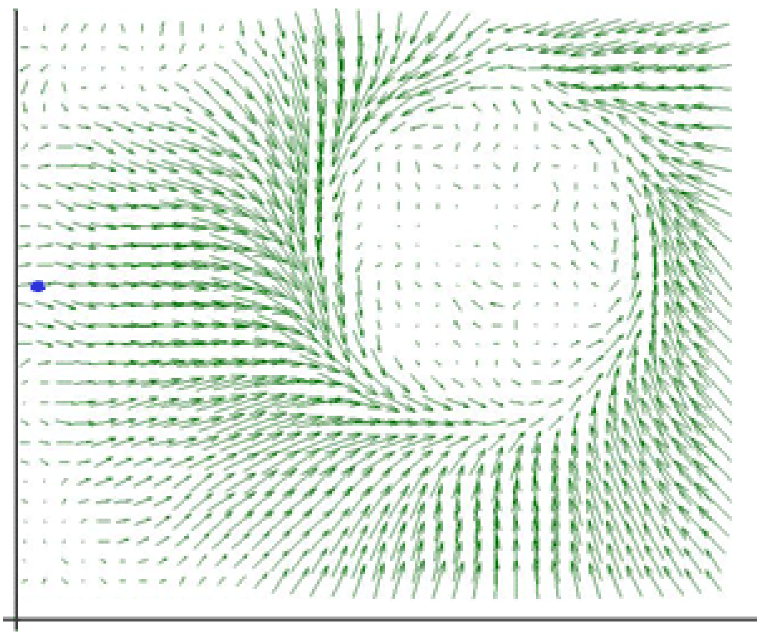
图说微积分

作者：厉风

[百度相对论吧：http://post.baidu.com/f?kw=%CF%E0%B6%D4%C2%DB]



前言

希望能借这个帖子让初中数学水平的读者们能够有可能了解一下高等数学的基础---微积分。

本主题面向的是初中水平读者，因此不考虑到理论和概念的严密论证或者定义，仅仅对一些东西点到为止，让读者形成一些感性的认识。更加细致的内容，各位请在具有一定数学基础后去翻阅专门的高等数学书籍。

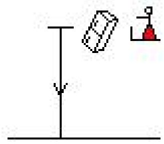
目录

第一章

首先介绍一下函数，极限。当然是粗略地介绍。

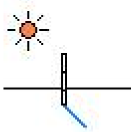
什么是函数

我们来看两个例子：



一个从阳台上被扔出来的冰箱距离地面的“高度”（是一个量，而且在冰箱下落过程中一直改变)在下落过程中总是随着“时间”(可以看作一个一直改变的量）的改变而改变。

我们说，冰箱距离地面的“高度”（它是个变化量）随着“时间”（它也是个变化量）的改变关系是一个“函数”。“时间”对“高度”这个“函数值”有决定作用，所以“时间”叫做自变量，“高度”叫做这个函数的应变量（或者“因变量”）。



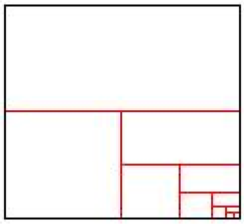
一个竹竿的影子的“方向”随着太阳在一天中的空中“位置”改变而改变。

我们说，竹竿影子的“方向”（它是个变化量）随着“太阳位置”（它也是个变化量）的改变关系是一个“函数”。“太阳位置”对“竹竿影子方向”这个“函数值”有决定作用，所以“太阳位置”叫做自变量，“竹竿影子方向”叫做这个函数的应变量（或者“因变量”）。

函数就是两个变化量之间的相关性变化关系，通常描述为数学表达形式。一般习惯用 $y=f(x)$ 来表示一个函数，这个表示方法中，x 是函数自变量，$y=f(x)$ 整个叫做函数关系（简称函数），y 就是因变量。一般来说，$f(x)$ 就是一个含有 x 的数学算式，只要把 x 的一个取值代入 $y=f(x)$，就能得到对应于这个 x 值的 y 值。

当然，我们的介绍是非常初步的，关于函数，还需要讨论函数自变量和因变量的取值范围之间的关系，需要涉及集合论，那是比较严格的函数概念定义，在这里，鉴于我们面向的读者知识基础有限，不做更多介绍，也避免介绍那些东西导致大家对我们主要介绍的内容---函数的印象被冲淡。

关于极限



如右图，一方饼，每天取走一半，如果日子无限地过下去，这饼最后会剩下多少？

我们用数学方法来计算：

设时间的天数为 n，那么按照我们问题来看，这个 n 应该是自然数

设这个饼整个的大小是 1，每天取走它的一半，

第一天（n=1），1-1x(1/2)=1/2=(1/2)^n，请注意，^代表乘方运算，n 为指数

第二天（n=2），(1/2)-(1/2)x(1/2)=1/4=(1/2)^n，请注意到这里的(1/2)是第一天剩下的

第三天（n=3），(1/4)-(1/4)x(1/2)=1/8=(1/2)^n，请注意到这里的(1/4)是第一天剩下的

第四天（n=2），(1/8)-(1/8)x(1/2)=1/16=(1/2)^n，请注意到这里的(1/8)是第一天剩下的

。。。

于是我们发现，不论 n=几，第 n 天“剩余饼量”（用 B 表示）的总是可以通过把天数 n 代入 B=(1/2)^n 这个算式算出来

用前面的“函数”概念来说就是：

“剩余饼的量”随着“取饼天数”的改变而改变，“剩余饼的量”和“取饼天数”形成函数关系 B=f(n)=(1/2)^n，“取饼天数”因为对“剩余饼量”有决定作用，于是“取饼天数”叫做该函数关系中的“自变量”，“剩余饼量”叫做该函数关系中的“因变量”。这里 B=f(n)=(1/2)^n 类似前面说的函数表达式 y=f(x)，只不过这里自变量 x 换成了 n，因变量 y 换成了 B。

那么，有的人说，只要把 n=无穷大 代入(1/2)^n 就能算出无限取饼之后剩下多少了

但是，无穷大是多少？它不是一个确切的数，显然没法直接参与计算。

不过，我们可以从图上看到，饼越分越小，当被“半劈取走”的次数趋向于（但是达不到）无穷多次（因为无穷是永远达不到的）时候，剩下饼会越来越小，趋向于（但是达不到）剩下 0（因为天数永远到不了无穷，所以饼总有剩余，不会绝对为 0）倍的饼。

可以说，我们的目测结论“ 0 ”正是当取饼次数趋向（但是达不到）无穷多次时候，剩余饼的量所趋向（但是达不到）的数量。

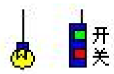
我们称目测结论“ 0 ”叫做“剩余饼量”在“取饼天数”趋近于“无穷大”条件下的“剩余饼量”极限。这是个达不到的极限。

另一个例子：

我们假定有一个水池的水（总水量设定为 27），有许多只小乌龟来喝水，每只小乌龟只能喝掉图中一个红色方格那么多的水，我们知道，每只小乌龟喝水的量（小红格）越小，要一次喝完水池的水的话，需要越多的小乌龟数量。我们设小乌龟的数量为 n，每只

小乌龟喝水量为 a，W 为 n 只小乌龟喝水总量。
无论如何，W=a*n 总成立。那么，我们随意设 a=3 恒定，那么 W=3n。按照函数观点：
“所有乌龟喝水总量”随着“乌龟总数”变化而变化，两者形成函数关系 W=f(n)=3n。“乌龟总数”是这个函数关系里的“自变量”，“喝水总量”是这个函数关系中的“因变量”。这里 W=f(n)=3n 类似前面说的函数表达式 y=f(x)，只不过这里自变量 x 换成了 n，因变量 y 换成了 W。
我们看出，一旦乌龟数量 n **越少于 9**，乌龟喝水总量**越少于水池总水量 27**。乌龟数量 n **越趋近于 9**，所有小乌龟喝水总量**越接近水池总水量 27**。
我们称“27”为“乌龟喝掉水的总量”在“乌龟数量”趋近 9 的条件下的“乌龟喝掉水的总量”的**极限**。这是个可以达到的极限。
从上面例子来看，**极限**其实是对于函数关系中的“因变量”来说的。而说到极限，一定要给出这个极限对应的变化条件，这个变化条件是对于函数关系中的“自变量”来说的。条件是：自变量取值趋近于某一个数值。对应的因变量的取值必然会趋近某一值，这个值叫做函数因变量的**极限值**，简称叫做**极限**。
也就是说，一旦提到极限，说的就是函数**因变量趋近的那个数值**。
另外要说明的是，自变量的变化条件不同，可能会导致因变量极限不同，所以，**说到极限之前一定要先弄清楚自变量的变化条件**，否则你研究的极限没有意义。
最后还要说明的是：如果一个函数关系的因变量最终趋近无穷大，由于无穷大不是具体数，它不能作为极限（极限必须是确定的具体数），那么这个函数关系的因变量没有极限，是无限的。
我们通常用
lim[x→a]y=lim[x→a]f(x)=k
来表示一个函数 y=f(x)的极限，lim[x→a]这部分表示极限运算，它表示对右侧数学算式求极限，而[x→a]表示极限条件：所求极限为 求 当自变量 x 趋近于给定值 a（a 可以为无穷大）条件下 的因变量 f(x)也就是 y 的**极限**。
这就是一个极限算式，从算式是不能看出极限应该是多少的，要真正计算极限值 k，需要了解 极限是否存在的判断知识 和 极限的求取方面的相关知识，这里我们不详细介绍极限的存在性判定定理了，但是大家应该知道的是：**如果极限 k 存在，那么 k 不能为无穷大（习惯上用∞表示），而且不能是无法确定的值。**
极限条件中的给定数 a 可以为无穷大，但是极限 k 不可以。
下面是两个极限不存在的例子：

已知月球绕地球运动，30 天左右绕过一周，则月球绕地球运动的总圈数 Q 与时间 T 形成函数关系 Q=T/30，如果时间 T 趋向于无穷大，则 Q 的极限对应也趋向于无穷大，那么 Q 不存在极限，被称为是无限的。



设灯打开时候，灯的状态参数 C=1，灯关闭时候的状态参数 C=0。现在已知在有限时间 **T=1 分钟 内**开灯之后关灯，关灯之后开灯如此往复操作。**第一次**开灯**时刻开始计时**，经时间 t=1 秒之后关灯，**第一次**关灯之后经过时间 t/2=1/2 秒之后开灯，**第二次**开灯后经过时间 t/4=1/4 秒之后关灯，**第二次**关灯之后经过时间 t/8=1/8 秒后开灯。。。总之，不论是开灯还是关灯操作，下一次操作间隔时间总是上一次操作间隔时间的一半。我们知道，按照本文最初那个分饼的问题来看，总时间 T 之内可以含有无限多次“时间取半”，就和

我们要用无穷多天才能把那块饼取完一样。那么，我们得到了一个状态参数 C 与操作次数 n(n 为自然数)的函数：
C=[1+(-1)^(n+1)]/2，当 n=1 时候，也就是第一次操作（开灯）之后的灯的状态为 C=1。
当 n=2 时候，也就是第二次操作（关灯）之后的灯的状态为 C=0。
当 n=3 时候，也就是第三次操作（开灯）之后的灯的状态为 C=1。
当 n=4 时候，也就是第四次操作（关灯）之后的灯的状态为 C=0。
。。。。
我们现在要想知道总时间 T=1 分钟结束后（也就是经过无数次开灯关灯后）灯的状态 C 是 1 还是 0。
按照极限的观点，我们很容易想到，这个问题可以直接求
lim[n→∞]C=lim[n→∞][1+(-1)^(n+1)]/2，也就是求无数次开关灯之后的状态参数 C 的极限。
但是，这个极限中最关键的是(-1)^(n+1)在 n→∞条件下的**极限**，显然，(-1)^(n+1)在 n+1 为奇数时候结果为-1，在 n+1 为偶数时候结果为 1，而 n→∞这个条件不是趋近一个给定数，而是趋近无穷大，**没法判定无穷大就是奇数或者偶数**，所以，(-1)^(n+1)既可能是 1 也可能是-1，因此 lim[n→∞]C=lim[n→∞][1+(-1)^(n+1)]/2 既可能是 1 也可能是 0，我们说，这种无法确定的情况属于极限不存在。也就是说，灯的状态 C 在开关灯次数 n 趋向无穷大的条件下不确定趋向某一个定值。

为了了解极限的求值和极限间运算的基本法则，我们先要介绍无穷小和无穷大。

无穷小和无穷大

什么叫做无穷大？无穷大这个概念，说的直白些就是**一种量值无限制增长**的变化状态。有些人误以为无穷大是一个固定的数，实际上这是不可能的。你只要给出一个固定数，总能找到比它更大的。因此，无穷必须是不确定的一种变化状态，它在数学上代表无限增长，没有尽头。在数学上，无穷大在绝对值上大于任意给定数值的绝对值。
有人提出，我就是要规定一种“无穷大”：它既是一个确定的数，有时比任何确定的数都大的数。这显然是一个自相矛盾的规定，既然是确定数，就一定能找到比它大的确定数。只有采用一种变化性的规定才能满足“比一切给定数值都大”的条件。因此，我们强调，无穷大并不是一个确定的数。
通常用∞代表无穷大量。它本身是一个变量，不是确定数。

无穷小：无穷小不是指很小的数，它的定义是“比任何给定数都小的正数”，也就是说，和无穷大一样，无穷小是一个变化量，不是常数，更不是 0。无穷小和无穷大一样代表的是一种变化趋势。
比如：我们在数 100 和 0 之间能够找到许多数，我们现在设定 ε 就是代表无穷小，那么，我们任意给定一个数 0<a<100，总能在这个数 a 和 0 之间找到比这个数 a 小的另一个数。我们的无穷小 ε 代表的是一种趋势：只要你找到一个数 a，

我的 ε 就代表比你的 a 小的数。而且不论你找到任何数 a，我的 ε 都比你的 a 小。但是前提是，你不能找 0，我的 ε 也不能为 0。
再比如：在两个数 1 和 0 之间，我能够找到许多真分数，我们现在设定 ε 就是代表无穷小，那么，我们任意给定一个数 0<a<1，总能在这个真分数 a 和 0 之间找到比这个数 a 小的另一个真分数。我们的无穷小 ε 代表的是一种趋势：只要你找到一个数 a，我的 ε 就代表比你的真分数 a 小的数。而且不论你找到任何数 a，我的 ε 都比你的 a 小。但是前提是，你不能找 0，我的 ε 也不能为 0。
但是，在第一个例子里，如果你找到 a=15 这个数，我的无穷小由于代表比 a 小的数，它暗含于 15 但大于 0 的数，但不代表这个无穷小可以取所有这些数。**因为**，如果无穷小可以代表 14，则会比第二个例子里任何的 a 都大，显然这是不行的。**因此**，无穷小是一个变化趋势，也就是无限制地接近 0，但是却永远达不到 0。而第二个例子中，ε 暗含在小于 1 但大于 0 的数中，这也不代表无穷小可以取者所有的值，无穷小实际上包含在更小的取值范围内。
我们只能说，第二个例子中，无穷小所暗含于其中的取值范围要比第一个例子中的取值范围更“严格”，但是我们绝对能找到比第二个例子的取值范围更“严格”的取值范围。
因此，无穷小并不代表一个很小的数，因为你没法规定一个绝对标准说哪个范围内的数绝对算小，总有更小的数的范围存在。而无穷小就代表了“我们总能找到比任意给定正数更小的正数”的含义。类似无穷大的含义“我们总能找到比任意给定正数更大的正数”。

无穷小的阶

这个问题实际上就是关于无穷小中含有无穷小的问题。我们可以看下边的例子：我们设一个正整数 a，那么 lim[a→∞]1/a=0，同样，lim[a→∞]1/(a)^2=0。因此，我们说 a→∞的时候，1/a→0 且 1/(a)^2→0，因此 1/a→0 和 1/(a)^2→0 都是无穷小。但是它们是有区别的。
我们知道，如果设 b=1/a，c=1/(a)^2，那么
lim[a→∞]c/b=lim[a→∞](1/a)/[1/(a)^2]=lim[a→∞]a=[a→∞]。
这说明，**虽然**两个无穷小 lim[a→∞]b 和 lim[a→∞]c 都是无效趋近于 0，**但是**速度差异很明显，前者比后者趋近 0 速度要慢得多。**lim[a→∞]b 相对于 lim[a→∞]c 是个无穷大的量**，lim[a→∞]b 永远大于 lim[a→∞]c，类似这种情况的两个无穷小，较小的一个无穷小**叫做** 比 较大那个无穷小“高阶”**的无穷小**。
“高阶无穷小”意味着趋近 0 更快，是个更小的无穷小。“低阶无穷小”意味着趋近 0 更慢，是个较大的无穷小。

极限运算基本法则

定理 1：有限个无穷小相加也是无穷小。
定理 2：有界函数（函数值最大最小取值都是有限值，不是正负无穷大的函数）和无穷小的乘积是个无穷小。也就是说，若函数的最大最小取值不是正负无穷大，那么它和一个无穷小相乘后的结果是个无穷小。

推论 1：常数与无穷小的乘积也是无穷小。因为常数也是有限的值。
推论 2：有限个无穷小的乘积也是无穷小。无穷小自然都是有限的，都不是无穷大。
定理 3：在同样的自变量趋近条件下，如果两个函数都有极限，那么它们求和得到的新函数在同样的自变量趋近条件下也存在极限，且该极限值是这两个函数分别求极限后相加的值。
lim[x→a]f(x)=A，lim[x→a]g(x)=B，
lim[x→a]f(x)+g(x)={lim[x→a]f(x)}+{lim[x→a]g(x)}=A+B
定理 4：在同样的自变量趋近条件下，如果两个函数都有极限，那么它们求乘积得到的新函数在同样的自变量趋近条件下也存在极限，且该极限值是这两个函数分别求极限后相乘的值。
lim[x→a]f(x)=A，lim[x→a]g(x)=B，
lim[x→a]f(x)*g(x)={lim[x→a]f(x)}*{lim[x→a]g(x)}=A*B
推论 1：如果 lim[x→a]f(x)=A 存在，C 为任意常数。那么 y=Cf(x)的同样自变量趋近条件下的极限 lim[x→a]y=lim[x→a]Cf(x)=C*{lim[x→a]f(x)}=C*A
推论 2：如果 lim[x→a]f(x)=A 存在，那么 y=[f(x)]^n(n 为自然数)的同样自变量趋近条件下的极限 lim[x→a]y=lim[x→a][f(x)]^n={lim[x→a]f(x)}^n=A^n
定理 5：如果 lim[x→a]f(x)=A 和 lim[y→b]g(y)=B 都存在，且 f(x)=y(但是 y 取值范围不包含 x=a 时候的 f(a)值)，则有：g(y)=g[f(x)]（其中 y≠f(a)）那么
lim[x→a]g[f(x)]=lim[y→b]g(y)=B

微分

微分 最早来源于牛顿先生为了描述一些物理学基本概念所创立的数学方法，它最早的应用就是用来描述**直线运动速度**，曲线的切线的问题（这个问题涉及的知识可能超过初中水平，这里不进行介绍）。
直线运动的速度：
通常，我们在初中课本接触到的速度定义就是路程除以时间，但是，这是个非常不严格的定义。
只有在匀速直线运动中，速度=位移/时间。
对于一个全过程中速度并不均匀的运动来说，需要描述每一刻的瞬间速度。
因为瞬间位移和顺时相当于都是 0，0/0 显然是没有实际意义的，所以瞬间的速度不能用瞬间位移除以瞬间时间长来描述。
牛顿先生是第一位辩证地看待运动连续过程与运动瞬间的联系的人。
他认为，任何的运动，**瞬间的速度不是孤立的**，而是取决于与之相邻的一小段连续运动的情况。
这样，牛顿先生非常创造性地把连续运动的速度=位移/时间 等式应用到了瞬时速度上！
假定某时刻 t0 的瞬时速度为 v0，这个时刻 t0 包含在一小段连续运动时间 ta~tb 中。为了简化问题，我们直接设定 ta=t0，可以避免重复考虑 t0 之前的运动。
于是，这一段连续运动就是在 t0~tb 内的连续运动。假定 t0 时刻的物体位置为

s0, tb 时刻物体位置为 sb。

由于这个小段运动非常短暂，所以，我们近似认为这段运动中速度发生了微小到可以忽略为 0 的改变，也就是近似的匀速。于是，这段运动的 平均速度 是（位移/时间差）：

$v=(sb-s0)/(tb-t0)$

我们知道，在物理学中，位置是与时间相关的，所以，实际上

$s=s(t)$，它是一个以位置矢量 s 为**因变量**，以时间 t 为**自变量**的函数。

将 $t=t0$，$t=tb$ 分别代入这个函数得到：

$s0=s(t0)$

$sb=s(tb)$ **这是 t0, tb 两个时刻分别的位置**

那么平均速度的式子就可以写成：

$v=[s(tb)-s(t0)]/(tb-t0)$

根据前面我们介绍的**极限**知识，当 tb 尽可能接近 t0 的时候，这段运动的位置改变和时间都会非常地微小并**无限接近** 0 改变，其极限

$v0=\lim[tb\rightarrow t0][s(tb)-s(t0)]/(tb-t0)$

如果**存在**，那么这个**极限**就是小段连续运动开始时刻 t0 瞬间的即时速度

第二章

我们现在来看看这个极限 **v0=lim[tb→t0][s(tb)-s(t0)]/(tb-t0)**

这个极限的特点就是：函数的 因变量的改变量 与 函数自变量的改变量 之间的 比值 在 自变量改变量趋于 **0** 的条件下的**极限**。

我们给出**定义 1**：

如果一个函数 y=f(x)在自变量 x 取值 x0 时具有函数值 y0=f(x0)，在自变量 x 取值 x1 时具有函数值 y1=f(x1)，如果极限 **lim[x1→x0](y1-y0)/(x1-x0)=lim[x1→x0][f(x1)-f(x0)]/(x1-x0)**存在（存在就是指极限存在，极限不是不定值），则这个**极限**叫做函数 **y=f(x)**在自变量取值为 **x=x0** 条件下的微商值，也叫做导数值。

如果令 x1-x0=Δx0（代表自变量初始值为 x=x0 条件下对应的自变量改变量），y1-y0=Δy0=f(x1)-f(x0)=Δf(x0)（代表自变量初始值为 x=x0 条件下对应的因变量改变量），那么上边这个极限就写成

lim[Δx0→0]Δy0/Δx0=lim[Δx0→0]Δf(x0)/Δx0=dy/dx[当 x=x0]

这是和 lim[x1→x0](y1-y0)/(x1-x0)=lim[x1→x0][f(x1)-f(x0)]/(x1-x0)等价的写法。

定义 2：

如果一个函数 y=f(x)的自变量 x 值和因变量 y 值发生一系列的变化，这些变化分别是在自变量 x 取初始值 x0，x1，x2。。条件下发生的，于是每个变化各自对应一个自变量改变量 Δx0，Δx1，Δx2。。和一个因变量改变量 Δy0，Δy1，Δy2。。，**如果**对应于 x 的各个值条件下的微商值

lim[Δx0→0]Δy0/Δx0=lim[Δx0→0]Δf(x0)/Δx0=dy/dx[当 x=x0]，

lim[Δx1→0]Δy1/Δx1=lim[Δx1→0]Δf(x1)/Δx1=dy/dx[当 x=x1]，

lim[Δx2→0]Δy2/Δx2=lim[Δx2→0]Δf(x2)/Δx2=dy/dx[当 x=x2]，

。。。

分别都存在（存在就是指极限存在，极限不是不定值），**那么**就是说函数 y=f(x)的所有微商值 dy/dx[当 x=x0]，dy/dx[当 x=x1]，dy/dx[当 x=x2]。。与自变量 x=Δx0，x=Δx1，x=Δx2。。分别对应。于是，如果把这些微商值 dy/dx[当 x=x0]，dy/dx[当 x=x1]，dy/dx[当 x=x2]。。**看作**一个**微商值变量 dy/dx** 的**各个取值**，那么，这个**微商值变量 dy/dx** 与 **x** 就形成了一个新的函数关系：**Z=Z(x)=dy/dx**。它叫做原始函数（简称原函数）y=f(x)的 导函数（简称导数）。

现在大家知道了吧，其实高等数学中所谓的导数就是这么简单的一个东西：它是一个函数，是原函数的一系列微商值与自变量值形成的新的函数关系。而所谓微商值，就是原函数的 因变量改变量 与 自变量改变量 的 比值 在 自变量改变量趋于 0 的时候 的极限值。而极限就是当一个函数的自变量无限趋近一个数值的时候，函数的因变量无限趋近的那个数值。而函数就是两个变化量之间相互对应形成的数学关系，而自变量就是起决定作用的变化量，因变量就是跟随自变量改变的量。

这样来说，高等数学是不是也很容易理解了？

导数基本运算规则

求导数第一准则：定义法：
由于导数的定义是 原函数的应变量变化量在自变量变化量趋近 0 情况下的极限函数，因此，最通用的求导数方法就是按照定义对一个原函数求该极限得到导函数。
求导数第二准则：公式法：
按照定义法可以推论出一些“并不严格有效”但能简化某些特殊情况求导的推论公式，利用这些公式可以简化求取一部分函数的导函数，但要注意，这些公式实际上都存在有限的适用范围（为了不把读者注意力引离主题，我们这里不介绍具体的适用范围）。
四则运算：设两个函数 y=y(x)，z=z(x)具有相同的 x 取值范围，那么它们就可以通过加减乘除四则运算形成其他函数。
两个函数的加法的求导数：
两函数的和函数 f(x)=y(x)+z(x)，其对自变量 x 的导函数 df(x)/dx=**d[y(x)+z(x)]/dx=[dy(x)/dx]+[dz(x)/dx]**
即两函数求和后得到的和函数的导数等于两个函数分别求导后相加。它包含了减法。只要把减去 减数 看成加上 减数 的相反数即可。

两个函数的乘法的求导数：
两函数的乘积函数 f(x)=y(x)*z(x)，其对自变量 x 的导函数
df(x)/dx=d[y(x)*z(x)]/dx=[dy(x)/dx]*z(x) + [dz(x)/dx]*y(x)
即两函数求乘积后得到的乘积函数的导数等于原函数的被乘数的导数与原函数乘数的乘积加上 原函数乘数的导数与原函数被乘数的乘积。

两个函数的除法的求导数：
两函数的商函数 f(x)=y(x)/z(x)，请注意分子分母地位不同，不要弄乱除法顺序。这个除法顺序决定了下式中分子部分减法的顺序，所以很关键。
df(x)/dx=d[y(x)/z(x)]/dx={[dy(x)/dx]*z(x) - [dz(x)/dx]*y(x)}/[z(x)*z(x)]
即两函数求商后得到的商函数的导数等于一个分式：分母为原来商函数的分母的平方，分子为原商函数的分子的导数与商函数分母的乘积 减去 原商函数分母的导数与商函数分子的乘积。

反函数的求导数：
如果函数 y=y(x)和 x=x(y)的 x，y 取值范围分别相同，且根据数学等式变形规则，y=y(x)可以等价变形为 x=x(y)，例如：y=y(x)=(x+3)/5 恰好可以变形成为 x=x(y)=5y-3。那么这样的两个函数 y=y(x)和 x=x(y)互为对方的反函数。
函数 **y=y(x)**的导数与它的反函数 **x=x(y)**的导数互为倒数：
dy(x)/dx=1/[dx(y)/dy]，简化也可以写成 dy/dx=1/[dx/dy]，其实这里有个隐含条件，dx 与 dy 都不为 0（前面的公式也有隐含条件，读者可以自己去尝试找找看）。

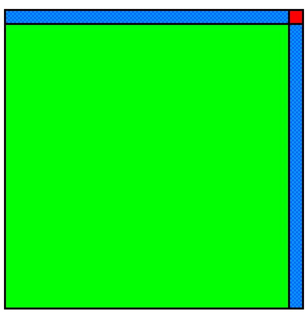
复合函数（非官方也叫做嵌套函数）求导数：
对于两个函数 z=z(y)和，y=y(x)，如果 y 的取值范围相同，则 z=z(y)=z[y(x)]（这种由两个函数嵌套形成的函数叫做复合函数）。如果 dz(y)/dy 和 dy(x)/dx 两个导函数都存在，则有：
dz[y(x)]/dx=[dz(y)/dy]*[dy(x)/dx]简化写成：dz/dx=[dz/dy]*[dy/dx]

一些基本函数的求导数公式：

原函数	导函数
y=y(x)=C（C 为常数）	dy/dx=dC/dx=0（常数对任何变量求导数得到 0，因为常数函数变化量为 0）
y=y(x)=x^k	dy/dx=k*[x^(k-1)]（这是 x 任意次乘方后形成的函数的求导数公式）
y=y(x)=sinx	dy/dx=cosx
y=y(x)=cosx	dy/dx= -sinx
y=y(x)=tanx	dy/dx=1/[(cosx)*(cosx)]
y=y(x)=ctgx	dy/dx= -1/[(sinx)*(sinx)]
y=y(x)=C*f(x) (C 为常数)	dy/dx=d[C*f(x)]/dx=C*[df(x)/dx]

高阶导函数：求原函数的导函数的导函数，得到的导函数就是高阶导函数。
例如：y=y(x)的导函数 dy/dx，叫做原函数 y=y(x)的 1 阶导函数
dy/dx 的导函数 d[dy/dx]/dx，叫做原函数 y=y(x)的 2 阶导函数
d[dy/dx]/dx 的导函数 d[d[dy/dx]/dx]/dx，叫做原函数 y=y(x)的 3 阶导函数
。。。求几次导函数得到的就是几阶导函数。

微分



如右图，一个正方形的边长为 x，那么它的面积 y=x^2 对于自变量 x 形成函数关系。
我们现在假定这个正方形的边长从 x=x0 开始在不断增大，则可以知道面积 y 随着 x 增大，从最初的 y0=(x0)^2 不断增大。
如果边长 x 增加 Δx 那么多，对应的面积增加到 y=(x0+Δx)^2，比原来的 y0=(x0)^2 增加了 Δy=(x0+Δx)^2-(x0)^2 那么多。
我们现在来看面积增加量 Δy：
Δy=(x0+Δx)^2-(x0)^2=(x0)^2+2x0*Δx+(Δx)^2-(x0)^2=2x0*Δx+(Δx)^2 刚好是上图蓝色和红色的区域那么多。
其中蓝色区域面积为 2 x0*Δx，红色区域面积为(Δx)^2。
如果我们让 Δx 趋近 0，那么，Δy 就是一个无穷小，而 Δy=2x0*Δx+(Δx)^2 中，(Δx)^2 是比

Δx 更加高阶的无穷小（**请参看前面对无穷小的介绍，由于 Δx 趋近 0 是一个无穷小，(Δx)^2 相当于两个无穷小 Δx 相乘，因此是比 Δx 更高阶的无穷小**），而 2x0*Δx 为函数自变量 x 的增加量 Δx 与一个常数 x0 的乘积。

定义：我们在研究事物的函数关系的变化过程的时候，如果某一个函数 **y=y(x)**的因变量的变化增量 **Δy** 能够表示成类似上边的这种 由自变量的增量 **Δx** 与一个常数 **C** 的乘积 **CΔx** 加上一个比自变量增量 **Δx** 更加高阶的无穷小 **a(Δx)** 的形式 Δy=CΔx+a(Δx)，那么函数 **y=y(x)**的因变量的变化总增量 **Δy** 可以通过近似忽略 **a(Δx)** 部分而表示为 **Δy≈CΔx=dy**，那么这个 **dy** 就叫做函数 y=y(x)的近似微增量，近似微增量也叫做微分。

这下大家满意了吧！原来“微分”就是函数因变量的一个近似的微小增量。原来高等数学也不是什么“天书”。很多人只不过是被“高等”两个字“忽悠”怕了而已。

如果函数因变量微小增量能表示成 Δy=CΔx+a(Δx)，那么根据导数定义 dy/dx=lim[Δx→0]Δy/Δx 得到

dy/dx=lim[Δx→0]Δy/Δx

=lim[Δx→0][CΔx+a(Δx)]/Δx

={lim[Δx→0]CΔx/Δx}+{lim[Δx→0]a(Δx)/Δx}

=C+0（因为 CΔx/Δx=C，所以 lim[Δx→0]C=C。因为 a(Δx)是比 Δx 高阶的无穷小，所以 lim[Δx→0]a(Δx)/Δx=0）

而我们的微分 dy=CΔx，因此 **dy=CΔx=(dy/dx)*Δx**

另外，对于函数 **x=x**，这个函数的自变量和因变量相同，我们可以通过微分的定义来求这个函数的微分：

设 x 具有增量 Δx，我们知道这个 Δx=1*Δx+0，显然，1*Δx 部分就是类似上边 Δy=CΔx+a(Δx)的 CΔx 部分，是自变量的增量 Δx 与常数 1 的乘积，而 Δx=1*Δx+0 后边的 0 的部分，恰好是对于自变量增量 Δx 是无穷小，所以 Δx=Δx+0 恰好是符合 Δy=CΔx+a(Δx)的因变量增量的表示法，所以 Δx 部分就是函数 x=x 的微分 **dx**。

这就说明，对于函数 x=x 来说，它的自变量增量等于它的微分 **dx=Δx**。

那么，**dy=CΔx=(dy/dx)*Δx=(dy/dx)*dx**

即：**函数的微分**等于函数的导函数与函数自变量的微分的乘积。

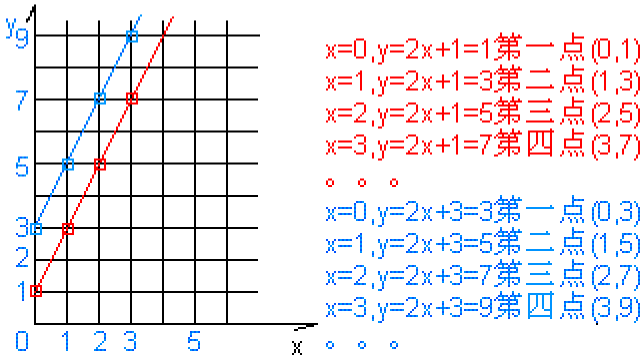
第三章

导数的几何含义

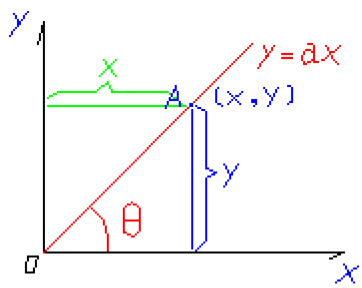
[这部分为了介绍中值定理，初中水平读者请略去]

直线的斜率：

我们来看平面直角坐标系，方程 y=ax+b 实际上就是一个函数（其中 a，b 都是常数），这个函数里，y，x 坐标分别作为因变量和自变量，这样形成的一系列点 A(x，y=ax+b)恰好代表了坐标系中一条直线。比如，我们用描点法绘制 y=2x+1 的直线和 y=2x+3 的直线：



上图中红线为 y=2x+1 的直线，蓝线为 y=2x+3 的直线。



进一步我们发现，如果 b=0，y=ax+b=ax 就变成通过原点 O(0，0)的直线，而 a=y/x，如果设直线和 x 坐标轴夹角为 θ，那么 a=y/x=tanθ。显然，这个常数 a 对直线的倾斜角度有决定作用。

我们也看到，即使 b 不为 0，而且 b 不同的两直线函数 y=2x+1 和 y=2x+3 也一定具有相同倾斜角度。数学上把直线函数 y=ax+b 的 a 常数叫做直线的斜率。

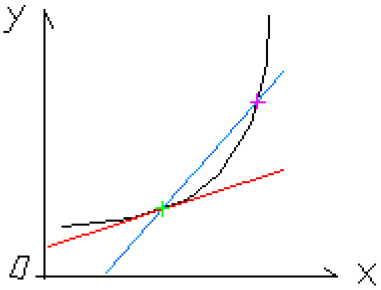
现在我们根据导函数的定义来求函数 y=2x+1 和 y=2x+3 的导函数 dy/dx，可以得到：

1---dy/dx=d(2x+1)/dx=[d(2x)/dx]+d1/dx=2[dx/dx]+0=2 根据我们前面给出的导数计算公式 d[C*f(x)]/dx=C*[df(x)/dx]（最后一个公式）和 dC/dx=0（第一个公式）。

2---dy/dx=d(2x+3)/dx=[d(2x)/dx]+d3/dx=2[dx/dx]+0=2 和上边类似。

可见，导函数值恰好是直线函数的斜率！

而且实际上导函数值也是曲线的切线的斜率。



什么叫曲线的切线？我们看上图，一般来说，过曲线上一点（比如绿色的点）画一条直线，通常会与曲线在另一点相交（比如图中粉色点），这样的直线类似图中蓝色线。而有一种特殊的线，它与曲线绿色点相交后再不和曲线有任何其他交点，类似图中红线，那么这条红线就叫做曲线在绿色点位置处的切线。

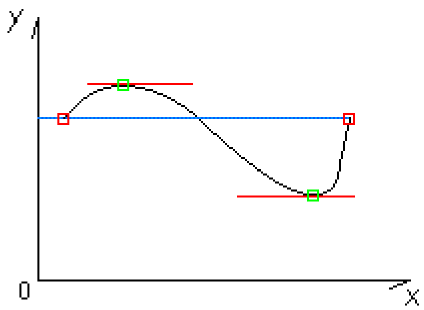
而我们的导函数值也是曲线的切线的斜率（这里不进行详细证明）。

给定函数的导函数值为原函数对应曲线的切线的斜率或者原函数对应直线的斜率。这就是

导函数的几何意义。

中值定理

罗尔中值定理：在所有中值定理中，这是最简单的情况：



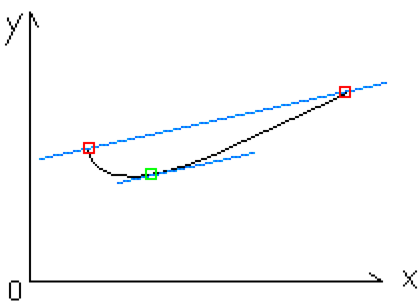
一个函数 y=y(x)如果对应一条连续的曲线，那么如果我们选取适当的两个 x 坐标值能使对应的两个 y 值相等，那么每个 x 值和对应 y 值形成曲线上一个点的坐标，那么这样的两个点（如图红色点）之间的曲线段肯定满足下述情况成立：

在这段曲线段上至少有 1 个点（我们图中画出两个，是绿色的）所在位置处的曲线的切线是斜率为 0，平行 x 坐标轴的。

这个定理就是罗尔中值定理，数学描述是：

y=y(x)曲线在 a<x<b 内连续（实际上这个"连续"的含义更加严格，这里不作介绍），**且 y(a)=y(b)，那么一定存在至少一个 x 值 x=k（a<k<b）保证 dy(x)/dx=dy(k)/dx=0 成立**。

拉格朗日中值定理：



一个函数 y=y(x)如果对应一条连续的曲线，那么如果我们选取任意的两个 x 坐标值，那么每个 x 值和对应 y 值形成曲线上一个点的坐标，那么这样的两个点（如图红色点）之间的曲线段肯定满足下述情况成立：

在这段曲线段上至少有 1 个点（我们图中画出的是绿色的）所在位置处的曲线的切线恰好平行于曲线段两端点间的连线。

这个定理就是拉格朗日中值定理，数学描述是：

y=y(x)曲线在 a<x<b 内连续（实际上这个"连续"的含义更加严格，这里不作介绍），**(a，y(a))和(b，y(b))两点间连线的斜率为 tanθ=[y(b)-y(a)]/(b-a)，那么一定存在至少一个 x 值 x=k（a<k<b）保证 dy(x)/dx=dy(x)/dx[这里 x=k]=tanθ 成立**。

实际上，拉格朗日中值定理包含了罗尔中值定理，罗尔定理是它的一个特殊情况。

推论：如果函数 y=y(x)在 x 的一个连续取值范围内对应的导函数值恒为 **0**，那么函数 y=y(x)在这个 x 取值范围内的所有函数值 y 一定都是相等的，而且该值是一个常数。

柯西中值定理：

如果函数 y=y(x)和 z=z(x)的 x 取值都包括 a≤x≤b 这个取值范围，那么在这个取值范围内一定至少有一个 x 的取值 x=k 对应下式成立：

[y(b)-y(a)]/[z(b)-z(a)]=[dy(x)/dx]/[dz(x)/dx][这里 x=k]

其中 y(b)和 y(a)是函数 y=y(x)在 x=a 和 x=b 时候的一对函数值，z(b)和 z(a)是函数 z=z(x)在 x=a 和 x=b 时候的一对函数值，每个函数的一对函数值做差后相除，等于两个函数各自的导函数在 a≤x≤b 范围内的一个取值 x=k 事后的导函数值之比。

我们注意到，如果 z(x)=x，z(b)-z(a)=b-a，而且 dz(k)/dx=dx(k)/dx=1，于是上面的式子变成：**[y(b)-y(a)]/(b-a)=dy(x)/dx[这里 x=k]**，恰好就是我们的拉格朗日中值定理，因此，拉格朗日中值定理是包含在柯西中值定理中的一个特例。

之所以要介绍这些中值定理，最终是为了介绍 洛必达 法则。

洛必达法则

我们在求一些函数的极限的时候，会遇到以下情况：

1--lim0/0：

例如：lim[x→0](sinx)/x，显然，x→1 时候，sinx→0 且 x→0

2--lim∞/∞：

例如：lim[x→0][1/sinx]/[1/sin2x]，显然，x→0 时候，1/sinx→∞，1/sin2x→∞

3--lim∞*0：

例如：lim[x→0](1/x)*(sinx)，显然，x→0 时候，1/x→∞，sinx→0

4--lim∞ - ∞：

例如：lim[x→0](1/sinx) - (1/x)，显然，x→0 时候，1/sinx→∞，1/x→∞

5--lim0^0：

例如：lim[x→0](sinx)^x，显然，x→0 时候，sinx→0 且 x→0

6--lim1^∞：

例如：lim[x→0](cosx)^(1/x)，显然，x→0 时候，cosx→1 且 1/x→∞

7--lim0^∞：

例如：lim[x→0]x^(1/x)，显然，x→0 时候，x→0 且 1/x→∞

8--lim∞^0：

例如：lim[x→0](1/x)^x，显然，x→0 时候，1/x→∞且 x→0

实际上它们都可以化成第一种情况求解，但是第一种情况本身该如何化成普通极限求解呢？

洛必达法则：对于 lim0/0 型不定式极限，有：

如果 lim[x→a]y(x)=0 且 lim[x→a]z(x)=0，则 lim[x→a]y(x)/z(x)=lim[x→a][dy(x)/dx]/[dz(x)/dx]

由于函数 y=y(x)和 z=z(x)的导函数在 x→a 时候的极限可能不为 0，因此，通过洛必达法则可以把两个极限为 0 的原函数之比的未定式极限化成非未定式的形式求解极限。

根据：以下为不严格证明过程

由于柯西中值定理**[y(b)-y(a)]/[z(b)-z(a)]=[dy(x)/dx]/[dz(x)/dx][这里 x=k]**的成立，我们把 b 换成 x，并且设 y(a)=z(a)=0，则当 x→a 时候，lim[x→a]y(x)=0 且 lim[x→a]z(x)=0 成立。

同时我们得到：**y(x)/z(x)=[y(x)-0]/[z(x)-0]=[y(x)-y(a)]/[z(x)-z(a)]=[dy(k)/dx]/[dz(k)/dx]这里 [x=k]**，其中 **a≤k≤x**。

现在对上式 **y(x)/z(x)=[dy(k)/dx]/[dz(x)/dx][这里 x=k]**的两边分别求 lim[x→a]，根据 lim[x→a]y(x)=0 且 lim[x→a]z(x)=0 的条件可以知道：

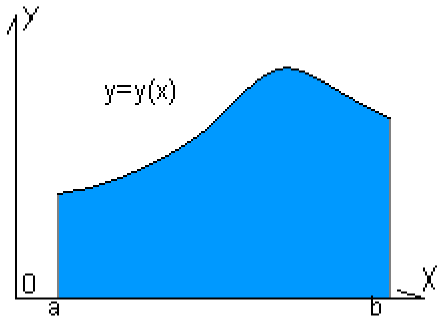
lim[x→a]y(x)/z(x)=lim[x→a][dy(x)/dx]/[dz(x)/dx][这里 x=k]恰好是 lim0/0 类型的不定式。
由于 **a≤k≤x**，因此，当 x→a 时候，一定有 **k→a**，显然 k 这个取值符合 x→a 的条件，所以根据柯西中值定理，lim[x→a]y(x)/z(x)=lim[x→a][dy(x)/dx]/[dz(x)/dx]至少对于一个 **x** 的取值 **x=k** 成立。因此洛必达法则成立。

在使用洛必达法则的时候，如果未定式 lim0/0 经过一次分子分母求导之后仍然是前面 8 种不定式之一的类型，则可以化成 lim0/0 型再次应用洛必达法则对分子分母求导。但是如果 lim0/0 型不定式经过分子分母求导后已经不再是不定式极限（而是普通极限），则不可以继续使用洛必达法则，应该按照普通极限求法来计算极限。

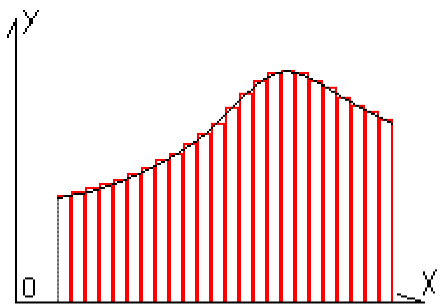
第四章

积分

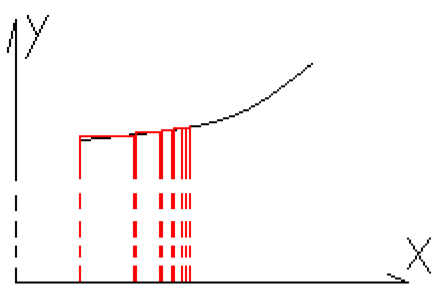
我们已知 y=y(x)在平面直角坐标系中对应了一条曲线：如图中蓝色区域的上边界（不包含左右边界和 x 轴边界）。我们现在想要求这个蓝色区域的面积。
问题看似平常，但是具体怎么解决呢？显然，我们不能用单位面积的方格去填充蓝色区域，因为总有一些部分是曲边的，不能用方格填满的（或者干脆塞不进去正方形面积单位）。
不过，这个问题实际上和我们讨论导数时候举的变速运动的速度的问题类似，我们可以继续使用无限分割的办法。



如右图，我们把蓝色区域分割成很多个宽度相同的小长方形，随便看一个小长方形，宽度 Δx 是我们可以随便设定的（只要所有 Δx 加在一起等于 x 坐标 x=a 和 x=b 之间的距离差 b-a 就可以，爱等分多少个 Δx 随你乐意），关键是还需要知道每个长方形的高度。**我们既然知道了每个长方形的宽度 Δx，如果再知道了高度，就能用长方形面积公式把所有长方形的面计算出来**。那么长方形高度是多少呢？我们已经知道曲线边 y=y(x)的函数表达式，那么，由于每个长方形的底边都在 x 轴上，顶边近似在 y=y(x)上，那么：



从右图我们看出，Δx（长方形宽度）越小，长方形的顶边越接近 y=y(x)曲线的一小段线段，当 **Δx→0**（但达不到）为无穷小的时候，每个长方形的顶边无限地接近 y=y(x)曲线上的小段线段。
这个时候的每个长方形高度刚好可以等于该长方形的最左边对应的 **x 轴坐标 x=x1** 所对应的函数 y 值 **y=y(x1)**。
那么，每一个长方形的左边对应 x 值 x=x1=a，x=x2，x=x3，x=x4。。。分别对应不同的长方形高度 y=y(x1)，y=y(x2)，y=y(x3)，y=y(x4)。。。这些就是长方形的高。由于这些长方形宽度都是 Δx，根据长方形面积公式：



S=高*宽=y(x)*Δx
得到所有小长方形面积分别为 S1=y(x1)*Δx，S2=y(x2)*Δx，S3=y(x3)*Δx，S4=y(x4)*Δx。。。
那么这些小长方形的面积之和就是近似的蓝色区域面积。

我们知道，如果 $\Delta x\to 0$，那么 $y=y(x)$这个高度就无限精确接近曲线上小段曲线段的实际高度，那么就是说，我们计算小长方形的时候使用的高度数值在 $\Delta x\to 0$ 时候无限精确。那么所有小长方形面积总和[S1+S2+S3+S4+。。。]无限趋近于蓝色区域面积[S#]
那么按照前面介绍的极限的概念来看：
lim[Δx→0]S1+S2+S3+S4+。。。=S#
我们把这个极限写作
S#=lim[Δx→0]S1+S2+S3+S4+。。。
=lim[Δx→0]y(x1)*Δx+y(x2)*Δx+y(x3)*Δx+y(x4)*Δx。。。y(xk)*Δx 由于 **x1=a，lim[Δx→0]xk=b**（因为当 Δx 无限趋近 0 时，最右边的小长方形的高度无限接近 b），于是
S#=lim[Δx→0]y(a)*Δx+y(x2)*Δx+y(x3)*Δx+y(x4)*Δx。。。y(b)*Δx=**∫[a~b]y(x)*Δx**
又由于前面我们介绍过，函数自变量增量等于自变量的微分 **Δx=dx**，所以
S#=∫[a~b]y(x)*Δx=∫[a~b]y(x)*dx
这个表达式∫[a~b]y(x)*dx 叫做函数 y=y(x)对其自变量 x 的 定积分，而自变量 x 取值范围[a~b]也就是 $a\le x\le b$。

那么，高等数学中的积分原来就是这样简单的东西：当把函数 y=y(x)自变量 **x=x1 处的**改变量 Δx1 与 x=x1 处的因变量值 **y=y(x1)相乘后得到**一个小乘积 **S1=y(x1)*Δx1**，类似在 x 其他取值位置得到一些列小乘积 S2=y(x2)*Δx2，S3=y(x3)*Δx3，S4=y(x4)*Δx4。。。Sk=y(xk)*Δxk 等，**当所有的 Δx 都满足 Δx→0 的时候，所有的小乘积的总和如果有个极限**，那么这个**极限**就叫函数 y=y(x)的积分。如果小乘积中对应的**最小 x 值和最大 x 值**都为确定有限值（不是不确定值），那么这个积分就叫 **y=y(x)在 a≤x≤b 范围内的**定积分。如果小乘积中对应的**最小 x 值和最大 x 值都不是确定值**，那么积分就叫做函数 **y=y(x)的**不定积分。

相当多的朋友在刚学习积分的时候都被“高等数学”吓迷糊了，其实这东西没什么“神奇”的，是人就能弄明白。

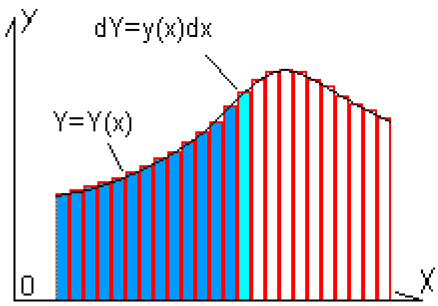
从这个式子 S#=∫[a~b]y(x)*dx，我们是看不出积分到底等于多少或者该怎么算的。
要计算积分，就要知道积分的计算性质。

积分，微分与导数的关系

首先我们要了解一个问题：
我们已经知道导数的定义是：原函数 **y=y(x)的因变量微分 dy 除以原函数自变量微分 dx**
微分的定义是：**在把函数的因变量改变量 Δy 表示成 常数乘以自变量改变量 CΔx 加上 一个相对于自变量改变量为无穷小的量 a(Δx) 的**加法算式形式**中的 CΔx 部分就是函数 y=y(x) 的**微分 **dy**，说白了 **dy** 就是 **Δy** 的近似值。**dy** 可以作为 **Δy** 的近似值的条件就是 **Δx** 无限趋近 **0**。
积分的定义是：函数曲线上各点对应一个 因变量值与 **dx** 的乘积 ，对所有小乘积求和。
那么，如果给函数的自变量和因变量附加物理意义，会怎样呢？
如果我们让函数自变量 **x** 具有物理意义--时间，让函数因变量 **y** 具有物理量意义--速度，那么
y=y(x)就是速度随时间变化的函数。
导函数 dy/dx 就是速度改变量除以时间改变量，也就是 加速度

微分 dy 就是速度改变量的近似值
积分∫y(x)dx 就是 速度与每个瞬时的时间改变量的乘积得到的一系列小运动位移求和，也就是总的运动位移。
可以看出，**函数微分 dy 与函数因变量 y 具有相同的物理量纲**（都是速度），**而导数的物理意义总是因变量物理量 y 除以自变量 x 对应的比率物理量，积分的物理意义是因变量 y 和自变量 x 乘积对应的那个物理量**。
另外，由于积分∫y(x)dx 本身随不同的函数自变量 x 取值范围，具有不同的**积分值**（比如我们改变蓝色区域的左右端点 a，b 肯定引起蓝色区域面积的改变），所以，积分可以看作是一个具有很多值的**变量**，它直接与 x 相关形成与函数 y=y(x)有关的**新的函数**。我们把这个函数叫做积分函数 Y(x)=∫y(x)dx。以后提到积分，就是包含了积分函数的概念，而具体积分结果数值叫做积分值。

我们来看，既然导函数 **y(x)**定义为原函数 **Y1=Y1(x)**的因变量微分 **dY1** 除以原函数自变量微分 **dx**，也就是 **dY1/dx=y1(x)**
而导函数（简称导数）本身也是由 x 作为自变量起决定作用的函数，我们可以把它记作 **y1(x)=dY1/dx**。
那么，已知了导函数 **y1(x)=dY1/dx**，那么原函数的因变量 **Y1** 的微分就是 **dY1=y1(x)*dx**。



从蓝色区域面积的例子来看我们已经知道，**y(x)*dx** 是每一个小长方形的面积，如果把一个小长方形面积看作一个总面积函数（该函数的因变量 **Y** 为蓝色区域总面积）**Y=Y(x)**的微小增量 **ΔY**，由于在 **Δx 无限趋近 0** 时候，满足了微分 **dY=y(x)*dx**（小长方形面积）作为 **ΔY** 的近似值的条件，那么，**Δx→0** 时候，每个小长方形面积 **dY** 就是蓝色区域总面积 **Y=Y(x)**的微小增量 **ΔY**。
我们从上图看出，原来的总面积 **Y=Y(x)**本身就是由很多个 **dY** 部分小长方形面积组成，而整个蓝色区域的面积也是由许多个 **dY** 小面积累加在一起得到的 **Y=Y(x)**函数因变量最大值。
于是我们可以认为：**Y=Y(x)=∫[a~b]y(x)dx=∫[a~b]dY**，也就是说，曲边函数 **y(x)**的积分（也就是所有 **dY=y(x)*dx** 小面积的总和在 **Δx→0** 时候的极限）就是蓝色区域的总面积。
[对于现在已经知道积分是什么了的诸位读者来说，这些都是很显而易见的了。]

我们最后整理一下思路：
函数 **Y=Y(x)=∫[a~b]y(x)dx=∫[a~b]dY**，函数 **Y=Y(x)**的微分 **dY=y(x)dx**，函数 **Y=Y(x)**的导函数 **dY/dx=y(x)**，函数 **Y=Y(x)**就是导函数 **y=y(x)**的原函数。最终结论：**导函数 y=y(x)的原函数就是导函数 y=y(x)的积分 Y=Y(x)=∫[a~b]y(x)dx**。

现在我们终于知道了，积分和导函数还有这样的亲密关系。用求导运算可以从原函数求得导函数，用积分可以从导函数求得原函数。简直太方便了。
我们注意到：**∫dY=Y**（参见 **Y=Y(x)=∫[a~b]y(x)dx=∫[a~b]dY**），可见积分运算∫和微分运算 **d** 互为逆运算。看来，积分和微分关系更密切。

第五章

积分运算的基本性质

首先应该明确：Y(x)=∫[a~b]dY(x)=∫[a~b]y(x)dx 中，∫为积分运算符号，x 为积分自变量（简称积分变量），[a~b]为积分变量 x 的取值范围，其中 a<b，a 叫积分下限，b 叫积分上限。y(x)叫被积分因变量函数(简称被积函数)，y(x)为 Y(x)的导函数，Y(x)为 y(x)的原函数，dY=y(x)dx 叫做 Y(x)的微分。

积分的加减法性质：
∫[a~b]y(x)dx±∫[a~b]z(x)dx=∫[a~b][y(x)±z(x)]dx
即积分变量相同且积分上下限相同的两个积分求和等于对两个被积函数求和后做同样条件的积分。
积分与常数相乘的性质：
C*∫[a~b]y(x)dx=∫[a~b]C*y(x)dx
即积分与常数 C 相乘等于对 C 与被积函数 y(x)相乘得到的函数做同样条件的积分。

一些简单积分的公式：
1--∫**0dx=C** 对 0 做积分得到常数，因为常数 C 的微分等于 0，这很重要，我们首先让大家注意到这个问题
2--∫**x^adx=∫[x^a+0]dx=x^(a+1)/(a+1)+C** 这是幂函数（乘方函数）的积分，**缺少+C 就等于忽略了+0 的存在**，得出的结果就是错的。
推论 1：∫**xdx=∫x^1dx=x^(1+1)/(1+1)+C=x^2/2+C**
推论 2：∫**x^0dx=∫1dx=∫(1+0)dx=x+C**。
推论：∫**Adx=∫(A+0)dx=Ax+C**，其中 A 为常数
3--∫**cosxdx=∫[cosx+0]dx=sinx+C** 这是余弦函数的积分，**也不能缺少+C**
4--∫**sinxdx=∫[sinx+0]dx=-cosx+C** 这是余弦函数的积分，**也不能缺少+C**

公式还有很多，这里限于读者知识有限，不详细例举了。**在求不定积分的时候+C 部分是绝对不可以忘记的，否则就等于忘记了任何数 a=a+0 这个事实，而 0 的积分不绝对是 0，很多时候是一个非 0 常数 C，是坚决不能忽略的。**

积分的被积函数可能是比较复杂的，于是我们就要用到一些高级的求积分办法。常见的有换元法和分部法。这部分推荐给高中毕业读者。初中毕业读者可以大概看看，不需要看明白。

换元积分法

例 1：
∫**sin(2x)dx** 里面出现 sin(2x)，基本公式里没有，我们会想如果自变量是 x 多好啊，但是自变

量是 $2x$，怎么办呢？**如果设 $y=2x$**，那么原来的积分就变成$\int \sin y dx$ 了，那么，**如果能把 dx 换成 dy**，这个积分就完全变成$\int \sin y dy= -\cos y+C$ 了，不就算出来了吗？

于是，我们现在要研究**怎么把 dx 变成 dy**。既然 $y=2x$，$dy/dx=2$，$dy=2dx$，$dx=dy/2$。原来如此，**只要把 $dx=dy/2$ 代入原来的积分**，不就把 dx 变成 dy 了吗？

于是 $\int \sin y dx=\int \sin y dy/2=(1/2)\int \sin y dy=(1/2)[-\cos y+C]=(-1/2)\cos y+D$（$D=C/2$ 为常数）$=(-1/2)\cos(2x)+D$ 求解成功。

我们现在尝试新的办法：根据高中三角函数知识（初中读者可以不必深究这个公式是为什么）

$\sin(2x)=2*\sin x*\cos x$，那么

$\int \sin(2x)dx=2\int[\sin x\cos x]dx$

我们现在想，如果把 $\sin x$ 或者 $\cos x$ 看作一个自变量 y，**比如设 $y=\sin x$**，那么原来的积分就变成

$\int \sin(2x)dx=2\int[\sin x\cos x]dx=2\int[y*\cos x]dx$

如果能把 dx 换成 dy，那么这个积分就可以用新方法计算出来。

现在研究**如何把 dx 换成 dy**。

我们知道 **$y=\sin x$**，根据前面我们讲导数时候给出的公式 $dy/dx=d[\sin x]/dx= \cos x$，于是 $dy= \cos x*dx$，

$dx=dy/(\cos x)$。

代入原来的积分

$\int \sin(2x)dx=2\int[y*\cos x]dx=2\int[y*\cos x]*dy/(\cos x)= 2\int ydy$

根据我们给出的第 2 个简单积分公式的推论 1：**$\int xdx=x^2/2+C$**，则我们要求的积分

$\int \sin(2x)dx= 2\int ydy= 2(y^2/2+A)= y^2+2A$（$A$ 为常数）$= y^2+E$（$E= 2A$ 为常数）$= (\sin x)^2+E$

有人会问，同一个积分，怎么结果不一样啊？

其实是一样的。根据高中三角函数公式（初中读者可以不必探究这个公式为什么成立）：

$\cos(2x)=1-(2\sin x)^2$，得到$(\sin x)^2=[1-\cos(2x)]/2$

代入第二个结果$(\sin x)^2+E$ 得到

$(\sin x)^2+E= [1-\cos(2x)]/2+E=(1/2)-(1/2)\cos 2x+E=(-1/2)\cos 2x+D$（$D=E+(1/2)$为常数）

现在看看两个结果是不是一样了？虽然两种方法计算出的结果乍看起来表示形式不同，但是本质是等价的。

例 2：

$\int(1-x^2)^{(1/2)}dx=?$

显然，由于被积函数$(1-x^2)^{(1/2)}$存在$(1/2)$次方，也就是带根号的，我们的基本公式里面没有。怎么求积分呢？

我们知道，**$(\sin y)^2+(\cos y)^2=1$**

那么，**如果设 $x=\sin y$**，则 $dx=d\sin y$，都代回原来的积分得到

$\int(1-x^2)^{(1/2)}dx=\int[1-(\sin y)^2]^{(1/2)}d\sin y=\int[(\cos y)^2]^{(1/2)}d\sin y=\int \cos y d\sin y$

由于 **$d\sin y/dy=\cos y$**，则 **$d\sin y=\cos y dy$**，代入原来积分得到

$\int(1-x^2)^{(1/2)}dx=\int \cos y d\sin y=\int(\cos y)^2dy$

利用高中三角函数公式 **$\cos(2y)=2[(\cos y)^2]-1$** 得到**$(\cos y)^2=[1+\cos(2y)]/2$** 代入原积分

$\int(1-x^2)^{(1/2)}dx=\int(\cos y)^2dy=(1/2)\int[1+\cos(2y)]dy=(1/2)\int 1dy+(1/2)\int \cos(2y)dy$

前面我们算过$\int \sin(2x)dx$，这里的$\int \cos(2y)dy$ 完全类似，

$\int \cos(2y)dy=\sin(2y)+C=2\sin y\cos y+C$ 根据 $x=\sin y$，得到 $\cos y=(1-x^2)^{(1/2)}$

$\int \cos(2y)dy=2\sin y\cos y+C=x(1-x^2)^{(1/2)}+C$

另外$(1/2)\int 1dy=(1/2)y+A$（A 为常数），由于 $x=\sin y$，则根据高中知识得到反正弦函数 $y=\arcsin x$

于是(1/2)∫1dy=(1/2)y+A=(1/2)arcsinx+A
原积分∫(1-x^2)^(1/2)dx=∫(cosy)^2dy
=(1/2)∫1dy+(1/2)∫cos(2y)dy
=(1/2)y+A+(1/2)x(1-x^2)^(1/2)+C
=(1/2)arcsinx+A+(1/2)x(1-x^2)^(1/2)+C
=(1/2)arcsinx+(1/2)x(1-x^2)^(1/2)+D（D=A+C 为常数）
求解完毕。

由此可见，换元法所说的换元，就是代换积分自变量，通过这种代换来化简复杂的被积函数成为我们常见的简单形式，从而求得积分（也就是被积函数的原函数）。

分部积分法

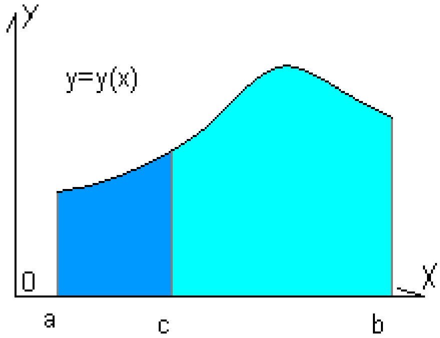
根据导数乘法性质：d[y(x)*z(x)]/dx=[dy(x)/dx]*z(x) + [dz(x)/dx]*y(x)
对等式变形得到：d[y(x)*z(x)]/dx-[dy(x)/dx]*z(x) = [dz(x)/dx]*y(x)
等式两边都乘以 dx 得到：d[y(x)*z(x)]-dy(x)*z(x) = dz(x)*y(x)
对等式两边都进行积分得到：
∫d[y(x)*z(x)]-∫dy(x)*z(x) = ∫dz(x)*y(x)
y(x)*z(x)-∫z(x)dy(x) =∫y(x)dz(x)
假如我们可以把我们要计算的复杂积分看作等式右边的∫y(x)dz(x)，也就是把我们的被积分函数和积分变量乘积部分看作 y(x)dz(x)这样的一个函数 y(x)和另一个函数 z(x)的微分的乘积的形式，就可以把我们的积分等效为等式右侧的减法运算。当然这里面还有一个最重要的前提，**等式左侧 y(x)*z(x)和∫z(x)dy(x)都比等式右侧的∫y(x)dz(x)容易计算出来。**
例如：
∫xcosxdx=?
显然，我们的基本公式没有这种 x 和 cosx 相乘组成被积函数的类型，它属于复杂积分。
我们想把这个积分可以看成∫y(x)dz(x)，利用 **y(x)*z(x)-∫z(x)dy(x) =∫y(x)dz(x)**计算它。
那么，我们有两个方案：
1--设 y(x)=cosx，dz(x)=xdx，于是 z(x)=∫dz(x)=∫xdx=x^2/2+C（C 为常数），于是我们的积分∫xcosxdx=y(x)z(x)-∫z(x)dy(x)=x^2cosx/2+Ccosx-∫[x^2/2+C]dcosx，明显看出，这个式子比我们的原始积分还难计算，因此此路不通。
2--设 y(x)=x，dz(x)=cosxdx，于是 z(x)=∫dz(x)=∫cosxdx=sinx+C（C 为常数），于是我们的积分∫xcosxdx=y(x)z(x)-∫z(x)dy(x)=xsinx+Cx-∫(sinx+C)dx=xsinx+Cx+cosx-Cx+D=xsinx+cosx+D（D 为常数）。

所谓分部积分，就是巧妙地把被求积分的被积表达式（被积函数和积分变量的乘积表达式）分成合适的 y(x)和 dz(x)两部分，利用公式 y(x)*z(x)-∫z(x)dy(x) =∫y(x)dz(x)简化被求积分的计算的办法。

第六章

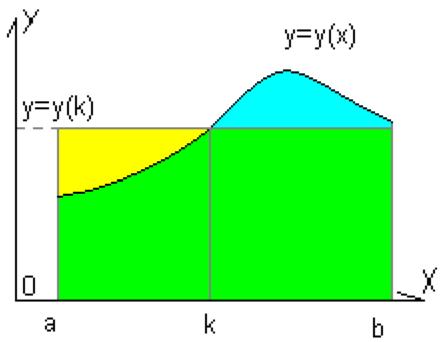
与积分上下限有关的积分性质

∫[a~b]y(x)=∫[a~c]y(x)+∫[c~b]y(x)
如右图，我们的对应颜色的积分代表对应颜色的区域的面积，总面积是∫[a~b]y(x)。



定积分中值定理：

如右图，∫[a~b]y(x)为图上绿色和蓝色两个区域总面积，也就是函数 y=y(x)在 a≤x≤b 范围内的积分。
假定有一个横坐标位置 x=k 在函数 y=y(x)的曲线上对应点的 y 坐标值为 y=y(k)，那么，由于 x=a 和 x=b 位置间的水平距离为 b-a，可以看作图中黄色和绿色区域组成的长方形的长边长，而该长方形的宽边宽恰好是 y=y(k)，则长方形面积为 y(k)*(b-a)。如果恰当选取 k 值，可以保证蓝色区域面积等于黄色区域面积。于是，这时候的 k 值保证下式成立：



∫[a~b]y(x)=y(k)*(b-a)
我们说，对于一个给定的 a≤x≤b 范围内的一段连续曲线（其函数为 y=y(x)），总能找到一点 a≤k≤b 满足上面的等式成立。这叫做定积分中值定理。

牛顿-莱布尼茨公式（微积分基本公式）

如果不定积分∫y(x)dx=Y(x)，那么在 a≤x≤b 范围内的定积分
∫[a~b]y(x)dx=Y(b)-Y(a)。

牛-莱公式是通过不定积分计算定积分的最重要公式。
推论：∫[a~b]f(x)dx= –∫[b~a]f(x)dx
即：交换积分上下限后积分变号。

定积分的换元积分法：
1--∫[a~b]f(x)dx 通过换元法，设 y=y(x)，把 dx 换成 dy 得到

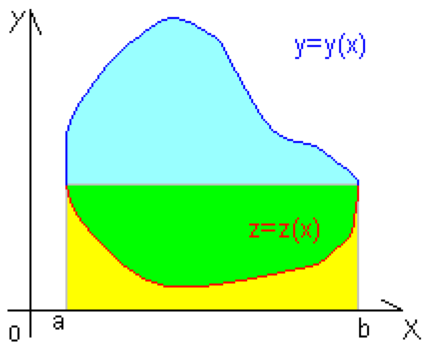
∫[a~b]f(x)dx=∫[y(a)~y(b)]g(y)dy,注意把 x 变量的基分上下限[a~b]变为对应的 y 变量的积分上下限[y(a)~y(b)]。
2--∫[a~b]f(x)dx 通过换元法，设 x=x(y)，把 dx 换成 dy 得到
∫[a~b]f(x)dx=∫[c~d]g(y)dy，其中 x(c)=a，x(d)=b，注意把 x 变量的基分上下限[a~b]变为对应的 y 变量的积分上下限[c~d]。

定积分的分部积分法：
从 y(x)*z(x)-∫z(x)dy(x) =∫y(x)dz(x)得到
y(x)*z(x)-∫z(x)[dy(x)/dx]dx =∫y(x)[dz(x)/dx]dx
这里 dy(x)/dx 为 y(x)的导函数，dz(x)/dx 为 z(x)的导函数
得到重要公式：
∫[a~b]y(x)[dz(x)/dx]dx=[y(b)*z(b)-y(a)*z(a)]-∫[a~b]z(x)[dy(x)/dx]dx
其中[a~b]为积分变量 x 对应的积分上下限。

总之，在换元法和分部法过程中，积分上下限一定要和积分自变量严格对应，不能用其他积分变量的上下限计算积分。

积分的物理应用举例

1-求图形面积：



如右图，蓝色线和红色线为成一个不规则区域，我们只要知道了蓝色线的函数 y=y(x)和红色线的函数 z=z(x)，就可以用积分计算出不规则区域(蓝色面积和绿色面积)的总面积。首先我们知道,根据最初我们介绍积分的那个求面积的例子来看，这道问题中的∫[a~b]y(x)dx 就是蓝色面积+绿色面积+黄色面积。而∫[a~b]z(x)dx 就是黄色区域面积。于是可以知道，蓝色面积和绿色面积总和为：
∫[a~b]y(x)dx-∫[a~b]z(x)dx

2--求变速运动总位移：

已知变速运动的速度函数为 v(t)，求 t1=a 到 t2=b（a<b）这段时间内物体的位移。
由于变速运动不能直接使用匀速运动位移公式。我们把变速运动分为多个瞬间（瞬间就是微小时间差段）Δt，为了把每个瞬间近似可以看作匀速，我们让每个瞬间尽可能小，也就是让 Δt→0，此时满足时间 t 函数的微分 dt 作为 Δt 近似值的条件（条件是 Δt→0），则 Δt=dt。
由于每一小段运动近似匀速，则该小段的速度 v(t)为常数，由小段运动起始时刻 t 值决定。

每一小段的位移可以参考匀速运动位移公式 $\Delta s(t)=v(t)*\Delta t$，由于是小段位移，在 $\Delta t\to 0$ 条件下，$\Delta s\to 0$，所以也可以用 ds 来作为 Δs 的近似：$\Delta s(t)=ds(t)$
于是，用 $\Delta t=dt$ 和 $\Delta s(t)=ds(t)$ 代入 $\Delta s(t)=v(t)*\Delta t$ 得到
$ds(t)=v(t)dt$
为求得 s，只需要对 ds(t) 求积分，积分的范围在 $[t1\sim t2]$ 也就是 $[a\sim b]$，积分写成：
$s(t)=\int[a\sim b]v(t)dt$
只要我们知道具体 v(t) 和 $[a\sim b]$ 就能计算出 s(t)。

以上为积分的最简单应用，微积分的出现就是为了解决连续不均匀变化不能直接应用均匀变化的计算公式的问题，而微积分把变化的均匀与不均匀性统一起来，是我们能够自如地解决非均匀变化问题。

到此为止，我们的《图说微积分》告一段落。其他有关微积分的更深层次的知识，需要读者在熟练掌握高中数学知识和我们介绍的这些微积分知识后继续学习。

全文完
谢谢观赏
www.baidu.com
相对论贴吧