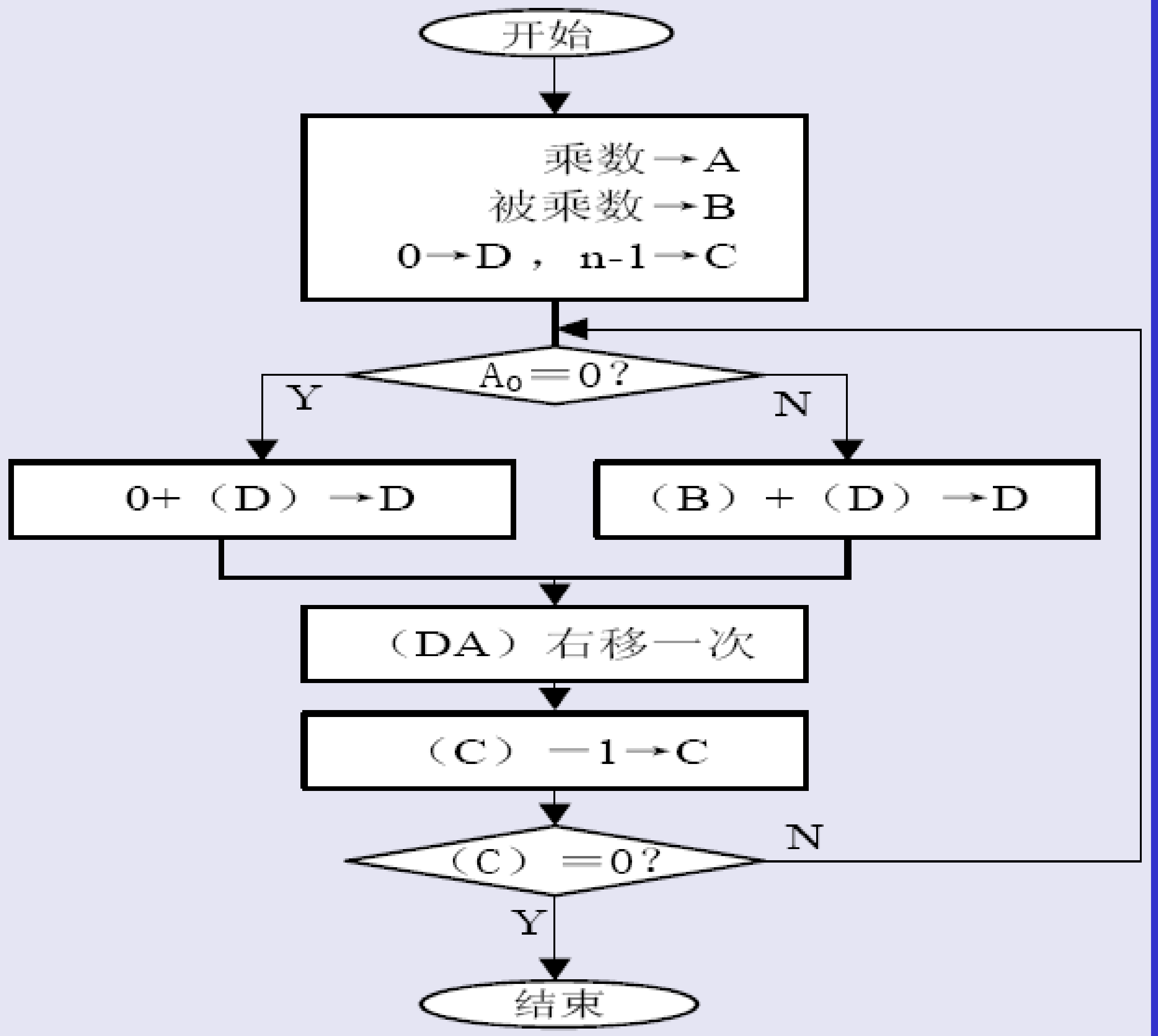
例 $[X]_{原}=0.1101$，$[Y]_{原}=1.1011$，求两者之积。

解： $|X|=1101$，$|Y|=1011$，$X_S \oplus Y_S = 0 \oplus 1 = \underline{1}$

	D				A			A_0	操作
0	0	0	0	0	1	0	1	1	$A_0=1$，+X
+0	1	1	0	1					
0	1	1	0	1					
0	0	1	1	0	1	1	0	1	→右移一次
+0	1	1	0	1					$A_0=1$，+X
1	0	0	1	1	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	1	1	1	0	→右移一次
0	0	0	0	0					$A_0=0$，+0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	
0	0	1	0	0	1	1	1	1	→右移一次
+0	1	1	0	1					$A_0=1$，+X
1	0	0	0	1	1	1	1	1	
0	1	0	0	0	1	1	1	1	→右移一次

拼接符号后积为：1. 1 0 0 0 1 1 1 1

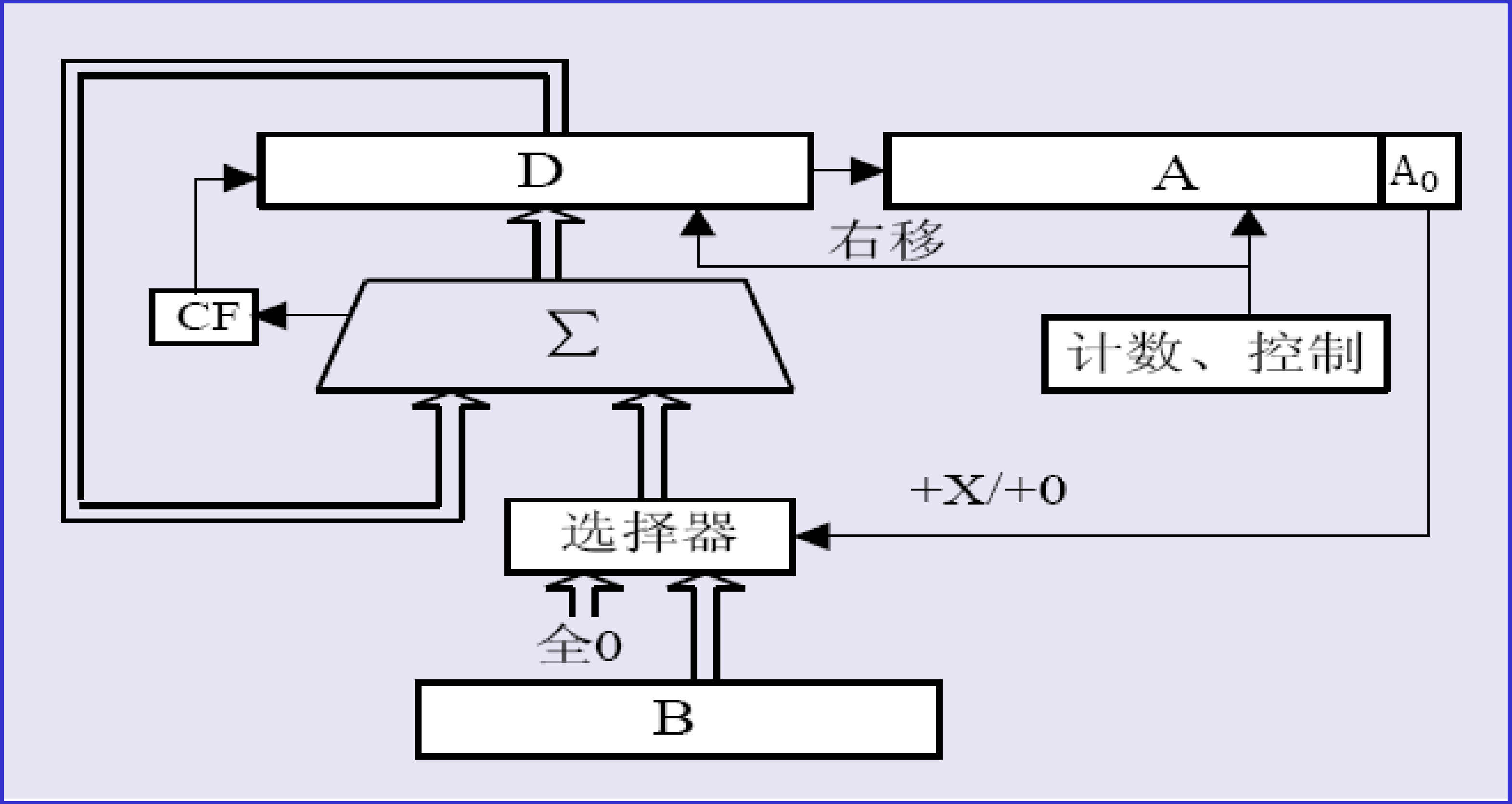
- 实现流程



绝对值乘法思路框图

```
        1101    B
   ×    1011    A
   ---------
        1101
       1101
      0000
     1101
  ----------
  .10001111
```

- 原码一位乘法器框图



D 部分积（初始清0），　A 乘数，　B 被乘数
D, A 乘积

● 原码二位乘法运算（了解）：

Y_{i+1}	Y_i	C	操　作
0	0	0	+0，　右移2次，C = 0
0	0	1	+｜X｜，右移2次，C = 0
0	1	0	+｜X｜，右移2次，C = 0
0	1	1	+2｜X｜，右移2次，C = 0
1	0	0	+2｜X｜，右移2次，C = 0
1	0	1	−｜X｜，右移2次，C = 1
1	1	0	−｜X｜，右移2次，C = 1
1	1	1	+0，　右移2次，C = 1

原码二位乘法的法则表

2. 补码一位乘法运算

- **布斯（Booth）法**

假定被乘数X和乘数Y均为用补码表示的纯小数，分别为：

$$[X]_{补} = X_0 . X_{-1}X_{-2}\ldots X_{-(n-1)}$$

$$[Y]_{补} = Y_0 . Y_{-1}Y_{-2}\ldots Y_{-(n-1)}\ \ 0$$

附加位

其中X_0、Y_0 是它们的符号位。

则布斯法补码一位乘法的算法公式为：

$$[X\cdot Y]_{补} = [X]_{补}\cdot[(Y_{-1} - Y_0)2^0 + (Y_{-2} - Y_{-1})2^{-1} + (Y_{-3} - Y_{-2})2^{-2} + \ldots\ldots + (Y_{-(n-1)} - Y_{-(n-2)})2^{-(n-2)} + (0 - Y_{-(n-1)})2^{-(n-1)}]$$

$$Y' = (Y_{-1} - Y_0).(Y_{-2} - Y_{-1})(Y_{-3} - Y_{-2})\ldots\ldots(Y_{-(n-1)} - Y_{-(n-2)})(0 - Y_{-(n-1)})$$

则： $[X\cdot Y]_{补} = [X]_{补}\cdot Y'$

Y_i Y_{i-1}	$Y_{i-1}-Y_i$	操 作
0 0	0	+0，右移一次
0 1	1	+$[X]_{补}$，右移一次
1 0	−1	+$[-X]_{补}$，右移一次
1 1	0	+0，右移一次

乘数相邻两位的操作规律

- 布斯法的运算法则：

①乘数与被乘数均用补码表示，连同符号位一起参加运算。

②乘数最低位后增加一个附加位（可用A_{-1}表示），初始设定为0。

③从附加位开始，依据上表所示的操作规律，完成运算。

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解： $[X]_{补} = 00.1010$，$[Y]_{补} = 11.0011$，

而$[-X]_{补} = 11.0110$。

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解： $[X]_补 = 00.1010$，$[Y]_补 = 11.0011$，

而$[-X]_补 = 11.0110$。

符号		D				A					A_{-1}	操 作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解： $[X]_{补} = 00.1010$， $[Y]_{补} = 11.0011$，

而$[-X]_{补} = 11.0110$。

符号		D				A					A_{-1}	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0							$+[-X]_{补}$
1	1	0	1	1	0							

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解： $[X]_{补} = 00.1010$， $[Y]_{补} = 11.0011$，

而 $[-X]_{补} = 11.0110$。

符号		D				A					A_{-1}	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0							$+[-X]_{补}$
1	1	0	1	1	0							
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	右移一位

例 已知 $X = 0.1010$, $Y = -0.1101$。利用布斯法求积。

解： $[X]_{补} = 00.1010$， $[Y]_{补} = 11.0011$，

而 $[-X]_{补} = 11.0110$。

符号		D				A					A_{-1}	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0							$+[-X]_{补}$
1	1	0	1	1	0							
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
1	1	1	0	1	1							

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解: $[X]_{补} = 00.1010$， $[Y]_{补} = 11.0011$，

而$[-X]_{补} = 11.0110$。

符号		D				A					A_{-1}	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0							$+[-X]_{补}$
1	1	0	1	1	0							
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
1	1	1	0	1	1							
1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	右移一位

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解：　$[X]_补 = 00.1010$，$[Y]_补 = 11.0011$，

而$[-X]_补 = 11.0110$。

符号		D				A					A_{-1}	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0							$+[-X]_补$
1	1	0	1	1	0							
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
1	1	1	0	1	1							
1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	右移一位
0	0	1	0	1	0							$+[X]_补$
0	0	0	1	1	1							

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解： $[X]_{补} = 00.1010$， $[Y]_{补} = 11.0011$，

而$[-X]_{补} = 11.0110$。

符号		D				A					A_{-1}	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0							$+[-X]_{补}$
1	1	0	1	1	0							
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
1	1	1	0	1	1							
1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	右移一位
0	0	1	0	1	0							$+[X]_{补}$
0	0	0	1	1	1							
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	右移一位

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解：　[X]$_补$ = 00.1010，[Y]$_补$ = 11.0011，

而[-X]$_补$ = 11.0110。

符号	D	A	A_{-1}	操作
0 0	0 0 0 0	1 0 0 1 1	0	
1 1	0 1 1 0			+ [—X]$_补$
1 1	0 1 1 0			
1 1	1 0 1 1	0 1 0 0 1	1	右移一位
0 0	0 0 0 0			+0
1 1	1 0 1 1			
1 1	1 1 0 1	1 0 1 0 0	1	右移一位
0 0	1 0 1 0			+ [X]$_补$
0 0	0 1 1 1			
0 0	0 0 1 1	1 1 0 1 0	0	右移一位
0 0	0 0 0 0			+0
0 0	0 0 1 1			

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解： $[X]_{补}$ = 00.1010， $[Y]_{补}$ = 11.0011，

而$[-X]_{补}$ = 11.0110。

符号		D				A					A_{-1}	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0							+ $[-X]_{补}$
1	1	0	1	1	0							
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
1	1	1	0	1	1							
1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	右移一位
0	0	1	0	1	0							+ $[X]_{补}$
0	0	0	1	1	1							
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
0	0	0	0	1	1							
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	右移一位

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解： $[X]_{补}$ = 00.1010， $[Y]_{补}$ = 11.0011，

而$[-X]_{补}$ = 11.0110。

符号	D	A	A_{-1}	操作
0 0	0 0 0 0	1 0 0 1 1	0	
1 1	0 1 1 0			+ $[-X]_{补}$
1 1	0 1 1 0			
1 1	1 0 1 1	0 1 0 0 1	1	右移一位
0 0	0 0 0 0			+0
1 1	1 0 1 1			
1 1	1 1 0 1	1 0 1 0 0	1	右移一位
0 0	1 0 1 0			+ $[X]_{补}$
0 0	0 1 1 1			
0 0	0 0 1 1	1 1 0 1 0	0	右移一位
0 0	0 0 0 0			+0
0 0	0 0 1 1			
0 0	0 0 0 1	1 1 1 0 1	0	右移一位
1 1	0 1 1 0			+ $[-X]_{补}$
1 1	0 1 1 1			

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解：　$[X]_{补}$ = 00.1010，$[Y]_{补}$ = 11.0011，

而$[-X]_{补}$ = 11.0110。

符号		D				A					A_{-1}	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0							+$[-X]_{补}$
1	1	0	1	1	0							
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
1	1	1	0	1	1							
1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	右移一位
0	0	1	0	1	0							+$[X]_{补}$
0	0	0	1	1	1							
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
0	0	0	0	1	1							
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	右移一位
1	1	0	1	1	0							+$[-X]_{补}$
1	1	0	1	1	1							
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0		右移一位

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

解： $[X]_补 = 00.1010$， $[Y]_补 = 11.0011$，

而 $[-X]_补 = 11.0110$。

符号		D				A					A_{-1}	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0							$+[-X]_补$
1	1	0	1	1	0							
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
1	1	1	0	1	1							
1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	右移一位
0	0	1	0	1	0							$+[X]_补$
0	0	0	1	1	1							
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
0	0	0	0	1	1							
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	右移一位
1	1	0	1	1	0							$+[-X]_补$
1	1	0	1	1	1							
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0		右移一位

例 已知X = 0.1010, Y = -0.1101。利用布斯法求积。

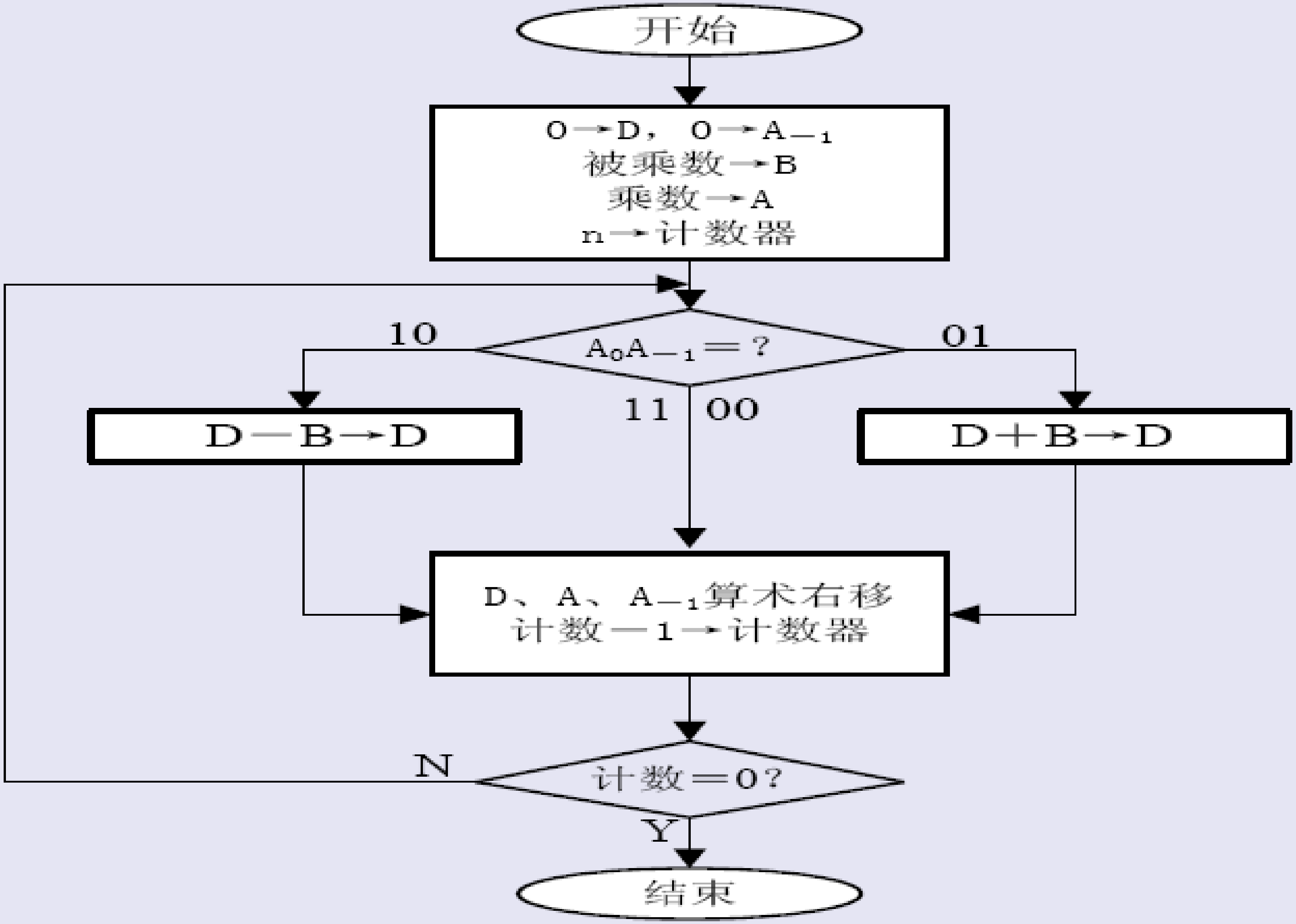
解： $[X]_{补}$ = 00.1010， $[Y]_{补}$ = 11.0011，

而$[-X]_{补}$ = 11.0110。

符号		D				A					A_{-1}	操作
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0							+ $[-X]_{补}$
1	1	0	1	1	0							
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
1	1	1	0	1	1							
1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	右移一位
0	0	1	0	1	0							+ $[X]_{补}$
0	0	0	1	1	1							
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	右移一位
0	0	0	0	0	0							+0
0	0	0	0	1	1							
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	右移一位
1	1	0	1	1	0							+ $[-X]_{补}$
1	1	0	1	1	1							
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0		右移一位

$[X \cdot Y]_{补}$ = 1.01111110

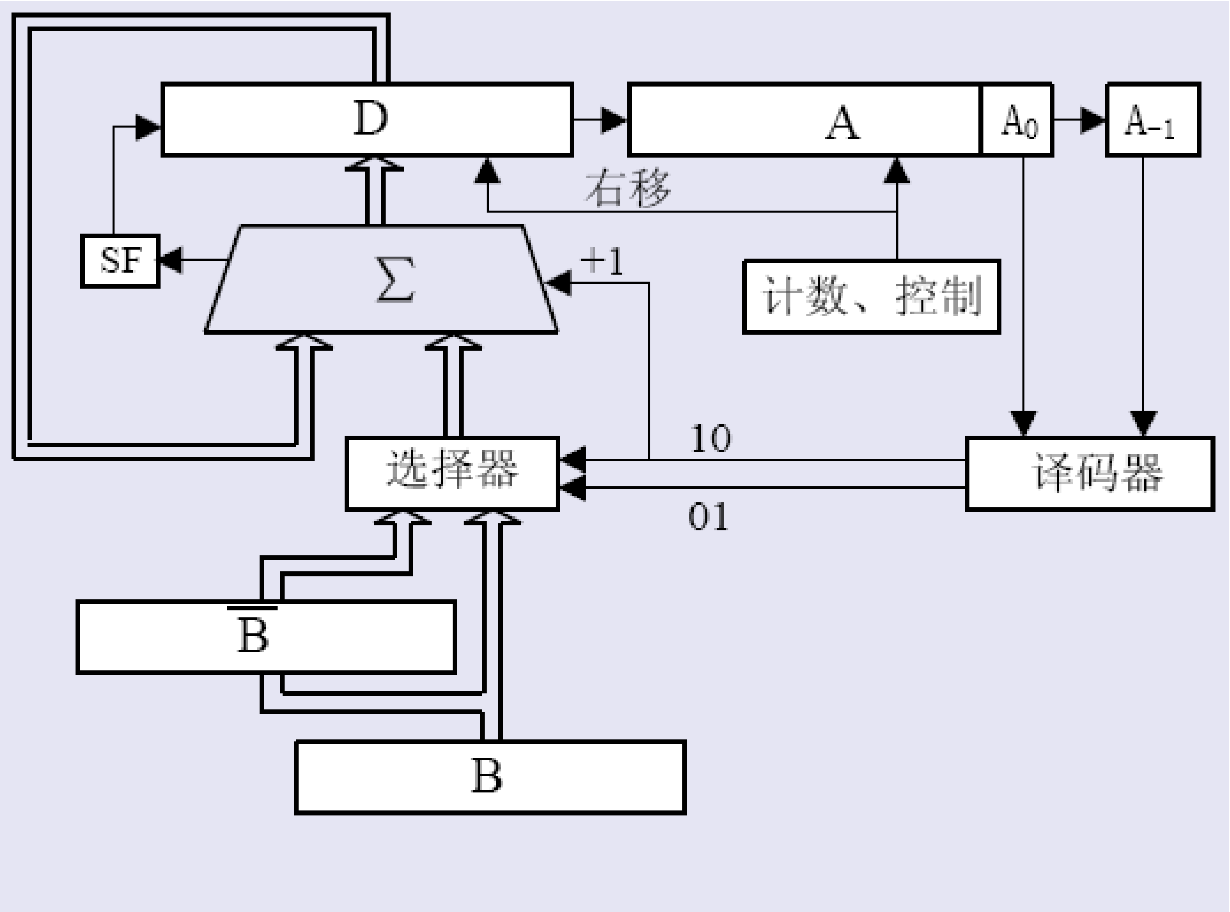
• 运算过程（课后学习）



布斯补码一位乘法流程图

- 补码乘法器框图（课后学习）

- 补码一位乘法器（布斯法）框图

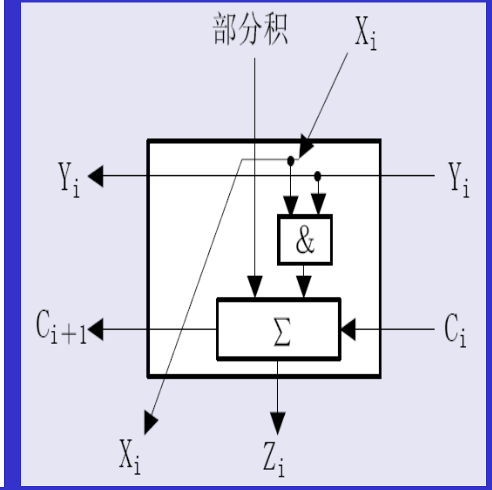


阵列乘法器（课后学习）

- **阵列乘法器（原码一位乘）**

设$X = X_3X_2X_1X_0$，$Y = Y_3Y_2Y_1Y_0$，计算$X \cdot Y = ?$

			X_3	X_2	X_1	X_0
		$\times$	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
			X_3Y_0	X_2Y_0	X_1Y_0	X_0Y_0
		X_3Y_1	X_2Y_1	X_1Y_1	X_0Y_1	
	X_3Y_2	X_2Y_2	X_1Y_2	X_0Y_2		
X_3Y3	X_2Y_3	X_1Y_3	X_0Y_3			
Z_6	Z_5	Z_4	Z_3	Z_2	Z_1	Z_0



3.1.3 除法运算

1. 原码除法运算

- 原码除法的法则

①除数≠0；定点纯小数时，|被除数| < |除数|；定点纯整数时，|被除数| > |除数|。

②与原码乘法类似的是原码除法商的符号和商的值也是分别处理的。

③商的符号等于被除数的符号与除数的符号相异或,商的值就等于被除数的绝对值除以除数的绝对值。

④最后将商的符号与商的值拼接在一起就得到原码除法的商。

- 手工除法过程

例　设X = 0.1011，Y = 0.1101，求X ÷ Y = ?

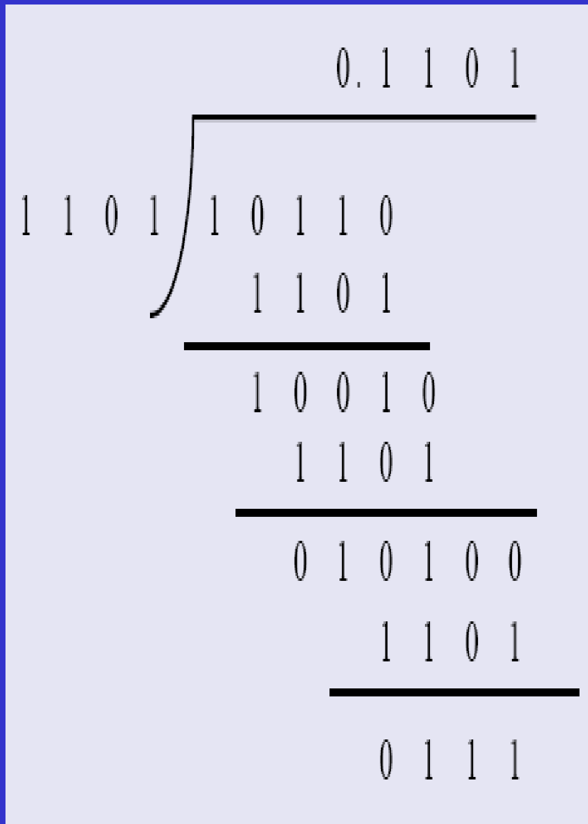
解：由题意可知，假定被除数X和除数Y均为正数。未来商的符号也为正。

```
                    0. 1  1  0  1
              ______________________
1  1  0  1  ) 1  0  1  1  0
                 1  1  0  1
              ______________
                 1  0  0  1  0
                    1  1  0  1
                 ________________
                    0  1  0  1  0  0
                          1  1  0  1
                       ________________
                          0  1  1  1
```

X/Y＝0.1101

余数＝0.0111×2^{-4}

商的符号＝0⊕0＝0



- **恢复余数法**
  - 符号位单独处理。
  - 对于定点纯小数，被除数左移一位，减除数，
    若够减，　上商为1；
    若不够减，上商为0，同时加除数（恢复余数）。
  - 余数左移一位，减除数，
    若够减，　上商为1；
    若不够减，上商为0，同时加除数（恢复余数）。
  - 重复上述过程直到除尽或精度达到要求。
  - 拼接商符得到商，即可获得除法的结果。

例

若被除数X = -0.10001011，
除数Y = 0.1110，
试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足
$|X| < |Y|$，
且 $|Y| \neq 0$
已知 $[X]_{原} = 1.10001011$，
$[Y]_{原} = 0.1110$。
商符 = $1 \oplus 0 = 1$；
绝对值相除见表。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	

例

若被除数X = -0.10001011，

除数Y = 0.1110，

试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

$|X| < |Y|$，

且 $|Y| \neq 0$

已知 $[X]_{原} = 1.10001011$，

$[Y]_{原} = 0.1110$。

商符 $= 1 \oplus 0 = 1$;

绝对值相除见表。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位

例

若被除数$X = -0.10001011$，

除数$Y = 0.1110$，

试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

$|X| < |Y|$，

且$|Y| \neq 0$

已知$[X]_{原} = 1.10001011$，

$[Y]_{原} = 0.1110$。

商符$= 1 \oplus 0 = 1$；

绝对值相除见表。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						$-\|Y\|$
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	够减，商为1

例

若被除数X = -0.10001011，

除数Y = 0.1110，

试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

$|X| < |Y|$，

且 $|Y| \neq 0$

已知 $[X]_{原} = 1.10001011$，

$[Y]_{原} = 0.1110$。

商符 $= 1 \oplus 0 = 1$;

绝对值相除见表。

符号	被除数（余数）	商	操作
0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	0	
0 1	0 0 0 1 0 1 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		$-\lvert Y\rvert$
0 0	0 0 1 1 0 1 1 0	1	够减，商为1
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1		左移一位

例

若被除数X = -0.10001011，

除数Y = 0.1110，

试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

$|X| < |Y|$，

且 $|Y| \neq 0$

已知$[X]_{原} = 1.10001011$，

$[Y]_{原} = 0.1110$。

商符 = $1 \oplus 0 = 1$；

绝对值相除见表。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						−|Y|
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	够减，商为1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1		左移一位
1	1	0	0	1	0						−|Y|
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	不够减，商为0

例

若被除数X = -0.10001011，

除数Y = 0.1110，

试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

|X| < |Y|，

且|Y| ≠0

已知$[X]_原$ = 1.10001011，

$[Y]_原$ = 0.1110。

商符 = 1 ⊕ 0 = 1;

绝对值相除见表。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						－|Y|
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	够减，商为1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1		左移一位
1	1	0	0	1	0						－|Y|
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	不够减，商为0
0	0	1	1	1	0						+|Y|

例

若被除数 $X = -0.10001011$，

除数 $Y = 0.1110$，

试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

$|X| < |Y|$，

且 $|Y| \neq 0$

已知 $[X]_{原} = 1.10001011$，

$[Y]_{原} = 0.1110$。

商符 $= 1 \oplus 0 = 1$；

绝对值相除见表。

符号	被除数（余数）	商	操作
0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	0	
0 1	0 0 0 1 0 1 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		$-\|Y\|$
0 0	0 0 1 1 0 1 1 0	1	够减，商为1
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1		左移一位
1 1	0 0 1 0		$-\|Y\|$
1 1	1 0 0 0 1 1 0 1	0	不够减，商为0
0 0	1 1 1 0		$+\|Y\|$
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1	0	恢复余数

例

若被除数X = -0.10001011，

除数Y = 0.1110，

试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

|X| < |Y|，

且 |Y| ≠0

已知$[X]_{原}$ = 1.10001011，

$[Y]_{原}$ = 0.1110。

商符 = 1 ⊕ 0 = 1;

绝对值相除见表。

符号	被除数（余数）	商	操作
0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	0	
0 1	0 0 0 1 0 1 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
0 0	0 0 1 1 0 1 1 0	1	够减，商为1
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
1 1	1 0 0 0 1 1 0 1	0	不够减，商为0
0 0	1 1 1 0		+|Y|
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1	0	恢复余数
0 0	1 1 0 1 1 0 1 0		左移一位

例

若被除数X = -0.10001011，除数Y = 0.1110，试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

|X| < |Y|，且|Y| ≠0

已知$[X]_原$ = 1.10001011，$[Y]_原$ = 0.1110。

商符 = 1 ⊕ 0 = 1;

绝对值相除见表。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						－|Y|
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	够减，商为1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1		左移一位
1	1	0	0	1	0						－|Y|
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	不够减，商为0
0	0	1	1	1	0						+|Y|
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	恢复余数
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						－|Y|
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	不够减，商为0

例

若被除数X = -0.10001011，除数Y = 0.1110，试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足 ｜X｜ < ｜Y｜，且｜Y｜≠0

已知$[X]_{原}$ = 1.10001011，$[Y]_{原}$ = 0.1110。

商符 = 1 ⊕ 0 = 1；

绝对值相除见表。

符号	被除数（余数）	商	操作
0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	0	
0 1	0 0 0 1 0 1 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		－｜Y｜
0 0	0 0 1 1 0 1 1 0	1	够减，商为1
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1		左移一位
1 1	0 0 1 0		－｜Y｜
1 1	1 0 0 0 1 1 0 1	0	不够减，商为0
0 0	1 1 1 0		+｜Y｜
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1	0	恢复余数
0 0	1 1 0 1 1 0 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		－｜Y｜
1 1	1 1 1 1 1 0 1 0	0	不够减，商为0
0 0	1 1 1 0		+｜Y｜
0 0	1 1 0 1 1 0 1 0	0	恢复余数

例

若被除数X = -0.10001011，

除数Y = 0.1110，

试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

$|X| < |Y|$，

且 $|Y| \neq 0$

已知 $[X]_{原} = 1.10001011$，

$[Y]_{原} = 0.1110$。

商符 = $1 \oplus 0 = 1$；

绝对值相除见表。

符号	被除数（余数）	商	操作
0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	0	
0 1	0 0 0 1 0 1 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		$-\|Y\|$
0 0	0 0 1 1 0 1 1 0	1	够减，商为1
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1		左移一位
1 1	0 0 1 0		$-\|Y\|$
1 1	1 0 0 0 1 1 0 1	0	不够减，商为0
0 0	1 1 1 0		$+\|Y\|$
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1	0	恢复余数
0 0	1 1 0 1 1 0 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		$-\|Y\|$
1 1	1 1 1 1 1 0 1 0	0	不够减，商为0
0 0	1 1 1 0		$+\|Y\|$
0 0	1 1 0 1 1 0 1 0	0	恢复余数
0 1	1 0 1 1 0 1 0 0		左移一位

例

若被除数X = -0.10001011，
除数Y = 0.1110，
试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

$|X| < |Y|$，

且 $|Y| \neq 0$

已知 $[X]_原 = 1.10001011$，

$[Y]_原 = 0.1110$。

商符 $= 1 \oplus 0 = 1$;

绝对值相除见表。

符号	被除数（余数）	商	操作
0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	0	
0 1	0 0 0 1 0 1 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
0 0	0 0 1 1 0 1 1 0	1	够减，商为1
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
1 1	1 0 0 0 1 1 0 1	0	不够减，商为0
0 0	1 1 1 0		＋|Y|
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1	0	恢复余数
0 0	1 1 0 1 1 0 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
1 1	1 1 1 1 1 0 1 0	0	不够减，商为0
0 0	1 1 1 0		＋|Y|
0 0	1 1 0 1 1 0 1 0	0	恢复余数
0 1	1 0 1 1 0 1 0 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
0 0	1 1 0 1 0 1 0 0	1	够减，商为1

例

若被除数 $X = -0.10001011$，除数 $Y = 0.1110$，试利用原码恢复余数法求商及余数。

解：该例满足

$|X| < |Y|$，

且 $|Y| \neq 0$

已知 $[X]_{原} = 1.10001011$，

$[Y]_{原} = 0.1110$。

商符 $= 1 \oplus 0 = 1$;

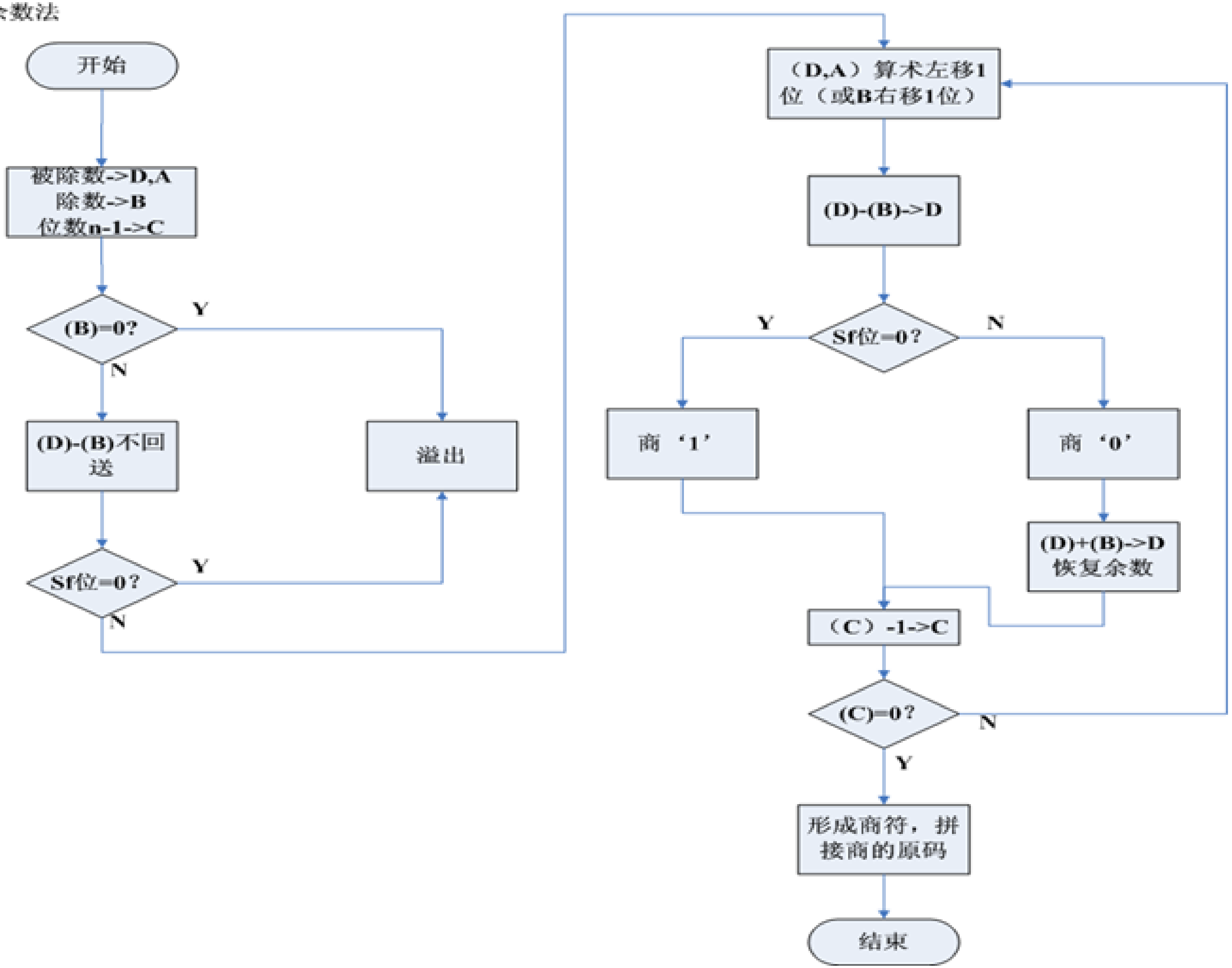
绝对值相除见表。

商 $= 1.1001$

余数 $= 1.1101 \times 2^{-4}$

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						$-\|Y\|$
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	够减，商为1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1		左移一位
1	1	0	0	1	0						$-\|Y\|$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	不够减，商为0
0	0	1	1	1	0						$+\|Y\|$
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	恢复余数
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						$-\|Y\|$
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	不够减，商为0
0	0	1	1	1	0						$+\|Y\|$
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	恢复余数
0	1	1	0	1	1	0	1	0	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						$-\|Y\|$
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	够减，商为1

恢复余数法


开始
被除数->D,A
除数->B
位数n-1->C
(B)=0?
Y
N
(D)-(B)不回送
溢出
Sf位=0?
Y
N
（D,A）算术左移1位（或B右移1位）
(D)-(B)->D
Sf位=0?
Y
N
商 ‘1’
商 ‘0’
(D)+(B)->D
恢复余数
（C）-1->C
(C)=0?
N
Y
形成商符，拼接商的原码
结束

加减交替法

- 假定第i次余数减除数（用B表示）得的余数为R，

当R⩾0时，商1，应左移一位，即 2R，

然后（第i+1次）减去除数，就是 2R －B

当R＜0时，商0，应恢复余数，即 R+B，

再左移一位，即 2(R+B)，

然后（第i+1次）减去除数，就是 2(R+B)－B＝2R +B

- 即当第i次余数减除数的余数R＜0时，不用加除数来恢复余数，而只是将其左移一次，变为2R，到第i+1次运算时将其加除数，也就是2R+B。

- 加减交替法的运算法则

①若余数R≥0，则商上1，左移一次，减除数；

②若余数R＜0，则商上0，左移一次，加除数。

例　　若$X = -0.10001011$，$Y = 0.1110$ 试利用原码加减交替法求商及余数。

例　　若$X = -0.10001011$，$Y = 0.1110$ 试利用原码加减交替法求商及余数。

解：$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$， 商符 $= 1 \oplus 0 = 1$。

例　若X = -0.10001011，Y = 0.1110 试利用原码加减交替法求商及余数。

解：$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$，商符 $= 1 \oplus 0 = 1$。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	

例　　若X = -0.10001011，Y = 0.1110 试利用原码加减交替法求商及余数。

解：$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$， 商符 $= 1 \oplus 0 = 1$。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位

例 若$X=-0.10001011$，$Y=0.1110$ 试利用原码加减交替法求商及余数。

解： $[X]_{原}=1.10001011$，$[Y]_{原}=0.1110$， 商符 $=1\oplus 0=1$。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						$-\|Y\|$

例　　若X = -0.10001011，Y = 0.1110 试利用原码加减交替法求商及余数。

解：$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$， 商符 $= 1 \oplus 0 = 1$。

符号	被除数（余数）	商	操作
0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	0	
0 1	0 0 0 1 0 1 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		$-\lvert Y \rvert$
0 0	0 0 1 1 0 1 1 0	1	R≥0，商为1

例　　若X = -0.10001011，Y = 0.1110 试利用原码加减交替法求商及余数。

解：$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$，商符 = $1 \oplus 0 = 1$。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						−|Y|
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	R≥0，商为1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1		左移一位

例　　若X = -0.10001011，Y = 0.1110　试利用原码加减交替法求商及余数。

解：　$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$，　商符 $= 1 \oplus 0 = 1$。

符号	被除数（余数）	商	操作
0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	0	
0 1	0 0 0 1 0 1 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
0 0	0 0 1 1 0 1 1 0	1	R≥0，商为1
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|

例　　若X = -0.10001011，Y = 0.1110 试利用原码加减交替法求商及余数。

解：$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$， 商符 = 1 ⊕ 0 = 1。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						－｜Y｜
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	R≥0，商为1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1		左移一位
1	1	0	0	1	0						－｜Y｜
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	R＜0，商为0

例 若X = -0.10001011，Y = 0.1110 试利用原码加减交替法求商及余数。

解：$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$， 商符 $= 1 \oplus 0 = 1$。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						－|Y|
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	R≥0，商为1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1		左移一位
1	1	0	0	1	0						－|Y|
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	R＜0，商为0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0		左移一位

例　　若$X = -0.10001011$，$Y = 0.1110$ 试利用原码加减交替法求商及余数。

解：$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$， 商符 $= 1 \oplus 0 = 1$。

符号	被除数（余数）	商	操作
0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	0	
0 1	0 0 0 1 0 1 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
0 0	0 0 1 1 0 1 1 0	1	R≥0，商为1
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
1 1	1 0 0 0 1 1 0 1	0	R<0，商为0
1 1	0 0 0 1 1 0 1 0		左移一位
0 0	1 1 1 0		＋|Y|

例　　若X = -0.10001011，Y = 0.1110 试利用原码加减交替法求商及余数。

解：$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$， 商符 = $1 \oplus 0 = 1$。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						－|Y|
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	R≥0，商为1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1		左移一位
1	1	0	0	1	0						－|Y|
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	R＜0，商为0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0		左移一位
0	0	1	1	1	0						＋|Y|
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	R＜0，商为0

例 若X = -0.10001011，Y = 0.1110 试利用原码加减交替法求商及余数。

解： $[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$， 商符 $= 1 \oplus 0 = 1$。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						$-\lvert Y \rvert$
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	$R \geqslant 0$，商为1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1		左移一位
1	1	0	0	1	0						$-\lvert Y \rvert$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	$R<0$，商为0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0		左移一位
0	0	1	1	1	0						$+\lvert Y \rvert$
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	$R<0$，商为0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0		左移一位

例　　若X = -0.10001011，Y = 0.1110　试利用原码加减交替法求商及余数。

解：　$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$，　商符 = $1 \oplus 0 = 1$。

符号	被除数（余数）	商	操作
0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	0	
0 1	0 0 0 1 0 1 1 0		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
0 0	0 0 1 1 0 1 1 0	1	R≥0，商为1
0 0	0 1 1 0 1 1 0 1		左移一位
1 1	0 0 1 0		－|Y|
1 1	1 0 0 0 1 1 0 1	0	R＜0，商为0
1 1	0 0 0 1 1 0 1 0		左移一位
0 0	1 1 1 0		＋|Y|
1 1	1 1 1 1 1 0 1 0	0	R＜0，商为0
1 1	1 1 1 1 0 1 0 0		左移一位
0 0	1 1 1 0		＋|Y|

例　　若X = -0.10001011，Y = 0.1110　试利用原码加减交替法求商及余数。

解：　$[X]_{原} = 1.10001011$，$[Y]_{原} = 0.1110$，　商符 = $1 \oplus 0 = 1$。

符号		被除数（余数）								商	操作
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0		左移一位
1	1	0	0	1	0						$-\lvert Y\rvert$
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	R≥0，商为1
0	0	0	1	1	0	1	1	0	1		左移一位
1	1	0	0	1	0						$-\lvert Y\rvert$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	R<0，商为0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0		左移一位
0	0	1	1	1	0						$+\lvert Y\rvert$
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	R<0，商为0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0		左移一位
0	0	1	1	1	0						$+\lvert Y\rvert$
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	R≥0，商为1

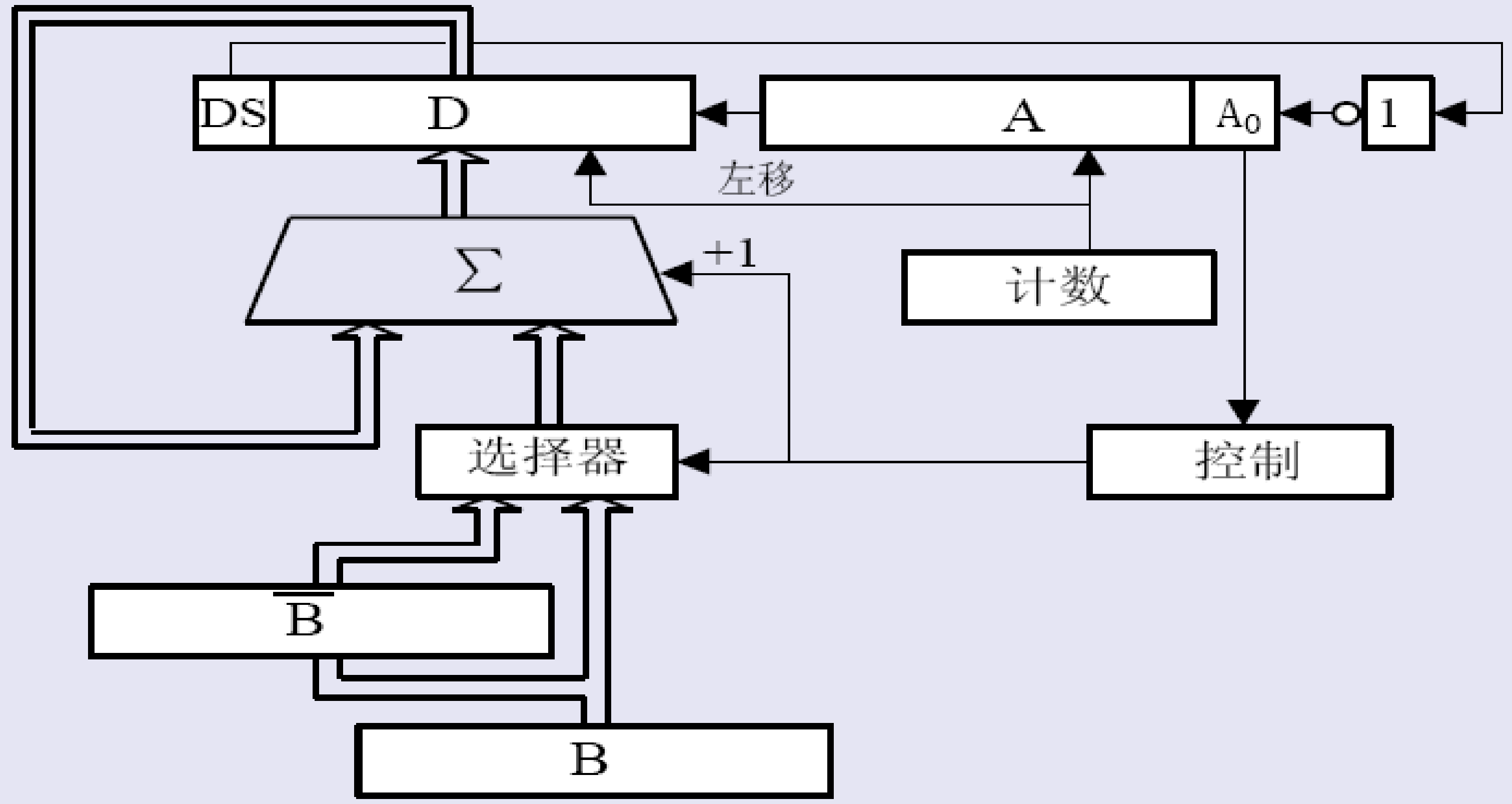
商 = 1.1001　　余数 = ?

问题：

当加减交替法运算结束时，如果末位商为0，这时的余数是错误的（负数）。

如何获得正确的余数？

- 加减交替法除法器



加减交替法除法器框图

2. 补码除法运算（课后学习）

补码加减交替除法运算规则： （推导过程略）

(1) 被除数$[X]_补$与除数$[Y]_补$同号，商为正，做减运算，若余数$[R_1]_补$与$[Y]_补$同号，则溢出；

被除数$[X]_补$与除数$[Y]_补$异号，商为负，做加运算，若余数$[R_1]_补$与$[Y]_补$异号，则溢出。

(2) 若余数$[R_i]_补$与除数$[Y]_补$同号，上商‘1’，左移一位，减除数；

若余数$[R_i]_补$与除数$[Y]_补$异号，上商‘0’，左移一位，加除数。

(3) 重复步骤(2)，连同符号位在内，共做n-1次(n 为字长)，末位采用恒置‘1’法。

(4) 商的符号位与数值位均在运算中产生。

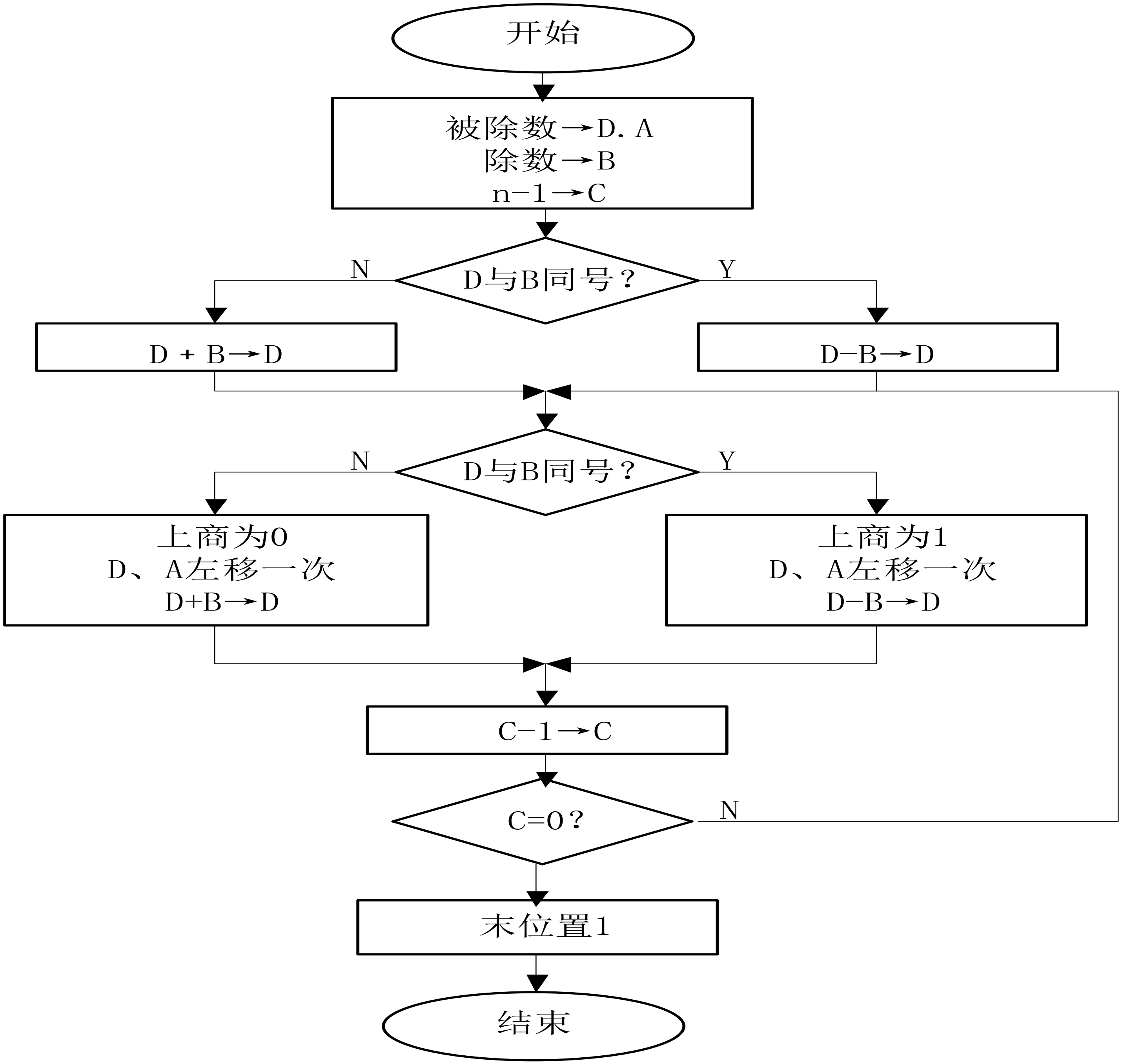
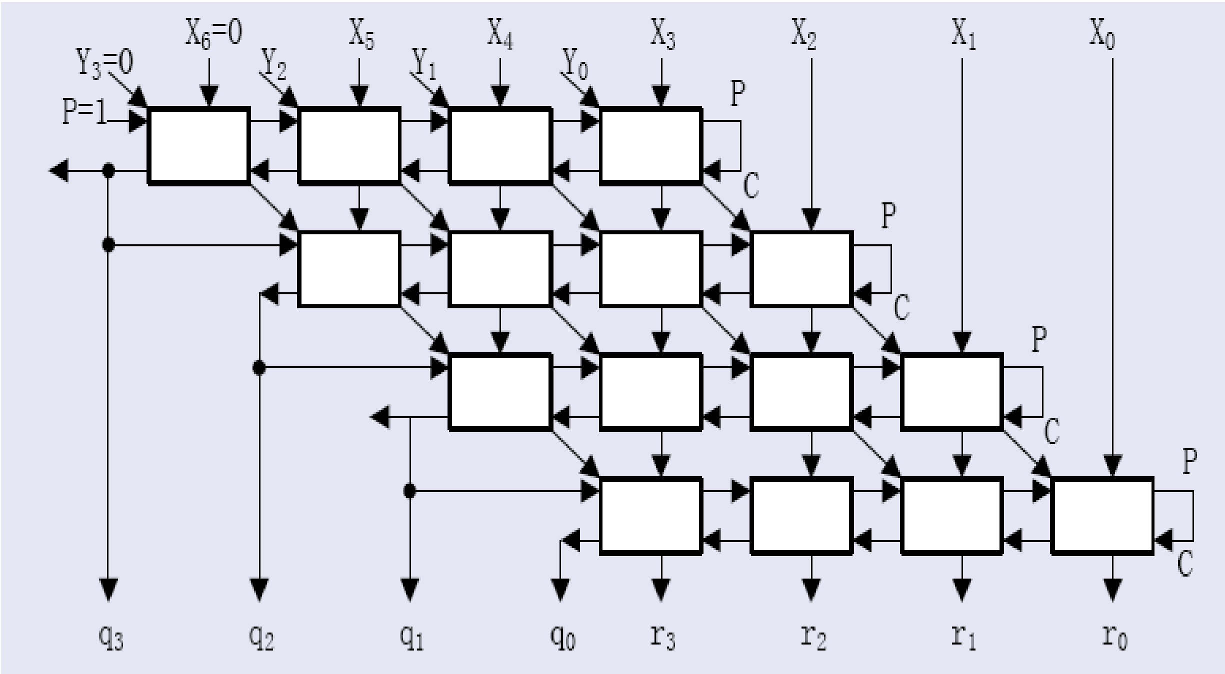
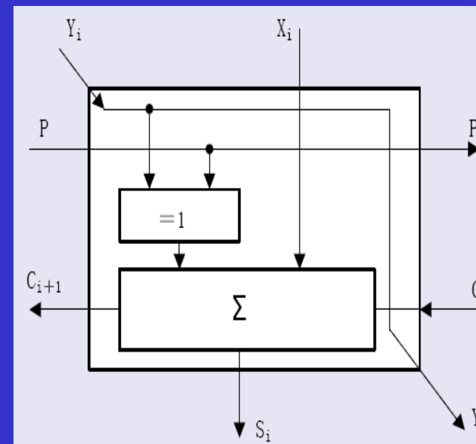


图 3-20　补码除法流程框图

阵列除法器（课后学习）



由可控加减单元CAS构成的阵列除法器



可控加减单元CAS

本章作业-2

第20（1）题

第22（1）题（其中，补码加减交替法不用计算余数）