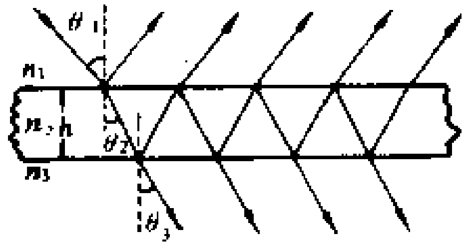
这里，在界面上反射时可能引起的位相突变已包含在振幅反射率中。每相邻反射光线的表观光程差为



(a)

$$\Delta L = 2n_2 h\cos\theta_2$$

位相差为

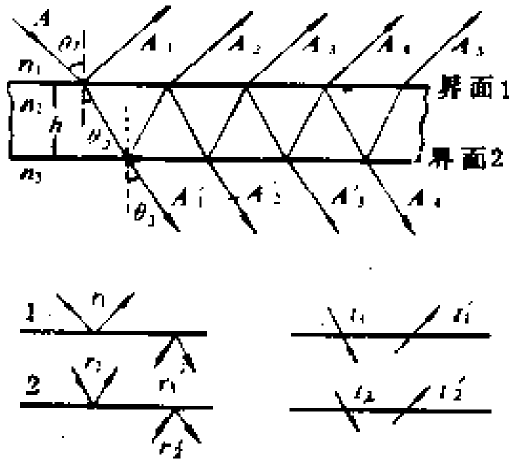
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{4\pi n_2 h\cos\theta_2}{\lambda}$$

反射光的总复振幅为

$$\widetilde{U}_R = \sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{U}_j$$

$$= Ar_1 + At_1t_1'r_2e^{i\delta} + At_1t_1'r_2^2r_1'e^{i2\delta} + At_1t_1'r_2^3r_1'^2e^{i3\delta} + \cdots$$

$$= Ar_1 + At_1t_1'r_2e^{i\delta} \times [1 + r_2r_1'e^{i\delta} + (r_2r_1')^2e^{i2\delta} + \cdots]$$



(b)

题5图

$$= Ar_1 + At_1t_1'r_2e^{i\delta}\frac{1}{1 - r_2r_1'e^{i\delta}}$$

由斯托克斯倒逆关系有

$$t_1t_1' = 1 - r_1^2,\quad r_1' = -r_1$$

所以

$$\widetilde{U}_R = Ar_1 + A(1 - r_1^2)r_2e^{i\delta}\frac{1}{1 + r_1r_2e^{i\delta}}$$

$$= \frac{A(r_1 + r_2e^{i\delta})}{1 + r_1r_2e^{i\delta}}$$

因此反射光强为

$$I_R=\widetilde{U}_R\widetilde{U}_R^*=\frac{A(r_1+r_2e^{i\delta})}{1+r_1r_2e^{i\delta}}\cdot\frac{A(r_1+r_2e^{-i\delta})}{1+r_1r_2e^{-i\delta}}$$

$$=\frac{A^2(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\delta)}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}$$

$$=\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}I_0$$

上式即为反射光强公式。

设入射光束的横截面积为S_1，透射光束的横截面积为S_3，则根据能量守恒，透射光强I_T与入射、反射光强的关系为

$$I_TS_3=S_1(I_0-I_R)$$

即

$$I_T=\frac{S_1}{S_3}(I_0-I_R)$$

由折射定律可知

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}$$

故

$$I_T=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}(I_0-I_R)$$

$$=I_0\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}\left(1-\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}\right)$$

$$=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}\cdot\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}I_0$$

上式即为透射光强公式。以上得到的I_R和I_T公式，对p, s分量均适用。当$\theta_1 \approx 0$时，由于$R = R_p = R_s$，则I_R，I_T分别为总的反射光强和透射光强。

（2）利用三角关系式

$$\cos\delta = \cos^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\delta}{2}$$

$$\sin^2\frac{\delta}{2} + \cos^2\frac{\delta}{2} = 1$$

把（1）中得到的反射光强公式改写成对称形式，即

$$I_R = \frac{(r_1+r_2)^2\cos^2\frac{\delta}{2} + (r_1-r_2)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{(1+r_1r_2)^2\cos^2\frac{\delta}{2} + (1-r_1r_2)^2\sin^2\frac{\delta}{2}} I_0$$

在$n_3 > n_2 > n_1$的条件下，各反射光线间没有因半波损而引起的附加相位差，r_1，r_2中不再包含位相因子。在正入射时由菲涅耳反射公式可得

$$r_1 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \quad r_2 = \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2}$$

代入反射光强公式得

$$I_R = \frac{(n_1 - n_3)^2\cos^2\frac{\delta}{2} + \left(\frac{n_1 n_3}{n_2} - n_2\right)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{(n_1 + n_3)^2\cos^2\frac{\delta}{2} + \left(\frac{n_1 n_3}{n_2} + n_2\right)^2\sin^2\frac{\delta}{2}} I_0$$

当$n_2 h = \lambda / 4$时，有

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2\lambda}{4} = \pi,$$

$$\cos\frac{\delta}{2} = 0, \quad \sin\frac{\delta}{2} = 1$$

得

$$I_R=\frac{\left(n_2-\dfrac{n_1 n_3}{n_2}\right)^2}{\left(n_2+\dfrac{n_1 n_3}{n_2}\right)^2}I_0$$

若再有$n_2=\sqrt{n_1 n_3}$，则

$$\frac{n_1 n_3}{n_2}=n_2$$

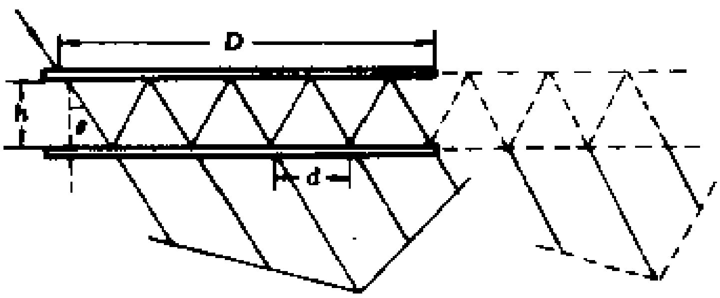
$$I_R=0$$

综上所述，当光学厚度$n_2 h=\lambda/4$，$3\lambda/4$，…且$n_3>n_2>n_1$（即低膜）的薄膜起增透作用。一般情况下增透膜的作用是增加透射、减少反射，但不能完全消反射。仅当低膜折射率满足

$$n_2=\sqrt{n_1 n_3}$$

时，才能使波长为λ的正入射光完全消除反射，这时入射光的能流全部透过薄膜，透射光强最大。

*6． 试分析在法－珀干涉仪中，由于将有限项多光束相干叠加当作无限项处理而引入的误差。



题6图

解 如图，在法－珀仪中，由于腔的横向尺寸有限，在光束倾角$\theta\neq0$时，透射多光束不可能有无限项。一般教科书中为简化起见都以无限项等比级数求和来计算透射场。不妨分析一下这种近似处理的误差有多大。

设透射多光束数目为N（有限），如对腔的横向宽度作无限延伸，则N项系列就等于两组无限系列之差，即透射场

$$\widetilde{U}_T=\sum_{j=1}^{N}\widetilde{U}_j=\sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{U}_j-\sum_{j=N+1}^{\infty}\widetilde{U}_j$$

其中长的无限项系列的首项为

$$\widetilde{U}_1=A_0tt'=(1-R)A_0$$

短的无限项系列的首项为

$$\widetilde{U}_{N+1}=A_0tt'r^{2N}e^{iN\delta}=(1-R)R^Ne^{iN\delta}A_0,$$

两组级数的等比均为

$$r^2e^{i\delta}=Re^{i\delta},\quad \delta=\frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos\theta$$

根据无限项等比级数求和公式得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{U}_j=\frac{1}{1-Re^{i\delta}}\widetilde{U}_1$$

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}\widetilde{U}_j=\frac{1}{1-Re^{i\delta}}\widetilde{U}_{N+1}$$

所以透射多光束（有限项等比级数）相干场为

$$\widetilde{U}_T=\widetilde{U}_1\frac{1}{1-Re^{i\delta}}\left(1-\frac{\widetilde{U}_{N+1}}{\widetilde{U}_1}\right)$$
$$=\widetilde{U}_T'(1-\widetilde{\Delta})$$

式中

$$\widetilde{U}_T'=\frac{1-R}{1-Re^{i\delta}}A_0$$

便是书中给出的理论结果，其误差为

$$\widetilde{\Delta}=\frac{\widetilde{U}_{N+1}}{\widetilde{U}_1}=R^Ne^{iN\delta}$$

透射相干强度为

$$I_T=\widetilde{U}_T\widetilde{U}_T^*=\widetilde{U}_T'\widetilde{U}_T'^*(1-\widetilde{\Delta})(1-\widetilde{\Delta}^*)$$
$$=\widetilde{I}_T'(1-\Delta_I)$$

式中

$$\widetilde{I}_T'=\frac{I_0}{1+\dfrac{4R\sin^2\dfrac{\delta}{2}}{(1-R)^2}}$$

便是书中给出的理论结果，其误差为

$$\Delta_I=\widetilde{\Delta}+\widetilde{\Delta}^*-\widetilde{\Delta}\widetilde{\Delta}^*$$
$$=R^N(2\cos N\delta-R^N)$$

下面给出具体数值，并作几点定量讨论。

（1）内反射两次的横向位移为

$$d=2h\operatorname{tg}\theta$$

有限项数目为

$$N\approx\frac{D}{d}=\frac{D}{2h\operatorname{tg}\theta}$$

选用本节第2题的数据，取

$$h=1\text{ cm},\ \theta=1°9'$$

此时有10个亮环。若设$D=2$ cm，则

$$N\approx50$$

（2）选$N=40$，$R=0.95$，有

$$|\widetilde{\Delta}|=R^N\approx0.13$$

干涉强度极大方位显然发生在$\delta=2k\pi$之处，此时

$$\Delta I=R^N(2-R^N)$$
$$\approx0.24$$

于是透射相干极大强度不再等于入射光强，而变为

$$(I_T)_M=I_0(1-\Delta I)=I_0(1-R^N)^2$$
$$\approx76\%I_0$$

（3）再考虑干涉极大（峰）的半值宽度是否有所变化。为此 令$\delta=2k\pi\pm\varepsilon/2$，满足半值要求

$$I_T = \frac{1}{2} I_0 (1 - R^N)^2$$

即

$$\frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\delta}{2}} \left[(1-R^N)^2 + 4R^N \sin^2\frac{N\delta}{2}\right] I_0$$

$$= \frac{1}{2} I_0 (1 - R^N)^2$$

经整理得

$$\frac{8R^N}{(1-R^N)^2}\sin^2\frac{N\varepsilon}{4} - \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varepsilon}{4} + 1 = 0$$

当$N \to \infty$时，就得到书中给出的半值宽度理论结果

$$\varepsilon_0 = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

$$\approx 0.1026$$

当$N = 40$时，采取数值解法得方程

$$1.354\sin^2\frac{N\varepsilon}{4} - 1520\sin^2\frac{\varepsilon}{4} + 1 = 0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \Delta_\varepsilon) \approx 0.1574$$

$$\Delta\varepsilon \approx +53\%$$

当$N = 30$时，得方程

$$2.784\sin^2\frac{N\varepsilon}{4} - 1520\sin^2\frac{\varepsilon}{4} + 1 = 0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \Delta_\varepsilon) \approx 0.1994$$

$$\Delta\varepsilon \approx +94\%$$

（4）综上所述，考虑到法-珀仪中横向尺寸的限制，透射场应当是有限项多光束的相干叠加，其结果与理论值比较，主极大方位角不变，但主极大强度值略有下降，条纹的半值宽度也有所增宽，具体数量级见下表。

$h=1$ cm　$D=2$ cm $R=0.95$　$\lambda=0.55\mu m$ $\theta\approx 1^{\circ}$			$\lvert\Delta\rvert=R^{N}$	$\Delta_{I}=R^{N}(2-R^{N})$	Δe
N	40	10环	0.13	0.24	0.53
	30	5 环	0.21	0.38	0.94

*7．　在分析法－珀腔的选频作用时，为什么不必考虑入射光相干长度的限制？

解　当入射光为非单色时，其波列长度确实是有限的，但是对于法－珀腔中发生的多光束相干来说，波列有限长度不起限制光程差的作用，这是因为多光束相干本身有着挑选波长压缩线宽的作用。我们不妨将入射的非单色光分解为一系列准单色之和。由于多光束相干结果，在透射一方只有若干准单色谱线被选取，获得相干极强，其它谱线的强度不参与透射一方的不相干叠加。这与杨氏干涉及薄膜干涉等双象干涉系统那里的情况是根本不同的。在那里没有选频作用，尽管我们仍然可以从数学上对非单色的入射光作频谱分解，但是全体谱线都参与干涉场的不相干叠加，由于条纹间距因波长而异，不相干叠加结果致使光程差超过某一数值的那些区域的条纹反衬度降为零，这与由相干长度的一次分析所得到的光程差限制的结论是完全一致的。对此可作以下粗略的说明。线宽为$\Delta\lambda$ 的谱线集合，形成一段有限长波列，表示为

$$A(x)=\int_{\lambda_0-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_0+\frac{\Delta\lambda}{2}} a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)d\lambda$$

$A(x)$的有限长度l_0与线宽$\Delta\lambda$的关系为

$$l_0=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

另一方面如用光程差ΔL为变量，描述双光束干涉场的强度叠加，则应表示为

$$I(\Delta L)=I_0+\int_{\lambda_0-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_0+\frac{\Delta\lambda}{2}} i\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L\right)d\lambda$$

根据$I(\Delta L)$与$A(x)$函数形式的相似性，可见干涉场中强度起伏的线度是有限的，且$I(\Delta L)$的有效长度ΔL_M与线宽$\Delta\lambda$的关系也应当为

$$\Delta L_M=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

显然

$$\Delta L_M=l_0$$

即由频谱分析得到的最大光程差数值与相干长度一致。

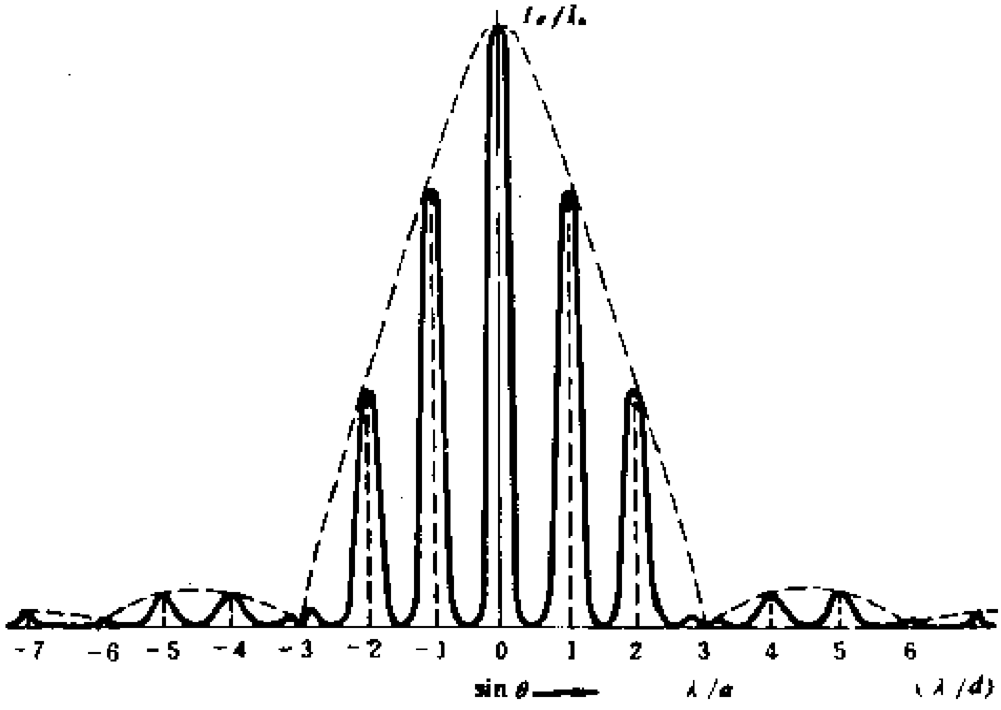
总之，在有选频效应的场合，相干长度对光程差的限制已经失去意义；只有在无选频效应的场合，相干长度对光程差的限制作用才真正地体现出来。

第四章　衍射光栅

§1　多缝夫琅和费衍射

1．　用坐标纸绘制$N = 2$，$d = 3a$的夫琅和费衍射强度分布曲线，横坐标取$\sin\theta$，至少画到第7级主极强，并计算第一个主极强与单缝主极强之比。

解　作强度分布曲线如图。作图时注意到，目前$N = 2$，故相邻主极强之间不出现次极强；$d = 3a$，故缺级在$k = \pm 3$，± 6，… 等级。



题1图

多缝衍射某级主极强与单缝零级（主极强）强度之比为

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

$$= N^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta_k}{\lambda} = \pi\frac{a}{d}\cdot\frac{d\sin\theta_k}{\lambda}$$

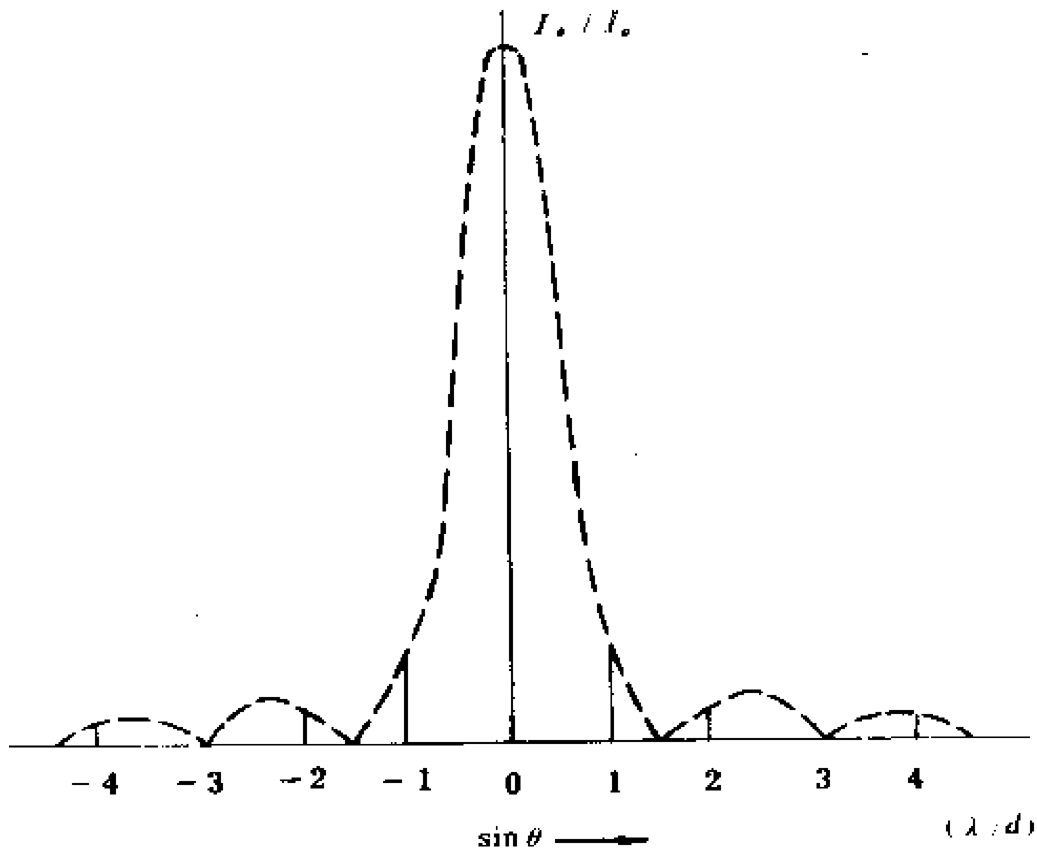
$$= k\pi\frac{a}{d}$$

当 $k=1$，$a/d=1/3$，$N=2$ 时，得

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\ \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi},\ \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \approx 0.684$$

于是

$$\frac{I(\theta_1)}{I_0} = 4\times 0.684 \approx 2.74$$



题 2 图

2． 用坐标纸绘制$N=6$，$d=1.5a$的夫琅和费衍射强度分布曲线，横坐标取$\sin\theta$，至少画到第4级主极强，并计算第4级主极强与单缝主极强之比。

解 作强度分布曲线如图。作图时注意到本题$N=6$，故相邻主极强之间出现4个次极强；$d=1.5a$，故缺级现象发生在$k=\pm3$，±6，…。

当$k=4$，$a/d=2/3$，$N=6$时，得

$$\alpha=k\pi\frac{a}{d}=\frac{8}{3}\pi,\quad \frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{3\sqrt{3}}{16\pi}$$

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\approx0.0107$$

于是第4级主极强与单缝主极强之比为

$$\frac{I(\theta_4)}{I_0}=N^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\approx0.39$$

3． 导出斜入射时多缝夫琅和费衍射强度分布公式：

$$I_\theta=I_0\left(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2$$

式中

$$\alpha'=\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0)$$

$$\beta'=\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0)$$

θ_0为入射线与光轴的夹角［见附图（a）］

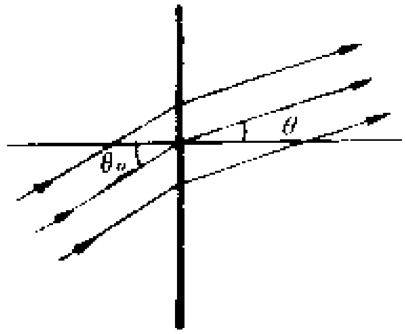
解 如附图（b），考虑衍射角为θ的一束衍射线，始于单缝上边缘A和下边缘B的两衍射线的光程差为

$$\Delta l=a(\sin\theta-\sin\theta_0)$$

位相差为

$$\Delta\varphi' = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} a(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

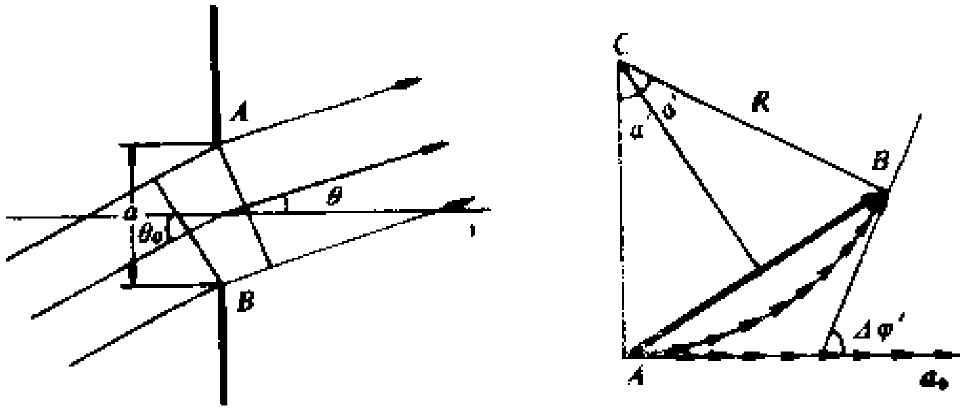


题 3 图（a）

由矢量图可得场点的合振幅为

$$a_\theta = 2R\sin\alpha' = 2\frac{\widehat{AB}}{2\alpha'}\sin\alpha'$$

$$= a_0\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}$$



题 3 图（b）

式中

存书版权 理解不宜

$$\alpha' = \frac{\Delta\varphi'}{2} = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

多缝夫琅和费衍射的总振幅为 N 个 a_θ 的相干叠加。如附图（c），相邻缝间对应点衍射线之间的光程差为

$$\Delta L = d(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

位相差为

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda}d(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

由矢量图可得总振幅为

$$A_\theta = 2R\sin N\beta' = 2\frac{a_\theta/2}{\sin\beta'}\sin N\beta'$$

$$= a_\theta\,\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}$$

式中

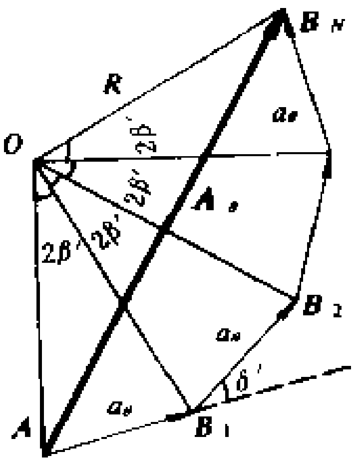
$$\beta' = \frac{\delta'}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

因此强度分布公式为

$$I_\theta = A_\theta^2 = a_\theta^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2$$

$$= a_0^2\left(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2$$

$$= I_0\left(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2$$



题 3 图（c）

以上分析表明，当衍射屏并非入射光波的等相面时，在作相干叠加运算时，既要考虑前场的光程差，又要考虑后场的光程差，这样才能正确决定到达同一场点的各次级扰动之间的位相差。以上结果还表明，当衍射角 θ 等于入射倾角 θ_0 时，单缝衍射因子 $(\sin\alpha'/\alpha')^2$ 与缝间干涉因子 $(\sin N\beta'/\sin\beta')^2$ 同时到达零级主极大，这正是几何光学象点方位，此时仍然不可能将单元衍

射零级与元间干涉零级分离。为使上述两个零级分离，必须采用反射闪耀光栅或透射闪耀光栅，闪耀光栅实质上是一种位相型光栅。如用黑白光栅这类振幅型光栅，不论怎样改变入射方式，总不可能分开两个零级。

*4． 写出斜入射时夫琅和费多缝衍射主极强位置公式、第k级主极强的半角宽度公式及缺级情况，并注意与正入射情况作比较。

解：斜入射时主极强位置公式应改为

$$d(\sin\theta_k - \sin\theta_0) = k\lambda$$

或

$$d\sin\theta_k = k\lambda + d\sin\theta_0,\ (k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

而k级主极强半角宽度公式为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$$

它形式上与正入射时一样，但对级数k相同的主极强来说，两者θ_k的取值是不同的。当k级主极强角方位与单元衍射k'级零点角方位相同时，则出现缺级情况，据此，令

$$k\frac{\lambda}{d} + \sin\theta_0 = k'\frac{\lambda}{a} + \sin\theta_0$$

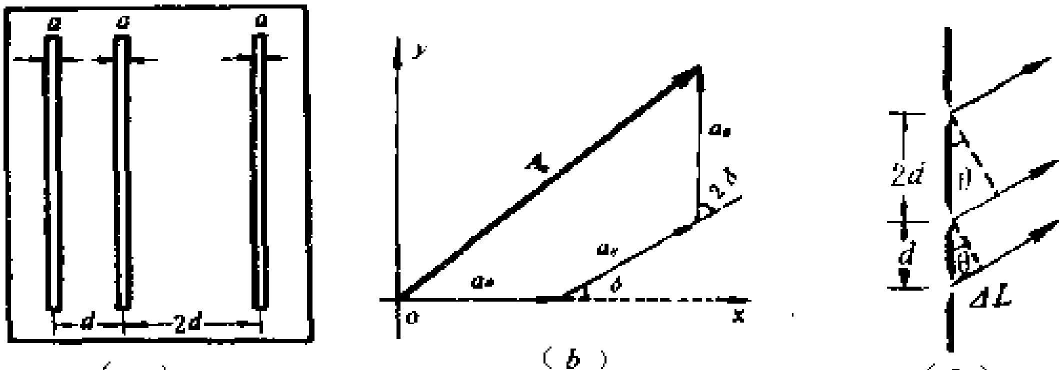
得

$$\frac{k}{k'} = \frac{d}{a}$$

此式说明光栅k级主极强落在单元衍射k'级零点位置，因而缺级。可见，斜入射时与正入射相比缺级情况相同。

*5． 有三条平行狭缝，宽度都是a，缝距分别为d和$2d$[见附图（a）]，证明正入射时其夫琅和费衍射强度分布公式为

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left[3 + 2(\cos 2\beta + \cos 4\beta \cdot \cos 6\beta)\right]$$



题 5 图

式中

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}、\ \beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

证 考虑三束衍射线之间的光程差[图(b)所示]，据此作矢量图(c)，a_θ为单缝衍射的振幅，A_θ为三缝衍射的总振幅。显然

$$A_{\theta x}=a_\theta(1+\cos\delta+\cos 3\delta)$$

$$A_{\theta y}=a_\theta(\sin\delta+\sin 3\delta)$$

所以三缝衍射强度分布为

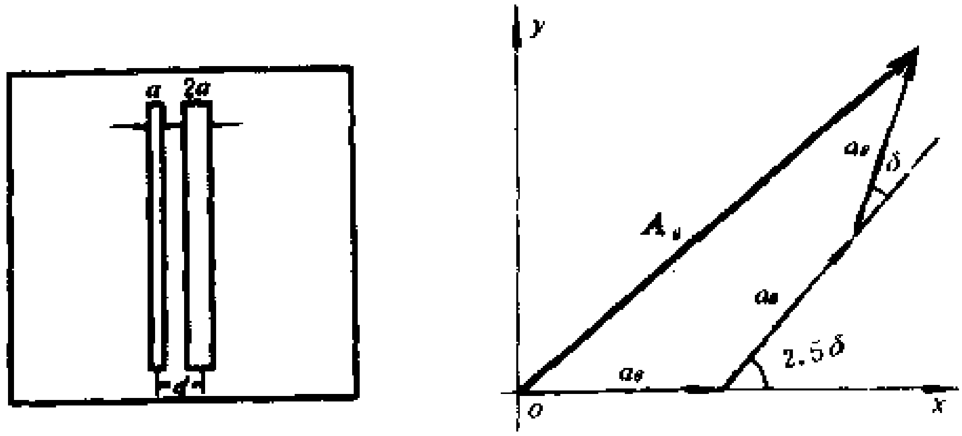
$$\begin{aligned}I_\theta&=A_{\theta x}^2+A_{\theta y}^2\\&=a_\theta^2[(1+\cos\delta+\cos 3\delta)^2+(\sin\delta+\sin 3\delta)^2]\\&=a_\theta^2[3+2(\cos\delta+\cos 2\delta+\cos 3\delta)]\\&=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2[3+2(\cos 2\beta+\cos 4\beta+\cos 6\beta)]\end{aligned}$$

式中

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda},\qquad \beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

6. 导出正入射时不等宽双缝的夫琅和费衍射强度分布公式，缝宽分别为a和$2a$，缝距$d=3a$[见附图(a)]。

解 把缝宽为$2a$的单缝看成缝宽为a，且间距也为a的双缝。这样本题的不等宽双缝即化成等宽不等距的三缝，缝宽均为a，缝



（a）　　　　　　　　　　　　（b）

题 6 图

距分别为2.5a和a，用附图（b）所示的矢量图即可求得合振幅A_θ，图中$\delta = 2\pi a\sin\theta/\lambda$。$A_\theta$的$x$，$y$分量分别为

$$A_{\theta x} = a_\theta\left(1 + \cos\frac{5}{2}\delta + \cos\frac{7}{2}\delta\right)$$

$$A_{\theta y} = a_\theta\left(\sin\frac{5}{2}\delta + \sin\frac{7}{2}\delta\right)$$

所以衍射强度分布为

$$I_\theta = A_{\theta x}^2 + A_{\theta y}^2$$

$$= a_\theta^2\left[\left(1 + \cos\frac{5}{2}\delta + \cos\frac{7}{2}\delta\right)^2 + \left(\sin\frac{5}{2}\delta + \sin\frac{7}{2}\delta\right)^2\right]$$

$$= a_\theta^2\left[3 + 2\left(\cos\delta + \cos\frac{5}{2}\delta + \cos\frac{7}{2}\delta\right)\right]$$

$$= I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left[3 + 2\left(\cos 2\beta + \cos 5\beta + \cos 7\beta\right)\right]$$

$$= I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\lambda}\right)^2\left[3 + 2\left(\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha\right)\right]$$

式中I_0为单缝的零级主极强，$\alpha = \pi a\sin\theta/\lambda$。

7．　有2N条平行狭缝，缝宽相同都是a，缝间不透明部分的宽度作周期性变化：a，3a，a，3a，…，（见附图），求

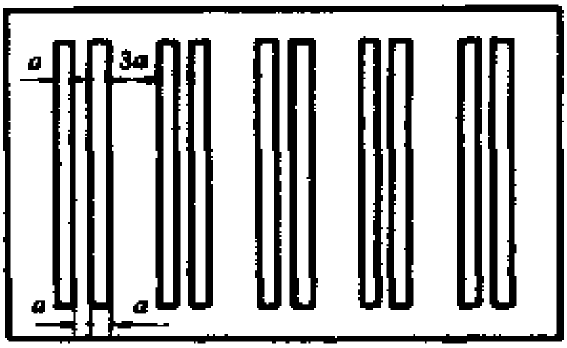
下列各种情形中正入射时的夫琅和费衍射强度分布：

（1）遮住偶数缝；

（2）遮住奇数缝；

（3）全开放。

解　（1）遮住偶数缝，这时衍射屏成为一块缝宽为a，缝距$d=6a$的N缝光栅，其夫琅和费衍射强度分布为



题7图

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

式中I_0为单缝零级主极强，$\alpha=\pi a\sin\theta/\lambda$，　$\beta=\pi d\sin\theta/\lambda=6\alpha$。

（2）遮住奇数缝时，与遮住偶数缝时相比，衍射屏内部各次波源到达场点的位相关系完全相同，因此衍射强度分布也完全相同。

（3）衍射屏是大量次波源的集合。全开放时，这种周期性结构的衍射屏上的次波源，有两种编组方式，相应地有两种处理衍射强度分布的运算方法。

方法一：把每两条缝宽为a，间距$d'=2a$的双缝看作一个衍射单元，整个衍射屏由间距$d=6a$的N个这样的衍射单元组成。则单元衍射因子为

$$u(\theta)=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin 2\beta'}{\sin\beta'}=2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta'$$

$$=2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos 2\alpha$$

式中

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}.$$

$$\beta' = \frac{\pi d' \sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi\, 2a \sin\theta}{\lambda} = 2\alpha$$

N 元干涉因子为

$$N(\theta) = \frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin N\, 6\alpha}{\sin 6\alpha}$$

式中

$$\beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = 6\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = 6\alpha$$

所以强度分布函数为

$$I(\theta) = I_0 u^2(\theta) N^2(\theta)$$

$$= 4I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos 2\alpha\right)^2 \left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2$$

式中 I_0 为单缝衍射零级主极强。

方法二：分别把 N 条奇数缝与 N 条偶数缝看作二个相同的衍射单元，于是整个衍射屏就只是由间距 $d=2a$ 的两个衍射单元组成。则由本题（1）或（2）的结果知单元衍射因子为

$$u(\theta) = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

$$\beta' = \frac{\pi d' \sin\theta}{\lambda} = 6\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = 6\alpha$$

元间干涉因子为

$$N(\theta) = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha$$

式中

$$\beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = 2\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = 2\alpha$$

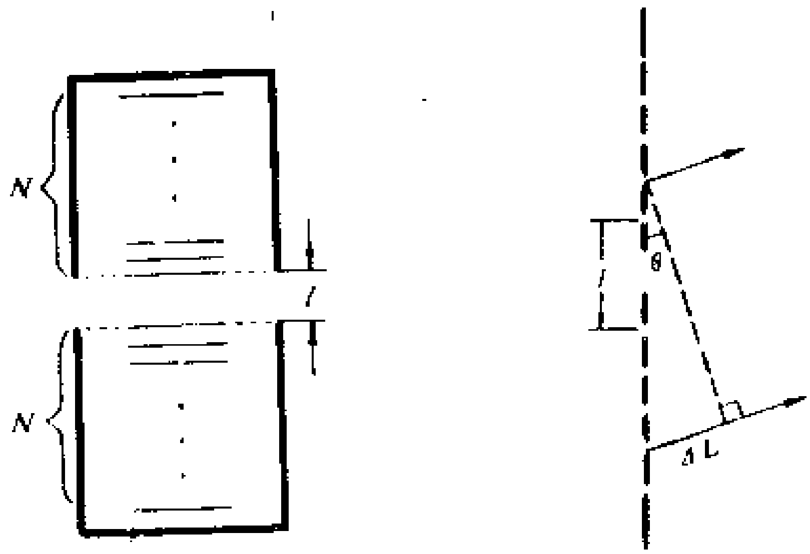
所以强度分布为

$$I(\theta) = I_0 u^2(\theta) N^2(\theta)$$

$$= 4 I_0 (\cos 2\alpha)^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2$$

式中 I_0 为单缝衍射零级主极强。

***8．** 有两块完全相同的光栅，缝数、缝宽和光栅常数分别为 N、a 和 d，现将它们在同一平面上平行放置，对接后两块光栅间相邻两缝的间距为 l［参见图（a）］。当（1）$l = d$，（2）$l = 1.5d$，（3）$l = 2d$ 时，分别讨论原来单一光栅 k 级主极强现在将发生什么变化？设平行光正入射照明光栅。



（a）　　　　（b）

题 8 图

解　两块光栅对接后，整个衍射屏由两个相同的衍射单元组成，原先的每块单一光栅构成一个衍射单元。在衍射角为 θ 的方向，元间衍射线的光程差［如图（b）所示］为

$$\Delta L = [(N-1)d + l]\sin\theta$$

对原来单一光栅的 k 级主极强来说，有

$$d\sin\theta = k\lambda,\quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

因此合成强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L$$

$$= 2I_k\left(1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L\right).$$

式中I_k为单一光栅k级主极强的强度。

（1）当$l = d$时，二者对接后相当于一块$2N$缝、缝宽为a、光栅常数为d的光栅。显然，原先的k级主极强，目前仍为k级主极强，且

$$I = 4I_k$$

$$\Delta\theta' = \frac{\lambda}{2Nd\cos\theta_k} = \frac{1}{2}\Delta\theta_k$$

即强度为原先的4倍，半角宽度为原先的一半。

（2）当$l = 1.5d$时，则

$$\Delta L = \left[(N-1)d + \frac{3}{2}d\right]\sin\theta$$

$$= \left(N+\frac{1}{2}\right)d\sin\theta = \left(N+\frac{1}{2}\right)k\lambda$$

$$= Nk\lambda + \frac{1}{2}k\lambda$$

有效光程差为

$$\Delta L' = \frac{1}{2}k\lambda$$

因此

当$k = \pm 1,\ \pm 3,\ \cdots$时，$I = 0$，

即原先单一光栅的奇数级主极强成为缺级。

当$k = 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \cdots$时，$I = 4I_k$，

即原先单一光栅的偶数级主极强，目前仍为主极强，且强度增加

到4倍，其半角宽度可以由微分近似运算得到。因主极强位置满足

$$\sin\theta_k=\frac{(N+\frac{1}{2})k}{(N+\frac{1}{2})d}\lambda \qquad (k\text{为偶数})$$

相邻暗线位置满足

$$\sin(\theta_k+\Delta\theta)=\frac{(N+\frac{1}{2})k+\frac{1}{2}}{(N+\frac{1}{2})d}\lambda$$

取微分近似有

$$\sin(\theta_k+\Delta\theta)-\sin\theta_k\approx\cos\theta_k\Delta\theta$$

而

$$\sin(\theta_k+\Delta\theta)-\sin\theta_k=\frac{\lambda}{2(N+\frac{1}{2})d}$$

故

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{2(N+\frac{1}{2})d\cos\theta_k}<\frac{1}{2}\Delta\theta_k$$

即半角宽度小于原先单一光栅的一半。

（3）当$l=2d$时，则

$$\Delta L=[(N-1)d+2d]\sin\theta=(N+1)d\sin\theta$$
$$=(N+1)k\lambda$$

故 $$I=4I_k$$

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{2(N+1)d\cos\theta_k}<\frac{1}{2}\Delta\theta_k$$

即原先单一光栅的k级主极强目前仍为主极强，强度增加到4倍，其半角宽度小于单一光栅的一半，且比$l=1.5d$时进一步缩小。

本题$l=2d$的情况相当于在制作一块（$2N+1$）缝的光栅时当中漏刻了一条缝，讨论结果表明这在使用中并不造成严重的后果，与一块完整的光栅性能基本相近。但如果$l=1.5d$，即仅仅在当中的两条缝之间破坏了空间周期性，尽管其余绝大多数（$2N$条）缝的制作周期仍然严格保证，但这在使用中带来的后

果将是严重的。可见，刻划一块精密母光栅的要求是很高的，不但要求刻划机的元件非常精密，而且还要求在刻划过程中防止震动和温度变化，以严格保证光栅的空间周期性

§2　光栅光谱仪

1．　波长为6500 Å的红光谱线，经观测发现它是双线，如果在 9×10^5 条刻线光栅的第3级光谱中刚好能分辨此双线，求其波长差。

解　由光栅的色分辨本领公式

$$R=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=kN$$

得双线间隔

$$\delta\lambda=\frac{\lambda}{kN}=2.41\times10^{-3}\ \text{Å}$$

2．　若要50条／毫米的光栅在第2级光谱中能分辨钠双线 λ_1（5890 Å）和 λ_2（5896 Å），光栅宽度应选多少？

解　由光栅色分辨本领公式可得光栅单元总数应当满足

$$N=\frac{\lambda}{k\delta\lambda}=\frac{5893}{2\times6}=491\text{条}$$

光栅尺寸

$$D=Nd=491\times\frac{1}{50}=9.82\ \text{mm}$$

即应选宽度大于 10 mm 的光栅

3．　绿光5000 Å 正入射在光栅常数为2.5×10^{-4} cm，宽度为 3 cm的光栅上，聚光镜的焦距为50 cm。

（1）求第1级光谱的线色散；

（2）求第1级光谱中能分辨的最小波长差；

（3）该光栅最多能看到第几级光谱？

解　（1）根据光栅的线色散本领公式

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta \lambda} = \frac{k}{d\cos\theta_k} f$$

得光栅一级光谱在5000 Å附近的线色散为

$$D_l = \frac{1}{d\sqrt{1-\sin^2\theta_1}} f = \frac{1}{d\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2}} f$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d^2-\lambda^2}} f \approx 2\times10^{-2}\ \mathrm{mm/Å}$$

（2）此光栅一级光谱在5000 Å邻近可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{N} = \frac{\lambda d}{D} \approx 0.42\ \text{Å}$$

（3）根据光栅公式 $d\sin\theta_k = k\lambda$，并考虑到衍射角取值范围为 $0 \leqslant |\theta_k| \leqslant \pi/2$，可见最大级别 k_M 应当满足

$$k_M < \frac{d}{\lambda} = \frac{2.5\times10^{-4}}{5\times10^{-5}} = 5$$

取　　$k_M = 4$

即此光栅最多能看到 ± 4 序光谱。

4.　一束白光正入射在600条／毫米的光栅上，第1级可见光谱末端与第2级光谱始端之间的角间隔有多少？

解　白光波长范围为 $\lambda_m = 4000$ Å — $\lambda_M = 7600$ Å，由光栅公式 $d\sin\theta_k = k\lambda$ 得白光一级光谱末端的衍射角为

$$\theta_{1M} = \sin^{-1}\frac{\lambda_M}{d} = \sin^{-1}(7600\times10^{-7}\times600)$$

$$= \sin^{-1}(0.456) = 27°\ 8'$$

白光二级光谱始端的衍射角为

$$\theta_{2m} = \sin^{-1}\frac{2\lambda_m}{d} = \sin^{-1}(2\times4000\times10^{-7}\times600)$$

$$= \sin^{-1}(0.48) = 28°\ 41'$$

两者角间隔为

$$\delta_\theta = \theta_{2m} - \theta_{1M} = 1^\circ 33'$$

*5． 国产31 WI型一米平面光栅摄谱仪的技术数据表中列有：

物镜焦距	1050毫米
光栅刻划面积	60毫米×40毫米
闪耀波长	3650埃（1级）
刻线	1200条/毫米
色散	8埃/毫米
理论分辨率	72000（1级）

试根据以上数据来计算一下：

（1）该摄谱仪能分辨的谱线间隔的最小值为多少？

（2）该摄谱仪的角色散本领为多少（以埃/分为单位）？

（3）光栅的闪耀角为多大？闪耀方向与光栅平面的法线方向成多大角度？

解 （1）从产品说明书中已知该光栅的色分辨率R值，所以该光栅一级光谱在闪耀波长3650 Å邻近，能分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{3650}{72000}\text{Å} \approx 0.05\ \text{Å}$$

（2）根据说明书中给出的物镜焦距f和线色散D_l值，可以算出角色散

$$D_\theta = \frac{D_l}{f}$$

考虑到实际场合常常习惯于采用$1/D_l$（Å/mm），$1/D_\theta$（Å/分）说明性能，故将上式换算为

$$\frac{1}{D_\theta} = \frac{1}{D_l}f = 8 \times 1050\ \text{Å/rad}$$

$$\approx 2.44\ \text{Å/分}$$

（3）一级闪耀波长 λ_b 满足

$$2d\sin\theta_b = \lambda_b$$

由此得耀角（即压槽劈角）为

$$\theta_b = \sin^{-1}\frac{\lambda_b}{2d} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\times 1200\times 3650\times 10^{-7}\right)$$

$$\approx 12^\circ 39'$$

此角度值也正是闪耀方向与光栅平面（宏观）法线方向之间的夹角，当照明光束从槽面（微观）法线方向入射时，便是如此。

6. 底边长度为 6 cm的棱镜，在光波长为0.6 μm附近能分辨的最小波长间隔为多少？以棱镜材料的色散率 $dn/d\lambda$ 值为 $0.4\times 10^{-5}/\text{Å}$ 来估算。

解 根据棱镜的色分辨本领公式

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = b\frac{dn}{d\lambda}$$

得

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{\lambda}{b(dn/d\lambda)} = \frac{0.6\times 10^4}{(6\times 10^8)\times(0.4\times 10^{-5})}\ \text{Å}$$

$$\approx 2.5\text{Å}$$

*7. 根据以下数据比较光栅、棱镜、法－珀腔三者的分光性能：（1）分辨本领；（2）色散本领；（3）自由光谱范围。

光栅宽度 $D = 5$ cm，刻线密度 $1/d = 600$ 条/mm；

棱镜底边 $b = 5$ cm，顶角 $\alpha = 60^\circ$，折射率 $n = 1.5$，色散率 $dn/d\lambda = 0.6\times 10^{-5}/\text{Å}$；

法－珀腔长 $h = 5$ cm，反射率 $R = 0.99$。

解 （1）光栅一级光谱的色分辨本领为

$$R_1 = N = 3\times 10^4$$

棱镜的色分辨本领为

$$R_2 = b\frac{dn}{d\lambda} = 3\times 10^3$$

法-珀腔的色分辨本领为

$$R_3 = \pi k \frac{\sqrt{R}}{1-R} = \frac{2\pi nh\cos\theta_k}{\lambda} \quad \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

取λ = 5000 Å，$\cos\theta_k \approx 1$，$n = 1.0$，得

$$R_3 \approx 6 \times 10^5$$

可见 $R_3 > R_1 > R_2$。

（2） 光栅一级光谱在5000 Å邻近的角色散本领为

$$D_1 = \frac{1}{d\cos\theta_1} = \frac{1}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} \approx 0.22'/\text{Å}$$

棱镜的角色散本领为

$$D_2 = \frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1 - n^2\sin^2(\alpha/2)}} \quad \frac{dn}{d\lambda} \approx 0.031'/\text{Å}$$

法-珀腔的角色散本领为

$$D_3 = \frac{k}{2nh\sin\theta_k} = \frac{2nh\cos\theta_k}{2nh\sin\theta_k} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda\operatorname{tg}\theta_k}$$

取 $\lambda = 5000$ Å，$\theta_k = 10°$，算出

$$D_3 \approx 3.9'/\text{Å}$$

可见 $D_3 > D_1 > D_2$。

（3） 光栅可测波长的最大值 λ_M 被光栅常数 d 所限制

$$\lambda_M < d = \frac{1}{600}\text{mm} = 17000\,\text{Å}$$

一级光谱上限波长 λ_M 与二级光谱下限波长 λ_M 满足

$$\lambda_M = 2\lambda_m$$

所以光栅一级光谱的自由光谱范围（不至于与二级光谱发生重叠）应当为

$$\Delta\lambda_1 = \lambda_M - \lambda_m = \frac{1}{2}\lambda_M$$

如果取$\lambda_M = 17000\,\mathring{A}$，则自由光谱范围为$8500\,\mathring{A}$—$17000\,\mathring{A}$。如果取$\lambda_M = 8000\,\mathring{A}$，则自由光谱范围为$4000\,\mathring{A}$—$8000\,\mathring{A}$，恰巧覆盖整个可见光波段

对法－珀腔来说，中心附近区域波长为λ的k级与波长为$(\lambda+\Delta\lambda)$的$(k-1)$级发生重叠的条件为

$$k\lambda=(k-1)(\lambda+\Delta\lambda)$$

所以其自由光谱范围为

$$\Delta\lambda_f=\frac{\lambda}{(k-1)}\approx\frac{\lambda}{k}\approx\frac{\lambda^2}{2nh}$$

如果取$\lambda=5500\,\mathring{A}$，$n=1.0$ 则

$$\Delta\lambda_f\approx0.03\,\mathring{A}$$

由此可见，法－珀仪是一种长程干涉仪，有很高的色分辨本领，但是其量程很窄，故适用于高分辨光谱技术。

对棱镜来说，由于只有一套光谱，故无光谱级（序）之间的重叠问题，自由光谱范围不受限制。当然，考虑到棱镜材料的吸收，对于从红外到可见再到紫外等不同波段，应分别选用不同材料的棱镜。棱镜光谱不分级别，使入射光能充分集中在一套谱线上，可提高光谱分析的灵敏度，这是棱镜光谱仪的一大优点。

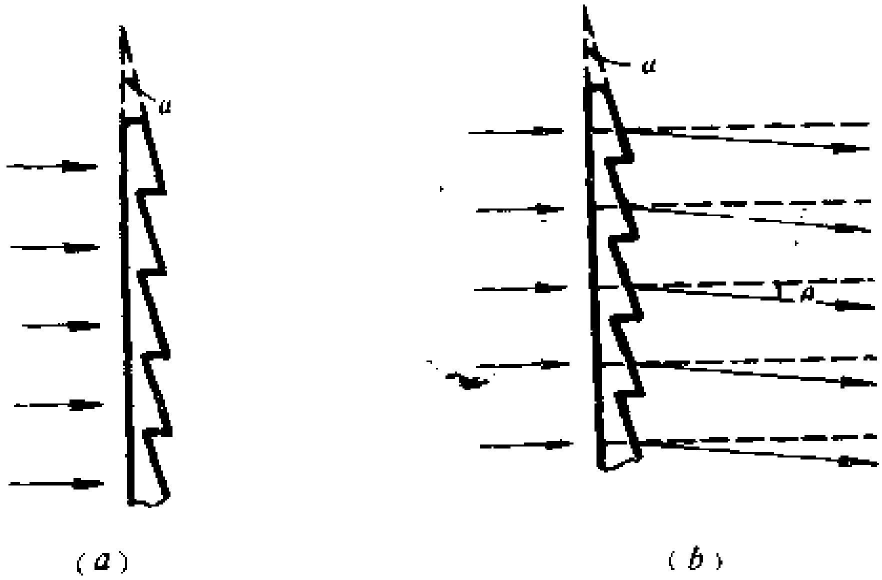
§3　三维光栅——X射线在晶体上的衍射

*1．　如图（a），在透明膜上压上一系列平行等距的劈形纹路，制成一块位相型透射式闪耀光栅，透明膜折射率为1.5，劈角为0.1rad，纹路密度为100条/mm，求：

（1）该光栅单元衍射零级的方位角（以入射方向为准），并在图上标出；

（2）该光栅的一级闪耀波长为多少？

解　（1）单元衍射的零级方向应是几何光学的传播方向



题1图

在小棱镜劈角α很小的条件下，出射光束的偏转角［如图(b)所示］为

$$\theta \approx (n-1)\alpha = 0.5\times 0.1\ \mathrm{rad}$$
$$= 0.05\ \mathrm{rad}$$

（2）在单元零级方位，两相邻单元之间的光程差为

$$\Delta L = d\sin\theta$$

使其满足一级主极强的波长条件为

$$d\sin\theta = \lambda_1$$

由此便可算出一级闪耀波长为

$$\lambda_{1b} = \frac{1}{100}\times 0.05\ \mathrm{mm} = 5000\ \mathrm{\mathring{A}}$$

2. 如图所示的光栅模型，它可视为等间距排列的一维相干点源，试就以下两种情况分析xz平面内夫琅和费衍射主极大条件：

（1）入射波长连续；

（2）入射波长单色，且满足$d = 10\lambda$。

解 考察衍射角为θ的一束平行次波线的相干叠加．主极大条件取决于相邻光程差ΔL是否可能等于波长的整数倍，即

$$\Delta L = d\sin\theta$$

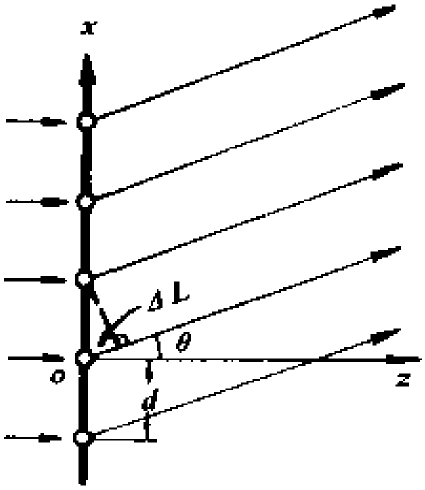
是否满足

$$d\sin\theta = k\lambda,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

由此可见

（1）$\theta = 0$ 方向为所有波长的零级主极大方向。

（2）考虑到衍射角的取值范围为 $0 \sim \pi/2$，能获得一级主极大的波长范围为



题 2 图

$$0 < \lambda_1 < d$$

能获得二级主极大的波长范围为

$$0 < \lambda_2 < \frac{d}{2}$$

能获得三级主极大的波长范围为

$$0 < \lambda_3 < \frac{d}{3}$$

依此类推可得，在入射波长连续的条件下，能产生非零级主极大的波长上限为

$$\lambda_M = d$$

大于λ_M的入射光经一维光栅衍射将产生衰逝波。

（3）当入射光波长 $\lambda = 1/10\,d$ 时，代入

$$d\sin\theta = k\lambda$$

得

$$\sin\theta = \frac{1}{10}k$$

考虑到 $\sin\theta \leq 1$，于是有

$$k \leq 10$$

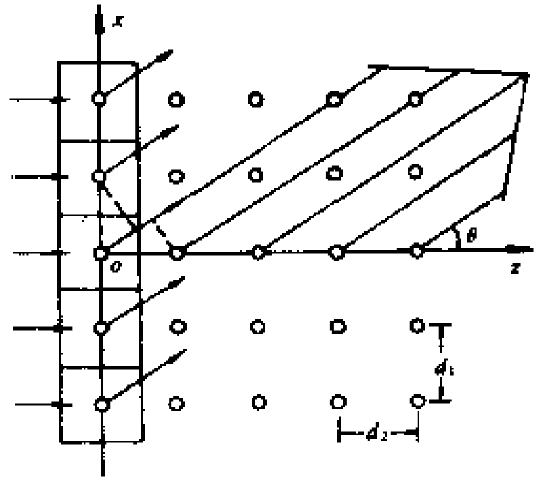
即这种情况下所获得主极大的最高级数为10。

*3． 如图（a）所示光栅模型，它可视为二维列阵的相干点源，试就以下两种情况，分析 xz 平面内的夫琅和费衍射主极大条件：

（1）入射波长连续；

（2）入射波长单色，且 $d_1 = d_2 = d = 10\lambda$。

解 首先说明，这种光栅模型的实际背景是二维晶片，模型中的相干点源相当于处在原胞（图中以小方格表示）中心的实物粒子，如原子、离子、分子等散射源。应该说原胞中的散射源连同周围的次波源，共同激发了单元衍射波，其具体形态当然



题3图（a）

是相当复杂的。经第一排原胞作用后而产生的衍射波，先波及第二排原胞，再波及第三排原胞……使整个二维晶片等效于二维列阵的相干点源。虽然沿入射方向自左向右，经一排排原胞的作用，波前变换是复杂的，但是整个衍射场主极大的方位是既满足排内点间干涉主极大条件，又满足排间干涉主极大条件的那些方位，这与每排波前的具体形态是无关的。考虑到沿平行 x 轴方向排内各点等位相，沿 z 轴方向相邻两排位相依次落后 $\Delta\varphi=(2\pi/\lambda)d_2$，故上述两项主极大条件应当写成

$$d_1\sin\theta = k_1\lambda,\quad k_1 = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \quad (a)$$

$$d_2 - d_2\cos\theta = k_2\lambda,\quad k_2 = 0,\ +1,\ +2,\ \cdots \quad (b)$$

由此可见

（1）$\theta = 0$ 的方向，能同时满足方程（a）、（b）。此时 $k_1 = k_2 = 0$，即对于所有波长来说，其零级主极大方向正是入射光直接透射的方向。

（2）根据方程（a），能产生非零级主极大的波长范围上限为

$$\lambda_{1M}=d_1$$

根据方程（b），能产生非零级主极大的波长范围上限为

$$\lambda_{2M}=d_2$$

所以，当入射光为连续谱时，能同时满足（a），（b）两方程，获得二维衍射非零级主极大的波长范围也应当是受限制的，其上限、λ_M 值应取以上 λ_{1M}，λ_{2M} 两者之中的短者。

（3）当入射光为单色，且 $d_1=d_2=10\lambda$ 时，满足方程（a）的 k_1 取值是受限制的，即

$$|k_1|\leq 10$$

且衍射角 θ 的取值是分立的，满足

$$\sin\theta=\frac{k_1}{10},\quad k_1=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\pm10$$

将此值代入方程（b）经第二次筛选，只有那些能保证 k_2 取值为整数的解才被保留下来，最终成为二维衍射主极大的方位。为此把（a）式代入（b）式解出

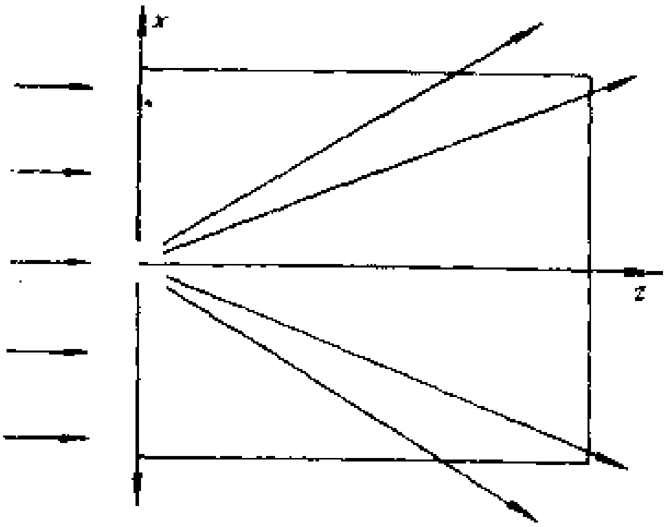
$$\begin{aligned}k_2&=\frac{d-d\cos\theta}{\lambda}\\&=\frac{d}{\lambda}-\frac{d}{\lambda}\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{d}{\lambda}-\sqrt{\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2-k_1^2}\\&=10-\sqrt{100-k_1^2}\end{aligned}$$

结果列表如下：

k_1	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10
$\sqrt{100-k_1^2}$	10	$\sqrt{99}$	$\sqrt{96}$	$\sqrt{91}$	$\sqrt{84}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{51}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{19}$	0
k_2	0	非整数	非整数	非整数	非整数	非整数	2	非整数	4	非整数	10

由此可见，在 $d=10\lambda$ 条件下，这片光栅（二维点阵）在 xz 平

面内只出现七个夫琅和费衍射斑[参见图(b)]。如果d/λ是其它比值，甚至是非整数值，则保留下来的夫琅和费衍射斑的数目也将不同，甚至于一个非零级衍射斑也无法出现。我们不妨用一对(k_1，k_2)值来标定这七个衍射斑，连同相应的衍射角值，列于下表：



题3图(b)

(k_1, k_2)	(0, 0)	(6, 2)	(−6, 2)	(8, 4)	(−8, 4)	(10, 10)	(−10, 10)
θ	0°	36°52′	−36°52′	53°8′	−53°8′	90°	−90°

*4. 在上题二维点阵光栅中，点阵常数为d，设入射波长连续，并选取衍射角从90°往下的任意三个值，试分析出现衍射主极大的波长选择性。

解 二维点阵衍射主极大条件为

$$\begin{cases} d\sin\theta = k_1\lambda, & k_1 = 0, \pm1, \pm2, \cdots \\ d - d\cos\theta = k_2\lambda, & k_2 = 0, \pm1, \pm2, \cdots \end{cases}$$

由此解出

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

分别选取$\theta = 80°$、70°、60°三个值，算出

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1-\cos 80°}{\sin 80°} \approx 0.84 = \frac{21}{25}$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1-\cos 70°}{\sin 70°} \approx 0.70 = \frac{7}{10}$$

$$\frac{k_2}{k_1}=\frac{1-\cos60^\circ}{\sin60^\circ}\approx0.58=\frac{29}{50}$$

根据主极大条件，对于 $\theta=80^\circ$，选 $k_1=25$，$k_2=21$，选出波长

$$\lambda_1=\frac{\sin80^\circ}{25}d\approx0.039d$$

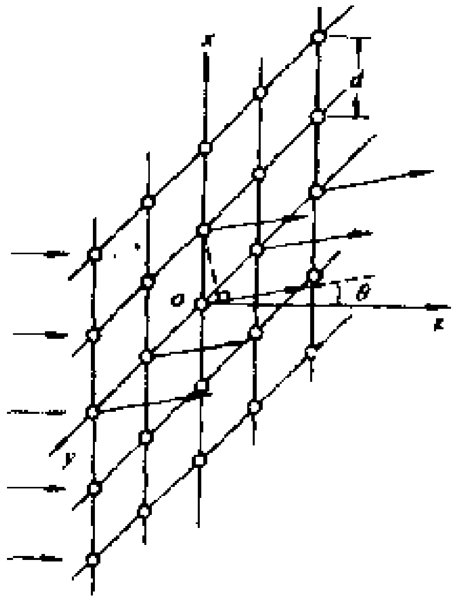
对于 $\theta=70^\circ$，选 $k_1=10$，$k_2=7$，选出波长

$$\lambda_2=\frac{\sin70^\circ}{10}d\approx0.094d$$

对于 $\theta=60^\circ$，选 $k_1=50$，$k_2=29$，选出波长

$$\lambda_3=\frac{\sin60^\circ}{50}\approx0.017d$$

综合题3及题4的分析及计算结果，我们再一次看到，对于周期性结构(光栅)的衍射，当单色光入射时具有角度选择性——只有在某些特定的方位出现衍射主极大；当连续谱入射时具有波长选择性——在任意角方位只有某些特定的波长出现衍射主极大。而随着周期性结构维数的增加，从一维到二维到三维，这两种选择性将更为苛刻。



题5图

5. 如果衍射单元是在 xy 平面内的二维点阵(如图)，试分析平行于 xz 平面方向的夫琅和费衍射的主极大条件。

解 沿平行 x 轴方向的每排内部点间干涉的主极大条件为

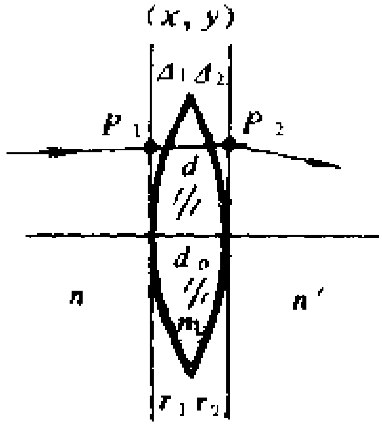
$$d\sin\theta=k\lambda,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

而沿 y 轴方向排间干涉是等光程的。因此，凡是满足上述条件的主极大方向，在排间干涉中都将保留下来，故在平行 xz 平面内衍射时，此情况与题2一维点阵相似。

第五章　傅里叶变换光学

§1　衍射屏及其屏函数

*1． 设薄透镜由折射率为n_L的材料组成，物方和象方的折射率分别是n和n'，导出其位相变换函数（用透镜的焦距表示出来）。



题1图

解　如图，在透镜前后各取一个平面与顶点相切，且与光轴垂直，入射点为P_1（x，y），出射点为P_2（x，y）。在薄透镜傍轴条件下，可近似地认为光线从等高处变向出射。位相差为

$$\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)\approx k_0(n\Delta_1+n_L d+n'\Delta_2)$$

忽略透镜对光能的损耗，其位相变换函数简化为

$$\tilde{t}_P(x,y)\approx \exp i(\varphi_2-\varphi_1)$$

考虑到

$$d=d_0-(\Delta_1+\Delta_2)$$

$$\Delta_1\approx\frac{x^2+y^2}{2r_1},\quad \Delta_2\approx-\frac{x^2+y^2}{2r_2}$$

改写位相差为

$$\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)$$

$$\approx k_0\left[\frac{n-n_L}{2r_1}(x^2+y^2)-\frac{n'-n_L}{2r_2}(x^2+y^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}k_0\left(\frac{n-n_L}{2r_1}-\frac{n'-n_L}{2r_2}\right)(x^2+y^2)$$

上式中略写了与 x，y 无关的项 $k_0 d_H$。真空中的波矢值 k_0 与象方波矢值 k' 之间的关系为

$$k' = n' k_0$$

于是

$$\tilde{t}_P(x, y) \approx \exp\left[-ik' \frac{(x^2+y^2)}{2F'}\right]$$

式中

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{n'}\left(\frac{n_L - n}{r_1} - \frac{n_L - n'}{r_2}\right)$$

不难看出 F' 就是象方焦距。因为当平行光正入射时，入射波前为

$$\tilde{U}_1(x, y) = A_1$$

出射波前为

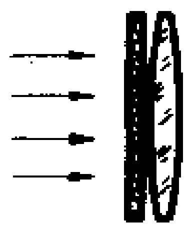
$$\tilde{U}_2(x, y) = \tilde{t}_P \tilde{U}_1 = A_1 \exp\left(-ik' \frac{x^2+y^2}{2F'}\right)$$

这正是中心在轴上的球面波波前函数的标准形式。如 $F' > 0$，$\tilde{U}_2$ 是会聚的球面波；如 $F' < 0$，$\tilde{U}_2$ 是发散的球面波。

*2． 如附图，将一正弦光栅与一薄透镜叠放在一起，试写出此组合系统的屏函数。

解 由两个屏密接的组合系统的屏函数应是各单个屏函数的乘积，即

$$\tilde{t} = \tilde{t}_1 \tilde{t}_2$$



题 2 图

目前 $\tilde{t}_1$ 是正弦光栅的屏函数

$$\tilde{t}_1 = t_0 + t_1 \cos 2\pi f x$$

$\tilde{t}_2$ 是薄透镜的屏函数

$$\tilde{t}_2 = \exp\left(-ik \frac{x^2+y^2}{2F}\right)$$

于是

$$\tilde{T} = (t_0 + t_1 \cos 2\pi f x)\exp\left(-ik\frac{x_2 + y_2}{2F}\right)$$

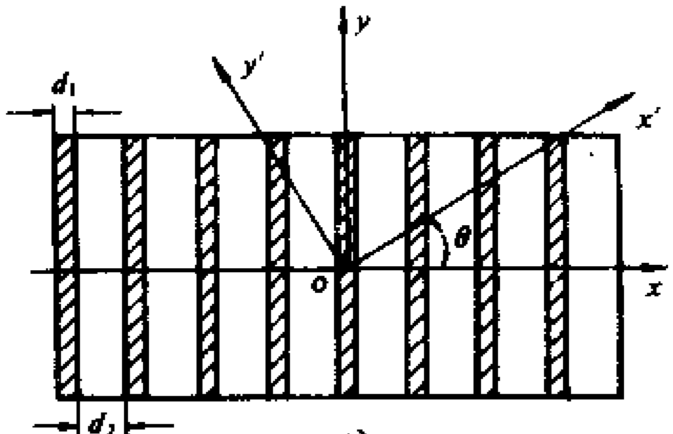
$$= t_0 \exp\left(-ik\frac{x^2 + y^2}{2F}\right) + \frac{1}{2}t_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2F} - f\lambda x\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}t_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2F} + f\lambda x\right)\right]$$

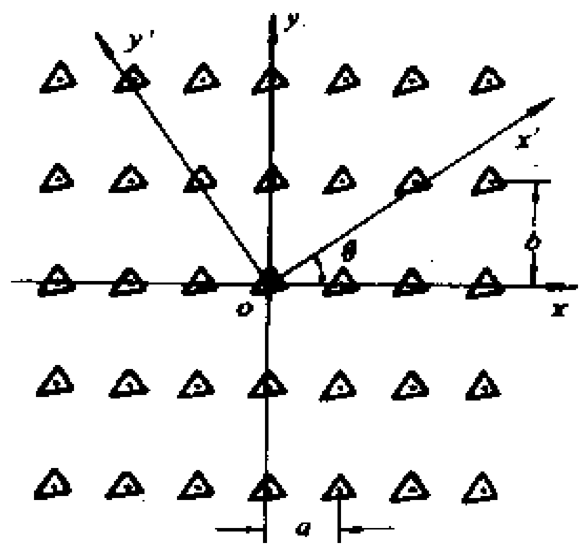
3． （1） 长长的一行树，相邻的两棵间距为10 m，这行树的空间频率(基频)为多少？一架高空摄影机对准这行树拍照，在长度为10 cm的胶卷上出现200棵树的象，胶卷上图象的空间频率为多少？

（2） 在一张白纸上等间隔地画上许多等宽的平行黑条纹，设黑条纹的宽度3 cm，白底宽5 cm，这张图案的空间频率（基频）为多少？

（3） 图样全同的单元在平面上重复排列成二维列阵，它在 x 方向的间隔为 a，在 y 方向的间隔为 b，其空间频率为多少？在转角为 θ的新坐标系中，沿 x' 方向第一单元的坐标(x，y)为($2a$，b)，沿y'方向第一单元的坐标(x、y)



(a)



(b)

题3图

为$(-a, b)$，求空间频率f'_x，f'_y。

解 （1），一维周期性结构的空间频率等于空间周期d的倒数，即

$$f=\frac{1}{d}.$$

当$d=10\,\mathrm{m}$时，则得

$$f=0.1\,\mathrm{m}^{-1}$$

当$d=10\,\mathrm{cm}/200$时，则得

$$f=20\,\mathrm{cm}^{-1}=2\times10^3\,\mathrm{m}^{-1}$$

（2）如图（a），对于二维周期性的图案，其空间频率应有两个分量(f_x, f_y)。当我们取坐标系(xoy)与平行直条纹正交和平行时，则

$$f_x=f=\frac{1}{d_1+d_2}$$

$$=\frac{1}{3+5}\,\mathrm{cm}^{-1}=0.125\,\mathrm{cm}^{-1}=12.5\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$f_y=0$$

当我们取斜的坐标系$(x'oy')$时，图案的空间频率(f'_x, f'_y)与正交时所得的最高空间频率f的关系为

$$f'_x=f\cos\theta$$

$$f'_y=f\sin\theta$$

如取$\theta=30^\circ$，则

$$f'_x\approx0.108\,\mathrm{cm}^{-1}=10.8\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$f'_y=0.0625\,\mathrm{cm}^{-1}=6.25\,\mathrm{m}^{-1}$$

（3）如图（b），二维列阵在两个方向的空间频率为

$$f_x=\frac{1}{a}$$

$$f_y=\frac{1}{b}$$

在转角为θ的坐标系（$x'oy'$）中的空间周期为

$$d'_x = \sqrt{(2a)^2 + b^2}$$

$$d'_y = \sqrt{a^2 + b^2}$$

相应的空间频率为

$$f'_x = \frac{1}{d'_x} = \frac{1}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$$

$$f'_y = \frac{1}{d'_y} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4． 一列平面波，波长为6328 Å，方向角$\alpha = 30°$，$\beta = 75°$

（1）求其复振幅的空间频率f_x，f_y，f_z；

（2）这列平面波中沿什么方向的空间频率最高？最高空间频率为多少？相应的最短空间周期为多少？

（3）在光谱学中常使用“波数”$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$的概念，它与平面波场中的空间频率有什么联系和区别？

解 （1）平面波波函数的标准形式为

$$\widetilde{U}(x, y, z) = A\exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)]$$

其空间频率为

$$f_x = \frac{k_x}{2\pi} = \frac{k\cos\alpha}{2\pi} = \frac{\cos\alpha}{\lambda}$$

$$f_y = \frac{k_y}{2\pi} = \frac{k\cos\beta}{2\pi} = \frac{\cos\beta}{\lambda}$$

$$f_z = \frac{k_z}{2\pi} = \frac{k\cos\gamma}{2\pi} = \frac{\cos\gamma}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$$

取 $\lambda = 6328\ \mathring{A}$，$\alpha = 30°$，$\beta = 75°$，得

$$f_x \approx 1.37\ \mu m^{-1}$$
$$f_y \approx 0.41\ \mu m^{-1}$$
$$f_z \approx 0.68\ \mu m^{-1}$$

（2）平面波沿波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向的波面排列最密，因而空间频率最高，数值为

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} = \frac{1}{\lambda}$$
$$\approx 1.58\ \mu m^{-1}$$

光波长 λ 就是沿波矢方向波函数的空间周期。

（3）由以上讨论可见，波数 $\tilde{\nu} = 1/\lambda$ 正是沿波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向的平面波的空间频率，它比其它任何方向的空间频率都高。

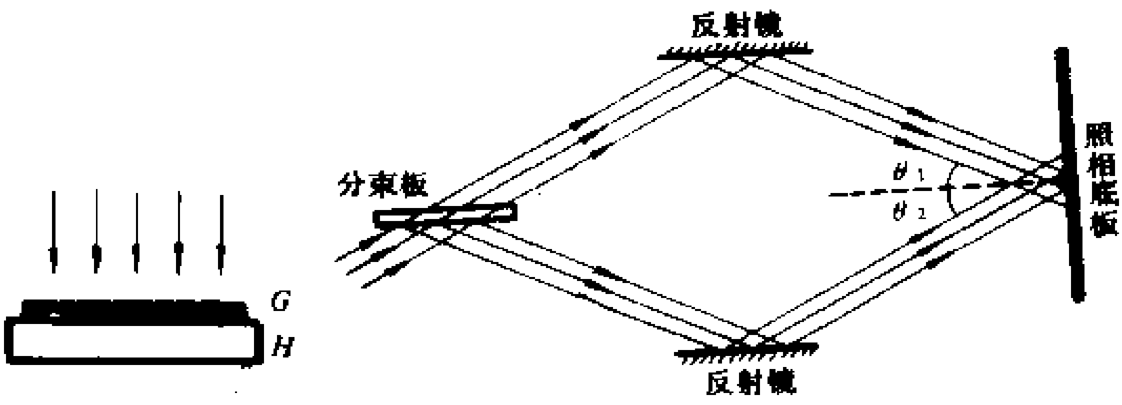
5. 设正弦光栅的复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}(x, y) = t_0 + t_1 \cos(2\pi f x + \varphi_0)$$

（1）一束平行光正入射于这正弦光栅上，求透射场的复振幅分布函数 $\tilde{U}_2(x, y)$ 的空间频率；

（2）求透射场强度分布函数 $I_2(x, y) = \tilde{U}_2 \tilde{U}_2^*$ 的空间频率；

（3）利用图(*a*)所示的装置制备正弦光栅，所用照明光波长为6328 Å，$\theta_1 = \theta_2 = 30°$，算出这样制出的正弦光栅在（1）（2）



（*a*）　　（*b*）

题 5 图

两问中空间频率的具体数值：

（4）用此正弦光栅按图（b）所示的方法再制备一张新的光栅：将记录介质（感光底片）H紧贴在正弦光栅G的下面，用一束平行光照明，然后对曝了光的记录介质进行线性冲洗，这张新光栅的复振幅透过率函数包含有几种空间频率成分？

解　（1）透射场

$$\widetilde{U}_2(x, y)=\widetilde{U}_1(x, y)\widetilde{t}$$

$$=A_1\left[t_0+t_1\cos(2\pi f x+\varphi_0)\right]$$

可见其空间频率有两个，一是与直流项对应的空间频率

$$f_0=0$$

二是与交流项对应的空间频率

$$f_1=f$$

（2）透射场强度

$$I_2(x, y)=\widetilde{U}_2\widetilde{U}_2^*$$

$$=I_1\left[t_0^2+2t_0t_1\cos(2\pi f x+\varphi_0)+t_1^2\cos^2(2\pi f x+\varphi_0)\right]$$

$$=I_1\left[\left(t_0^2+\frac{1}{2}t_1^2\right)+2t_0t_1\cos(2\pi f x+\varphi_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}t_1^2\cos(4\pi f x+2\varphi_0)\right]$$

可见其空间频率有三个，分别是

$$f_0=0\text{、}f_1=f\text{、}f_2=2f$$

（3）如用两束相干平行光对称入射，相干叠加而制备一张正弦光栅，则其空间频率为

$$f=\frac{1}{d}=\frac{2\sin\theta}{\lambda}$$

本题$\theta=30^\circ$，$\lambda=6328\,\text{Å}$，得（1）（2）两问中

$$f_1=f=\frac{1}{\lambda}\approx1.58\,\mu\text{m}^{-1}=1580\,\text{mm}^{-1}$$

$$f_2 = 2f \approx 3160\ \mathrm{mm}^{-1}$$

（4）对底片曝光起作用的是光强，所以新光栅的复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}_H \propto I_2 = I_1\left[\left(t_0 + \frac{1}{2}t_1^2\right) + 2t_0 t_1 \cos 2\pi f x + \frac{1}{2}t_1^2 \cos 4\pi f x\right]$$

如用（3）所得的正弦光栅，则 t_H 包含的三种空间频率数值为

$$f_0 = 0,\quad f_1 = 1580\ \mathrm{mm}^{-1},\quad f_2 = 3160\ \mathrm{mm}^{-1}$$

这个结果说明，以正弦光栅为底片，用曝光线性冲洗的办法不能复制正弦光栅，这一点与黑白光栅是不同的，黑白光栅是可以用母光栅光刻复制的。

*6． 一正弦光栅的屏函数为

$$\tilde{t}(x, y) = t_0 + t_1 \cos 2\pi f x$$

现将它沿 x 方向平移 $\Delta x = d/6$，$d/4$，$d/2$，d，$3d/2$，写出移动后的屏函数表达式。

解 位移 Δx 引起相移 $\Delta\varphi$，两者的定量关系为

$$\Delta\varphi = -2\pi f \Delta x = -\frac{2\pi}{d}\Delta x$$

屏函数的表达式写成

$$t(x, y) = t_0 + t_1 \cos(2\pi f x + \Delta\varphi)$$

当

$$\Delta x = \frac{d}{6} \text{时}，\quad \Delta\varphi = -\frac{\pi}{3}；$$

$$\Delta x = \frac{d}{4} \text{时}，\quad \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}；$$

$$\Delta x = \frac{d}{2} \text{时}，\quad \Delta\varphi = -\pi；$$

$$\Delta x = d \text{时}，\quad \Delta\varphi = 2\pi；$$

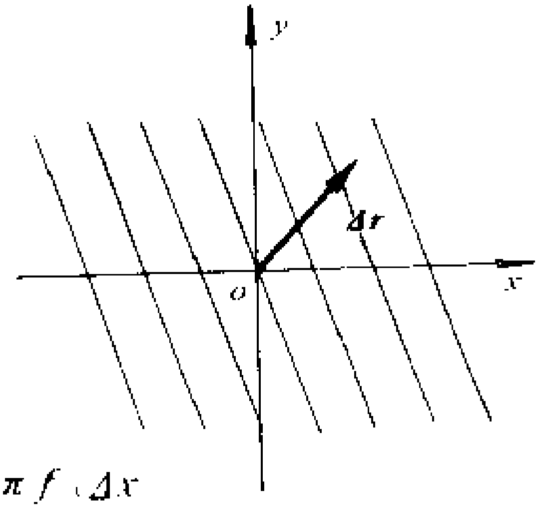
$$\Delta x = \frac{3}{2}d \text{时}，\quad \Delta\varphi = 3\pi。$$

*7．　正弦光栅的屏函数为

$$\widetilde{T}(x,y)=t_0+t_1\cos(2\pi f_x x+2\pi f_y y)$$

现将它沿斜方向平移 $\Delta r=(\Delta x,\Delta y)$，写出移动后的屏函数表达式.

解　对于空间频率为 (f_x,f_y) 的正弦光栅，当位移矢量为 $\Delta r(\Delta x,\Delta y)$ 时（参见附图），相应的相移 $(\Delta\varphi_x,\Delta\varphi_y)$ 为



$$\Delta\varphi_x=-2\pi f_x\Delta x$$

$$\Delta\varphi_y=-2\pi f_y\Delta y$$

题 7 图

此时屏函数表达式为

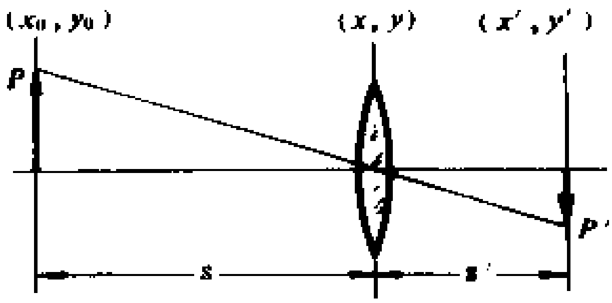
$$t(x,y)=t_0+t_1\cos[2\pi f_x(x-\Delta x)+2\pi f_y(y-\Delta y)]$$

§2　相因子判断法　正弦光栅的衍射

1．用薄透镜的位相变换函数，导出傍轴条件下的横向放大率公式.

解　如图，傍轴物点 P 与透镜相距为 s，坐标为 $(x_0,0)$，它发射的发散球面波到达透镜的波前函数（相因子中略去与 x，y 无关的部分）为

$$\widetilde{U}_1(x,y)=A_1\exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2s}-\frac{x_0x}{s}\right)\right]$$



题 1 图

经透镜位相变换函数的作用，出射波前函数为

$$\widetilde{U}_2(x, y) = \widetilde{t}_P \widetilde{U}_1$$

$$= A_1 \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right) \exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2s} - \frac{x_0 x}{s}\right)\right]$$

考虑到轴外点源所联系的球面波前函数的标准形式，将$\widetilde{U}_2$改写成

$$\widetilde{U}_2(x, y) = A_1 \exp\left\{-ik\left[\frac{x^2+y^2}{2s'} - \frac{1}{s'}\left(-\frac{s' x_0}{s}\right)x\right]\right\}$$

式中

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{F} - \frac{1}{s}$$

运用相因子判断法可知，$\widetilde{U}_2(x, y)$代表会聚于轴外的球面波，纵向距离（即象距）为s'，横向坐标为

$$x' = -\frac{s'}{s}x_0$$

即横向放大率为

$$V \equiv \frac{x'}{x_0} = -\frac{s'}{s}$$

* 2． 用楔形棱镜的位相变换函数导出傍轴光束斜入射时产生的偏向角δ。

解 如图，入射光束傍轴倾角为θ，其波前函数为

$$\widetilde{U}_1(x, y) = A_1 \exp(ikx\sin\theta)$$

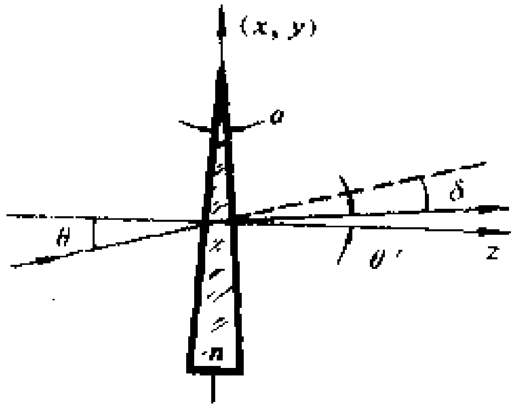
经薄棱镜位相变换函数作用以后，出射波前函数为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_2(x, y) &= \widetilde{t}_P \widetilde{U}_1\\ &= A_1 \exp[-ik(n-1)\alpha x] \exp(ikx\sin\theta)]\\ &= A_1 \exp\{ik[\sin\theta - (n-1)\alpha]x\}\\ &= A_1 \exp(ikx\sin\theta')\end{aligned}$$

式中 $\sin\theta' = \sin\theta - (n-1)\alpha$

运用相因子判断法可知，出射光为倾角等于θ'的平行光，所以偏向角为

$$\delta = \theta' - \theta \approx \sin\theta' - \sin\theta$$
$$= -(n-1)\alpha$$



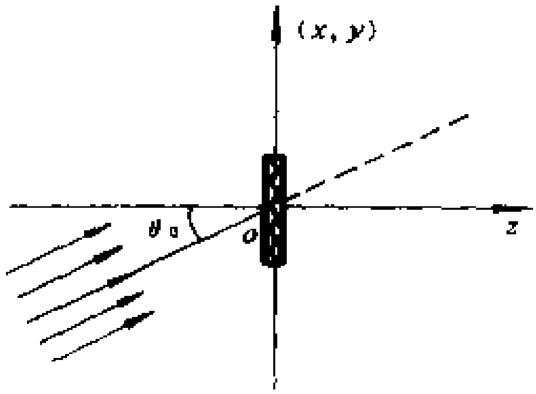
题 2 图

前面的负号说明，当顶角α在上方，则偏向角朝下（顺时针偏）；当顶角α在下方，则偏向角朝上（逆时针偏）。

* 3． 讨论斜入射时正弦光栅夫琅和费衍射，证明衍射（方位角）公式与正入射时的差别仅在于把$\sin\theta$换为$(\sin\theta - \sin\theta_0)$，这里$\theta_0$为入射光的倾角

解 如图，斜入射时平行光的波前函数为

$$\widetilde{U}_1(x, y) = A_1 \exp(ikx\sin\theta_0)$$



题 3 图

正弦光栅的屏函数为

$$\widetilde{t}(x, y) = t_0 + t_1\cos 2\pi f x$$

故出射波前为

$$\widetilde{U}_2(x, y) = \widetilde{t}\widetilde{U}_1$$
$$= A_1(t_0 + t_1\cos 2\pi f x)\exp(ikx\sin\theta_0)$$
$$= A_1 t_0 \exp(ikx\sin\theta_0) + \frac{1}{2}A_1 t_1 \exp[ik(\sin\theta_0 + f\lambda)x]$$
$$+ \frac{1}{2}A_1 t_1 \exp[ik(\sin\theta_0 - f\lambda)x]$$

运用相因子判断法可知$\widetilde{U}_2$波包含三列平面衍射波，其中

$$\widetilde{U}_0(x, y) = A_1 t_0 \exp(ikx\sin\theta_0)$$

$$\widetilde{U}_{+1}(x, y) = \frac{1}{2}A_1 t_1 \exp(ikx\sin\theta_{+1})$$

式中
$$\sin\theta_{+1} = \sin\theta_0 + f\lambda$$

$$\widetilde{U}_{-1}(x,y) = \frac{1}{2}A_1 t_1 \exp(ikx\sin\theta_{-1})$$

式中
$$\sin\theta_{-1} = \sin\theta_0 - f\lambda$$

它们在远场分离为三个夫琅和费衍射斑，衍射角分别为 θ_0, θ_{+1}，θ_{-1}，所满足的公式为

$$\sin\theta - \sin\theta_0 = \begin{cases} f\lambda, & (+1\text{级衍射斑}); \\ 0, & (0\text{级斑}); \\ -f\lambda, & (-1\text{级衍射斑}); \end{cases}$$

与正入射时的区别仅在于把 $\sin\theta$ 换作（$\sin\theta - \sin\theta_0$）。

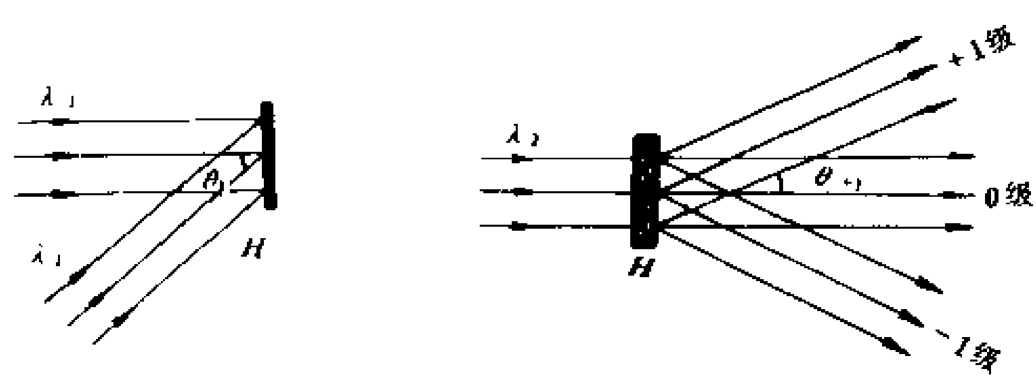
4． 如附图（*a*），制备正弦光栅时所用的两束平行光的波长为 λ_1，其中一束正入射，另一束倾角为 θ_1。用此法制成的光栅作夫琅和费衍射实验时，照明光正入射，波长为 λ_2［图（*b*）］。

（1）证明

$$\frac{\sin\theta_{+1}}{\sin\theta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

式中 θ_{+1} 是 +1 级衍射斑的衍射角；

（2）如果两光束干涉时用红外光 $\lambda_1 = 10.6\ \mu m$（CO_2 激光），



（*a*）　　　　　　（*b*）

题 4 图

衍射时用可见光$\lambda_2=6328\,\text{Å}$（He－Ne激光），$\theta_1=20°$，求θ_{+1}值。

解 （1）利用两束平行光相干场的条纹间距公式，可得本题制备的正弦光栅的频率为

$$f=\frac{1}{d}=\frac{\sin\theta_1}{\lambda_1}$$

如用波长为λ_2的正入射平行光照明此光栅，则其＋1级平面衍射波的衍射角正弦为

$$\sin\theta_{+1}=f\lambda_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\theta_1$$

衍射角与入射角正弦值之比等于波长之比，即

$$\frac{\sin\theta_{+1}}{\sin\theta_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

这表明人们可以通过改换波长来实现再现象的缩放。

（2）按题意，取$\lambda_1=10.6\,\mu m$，$\lambda_2=0.6328\,\mu m$，$\theta_1=20°$，得

$$\sin\theta_{+1}=\frac{0.6328}{10.6}\sin20°\approx0.02042$$

$$\theta_{+1}\approx1°10'$$

＊5．设光栅的复振幅透过率函数为

$$t(x)=t_0+t_1\cos2\pi fx+t_1\cos\left(2\pi fx+\frac{\pi}{2}\right)$$

这块光栅的夫琅和费衍射场中将出现几个衍射斑？各斑的中心强度与0级斑的比值是多少？

解 这块光栅的复振幅透过率函数除直流成分t_0项外，后面两项是同一空间频率f，可以肯定这块光栅仍将只有三个夫琅和费衍射斑。但在分析衍射斑中心强度的比值时，必须注意到后两

项给出的同级两个衍射斑之间是有 $\pi/2$ 位相差的，因此

$$A_0 \propto t_0$$

$$A'_{+1} = A''_{+1} \propto \frac{1}{2}t_1, \quad A_{+1} = \sqrt{A'^2_{+1} + A''^2_{+1}} \propto \frac{\sqrt{2}}{2}t_1$$

$$A'_{-1} = A''_{-1} \propto \frac{1}{2}t_1, \quad A_{-1} = \sqrt{A'^2_{-1} + A''^2_{-1}} \propto \frac{\sqrt{2}}{2}t_1$$

所以 ±1 级衍射斑中心强度与 0 级斑之比值为

$$\frac{I_{\pm 1}}{I_0} = \frac{A^2_{\pm 1}}{A^2_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2$$

另一种算法是将 $\widetilde{t}(x)$ 表达式后两项之和化为一项，即

$$\widetilde{t}(x) = t_0 + 2t_1\cos\left(2\pi fx + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= t_0 + \sqrt{2}\,t_1\cos\left(2\pi fx + \frac{\pi}{4}\right)$$

由正弦光栅衍射特征表查出

$$A_{\pm 1} \propto \frac{1}{2}\sqrt{2}\,t_1, \quad A_0 \propto t_0$$

故

$$\frac{I_{\pm 1}}{I_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2$$

***6.** 试分析一正弦光栅与一薄透镜密接组合系统的夫琅和费衍射（参见§1．习题2）。

解 平行光正入射时，经正弦光栅后成为三列平面衍射波，其方位角（衍射角）正弦值为

$$\sin\theta_0 = 0, \quad \sin\theta_{\pm 1} = \pm f\lambda$$

这三列平面衍射波经透镜变换为后焦面上的三个衍射斑 S_0，S_{+1}，

$S_{\pm1}$（如图），其位置坐标 x' 分别为

$$x_0' = 0, \quad x_{\pm1}' \approx \pm f\lambda F$$

当然，也可以从组合系统的屏函数

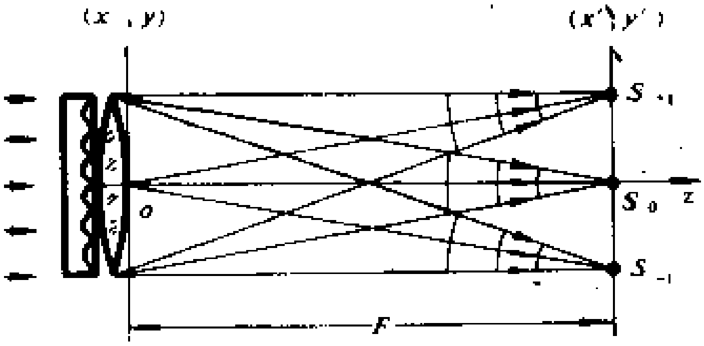
$$\tilde{t} = t_0 \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right) + \frac{1}{2}t_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2F} - f\lambda x\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}t_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2F} + f\lambda x\right)\right]$$

$$= t_0 \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right) + \frac{1}{2}t_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2F} - \frac{f\lambda F x}{F}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}t_1 \exp\left\{-ik\left[\frac{x^2+y^2}{2F} - \frac{(-f\lambda F)x}{F}\right]\right\}$$

出发，运用相因子判断法，求得上述三列会聚球面衍射波。



题 6 图

*7. 试分析由正弦光栅再复制而得到的那块光栅的夫琅和费衍射［参见§1.习题5.(4)］。

解 我们注意到如此获得的复制光栅，其透过率函数除保留有原正弦光栅的频率成分外，还增加一种二倍频成分。为简单起见，将复制光栅的复振幅透过率函数直接写成

$$\tilde{t}_H = \left(t_0^2 + \frac{1}{2}t_1^2\right) + 2t_0 t_1 \cos 2\pi f x + \frac{1}{2}t_1^2 \cos 4\pi f x$$

式中 t_0、t_1 是上面复盖的那块正弦光栅透过率的直流系数和交流系数。由此可见，复制光栅的衍射场主要包含五列平面衍射波，在透镜后焦面上有五个夫琅和费衍射斑，其角方位分别为

$$\sin\theta = \begin{cases} 0 & (0\text{级}) \\ \pm f\lambda & (\text{基频}) \\ \pm 2f\lambda & (\text{二倍频}) \end{cases}$$

其2级斑与1级斑中心强度之比为

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{\frac{1}{4}t_1^2}{t_0 t_1}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2$$

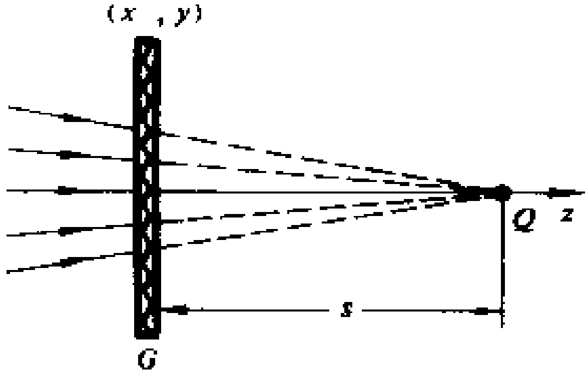
* **8.** 如图（a），$G(x, y)$ 为一块正弦光栅，其复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}(x, y) = t_0 + t_1 \cos 2\pi f x$$

现用一束会聚球面光波照明。试用相因子判断法导出傍轴条件下衍射场的主要特征。

解 傍轴条件下，中心在轴上的会聚球面波波前函数的标准形式为

$$\tilde{U}_1(x, y) \approx A_1 \exp\left(-ik\frac{x^2 + x^2}{2s}\right)$$



题8图（a）

经正弦光栅作用后，透射波前为

$$\tilde{U}_2(x, y) = (t_0 + t_1 \cos 2\pi f x)\tilde{U}_1$$

$$= \left[t_0 + \frac{1}{2}t_1 \exp(i2\pi f x) + \frac{1}{2}t_1 \exp(-i2\pi f x)\right]\tilde{U}_1$$

$$= t_0 A_1 \exp\left(-ik\frac{x^2 + y^2}{2S}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}t_1 A_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2s} - \frac{f\lambda s x}{s}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}t_1 A_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2s} + \frac{f\lambda s x}{s}\right)\right]$$

运用相因子判断法可知衍射场主要包含三种成分的衍射波（如图(b)所示），波前函数的第一项为

$$\tilde{U}_0(x, y) = t_0 A_1 \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2s}\right)$$

它代表会聚于s处的球面波，即入射光的直接透射波，当然，能流减少了；第二项为

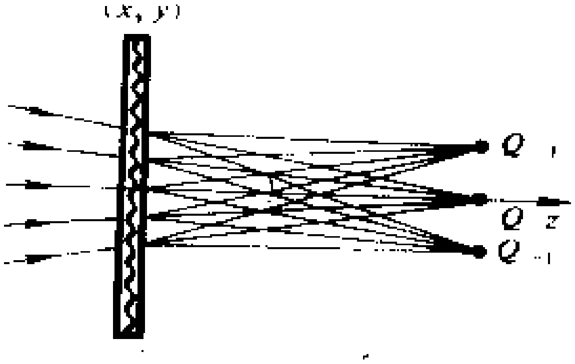
$$\tilde{U}_{-1}(x, y) = \frac{1}{2}t_1 A_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2s} - \frac{f\lambda s x}{s}\right)\right]$$

它代表会聚于轴外上方Q_{+1}的球面波，Q_{+1}的位置坐标为$(f\lambda s, 0, s)$；第三项为

$$\tilde{U}_{+1}(x, y) = \frac{1}{2}t_1 A_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2s} + \frac{f\lambda s x}{s}\right)\right]$$

它代表会聚于轴外下方Q_{-1}的球面波，其位置坐标为$Q_{-1}(-f\lambda s, 0, s)$。

以上结果表明正弦光栅对波前的变换作用同时相当于两个楔形棱镜，一个劈角在下方的棱镜产生象点Q_{+1}，一个劈角在上方的棱镜产生象点Q_{-1}。



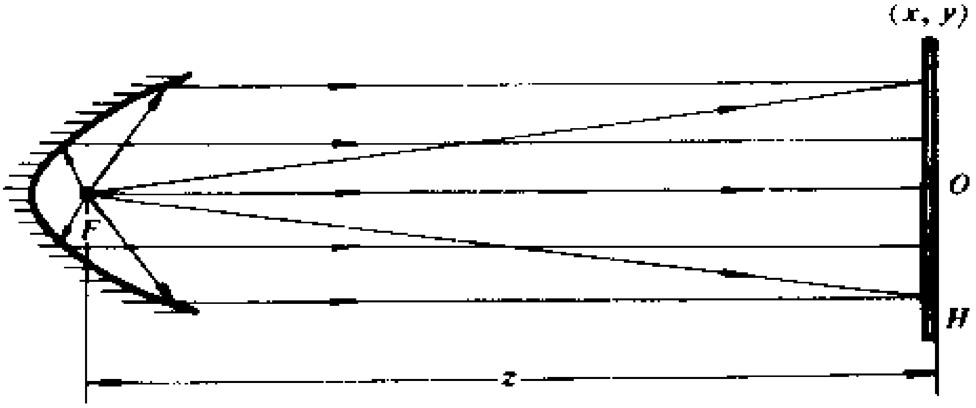
题8图(b)

*9. 装置如图(a)将一点源置于反射镜的焦点，用以实现平面波与球面波的干涉。设记录介质H面上平面波振幅为A_1，球面波（傍轴条件）的振幅为A_2。

（1）试分析干涉条纹的形状；

（2）导出干涉场的强度分布；

（3）若将感光底片H作线性冲洗而成为一张波带片，再用



题 9 图（a）

一束相同波长的平行光束正入射于该波带片，试用相因子判断法分析衍射场的主要特征。

解　（1）干涉花样的形状是以 O 点为中心的同心环。

（2）干涉场强度分布

$$I_H(x,y)=\left[A_1+A_2\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]$$

$$\times\left[A_1+A_2\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]^*$$

$$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

$$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(k\frac{r^2}{2z}\right)$$

（3）入射光波前

$$\widetilde{U}_1(x,y)=A$$

经波带片 H 以后透射场为

$$\widetilde{U}_2(x,y)=\widetilde{t}_H\widetilde{U}_1$$

$$=AI_H$$

$$=A(A_1^2+A_2^2)+AA_1A_2\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

$$+AA_1A_2\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

须知透射场便是衍射场的波前，进一步运用相因子判断法可知，此时衍射场主要包含以下三种衍射波，第一项为

$$\tilde{U}_0(x,y)=A(A_1^2+A_2^2)$$

是一束正出射的平面衍射波；第二项为

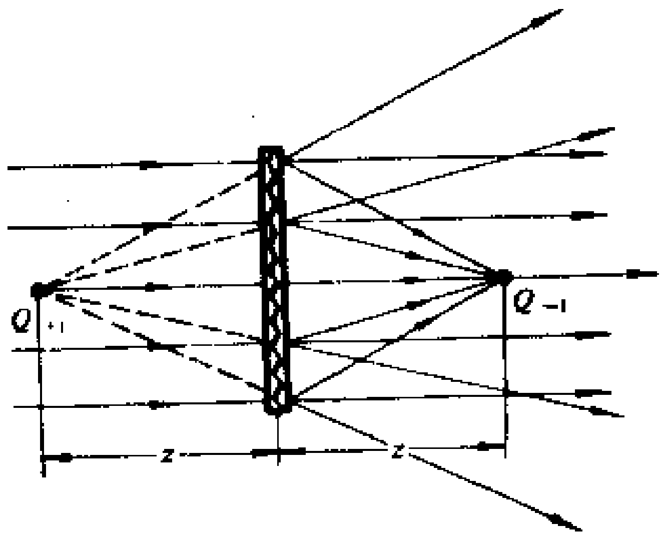
$$\tilde{U}_{+1}(x,y)=AA_1A_2\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

是一束发散球面衍射波，中心Q_{+1}位于底片左侧距离为 z；第三项为

$$\tilde{U}_{-1}(x,y)=AA_1A_2\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

是一束会聚球面衍射波，中心Q_{-1}位于底片右侧距离为 z。

这张底片是一张正弦型的菲涅耳波带片。由以上讨论可知，它对波前的变换作用，同时相当于两个透镜：一个为发散透镜，产生平行光的虚象点Q_{+1}，另一个为会聚透镜，产生平行光的实象点Q_{-1}，如图（b）所示。



题9图（b）

*10．算出下列黑白光栅的前10个傅里叶系数：t_0，$\tilde{t}_1$，…，$\tilde{t}_{10}$

（1）$a/d=1/3$；

（2）$a/d=1/2$。

解 黑白光栅的透过率函数为

$$t(x)=\begin{cases}1, & |x|<\dfrac{a}{2}\\[2ex] 0, & \dfrac{a}{2}<|x|<\dfrac{d}{2}\end{cases}$$

傅里叶系数为

$$t_0=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)\,dx=\frac{1}{d}\int_{-a/2}^{a/2}dx$$

$$=\frac{a}{d}$$

$$\widetilde{t}_n=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)e^{-i2\pi f_n x}\,dx$$

$$=\frac{1}{d}\int_{-a/2}^{a/2}e^{-i2\pi f_n x}\,dx$$

$$=\frac{1}{d}\frac{\sin\pi f_n a}{\pi f_n}=\frac{a}{d}\frac{\sin n\pi fa}{n\pi fa}$$

由于 $t(x+d)=t(x)$，所以基频

$$f=\frac{1}{d}$$

傅里叶系数可写成

$$\widetilde{t}_n=\frac{a}{d}\frac{\sin(n\pi a/d)}{n\pi a/d}$$

（1）当 $\frac{a}{d}=\frac{1}{3}$ 时，得

$$t_0=\frac{1}{3}\qquad\qquad \widetilde{t}_1=\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$\widetilde{t}_2=\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4\pi},\qquad \widetilde{t}_3=\frac{1}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{3}=0$$

$$\tilde{t}_4 = \frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \qquad \tilde{t}_5 = \frac{1}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{10\pi}$$

$$\tilde{t}_6 = \frac{1}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{3} = 0 \qquad \tilde{t}_7 = \frac{1}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{14\pi}$$

$$\tilde{t}_8 = \frac{1}{8\pi}\sin\frac{8\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \qquad \tilde{t}_9 = \frac{1}{9\pi}\sin\frac{9\pi}{3} = 0$$

（2）当$\frac{a}{d} = \frac{1}{2}$时，得

$$\tilde{t}_0 = \frac{1}{2} \qquad \tilde{t}_1 = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}$$

$$\tilde{t}_2 = \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{2} = 0 \qquad \tilde{t}_3 = \frac{1}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{3\pi}$$

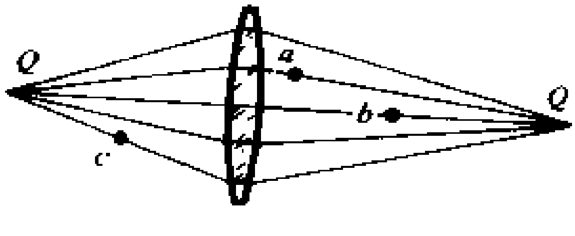
$$\tilde{t}_4 = \frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{2} = 0 \qquad \tilde{t}_5 = \frac{1}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{2} = \frac{1}{5\pi}$$

$$\tilde{t}_6 = \frac{1}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{2} = 0 \qquad \tilde{t}_7 = \frac{1}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{2} = -\frac{1}{7\pi}$$

$$\tilde{t}_8 = \frac{1}{8\pi}\sin\frac{8\pi}{2} = 0 \qquad \tilde{t}_9 = \frac{1}{9\pi}\sin\frac{9\pi}{2} = \frac{1}{9\pi}$$

§3　阿贝成象原理

1．如附图，设透镜理想成象，证明在成象光束中任意几个次波源（如图中的a、b、c）在象点Q'产生的扰动是同位相的。如果在光路中设有衍射屏，以上结论是否成立？



题1图

证　点源在某一场点产生的扰动的位相，既决定点源本身的位相，又决定点源至场点

的光程. 而次波源具有双重性, 它既是实际物点Q所激发的波场中的一点, 又是对象点Q'扰动有所贡献的点源。因此,次波源a, b, c在Q'点所产生的扰动位相应表示为

$$\begin{aligned}\varphi_a(Q') &= \varphi_Q(a) + \frac{2\pi}{\lambda}L(aQ') \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(Qa) + \frac{2\pi}{\lambda}L(aQ') \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(QaQ')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_b(Q') &= \varphi_Q(b) + \frac{2\pi}{\lambda}L(bQ') \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(Qb) + \frac{2\pi}{\lambda}L(bQ') \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(QbQ')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_c(Q') &= \varphi_Q(c) + \frac{2\pi}{\lambda}L(cQ') \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(Qc) + \frac{2\pi}{\lambda}L(cQ') \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(QcQ')\end{aligned}$$

再考虑到理想成象的物象等光程性, 即

$$L(QaQ') = L(QbQ') = L(QcQ')$$

所以

$$\varphi_a(Q') = \varphi_b(Q') = \varphi_c(Q')$$

这个结论在分析计算象面衍射场问题中是有用的。不论光路中是否有衍射屏, 只要是这些次波源对象点的扰动有所贡献, 这个结论依然成立.

* **2.** 证明在傍轴条件下傅氏面上$\pm n$级衍射斑相对0级

的位相为

$$\varphi_{tn} = -k\frac{(na)^2}{2z}$$

式中 z 是傅氏面到象面的距离，a 为相邻衍射斑中心间的距离

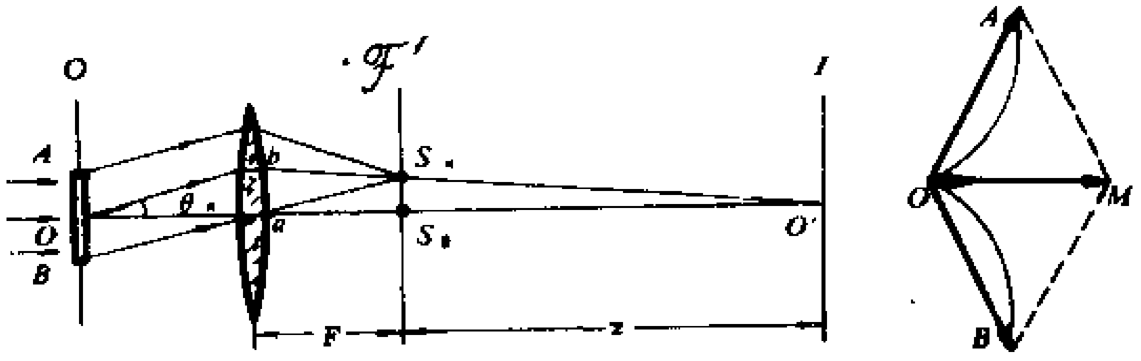
证 如图（a），n 级衍射斑的衍射角满足

$$\sin\theta_n = f_n\lambda = nf\lambda$$

如何决定衍射斑中心的位相是个关键。衍射斑中心的扰动是物面上大量次波源沿 θ_n 方向传播的次级扰动的相干叠加。中心次波源 O 沿光程 $L(ObS_n)$ 到达 S_n 点的位相为

$$\varphi_0(S_n) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}L(ObS_n)$$

考虑到单频信息是偶函数，上方 OA 段与下方 OB 段在 S_n 处扰动的位相关系具有对称性，从矢量图［图(b)］中清楚看出，S_n 点总扰动 $\boldsymbol{OM}$ 的位相与中心点 O 发射的次级扰动(小矢量)位相是一致的.



（a）装置图　　　　（b）矢量图解

题 2 图

因此，n 级衍射斑与 0 级斑的位相分别表示为

$$\varphi(S_n) = \varphi_0(S_n) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}L(ObS_n)$$

$$\varphi(S_0)=\varphi_0(S_0)-\varphi_0+\frac{2\pi}{\lambda}L(OaS_0)$$

位相差为

$$\varphi(S_n)-\varphi(S_0)=\frac{2\pi}{\lambda}[L(ObS_n)-L(OaS_0)] \qquad (a)$$

注意到前场的光程差可以转换为后场的光程差，即

$$L(ObS_n)=L(ObS_nO')-L(S_nO')$$

$$L(OaS_0)=L(OaS_0O')-L(S_0O')$$

并考虑到物象等光程性

$$L(ObS_nO')=L(OaS_0O')$$

于是有

$$L(ObS_n)-L(OaS_0)=-[L(S_nO')-L(S_0O')] \quad (b)$$

在傍轴条件下

$$\overline{S_nO'}-\overline{S_0O'}\approx\frac{1}{2z}(\overline{S_nS_0})^2 \qquad (c)$$

$$\overline{S_nS_0}\approx F\sin\theta_n=nf\lambda F=na \qquad (d)$$

式中 $a=f\lambda F$ 是相邻衍射斑中心间的线距离。综合式(a),(b),(c),(d)，最后得位相差为

$$\varphi(S_n)-\varphi(S_0)=-k\frac{(na)^2}{2z}$$

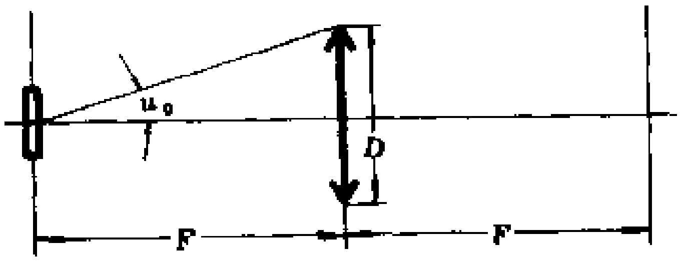
值得注意的是，对于 $-n$ 级衍射斑的位相差表示式也是如此，不必变号。当然，按我们原先对位相正负号的习惯约定（位相超前算负），上式中的负号说明 n 级衍射斑的实际位相是超前0级斑的。

·**3.** 在一相干成象系统中，镜头（作为入射光瞳）的相对孔径为1/5，求此系统的截止频率（mm^{-1}）。设物平面在前焦面附近，照明波长为0.5μm。

解　如图，系统的截止频率 f_M 由镜头口径限制的最大出射角 u_0 决定，其关系为

$$\sin u_0 = f_M \lambda$$

从几何上看大体上



题 3 图

$$\sin u_0 \approx \frac{D}{2F}$$

所以

$$f_M = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{D}{F}\right)$$

取镜头的相对孔径（D/F）= 1/5，$\lambda = 0.5\,\mu\mathrm{m}$，算得

$$f_M = 200\,\mathrm{mm}^{-1}$$

*4.　利用阿贝成象原理导出在相干照明条件下显微镜的最小分辩距离公式。

解　上题讨论过的截止频率的倒数，便是镜头口径限制下的相干显微成象系统可分辩的最小空间周期

$$d_m = \frac{1}{f_M} = \frac{\lambda}{\sin u_0} = 2\lambda\left(\frac{D}{F}\right)^{-1}$$

而非相干显微成象系统的最小分辩距离公式为

$$\delta y_m = 0.61\frac{\lambda}{\sin u_0}$$

由此可见，两者（d_m 与 δy_m）的数值很相近。

§4　夫琅和费衍射场的标准形式

1.　采用如图所示远场装置接收夫琅和费衍射场，设单缝

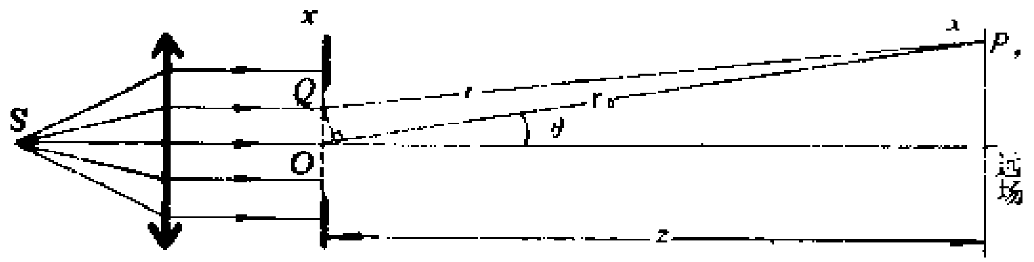
宽度约为100μm，入射光波长6328 Å，问：

（1） 接收屏幕至少应放多远？

（2） 在接收屏幕的多大范围内才算是夫琅和费衍射场？

（3） 0级半角宽度为多少？

（4） 在接收屏幕上0级的线宽度有多少？



题1图

解 （1）相对于衍射屏线度a来说，远场条件要求纵向距离

$$z \gg \frac{a^2}{\lambda}$$

取$a \approx 100\ \mu m$，$\lambda = 0.63\ \mu m$，选30倍作估算，得

$$z = 30\ \frac{a^2}{\lambda} \approx 48\ cm$$

（2） 夫琅和费衍射远场装置只要求接收范围ρ满足傍轴条件

$$\rho \ll z$$

取$z \approx 50$ cm，选10倍作估算，得

$$\rho = \frac{1}{10} z \approx 5\ cm$$

（3）零级半角宽度公式仍然是

$$\Delta \theta_0 \approx \frac{\lambda}{a}$$

$$= 6.3 \times 10^{-3}\ rad \approx 21.7' = 21'42''$$

（4） 在接收屏幕零级两侧暗点之间的线宽度