

数学规划

基本概念
赛题选讲

一、什么是运筹学？

■ 引例

三个工厂：A、B、C。各工厂分别有 140 吨、120 吨、50 吨产品待运；
三个仓库：甲、乙、丙。甲库可存货 60 吨，乙库可存货 100 吨，丙库可存货 150 吨；
任一工厂到仓库的路程如表：

工厂 仓库	A	B	C
甲	9	12	6
乙	6	13.5	4.5
丙	1.5	3	9

问：如何调运货物才能使总的吨公里最小？

直观思路：1、距离最短 A—丙。(140 吨)； 2、B—丙。(10 吨)；依此类推。

可得调运方案：

工厂 仓库	A	B	C	存货量
甲		60		60
乙		50	50	100
丙	140	10		150
供应量	140	120	50	总和=310

总吨公里数 = $140 \times 1.5 + 60 \times 12 + 50 \times 13.5 + 10 \times 3 + 50 \times 4.5 = 1860$ 。

最佳方案：

工厂 仓库	A	B	C	存货量
甲	10		50	60
乙	100			100
丙	30	120		150
供应量	140	120	50	总和=310

总吨公里数 = 1395。

对该问题如果利用数学符号（即建立数学模型）来表示，可如下讨论：

设工厂 A 向仓库甲、乙、丙的调运吨数分别为 x_{11} 、 x_{12} 、 x_{13} ，工厂 B 向仓库甲、乙、丙的调运吨数分别为 x_{21} 、 x_{22} 、 x_{23} ，工厂 C 向仓库甲、乙、丙的调运吨数分别为 x_{31} 、 x_{32} 、 x_{33} ，则调运货物的总吨公里数（相当于运输费用）为

现在要求该函数的最小值，而限制条件为：

运筹学：以系统为研究对象，把系统的功能和特点用模型表示，通过对模型的定量分析，从总体上寻求最优策略，为决策和揭露新问题提供数量根据，并以研究结果的应用为目的，保证系统高效运行。

运筹学建立模型的最终目的是实现系统的最优化，帮助管理者作出正确的决策，使系统正常有效地运行。这里的最优化是指在一定条件下求最优解（可以是求最大值，也可以是求最小值）。

运筹学研究系统的基本方法由以下4个阶段构成：

- 1. 分析系统。**确定解决的问题、影响问题的因素、约束、假设及优化的目标。
- 2. 描述系统。**建立模型，一个现实系统的性质可能受到许多因素的影响，但是一般只有一小部分因素真正支配着系统的特性。建模时应该抓住这些支配系统的因素，从现实系统中抽象出一个“假想的现实系统”，然后把这些因素之间的关系确定下来，并简化成一个适合于分析的形式，这种形式就是模型。
- 3. 模型检验。**
(1) 精确解法检验；(2) 实际数据测算；(3) 类比方法进行模拟处理。
- 4. 结果分析。**检验在约束条件下最优解的敏感程度，即弄清楚当约束条件之一稍有变化时最优解会不会改变。经过检验，就可以知道最优解对各个约束条件的依赖程度。

二、规划问题的几个基本概念

决策变量：规划问题需要求解的一组变量，这组变量的每一组定值就对应规划问题的一个具体实施方案；

目标函数：规划问题一定有一个要求目标，并且这个要求目标可以表示为决策变量的函数，问题的解决归结为寻求一组决策变量的值，使目标函数实现最大或最小；

约束条件：每一个规划问题中，决策变量都要满足一定的约束条件，这些条件可用包含决策变量的等式或不等式表示；

可行域：由约束条件所确定的决策变量的集合，可行域中的每一组决策变量的取值称为可行解；

最优解：使目标函数达到最值的可行解。

分 类：线性规划和非线性规划

单目标规划和多目标规划

三、线性规划

1. 线性规划的特征：目标函数和约束条件都是决策变量的线性函数。
2. 一般形式：

$s.t$

注意：

- 1>规划问题的理论求解方法很多，但是这里我们将不考虑具体理论方法，只需要掌握软件求解即可。
- 2>实际解决问题时，对于规划问题一定要对目标函数，以及每一个约束条件给予详细的解释，不要不加解释只是纯粹的罗列公式。

常见问题

例 1 资源最优利用问题

某厂生产甲、乙两种产品，需要煤、电力、水泥三种资源。生产每种产品 **1kt** 需要各种资源的数量、各种资源的限量以及生产每种产品（**kt**）的利润（千元）如表所示。问在这种条件下，应该安排生产甲、乙产品各多少，才能使该厂获得最大利润？

单位消耗 资源	产品		资源限量
	甲	乙	
煤	2	1	8
电力	1	2	7
水泥	0	3	9
产品利润	4	5	

解：

- (1) 问题中待确定的变量——决策变量：甲、乙两种产品的生产量 ，
- (2) 决策变量所受的约束。问题中受到限制的是煤、电力、水泥的数量。于是有：
煤的总需求量不能超过供应量：
电力的总需求量不能超过供应量：
水泥的总需求量不能超过供应量：
甲、乙两种产品的生产量应该取非负值： ，
- (3) 建立目标函数。在三种资源供应量的限制下，合理安排两种产品的产量，使得总利润

达到最大。

- (4) 资源最优利用问题的数学模型：

max

s.t.

例 2 物资调运问题

设有两个仓库，分别储存水泥 23t 和 27t。有三个工地 各需水泥 17t, 18t 和 15t (总存货量等于总需求量)。已知各仓库到各工地的单位运费如表所示，问应如何调运，使运费最省？

工地 运费 仓库			
	3	11	3
	1	9	2

数学模型：

min

s.t.

例3 生产安排问题

某车间的车工分 I、II 两级，各级车工每人每天的加工能力、成品合格率及日工资数如表所示

级别	加工能力(个 / 人·天)	成品合格率 (%)	工资 (元 / 天)
I	240	97	5.6
II	160	95.5	3.6

工厂要求每天至少加工配件 2400 个，车工每出一个废品，工厂要损失 2 元，现有 I 级车工 8 人，II 级车工 12 人，且工厂要求至少安排 6 个 II 级车工。试安排车工工作，使工厂每天支出费用最小。

解：(1) 决策变量：安排 I、II 两级车工的人数为 ，

(2) 分析约束条件：

车工人数限制： ，

每天加工的配件总数限制： 即

特殊约束： ， 且为整数

(3) 目标函数：这个问题的目标是使工厂每天的总费用最小。包括车工的工资和因为出废品而造成的损失。

每个 I 级车工每天的费用： 工资：5.6 废品损失： 共计：20

同理，每个 II 级车工每天的总费用为： 18

工厂每天的总费用为： 。

(4) 数学模型：

\min

s.t.

四、整数规划

整数规划：决策变量只能取整数值。

常见基本模型：

1. 最优生产计划问题

一家玩具公司制造三种玩具，每一种要求不同的制造技术，高级的一种每台需要17小时加工装配劳动力，8小时检验，利润30元。中级的每台需要2小时加工装配劳动力，半小时检验，利润5元。低级的每台需要半小时加工装配劳动力，10分钟检验，利润0.6元。可供利用的加工劳动力为500小时，检验100小时，同时，据市场预测，对高级玩具需求量不超过10台，中级不超过30台，低级不超过100台。该公司应如何安排生产计划才能使利润最大？

2. 背包问题

一个背包的容积为 V 。现有 n 中物品可装，而每种物品都只能整件装入；物品 i 的重量为 w_i ，体积为 v_i 。问如何配装，使得既不超过背包的容积，又使装的总重量最大？

解：设 x_i 为装入物品 i 的数量，则可以建立如下数学模型：

Max

st.

3. 工厂选址问题

有 n 个城市，每日需要某种物资的数量分别是 d_1, d_2, \dots, d_n ，先在计划要在其中选取 m 个城市，建造 m 座生产这种物资的工厂。假设已知若在城市 i 建厂，日产量最多为 Q_i ，而建设费用为 c_i 。设城市 i 到城市 j 的单位运价为 t_{ij} ，问这 m 个工厂应该设在何处，才能使得既满足需要又能使总费用最省？

解：设变量 x_{ij} ，从城市 i 到城市 j 运送的物资数量为 x_{ij} ，则可以建立如下数学模型：

Min

s.t.

4. 指派问题

设有 n 项任务，恰好有 n 个人可以分别完成其中一项，但由于各人能力不同，由不同的人去完成不同的工作所耗用的时间不同，具体所耗用的时间可用如下效率矩阵 $C = (c_{ij})$ 表示，问指派那个人完成那项任务，总耗时最少？

效率矩阵：第 i 个人完成第 j 项任务所耗时

解：设 x_{ij} 为 0-1 变量，表示第 i 个人是否完成第 j 项任务，则可以建立如下数学模型：

Min

s.t.

五、非线性规划

非线性规划：目标函数和约束条件中至少有一个是非线性的。

例 1 某城市要选定一个运输服务中心的位置，为该城市有固定位置的 m 个用户提供服务，其中 k ($k < m$) 个用户要求其距离不超过 d 。如何确定服务中心的位置，才能使其服务时总的费用最小？

解 设服务中心的坐标是 (x, y) ，第 i 个用户的坐标已知为 (x_i, y_i) ， c_i 表示服务中心到第 i 个用户的单位运价，进一步假设运输路线不受道路的影响，则可以得到以下非线性规划模型：

s.t.

例 2 在传送网络上，从 n 个电站向负载输送能量。设 E_i 为第 i 个电站产生的能量， C_i 为第 i 个电站产生能量 E_i 所需成本， L_{ij} 为传递过程中所造成的能量损耗， D 为总的需求量。试确定一个最经济的产生能量方案。

解 最经济的产生能量方案需使总的成本最低，于是该问题中的决策变量为 E_i ，则可得以下非线性规划模型：

例 3 设国民经济由 n 个部门组成，分别编号为 $1, 2, \dots, n$ 。已知各部门间的直接消耗系数矩阵为 $A = (a_{ij})$ 。

其中 a_{ij} 表示第 j 部门生产价值为一单位的产品直接消耗第 i 部门的产品价值， x_j 为第 j 部门的生产函数为

其中： y_j 为第 j 部门的总产品价值； K_j 为投入到第 j 部门的资金总额； L_j 为投入到第 j 部门的劳力数。

问题是如何在给定总资金 K 与总劳力 L 的前提下，对每个部门进行最佳的资金及劳力投入分配，以使国民收入最大。

解 国民经济的各部门的总产品应该由两部分构成，一部分产品用来供给其它部门供其它部门消耗，另一部分作为该部门的最终产品。因而该部门的总产品价值也对应的应该由两部分构成。国民收入应该指国民经济的各个组成部门生产的最终产品的总价值之和。对每个部门而言，最终产品总价值可以通过总产品价值减去其它部门消耗该部门的产品价值求得。于是可设第 j 部门的最终产品价值为 $y_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j$ ，则有

以矩阵形式表示为
$$Y = (I - A)X$$
，即

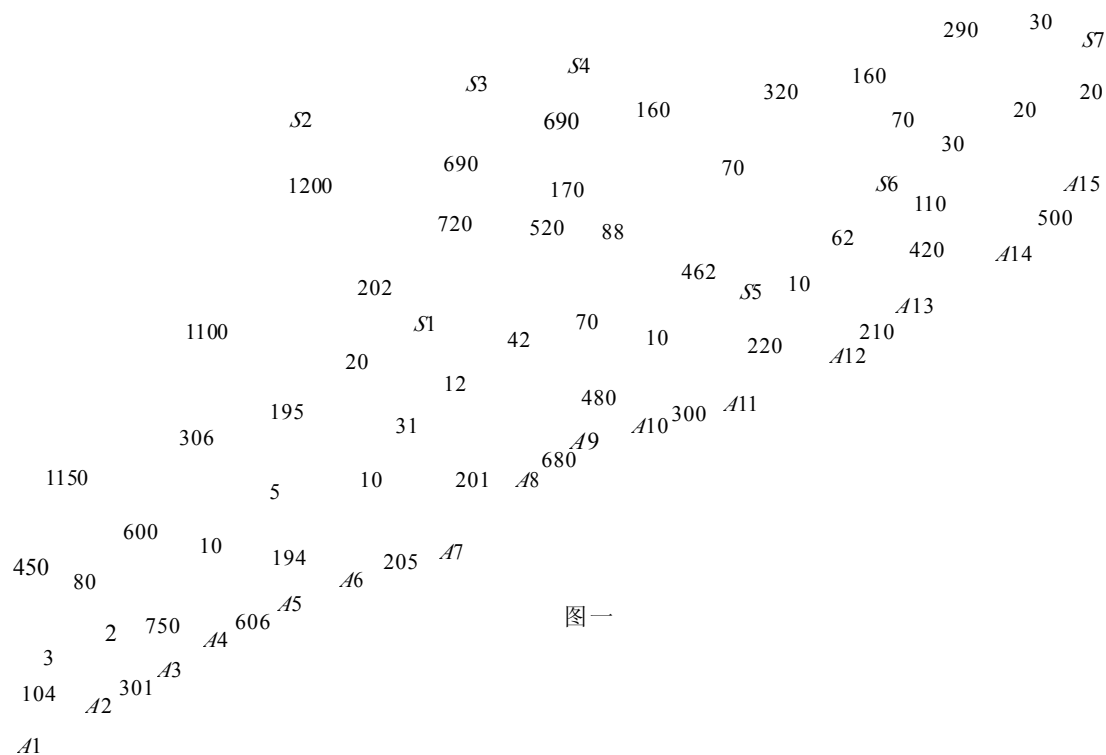
其中 I 为 n 阶单位矩阵， $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ， $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 。于是可得如下的非线性规划模型：

s.t.

第二部分 赛题选讲

钢管订购和运输

要铺设一条 的输送天然气的主管道。经筛选后可以生产这种主管道钢管的钢厂有 。图中粗线表示铁路，单细线表示公路，双细线表示要铺设的管道（假设沿管道或者原来有公路，或者建有施工公路），圆圈表示火车站，每段铁路、公路和管道旁的阿拉伯数字表示里程（单位 km）。
为方便计，1km 主管道钢管称为 1 单位钢管。



图一

一个钢厂如果承担制造这种钢管，至少需要生产 500 个单位。钢厂 在指定期限内能生产该钢管的最大数量为 个单位，钢管出厂销

价 1 单位钢管为 万元，如下表：

	1	2	3	4	5	6	7
	800	800	1000	2000	2000	2000	3000
	160	155	155	160	155	150	160

1 单位钢管的铁路运价如下表：

里程 (km)	≤ 300	301~350	351~400	401~450	451~500
运价 (万元)	20	23	26	29	32

里程 (km)	501~600	601~700	701~800	801~900	901~1000
运价 (万元)	37	44	50	55	60

1000km 以上每增加 1 至 100km 运价增加 5 万元。

公路运输费用为 1 单位钢管每公里 0.1 万元（不足整公里部分按整公里计算）。

钢管可由铁路、公路运往铺设地点（不只是运到点 ，而是管道全线）。

问题： 请制定一个主管道钢管的订购和运输计划，使总费用最小（给出总费用 ）。

摘要：本文解决的是一个钢管购运和管道铺设方案设计问题，目的是使总费用最小。首先利用动态规划方法求解所有钢厂到各管道节点的最小运费表，并通过分析得出从管道两边节点向中间铺路的方法可以减少铺设费用，以所有钢厂到各管道节点并向不同方向铺设的钢管数量为变量，导出总费用的表达式，把问题化为以总费用为目标函数的非线性规划，用 Matlab 对此进行求解。然后通过钢厂钢管销价和产量上限的微小变化及在新的条件下的求解，分析对总费用和购运计划的影响。最后把模型推广到树形管道，通过变换把它化为多条线形管道，用同样方法求解。由于计算中变量个数的增加使计算复杂度提高，我们提供了一些优化策略。在本文的末尾，我们讨论了模型的优缺点和实际应用中的改进方向。

本文利用以上算法较好的解决了问题，得到了问题的最优解。对于问题一，解得最小总费用为 **127.86** 亿元，购运和铺设方案见表二。对于问题二，分析得出 **S6** 厂的钢管价格变化对总费用影响最大，**S1** 厂的产量上限变化对总费用影响最大。对于问题三，解得最小总费用为 **140.66** 亿元，购运和铺设方案见表六。

模型的假设

1. 公路运输费用为 1 单位钢管每公里 0.1 万元，不足整公里按整公里计算。
2. 购买和运输钢管都是整单位（即为整公里）。
3. 沿管道或者原来有公路或者建有施工公路。
4. 一个钢厂如果承担制造钢管，至少要生产 500 个单位。
5. 钢管可由铁路、公路运往铺设地点。
6. 把“钢厂钢管的销价和产量上限变化对总费用和运购计划的影响”理解为在最优解附近的微小变化对总费用和运购计划的影响。销价最小变化是 1 万元，产量上限的最小变化是 1 个单位。

问题分析

铺设一个天然气运输管道（线形或树形），总费用包括购买钢管的费用，运费和铺设时的运费。购买钢管的费用由钢厂的钢管销价和向这个厂订购的钢管数量决定。运费由钢厂向铺设起始点运输的钢管数量和它到此起始点的运输道路决定（由于通过铁路和公路运输，所以并不仅仅由路程决定）。一般情况下铁路运输比公路运输要节省费用（只有在 200 公里以内，公路运输比铁路运输要节省）。对于铺设费用，在假设一的前提下，由一头出发，铺设 x 公里的费用的计算是： $0.1*[x+(x-1)+(x-2)+\dots+2+1]=0.05*x*(x+1)$ ，通过比较可以发现：铺设一段管道，从两头往中间铺比从一端向另一端铺要节省费用。再由假设三，铺设时沿管道走的是公路，所以当管道段较长时，两头铺所节省的费用是比较可观的。比如问题一中，所有管道段都从一头铺的铺设总费用为： $=12.29$ 亿元。而在最优的铺设方法下（即两头向中间

铺的路程相同），铺设总费用为： $=6.16$ 亿元，最优解中的铺设费用应在这两者之间。因为铺设费用的表达式是二次式，所以求解总费用是一个非线性规划问题。

符号说明

p_i : 钢厂 S_i 的钢管销售价格

s_i : 指定期限内钢厂 S_i 能生产钢管的最大数量

L_{ij} : 从 S_i 运到 A_j , 且向左边铺路的钢管数量

R_{ij} : 从 S_i 运到 A_j , 且向右边铺路的钢管数量

T_i : 从 S_i 运出的钢管总量, 要求 $T_i \leq s_i$, 且 $T_i = 0$ 或 $T_i \geq 500$

$F_{i,j}$: 一单位钢管从 S_i 运到 A_j 的最少费用

$D_{x,y}$: 相邻两点 A_x, A_y 之间的路程

C_1 : 购买钢管的费用

C_2 : 把钢管运送到所有 A_j 的总运费

C_3 : 从 A_j 开始铺设钢管过程中的公路运费

C : 总费用, $C = C_1 + C_2 + C_3$

k_i : S_i 厂钢管价格对总费用的边际影响

m_i : S_i 厂钢管产量上限对总费用的边际影响

模型的建立与求解

1. 模型建立:

由定义得:

从 S_i 运出的钢管总量:

购买钢管的费用: $C_1 =$

把钢管运送到所有 A_j 的总运费: $C_2 =$

从 A_j 向左铺设的钢管量 $L_j =$; 向右铺设的钢管量 $R_j =$

铺设钢管过程中的公路运费: $C_3 = 0.1 \times$

目标函数 (总费用) 为:

$$\begin{aligned} & \min(C_1 + C_2 + C_3) \\ \text{s.t. } & T_i \leq s_i, \text{ 且 } T_i = 0 \text{ 或 } T_i \leq 500 \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \\ & \text{对相邻两点 } A_x, A_y \text{ 有 } R_x + L_y = D_{x,y} \quad (x, y = 1, 2, \dots, 15) \end{aligned}$$

问题即转化为对以 L_{ij}, R_{ij} 为变量的非线性规划的求解。

2. 先求出从 S_i 运送单位钢管到 A_j 的最少费用 $F_{i,j}$, 这是一个类似求最短轨道的动态规划问题, 可以仿照 Dijkstra 算法, 特殊的是边的权以路程表示, 而阶段指标是运费。求解结果列表如下:

表一: 最小运费表 (问题一) 单位 (万元)

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
A_1	170.7	215.7	230.7	260.7	255.7	265.7	275.7
A_2	160.3	205.3	220.3	250.3	245.3	255.3	265.3
A_3	140.2	190.2	200.2	235.2	225.2	235.2	245.2
A_4	98.6	171.6	181.6	216.6	206.6	216.6	226.6
A_5	38	111	121	156	146	156	166
A_6	20.5	95.5	105.5	140.5	130.5	140.5	150.5
A_7	3.1	86	96	131	121	131	141
A_8	21.2	71.2	86.2	116.2	111.2	121.2	131.2
A_9	64.2	114.2	48.2	84.2	79.2	84.2	99.2
A_{10}	92	142	82	62	57	62	77
A_{11}	96	146	86	51	33	51	66
A_{12}	106	156	96	61	51	45	56
A_{13}	121.2	171.2	111.2	76.2	71.2	26.2	38.2
A_{14}	128	178	118	83	73	11	26
A_{15}	142	192	132	97	87	28	2

3. 用 Matlab 编程序求解目标函数，得到最优解为 127.54 亿元，此时从 S_1, S_2, \dots, S_7 运出的钢管数量为：

$$T_1=800, T_2=800, T_3=1000, T_4=0, T_5=1336, T_6=990, T_7=245$$

但是由于 $T_7=245 < 500$ ，而题目中要求“一个钢厂如果承担制造钢管，至少需要生产 500 个单位”，所以此解不符合条件。

4. 再分两部分进行第二步求解，一是在增加约束 $T_7=0$ 的情况下，二是在增加约束 $T_7 \geq 500$ 的情况下分别计算。对于第一种情况，在实际计算中我们发现，只要把 S_7 销售钢管的价格 p_7 变的很高（比如 1000 万元），那么在最后的结果中肯定不会出现有 S_7 提供钢管的情况，这样求得的结果与增加约束 $T_7=0$ 相同。由 Matlab 解得总费用为 127.86 亿元。对于第二种情况，求得的结果是 127.97 亿元。并且在两种情况下所有的 T_i 都满足条件，故不需要再继续求解。最优解是第一种情况，即当 $T_7=0$ 时。

补充：如果在计算中，第二步求解得到的解仍然有 T_i 不满足条件，再对此 T_i 分几部分进行下一步求解，依次类推。

最优解对应的钢管 购运 计划如下表：

表二：钢管购运和铺设计划（问题一）

	S ₁		S ₂		S ₃		S ₄		S ₅		S ₆		S ₇	
	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右
A ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A ₂	0	0	104	75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A ₃	0	0	226	0	0	0	0	0	0	282	0	0	0	0
A ₄	37	0	95	0	336	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A ₅	298	0	0	0	0	0	0	0	308	10	0	0	0	0
A ₆	184	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A ₇	190	76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A ₈	0	0	125	175	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A ₉	0	0	0	0	505	159	0	0	0	0	0	0	0	0
A ₁₀	0	0	0	0	0	0	0	0	321	30	0	0	0	0
A ₁₁	0	0	0	0	0	0	0	0	270	145	0	0	0	0
A ₁₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	75	11	0	0
A ₁₃	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	199	134	0	0
A ₁₄	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	286	335	0	0
A ₁₅	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	165	0	0	0
T _i	800		800		1000		0		1366		1205		0	

说明：

1) 表中表示从 S_i 订购并运输到 A_j 的钢管数量，以及这些钢管向左和向右铺设的数量。

2) 虽然表中有从 S_i 运到 A_j 的钢管向左和向右的分配量，实际上只要所有的钢管运到 A_j 后，向左和向右的铺设量与钢管的来源无关。

在上表的方案下，第一问的总费用最小为 **127.86** 亿元。

钢管购运和管道铺设方案 二

1、符号说明：

- ：钢厂 在指定期限内钢管的最大产量；
- ： 到 之间铺设管道的里程数；
- ：单位钢管从钢厂 运到 所需最小订购和运输 费用；
- ：钢厂 是否承担制造这种钢管；
- ：钢厂 运到 点的钢管数量，不含路过 的部分；
- ：运到 的所有钢管沿 铺设的数量；
- ：运到 的所有钢管沿 铺设的数量；
- ：树中 的度数；
- ：树中 的入度数；
- ：树中 的出度数；
- ：单位钢管 1 公里的公路运输费用。

2、基本假设:

(1) 假设运到 i 的钢管, 只能在 i 和 j 之间包含 i 的某个区段内铺设。并且到达 j 的钢管在 i 和 j 之间包含 j 的铺设区段和到达 i 的钢管在 i 到 j 之间包含 j 的铺设区段不相交。

(2) 在具体铺设每一公里时, 我们只把钢管运输到每一公里开始的地方, 沿运送方向向前铺, 然后往前铺设的运送费用不予考虑。

3、模型建立:

(1) 决策变量:

我们首先引入一组 $0-1$ 变量 x_{ij} , 其中 x_{ij} 表示钢厂 i 是否承担制造这种钢管, 若制造, 则 $x_{ij}=1$, 否则 $x_{ij}=0$ 。

所由钢管都是先运到 i 后, 或者转运到其他地方, 或者在包含 i 的一个区段内铺设, 我们设从钢厂 i 运抵 j 且在包含 j 的一个区段内铺设的钢管数量为 y_{ij} 。

我们用变量 z_j 表示从所有钢厂运到 j 的钢管总量中沿 j 铺设的部分。

(2) 目标函数:

该问题的目的是寻求好的订购和运输方案,使得总费用最小,事实上,总费用可以分成两部分。第一部分包括钢管的订购费用和钢管从钢厂运抵 所需费用;我们用 表示单位钢管从钢厂 运抵 所需的最小订购和运输费用,则第一部分费用为:

第二部分费用是钢管运抵 后,在运到具体铺设地点的费用,由假设 2,从 到 区段所需费用为

其中 表示从 到 之间铺设管道的里程数,这样,第二部分费用为:

(3) 约束条件:

首先, 由于一个钢厂如果承担制造这种钢管, 则至少需要生产 500 个单位, 而钢厂 在指定期限内能生产钢管的最大数量为 , 所以

由于订购的所有钢管总量等于 的里程数, 则

很显然, 我们可以设

运抵 的钢管总量, 等于向包含 的区段铺设的里程数, 则

并且还有 和



于是可以 建立非线性规划 模型：

Min +

S.t

模型三：二次规划模型

若记 c_{ij} 为一个单位钢管从第 i 个钢厂运到第 j 个枢纽点的最小运价， x_{ij} 为从第 i 个钢厂到第 j 个枢纽点的运量。再把第 j 个枢纽点得到的钢管分解为向第 k 路段铺设和向第 l 路段铺设的两部分，记两部分的数量分别为 x_{ijk} 和 x_{ijl} ， L_{jk} 为第 j 个枢纽点到第 k 路段的长度（需铺设的钢管的数量）为 L_{jk} 。于是根据题意有：

从第 i 个钢厂到第 j 个枢纽点的购运总费用为 $\sum_k c_{ij} x_{ijk}$ ，而向两边铺设的费用为 $\sum_k L_{jk} x_{ijk}$ 。

于是问题的目标为：

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j \sum_k L_{jk} x_{ijk}$$

约束条件有：

，

，

，

露天矿生产的车辆安排

钢铁工业是国家工业的基础之一，铁矿是钢铁工业的主要原料基地。许多现代化铁矿是露天开采的，它的生产主要是由电动铲车（以下简称电铲）装车、电动轮自卸卡车（以下简称卡车）运输来完成。提高这些大型设备的利用率是增加露天矿经济效益的首要任务。

露天矿里有若干个爆破生成的石料堆，每堆称为一个铲位，每个铲位已预先根据铁含量将石料分成矿石和岩石。一般来说，平均铁含量不低于 25% 的为矿石，否则为岩石。每个铲位的矿石、岩石数量，以及矿石的平均铁含量（称为品位）都是已知的。每个铲位至多能安置一台电铲，电铲的平均装车时间为 5 分钟。

卸货地点（以下简称卸点）有卸矿石的矿石漏、2 个铁路倒装场（以下简称倒装场）和卸岩石的岩石漏、岩场等，每个卸点都有各自的产量要求。从保护国家资源的角度及矿山的经济效益考虑，应该尽量把矿石按矿石卸点需要的铁含量（假设要求都为 29.5% ± 1%，称为品位限制）搭配起来送到卸点，搭配的量在一个班次（8 小时）内满足品位限制即可。从长远看，卸点可以移动，但一个班次内不变。卡车的平均卸车时间为 3 分钟。

所用卡车载重量为 154 吨，平均时速 28 。卡车的耗油量很大，每个班次每台车消耗近 1 吨柴油。发动机点火时需要消耗相当多的电瓶能量，故一个班次中只在开始工作时点火一次。卡车在等待时所耗费的能量也是相当可观的，原则上在安排时不应发生卡车等待的情况。电铲和卸点都不能同时为两辆及两辆以上卡车服务。卡车每次都是满载运输。

每个铲位到每个卸点的道路都是专用的宽 60 的双向车道，不会出现堵车现象，每段道路的里程都是已知的。

一个班次的生产计划应该包含以下内容：出动几台电铲，分别在哪些铲位上；出动几辆卡车，分别在哪些路线上各运输多少次（因为随机因素影响，装卸时间与运输时间都不精确，所以排时计划无效，只求出各条路线上的卡车数及安排即可）。一个合格的计划要在卡车不等待条件下满足产量和质量（品位）要求，而一个好的计划还应该考虑下面两条原则之一：

1. 总运量（吨公里）最小，同时出动最少的卡车，从而运输成本最小；
2. 利用现有车辆运输，获得最大的产量（岩石产量优先；在产量相同的情况下，取总运量最小的解）。

请你就两条原则分别建立数学模型，并给出一个班次生产计划的快速算法。针对下面的实例，给出具体的生产计划、相应的总运量及岩石和矿石产量。

某露天矿有铲位 10 个，卸点 5 个，现有铲车 7 台，卡车 20 辆。各卸点一个班次的产量要求：矿石漏 1.2 万吨、倒装场 I 1.3 万吨、倒装场 II 1.3 万吨、岩石漏 1.9 万吨、岩场 1.3 万吨。

铲位和卸点位置的二维示意图如下，各铲位和各卸点之间的距离（公里）如下表：

	铲位1	铲位2	铲位3	铲位4	铲位5	铲位6	铲位7	铲位8	铲位9	铲位10
矿石漏	5.26	5.19	4.21	4.00	2.95	2.74	2.46	1.90	0.64	1.27
倒装场I	1.90	0.99	1.90	1.13	1.27	2.25	1.48	2.04	3.09	3.51
岩场	5.89	5.61	5.61	4.56	3.51	3.65	2.46	2.46	1.06	0.57
岩石漏	0.64	1.76	1.27	1.83	2.74	2.60	4.21	3.72	5.05	6.10
倒装场II	4.42	3.86	3.72	3.16	2.25	2.81	0.78	1.62	1.27	0.50

各铲位矿石、岩石数量（万吨）和矿石的平均铁含量如下表：

	铲位1	铲位2	铲位3	铲位4	铲位5	铲位6	铲位7	铲位8	铲位9	铲位10
矿石量	0.95	1.05	1.00	1.05	1.10	1.25	1.05	1.30	1.35	1.25
岩石量	1.25	1.10	1.35	1.05	1.15	1.35	1.05	1.15	1.35	1.25
铁含量	30%	28%	29%	32%	31%	33%	32%	31%	33%	31%

露天矿的生产调度一般都要牵涉到车辆的调度安排这样一个组合问题，目前关于这类问题，还没有好的算法求解。还属于开放性问题。

问题分析：

本题与一般的运输问题的区别：

1. 运输矿石和岩石两种物资；
2. 属于产量大于销量的不平衡运输问题；
3. 为了完成品位约束，矿石要搭配运输；
4. 产地、销地均有单位时间流量的限制；
5. 运输车辆只有一种，每次都是满载运输，154 吨 / 车次；
6. 铲位数多与铲车数意味着要最优的选择不多于 7 个产地作为最后结果中的产地；
7. 不仅要求最佳物流，最后还要求出各条路线上的派出车辆数及安排。

一般情况下，一个运输问题对应着一个线性规划问题。在本问题中，以上各点对规划的影响不同，其中

1. 第 1、2、3、4 条可以通过变量设计和调整约束来实现；
2. 第 5 条的整数要求使得该问题变为整数规划；

3. 第 6 条不容易通过线性规划实现，比较简单的方法是从一个整数规划中取最优的即得到最佳物流。但是这种方法的工作量非常大，

几乎是不可能完成的，于是我们可以采用下面两种方法来解决：

- ① 可以给每个铲位一个符号标志，这将增加 10 个 0—1 变量，将来通过 0—1 规划实现；
- ② 先不考虑电铲数量的约束，直接来解决整数线性规划，再对解中运量最少的几个铲位进行筛选。

4. 第 7 条的完成可由最佳物流算出各条线路上的最少派出车辆数，然后再给出具体安排即可。

解决问题的难度集中在：

1. 怎样处理在 10 个铲位安排 7 台电铲的问题；
2. 从铲位到卸点的流量均为 154 吨的整数倍。这个问题的核心是采用何种算法减少证书规划所耗费的时间；
3. 模型中应有道路能力约束；
4. 派车问题本质为组合优化问题，如何快速解决。

对于这个实际问题，要求快速算法，计算含 50 个变量的整数规划比较困难。另外，这是一个二层规划，第二层是组合优化，如果求最优解计算量较大，现成的各种算法都无能为力。于是问题变为找一个寻求近优解的近似解法。

调用 120 次整数规划可用三种方法避免：（1）先不考虑电铲数量约束运行整数线性规划，再对解中运量最少的几个铲位进行筛选；（2）增加 10 个 0—1 变量来标志各个铲位是否有产量。

这是一个多目标规划，第一问的目标有两层：第一层是总运量（吨公里）最小，第二层是出动卡车数最少，从而实现运输成本最小。第二问的目标有：岩石产量最大；矿石产量最大；运量最小，三者的重要性应按此序。

模型假设：

1. 卡车在一个班次中不应发生等待或熄火后再启动的情况；
2. 在铲位或卸点处因两条路线（及以上）造成的冲突时，只要平均时间能完成任务即可，不进行排时讨论；
3. 空载与重载的速度都是 28km/h，耗油相差却很大，因此总运量只考虑重载运量；
4. 卡车可提前退出系统。

符号：

x_{ij} ~ 从 i 号铲位到 j 号卸点的石料运量	单位 吨；
c_{ij} ~ 从 i 号铲位到 j 号卸点的距离	公里；
T_{ij} ~ 从 i 号铲位到 j 号卸点路线上运行一个周期平均所需时间	分；
A_{ij} ~ 从 i 号铲位到 j 号卸点最多能同时运行的卡车数	辆；
B_{ij} ~ 从 i 号铲位到 j 号卸点路线上一辆车最多可以运行的次数	次；
p_i ~ i 号铲位的矿石铁含量。	%
$p = (30, 28, 29, 32, 31, 33, 32, 31, 33, 31)$	
q_j ~ j 号卸点任务需求	吨
$q = (1.2, 1.3, 1.3, 1.9, 1.3) * 10000$	
ck_i ~ i 号铲位的铁矿石储量	万吨
cy_i ~ i 号铲位的岩石储量	万吨
f_i ~ 描述第 i 号铲位是否使用的 0-1 开关变量，取 1 为使用；取 0 为关闭。	

一、求 成本最小的生

一. 以总运量最小为目标函数求解最佳物流 —— 第一层规划

目标函数与约束条件分析:

(1) 目标函数取为重载运输时的运量最小;

(2) 道路能力约束: 一个电铲(卸点)不能同时为两辆卡车服务, 一条路线上最多能同时运行的卡车数是有限制的。卡车从 i 号铲位到 j 号卸点运行一个周期平均所需时间为 (分钟)。由于装车时间 5 分钟大于卸车时间 3 分钟, 所以这条路线上在卡车不等待条件下最多能同时运行的卡车数为: ; 其中最后开始发车的一辆卡车一个班次中在这条路线上最多可以运行的次数为 (其他卡车可能比此数多 1 次), 这里 是开始装车时最后一辆车的延时时间。一个班次中这条固定路线上最多可能运行的总车次 大约为: , 总吨数 。

注意: 如果假定所有卡车的上班时间可以不是同一时刻, 则 , 以下的解法和结果也将不同。

(3) 电铲能力约束: 一台电铲不能同时为两辆卡车服务, 所以一台电铲在一个班次中的最大可能产量为 $8 \times 60 / 5 \times 154$ (吨)。

(4) 卸点能力约束: 卸点的最大吞吐量为每小时 $60/3=20$ 车次, 于是 一个卸点在一个班次中的最大可能产量为 $8 \times 20 \times 154$ (吨)。

(5) 铲位储量约束: 铲位的矿石和岩石产量都不能超过相应的储藏量。

(6) 产量任务约束: 各卸点的产量不小于该卸点的任务要求。

(7) 铁含量约束: 各矿石卸点的平均品位要求都在指定的范围内。

(8) 电铲数量约束: 电铲数量约束无法用普通不等式表达, 可以引入 10 个 0—1 变量来标志各个铲位是否有产量。

(9) 整数约束: 当把问题作为整数规划模型时, 流量 x_{ij} 除以 154 为非负整数。

(10) 卡车数量约束: 不超过 20 辆。

s.t.

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

作业

1. 有三个工厂，生产同一产品，其产量分别为 7，4，9，它们的产品供应四个销售商店，各商店的销售量分别为 3，6，5，8。从生产工厂到各商店的运价如表。问如何调运这些产品，才能使总运费最少。

运价 工厂 \ 商店				
	3	11	3	10
	1	9	2	8
	7	4	10	5

2、准备用甲乙两种原料配制饲料，已知甲原料每千克售价 6，乙原料每千克售价 7，甲乙两种原料每千克含 A，B 两种营养如表，若每天对 A 种营养的需要量至少 6 千克，对 B 种营养的需要量至少 5 千克，问怎样配制饲料，才能花钱最少。

运价 营养 原料	A	B
甲	0.1	0.25
乙	0.15	0.2

3、某皮革厂生产甲乙两种皮带，生产一条甲皮带可获利润 4 元，生产一条乙皮带可获利润 3 元，但生产甲皮带所需工时是乙皮带的 2 倍，如果全部生产乙皮带，该厂每天可生产 1000 条，但皮革供应只够日产 800 条（甲乙合计），甲皮带所用扣子（一带一扣）每天只能供应 400 个，乙皮带所用扣子（一带一扣）每天只能供应 700 个，那么如何安排生产，才能使该厂获得最大利润。

4、某建筑公司签订一项合同，要在 3 亩土地上建造两种规格的住房，甲种住房每所占地 0.25 亩，乙种每所占地 0.4 亩，但甲种限制不超过 8 所，乙种限制不超过 4 所，甲种每所可获利润 10 万元，乙种每所可获利润 20 万元，问每种住房各建几所获利最大。

5. 某工厂生产 A，B 两种产品，生产 A 产品 吨消耗 万元，生产 B 产品 吨消耗 万元。现在要求这两种产品生产的总数为 6 吨。试建立 A，B 两种产品个生产多少，才能使总的消耗费用为最少的数学模型。

6. 一个生产过程在给定的时间段里生产 个产品，消耗量为 。设产品总量为 ，对应的成本分为两部分，即 ， 。在每一时间里产品数不超过 X 和产品总量不超过 Y，如果初始总量为 0，试列出在 n 段上整个成本极小的非线性规划模型。

7. 某投资公司欲将 50 万元基金用于股票投资，股票的收益是随机的，经过慎重考虑，公司从所有上市交易的股票中选择了 3 中股票作为侯选的的投资对象。从统计数据 的分析得到：股票 A 每股的年期望收益为 5 元，标准差为 2 元；股票 B 每股的年期望收益为 8 元，标准差为 6 元；股票 C 每股的年收益为 10 元，标准差为 10 元；股票 A，B 收益的相关系数为 $5/24$ ，股票 A，C 收益的相关系数为 -0.5 ，股票 B,C 收益的相关系数为 -0.25 ，目前股票 A,B,C 的市价分别为 20 元，25 元，30 元，在投资时可以用收益的方差或标准差衡量风险。

（1）如果该投资公司期望今年得到至少 20% 的投资回报，应如何投资可以使风险最小？

（2）投资回报率与风险的关系如何？

8. 在当前普遍具有健康意识的时代,许多人在分析食物的营养成分,选择不同食物的组合作为食谱的一般想法是:以最小费用来满足对基本营养的需求。按照营养学家的建议,一个人一天对蛋白质、维生素 A 和钙的需求如下: 50 克蛋白质、4000IU (国际单位) 维生素 A 和 1000 毫克钙。我们只考虑以下食物构成的食谱: 生的带皮的苹果、生的香蕉、生的胡萝卜、切碎并去核的枣和新鲜的生鸡蛋,它们所含的营养成分和搜集到的这些食物的价格如表所示,请确定每种食物的用量,以最小费用满足推荐的每日营养定额。

食物	单位	蛋白质	维生素	钙	价格
苹果	中等大小一个 (138 克)	0.3	73	9.6	1
香蕉	中等大小一个 (118 克)	1.2	96	7	1.5
胡萝卜	中等大小一个 (72 克)	0.7	20253	19	0.5
枣	一杯 (178 克)	3.5	890	57	6
鸡蛋	中等大小一个 (44 克)	5.5	279	22	0.8

9. 某架货运飞机有三个货舱: 前仓、中仓、后仓。三个货舱所能装载的货物的最大重量和体积都有 限制,如表 1 所示。为了保持飞机的平衡,三个货舱中实际装载的货物的重量必须与最大容许重量成比例。现有四类货物供该飞机装运,其有关信息如表 2 所示,最后一列指装运后所获得的利润,应如何安排装运,使该飞机本次飞行获利最大?

表 1 三个货舱装载货物的最大容许重量和体积

	前仓	中仓	后仓
重量限制	10	16	8
体积限制	6800	8700	5300

表 2 四类货物的信息

	重量	空间	利润
货物 1	18	480	3100
货物 2	15	650	3800
货物 3	23	580	3500
货物 4	12	390	2850

10. 经济学中著名的柯布—道格拉斯生产函数的一般形式为

其中 分别是产值，资金，劳动力，式中 要由经济统计数据确定。现有《中国统计年鉴（ 2003 ）》给出的统计数据如表所示。请建立优化模型求式中的 。

年份	产值	资金	劳动力
1984	0.7171	0.091	4.8179
1985	0.8964	0.2543	4.9873
1986	1.0202	0.3121	5.1282
1987	1.1962	0.3792	5.2783
1988	1.4928	0.4754	5.4334
1989	1.6909	0.441	5.5329
1990	1.8548	0.4517	6.4749
1991	2.1618	0.5595	6.5491
1992	2.6638	0.808	6.6152
1993	3.4634	1.3072	6.6808
1994	4.6759	1.7042	6.7455
1995	5.8478	2.0019	6.8065
1996	6.7885	2.2914	6.895
1997	7.4463	2.4941	6.982
1998	7.8345	2.8406	7.0637
1999	8.2068	2.9854	7.1394
2000	9.9468	3.2918	7.2085
2001	9.7315	3.7314	7.3025
2002	10.4791	4.35	7.374