

平衡学习和娱乐时间的数学模型

摘 要

本模型以普通本科生为对象，建立了课、内外学习和娱乐时间分配的数学模型，分析了三者对幸福指数的影响。

通过与生态学中种群增长率模型的对比，建立课、内外学习效果与学习时间的模型。将课内学习效果与时间的关系处理为s型曲线，课外学习处理为J型曲线。

用两条三角函数曲线分别近似计算幸福指数与成就感、娱乐时间的定量关系。并将二者所得幸福指数加权求和（权重分别为 k_1, k_2 ）作为最终幸福指数。

模型求解时采用lingo软件。本模型的lingo程序具有一定的通用性，求解时将所需参数输出lingo即可。所需参数即程序中对应的变量名：

1. T_0 个人可自由支配的总时间。
2. λ 成就感与娱乐在一个人心中的相对重要程度的比值
3. a_1 课内成绩最低要求
4. a_2 满足所追求社会地位所需综合能力

另外，通过选出不同的参数 λ ($\lambda = k_1/k_2$)，本模型还可以计算出对应的幸福指数，根据拟合出的曲线，可以适当进行心理调节，提高个人生活的幸福指数，对心理调节有一定的参考价值。

关键字：课内学习，课外学习，娱乐，平衡点

1 问题重述

大学里有人特别关心课内学习，很少参与课外活动。有人恰恰相反。还有些人更关心娱乐，对成功与否要求不高，只是希望过的更舒适一些。还有人试图找到三者的平衡点。试建立数学模型，求解学习与娱乐的平衡点。

2 问题分析

2.1 课内学习

课内学习仅指应试学习。即，单纯用于提高考试成绩的学习。课内学习效果以考试成绩的提高为表现形式。

考核课内知识的测试（期中，期末考试）所考察的知识点是有限的，随着学习时间的增加，所掌握的知识点越来越多，成绩将越来越高。同时，随着学习的深入，学习经验越来越丰富，学习能力会提高，学校效率也会相应提高。学习能力与已掌握的知识成正相关关系。但是随未掌握的知识点越来越少，单位时间内重复学习所占用的时间将越来越多，即，当学习成绩达到一定水平时，随着学习时间的增加，学习效率越来越低。

2.2 课外学习

课外学习指应试以外的学习，包括参与实践活动，阅读图书音像资料等。课外学习的效果以综合能力的提高为表现形式。

课外学习涉及的领域很多，足够正常人学一生。在人的一生这段有限的时间里，重复学习现象往往表现的不明显，至少本科四年这个时间段里可以认为，重复学习对学习效率基本没有影响。所以，随着用于课外学习的时间的增加，学习能力不断提高，学习效率随之提高。课外学习效率与所具有的综合能力与是正相关的关系。

2.3 幸福指数

用幸福指数作为衡量一个人生活是否幸福的标准。幸福指数越高，人越感觉幸福。本文仅讨论成就感和娱乐时间对幸福指数的影响。

随着成绩的提高，成功的次数越来越多，成就感越来越高，人的幸福指数越来越高。在开始阶段，成功次数较少，成就感积累不多，每次成功对幸福指数影响较大，但是，随着成功次数的增多，成就感对人的刺激越来越频繁，人对刺激的灵敏度逐渐降低。再加上对自己要求提高等主观、客观因素的影响，随着成功次数的增加，每次成功对幸福指数的影响逐渐降低。但在通常情况下，影响不会降至零。

成功次数与学习时间（课内、课外总时间）有关，忽略客观因素的影响，随着能力的提高，成功的概率会相应的增大，所以成功次数会越来越多。成就感也就越来越高。人的幸福指数也会相应提高。

但提高成就感需要付出相应的学习时间，一个人可以支配的总时间是有限的，学习时间多了，娱乐时间会相应减少。通常在一定范围内，随着娱乐时间的增加，人的幸福指数越来越高，但是，由于娱乐方式不是无穷多，当娱乐时间高于某个临界值时，一个人需要长时间重复相似的娱乐活动。当重复到一定程度时，往往会感到厌倦、无聊，不再感觉

幸福。所以，娱乐时间超过某个临界值时，随着娱乐时间的增加，幸福指数降低。

总结：

幸福指数随成功次数的增加而增加，变化率越来越小。

幸福指数随娱乐时间的变化关系为先增大，后减小。

3 符号设定

1. v_w 课外学习效率。
2. v_n 课内学习效率。
3. N_n 课内成绩(考试分数)。
4. N_{nm} 最高课内成绩，即满分。
5. N_w 综合能力的分数。
6. t 时间。
7. t_1 用于课外学习的时间
8. t_2 用于课内学习的时间。
9. t_3 空余时间。
10. v_n 课内学习效率。
11. v_w 课外学校效率。
12. Δ 增量。例如， Δa 表示 a 的增量。
13. r_n 学习效率与考试成绩的比例系数。
14. r_w 课外学习效率与综合能力的比例系数。
15. T_0 可自由支配的总时间时间。
16. λ 成就感与娱乐在一个人心中的相对重要程度的比值。
17. M 总满意度。
18. m_1 成就感的满意度。
19. m_2 娱乐的满意度。

4 模型假设

1. 忽略课内成绩对综合能力的贡献。假设综合能力仅与课外学习相关。且综合能力可以量化表示。
2. 假设考试成绩仅与所掌握的课内知识点数量有关，不考虑心理、环境等因素对考试成绩的影响。即，掌握的课内知识点越多，考试成绩越高。
3. 假设同学在学完一个知识点以后会安排相应的复习时间，重复学习对提高成绩没有任何贡献。复习不属于重复学习的范畴。
4. 假设期中、期末的考试有相对固定的考察范围，课内学习仅指学习考查范围内的知识。
5. 不考虑课内、课外学习之间的相互影响。
6. 课外学习没有学习范围的限制，假设课外学习中不存在重复学习现象。
7. 假设幸福指数仅与成就感和娱乐时间有关。
8. 一个人用于学习和娱乐的总时间不变。
9. 学习效率随已掌握的相应领域的知识的增加而增加。

5 模型建立

5.1 综合能力与课外学习时间的数学模型

在课外学习中，重复学习对学习效率基本没有影响。所以，随着用于课外学习的时间的增加，学习能力不断提高，学习效率随之提高。

假设综合能力可以量化表示，定义60分为及格分数，基本可以独立生活。80分优秀可以完全独立生活。不设上限分数。

课外学习效率与综合能力的提高成正相关关系，取正比关系近似表示二者关系：

$$v_w = r_w N_w \quad (1)$$

其中， r_w 为比例系数

记时刻 t 的综合能力为 $N_w(t)$ ，考虑从 t 到 $t + \Delta t$ 时间内综合能力的增加量

$$N_w(t + \Delta t) - N_w(t) = r_w N_w \Delta t \quad (2)$$

方程(2)中令 $\Delta t \rightarrow 0$ ，有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_w(t + \Delta t) - N_w(t)}{\Delta t} = r_w N_w$$

即：

$$\frac{d N_w}{d t} = r_w N_w \quad (3)$$

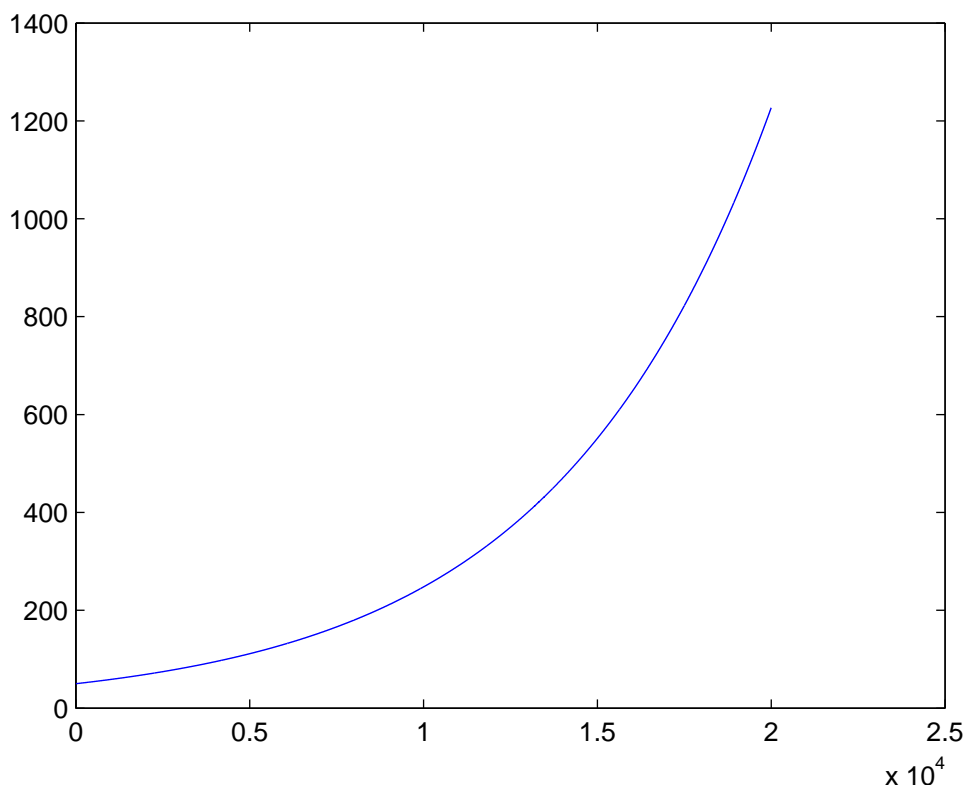


图 1 综合能力与课外学习时间函数关系

从而有课外学习效果与学习时间的数学模型：

$$\begin{cases} \frac{dN_w}{dt} = r_w N_w & r_w > 0 \\ N_w(t_0) = N_{w0} \end{cases} \quad (4)$$

其中， t_0 为初始时间。 N_{w0} 为 $t = t_0$ 时的课内学习成绩。

方程组(4)的解为：

$$N_w(t) = N_{w0} e^{r_w(t-t_0)} \quad (5)$$

函数图像如图(1)：

5.2 课内学习效果与学习时间的数学模型

由于课内知识的测试所考察的知识点是有限的，随着学习时间的增加，未掌握的知识点越来越少，重复学习现象越来越明显。单位时间内重复学习所占用的时间将越来越多，即，当学习成绩达到一定水平时，随着学习时间的增加，学习效率越来越低。

因此，在课外学习效率与学习时间的数学模型基础上，将课内学习效率与成绩的关系在正比例函数的关系的基础上修正为：

$$v_n = r_n N_n \left(1 - \frac{N_n(t)}{N_{nm}} \right)$$

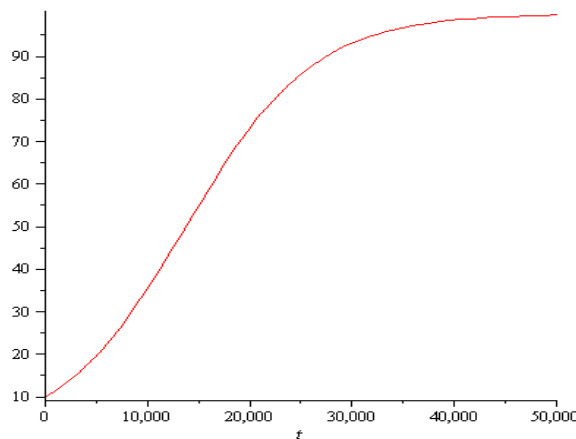


图 2 考试成绩与课内学习时间函数关系

从而课内有如下模型:

$$\begin{aligned}\frac{dN_n}{dt} &= r_n \left(1 - \frac{N_n(t)}{N_{nm}}\right) N, r_n > 0 \\ N_n(t_0) &= N_{n0}\end{aligned}$$

解得:

$$N_n(t) = \frac{N_{nm}}{1 + \left(\frac{N_{nm}}{N_{n0}} - 1\right) e^{-r(t-t_0)}} \quad (6)$$

函数图像如图(2)

5.3 幸福指数与娱乐时间和成就感的数学模型

5.3.1 幸福指数与成就感的数学模型

在开始阶段,成功次数较少,成就感积累不多,每次成功对幸福指数影响较大,但是,随着成功次数的增多,人对刺激的灵敏度逐渐降低。随着成功次数的增加,每次成功对幸福指数的影响逐渐降低。但在通常情况下,影响不会降至零。即:

幸福指数随成功次数的增加而增加,变化率越来越小。

成功次数与学习时间(课内、课外总时间)有关,忽略客观因素的影响,随着能力的提高,成功的概率会相应的增大,所以成功次数会越来越多。成就感也就越来越高。人的幸福指数也会相应提高。

成功次数与学习时间(课内、课外总时间)成正相关关系,所以用 $T/4$ 周期正弦近似表示幸福指数与总的学习时间的关系。

$$m_1 = A \sin\left(\frac{\pi}{t} t_1\right), t_1 \in [0, t] \quad (7)$$

其中, t 为全部可自由支配时间。令幸福指数的变化区间为 $[0, 1]$, 所以, 取 $A = 1$ 。

方程(7)即为:

$$m_1 = \sin\left(\frac{\pi}{t} t_1\right), t_1 \in [0, t] \quad (8)$$

5.3.2 幸福指数与空余时间

通常在一定范围内，随着娱乐活动的增加，人的幸福指数越来越高，但是，由于娱乐方式不是无穷多，当空余时间高于某个临界值时，人往往会感到厌倦、无聊，不再感觉幸福。所以：

幸福指数随娱乐时间的变化关系为先增大，后减小。

故，用 $T/2$ 的正弦函数近似表示幸福指数与空余时间的关系。

即：

$$m_2 = \sin\left(\frac{2\pi}{t} t_2\right), t_2 \in [0, t] \quad (9)$$

幸福指数的变化区间为 $[0, 1]$.

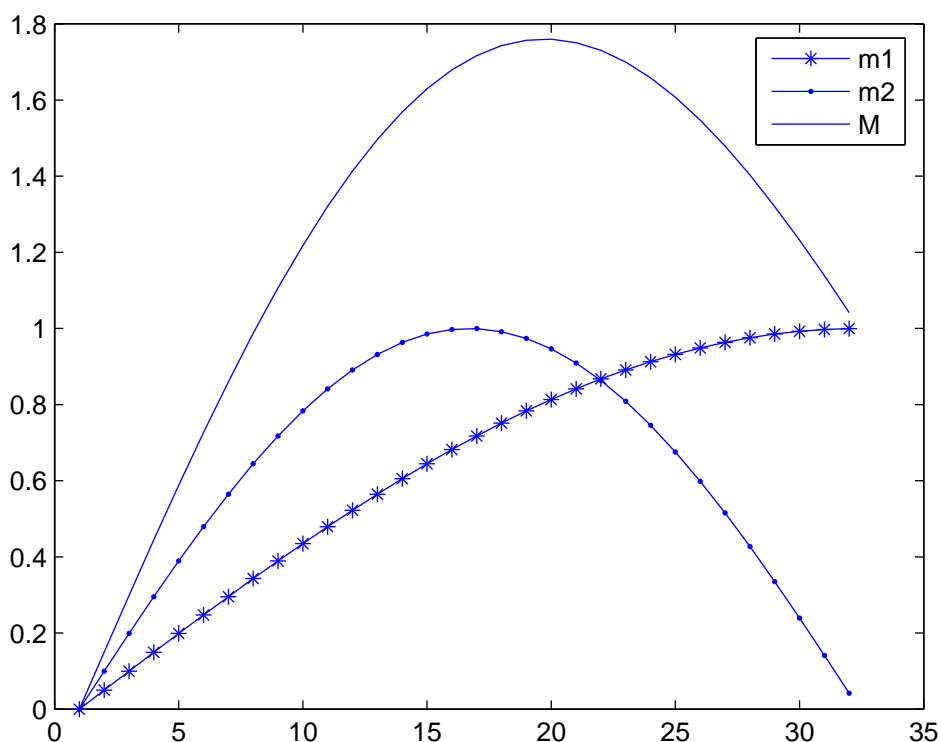


图 3 幸福指数函数模型

5.3.3 幸福指数公式

总的幸福指数 M 的计算公式为：

$$M = k_1 m_1 + k_2 m_2 \quad (10)$$

方程 (10) 中，

$$k_1 + k_2 = 1 \quad (11)$$

其中, k_1, k_2 为二者的权重, 取值因人而异。主要受个人价值观、社会环境等因素的影响。
令:

$$\lambda = k_1/k_2 \quad (12)$$

解(11)和(12)组成的方程组得:

$$k_1 = \frac{1}{1 + \lambda} \quad (13)$$

$$k_2 = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \quad (14)$$

处理实际问题时, 只需衡量成就感与娱乐在一个人心中的相对重要程度, 即只要选定 λ 的值, 就可由换算关系(13)和(14)求得二者所占权重。

5.4 最佳时间分配的数学模型

有人追求享乐, 有人追求成功, 有人期望在较舒适的生活中获得一定的成功。不同的追求都可以用幸福指数公式(10)来做目标函数, 对于不同追求的人只需选取不同的参数 λ 。追求享乐者 $\lambda \rightarrow \infty$ 。而追求成功者 $\lambda \rightarrow 0$

则上述问题的数学模型为:

$$\max \quad M = k_1 m_1 + k_2 m_2$$

s.t.

$$k_1 + k_2 = 1$$

$$m_1 = \sin\left(\frac{\pi}{t} t_1\right), t_1 \in [0, t]$$

$$m_2 = \sin\left(\frac{2\pi}{t} t_2\right), t_2 \in [0, t]$$

$$N_n \geq a_1$$

$$N_w \geq a_2$$

其中, a_1, a_2 分别为课内考试的最低要求和保持所需社会地位的最低要求。

即:

$$\max \quad M = k_1 m_1 + k_2 m_2$$

s.t.

$$k_1 + k_2 = 1$$

$$\frac{N_n m}{1 + \left(\frac{N_n M}{N_{n0}} - 1\right) e^{-r(t-t_0)}} \geq a_1$$

$$N_w(t) = N_{w0} e^{r_w(t-t_0)} \geq a_2$$

$$m_1 = \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t_1\right), t_1 \in [0, T_0]$$

$$m_2 = \sin\left(\frac{\pi}{T_0} t_2\right), t_2 \in [0, T_0]$$

$$t_1 + t_2 = T_0$$

6 模型求解

6.1 以一般人本科阶段为例估算相关参数

6.1.1 可自由支配总时间

假设本科阶段共四年，假设每年52周，即364天，除去睡觉时8h/d(小时每天)，四年自由支配总时间为

$$4 \times 364 \times 16 = 23296$$

6.1.2 课内学习

假设坚持正常上课，课内成绩可达到优秀水平，即80分。

估算四年总课时。每周一到五上课时间（即课内学习时间）为6h/d，每周上课时间为 $6 \times 5 = 30h$ ，除去节假日，每年上课35周，四年总课时

$$4 \times 35 \times 30 = 4200$$

假设不学习者高考成绩为10分。总分100。求得

$$r_1 = 3 \times 10^{-4}$$

所以课内成绩与时间关系:

$$N_n(t) = \frac{100}{1 + 9e^{3 \times 10^{-4} t_1}} \quad (15)$$

6.1.3 课外学习

假设刚入大学时具备一定的独立生活能力，但较好的独立生活。取

$$t = 0, N_w = 50 \quad (16)$$

经过大一一年后，具备初步独立生活的能力。此时综合能力为60分。假设一般本科生周一到周五平均每天3小时的有效学习时间。周六周日每天8小时。则一年(35周)的有效课外学习时间为： $35 \times 31 = 1085$

所以:

$$t = 1085, N_w = 60 \quad (17)$$

将(16)和(17)两式代入(5)得:

$$r_2 = 1.6 \times 10^{-4}$$

所以

$$N_w(t) = 50e^{1.6 \times 10^{-4} t_2} \quad (18)$$

6.2 本科生问题求解

选定初始参数如下：

$$\begin{aligned}a_1 &= 60 \\a_2 &= 80 \\ \lambda &= 1 \\T_0 &= 23296\end{aligned}$$

LINGO是一种专门用于求解数学规划问题的软件包。由于LINGO执行速度很快、易于方便输入、求解和分析数学规划问题。因此在数学、科研和工业界得到广泛应用。LINGO主要用于解线性规划、非线性规划、二次规划和整数规划等问题。也可以用于一些非线性和线性方程组的求解以及代数方程求根等。本文采用LINGO软件进行科学计算。

程序代码如下：

```
data:
!比例;
lambda=1;
!最低要求;
a1=60;
a2=80;
!总时间;
T0=23296;
pi=3.14;
enddata

!目标函数;
max=k1*m1+k2*m2;

!约束条件;
k1=1/(1+lambda);
k2=lambda/(1+lambda);
100/(1+9*@exp(-0.0003*t1))>a1;
50*@exp(0.00016*t2)>a2;
m1=@sin(2*pi*(t1+t2)/T0);
m2=@sin(pi*t3/T0);
@bnd(0,t1,T0);
@bnd(0,t2,T0);
@bnd(0,t3,T0);
t1+t2+t3=T0;
end
```

求解结果:

Local optimal solution found at iteration: 166
Objective value: 0.5054891

Variable	Value	Reduced Cost
LAMBDA	1.000000	0.000000
A1	60.00000	0.000000
A2	80.00000	0.000000
T0	23296.00	0.000000
PI	3.140000	0.000000
K1	0.5000000	0.000000
M1	0.1098574E-01	0.000000
K2	0.5000000	0.000000
M2	0.9999924	0.000000
T1	8675.632	0.000000
T2	2937.523	0.000000
T3	11682.84	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.5054891	1.000000
2	0.000000	0.1098821E-01
3	0.000000	0.9999949
4	0.2691815E-07	-0.1868279E-01
5	0.7883368E-06	-0.1050907E-01
6	0.000000	0.5000000
7	0.000000	0.5000000
8	0.000000	-0.2628826E-06

课内、课外、娱乐时间分别为8676h, 2938h, 11683h时, 幸福指数最高为0.51。

$$m_1 = 0.01, m_2 = 0.99$$

7 模型评价和进一步扩展

本模型以普通本科生为对象, 建立了课、内外学习和娱乐时间分配的数学模型, 分析了三者对幸福指数的影响。

方程(5)所反映的模型对于短时间的的学习效果估算, 对于本科生这个特定的学习阶段, 不会出现 $t \rightarrow +\infty$ 的情况。所以, 此模型具有一定的利用价值。

lingo程序具有一定的通用性, 求解时将所需参数输出lingo即可。所需参数即程序中对应的变量名:

1. T_0 个人可自由支配的总时间。
2. λ 成就感与娱乐在一个人心中的相对重要程度的比值
3. a_1 课内成绩最低要求
4. a_2 满足所追求社会地位所需综合能力

另外,通过选出不同的参数 λ ,本模型还可以计算出对应的幸福指数,根据拟合出的曲线,可以适当进行心理调节,提高个人生活的幸福指数,对心理调节有一定的参考价值。

参考文献

- [1] 孙儒泳,生态学,高等教育出版社。