

$$\operatorname{tg} u_3 = \frac{r_1}{10a} = \frac{3}{10} \frac{r_3}{a}$$

可见 $u_1 < u_2 < u_3$ 。因此光阑 DD 为孔径光阑，它在物空间的象 $D'D'$ 即为入射光瞳，位置在 L_1 之左 $4a$ 处，大小与 DD 一样。

把 DD 对 L_2 成像到系统的象空间去，即得出射光瞳 $D''D''$ (如图)。这时 $s = d \cdot l = 2a$ ，求得

$$s' = -\frac{sf_2}{s - f_2} = -\frac{2a \times a}{2a - a} = -2a$$

$$V = -\frac{s'}{s} = -\frac{2a}{2a} = -1$$

$$r_3'' = r_3 |V| = r_3$$

式中 r_3'' 为 $D''D''$ 的半径。出射光瞳在 L_2 之右 $2a$ 处，大小与 DD 一样。

(2) 确定视场光阑和入射窗。

比较 L_1 和 L_2 对入瞳 $D'D'$ 中心的张角 ω_1, ω_2 (如图) 的大小：

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{r_1}{4a} = \frac{3}{4} \frac{r_3}{a}$$

$$\operatorname{tg} \omega_2 = \frac{r_2'}{4a} = \frac{3}{2} \frac{r_3}{a}$$

$\omega_1 < \omega_2$ ，所以 L_1 的边框即为视场光阑，并兼为入射窗。

6. 惠更斯目镜的结构如附图所示。(用理想光具组的联合公式可以证明系统的物方焦点 F 在向场镜 L_1 之右 $1.5a$ 处，物平面在 F 内侧附近。) 今在两透镜间放一光阑 AA ，设透镜 L_1, L_2 和光阑的直径分别为 D_1, D_2 和 D 。证试：

(1) 向场镜 L_1 成为孔径光阑的条件是

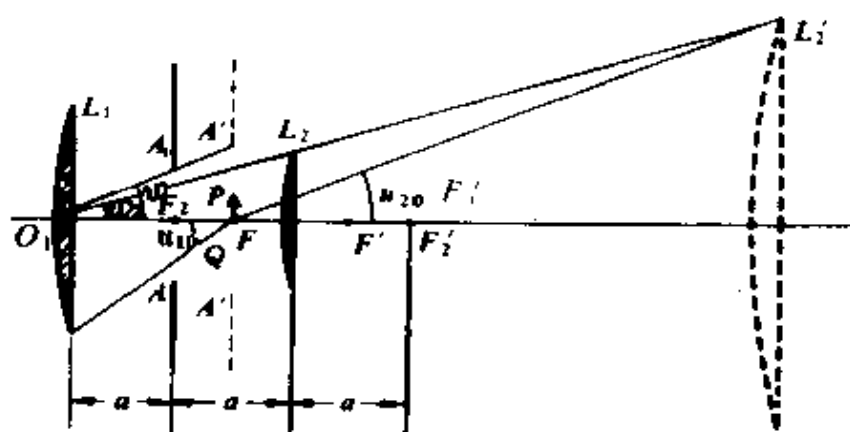
$$D_1 \leq D_2$$

(2) 光阑 AA 成为视场光阑的条件是

$$D \leq \frac{1}{2} D_2$$

(3) 这时对 F_2' 点计算的出射孔径角 u_0' 由下式确定：

$$\operatorname{tg} u_0' = D_1 / 2a$$



题 6 图

证 要确定光学系统的孔径光阑，必须首先将所有光学元件对物方成像，并确定这些象的孔径线度；然后明确物点的位置，须知对不同物点来说，谁是孔径光阑将可能发生变化。要确定系统的视场光阑，就应当在上述确定孔径光阑的基础上，再以入射光瞳中心为顶点向物平面横扫，看谁在物方的（象面）孔径对横向范围限制最厉害，它就是视场光阑。

(1) 为确定孔径光阑，需把 AA 和 L_2 的边框通过 L_1 属于物方空间的象 $A'A'$ 和 L_2' 求出。由高斯公式可以求得 $A'A'$ 正好与物平面重合，如图所示，因此 AA 不可能为孔径光阑。现以物点 Q 为顶点，向场镜 L_1 所张的角为

$$u_{10} = \text{tg}^{-1} \frac{D_1}{2 \times 1.5a} = \text{tg}^{-1} \frac{D_1}{3a}$$

接目镜 L_2 在物方共轭 L_2' 所张的角为

$$u_{20} = \text{tg}^{-1} \frac{D_2'}{2(s_2' - 1.5a)}$$

式中 s_2' 是 L_2' 对 L_1 的象距绝对值， D_2' 为 L_2' 的孔径。由高斯公式和横向放大率公式算得 $s_2' = 6a$ ， $D_2' = 3D_2$ ，所以

$$u_{20} = \text{tg}^{-1} \frac{D_2}{3a}$$

由此可见，要使向场镜成为孔径光阑，必须满足

$$D_1 < D_2$$

(2) 如图,若惠更斯目镜的向场镜 L_1 是孔径光阑,则同时也是入射光瞳。以 O_1 为顶点, AA 或 $A'A'$ 所张的角设为 ω , L_2 或 L_2' 所张的角设为 ω_2 , 则

$$D_2 \geq 2D \text{ 时, } \omega_2 \geq \omega$$

$$D_2 = 2D \text{ 时, } \omega_2 = \omega$$

$$D_2 < 2D \text{ 时, } \omega_2 < \omega$$

所以, AA 为视场光阑的条件是

$$D \geq \frac{1}{2}D_2$$

(3) 这里所谓的“出射孔径角”是指出射光瞳对 F_1' 所张的角 u_0' , 为此首先确定孔径光阑 L_1 在象方共轭 L_1' 的纵向位置和横向孔径。据题意, 对 L_2 来说焦距 $f_2 = a$, 物距 $s = 2a$, 算出此时象距 $s' = 2a$, $x' = a$, 横向放大率 $V = -1$, 即 L_1' 的孔径 $D_1' = V D_1 = -D_1$, 所以

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u_0' &= \left| \frac{D_1'}{2x'} \right| \\ &= \frac{D_1}{2a} \end{aligned}$$

* 7. 试用两个薄透镜组装一台简易的望远镜, 要求:

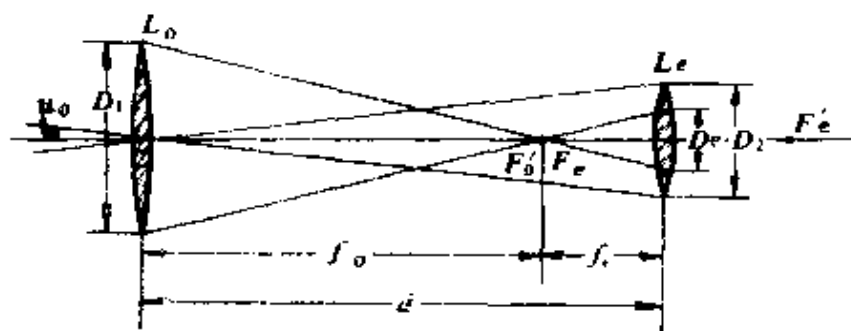
- (1) 该望远镜能分辨 100 m 远物面上 1 mm 间隔的两条刻线;
- (2) 镜筒长度 (指物镜与目镜之间的距离) 为 62 cm。

试求:

- (1) 物镜的口径应选多大?
- (2) 物镜焦距与目镜焦距应选多长?
- (3) 指明这台望远镜的出射光瞳的位置;
- (4) 当目镜口径选为 3 cm 时, 这台望远镜的入射视场角为多少?

解 简易望远镜光路如图所示。

- (1) 按题意应要求此望远镜的最小分辨角为



题 7 图

$$\delta\theta_m = \frac{1 \text{ mm}}{10^{-5} \text{ mm}} = 10^{-5} \text{ rad (弧度)}$$

根据望远镜分辨角公式

$$\delta\theta_m = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

物镜口径应不小于

$$\begin{aligned} D_o &= 1.22 \frac{\lambda}{\delta\theta_m} = 1.22 \frac{0.55 \mu\text{m}}{10^{-5}} \\ &= 6.7 \text{ cm} \end{aligned}$$

(2) 考虑到眼睛的最小分辨角为

$$\delta\theta_e = 1' \approx 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

应使望远镜的视角放大率满足

$$M = \frac{\delta\theta_e}{\delta\theta_m} = 30 \text{ 倍}$$

此为正常放大率值，而放大率与焦距的关系为

$$M = \frac{f_o}{f_e} = 30$$

又

$$f_o + f_e = 62 \text{ cm}$$

联立解出

$$f_o = 60 \text{ cm}$$

$$f_e = 2 \text{ cm}$$

(3) 望远镜的孔径光阑就是物镜口径本身,它对目镜(短焦距)来说为远物,所以物镜在象方的象位于目镜后焦点 F' 附近,此为出射光瞳位置所在。于是目镜口径便是视场光阑,也是出射窗。它对物镜中心所张的角 u_0 就是入射视场角, u_0 角由下式决定:

$$u_0 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{D}{2d} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{41} \approx 0.024 \text{ rad} = 1^\circ 23'$$

§ 10 象 差

• 1. 阿贝正弦条件

$$n y \sin u = n' y' \sin u'$$

与理想光具组理论中的亥姆霍兹公式

$$n y \operatorname{tg} u = n' y' \operatorname{tg} u'$$

是否矛盾?这说明了什么?并证明一对齐明点附近不可能有另一对齐明点。

证 我们知道,齐明点满足的阿贝正弦条件为

$$n y \sin u = n' y' \sin u'$$

或
$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{n y}{n' y'} = \frac{f y}{f' y'} = C \text{ (常数)}$$

而理想光具组理论中的亥姆霍兹公式(正切条件)为

$$n y \operatorname{tg} u = n' y' \operatorname{tg} u'$$

或

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{n y}{n' y'} = \frac{f y}{f' y'} = C \text{ (常数)}$$

在出射角 u 变化的情况下,如果要同时满足以上两式,势必

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}$$

于是得

$$\frac{\cos u'}{\cos u} = 1$$

其解

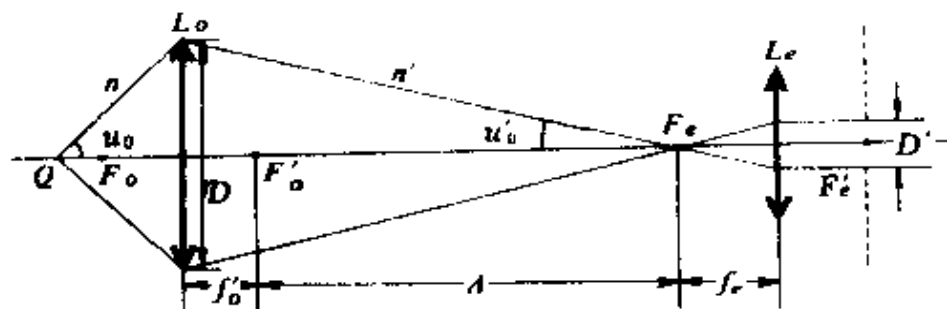
$$u' = u$$

是唯一的，这正是平面镜的情况。除此之外的—般情况是 $u' \neq u$ ，则正弦条件和正切条件是不能同时满足的。在此我们还必须进一步弄清楚两个问题：在两者之中究竟是哪一个在物理上得以实现？两者不能同时实现说明了什么？须知，理想光具组的一整套理论是纯几何理论，它不涉及物理上是否得以实现的可能性。而齐明点满足的阿贝正弦条件是由折射定律出发如实分析而得到的。换句话说，对于共轴球面系统来说，确实可以找到一对共轭点（齐明点）满足阿贝正弦条件，从而在消除球差的基础上同时消除了慧差，使傍轴小物宽光上很好地成像。此时正切条件不被满足。

既然正切条件是理想光具组点宽光束理想成像的必要条件之一，也必定是傍轴小物理想成像的必要条件之一。而正弦条件的成立使这一条件不被满足，这意味着对共轴球面系统来说，沿纵向（光轴）各点都做到傍轴小物很好成象是不可能的。如果在—对齐明点附近又能导出另—对齐明点，那么利用递推法就能导出纵向各点都能使傍轴小物很好成象。根据以上逻辑这是做不到的。

* 2. 试证明，显微镜出射光瞳直径 D' 由下式决定：

$$D' = \frac{2s_0 n \sin u_0}{|M|} = 2s_0 \frac{N.A.}{|M|}$$



题 2 图

即 D' 正比于数值孔径 $N.A. = n \sin u_0$ ，反比于视角放大率 M 。

（ $s_0 = 25\text{cm}$ ，是明视距离）

证 如附图所示，显微镜的特点是 $\Delta \gg f'_o, f_e$ ，小物位于 F_o 。

点附近齐明点时对物镜来说满足阿贝正弦条件，中间象落在 $F'e$ 点附近，出射光瞳在 $F'e$ 点附近。

据此，由横向放大率公式得

$$D' \approx - \frac{f_e}{f'_o + \Delta} D$$

又由显微镜的视角放大率

$$|M| = \frac{\Delta s_0}{f'_o f_e}$$

得

$$f_e = \frac{\Delta s_0}{f'_o |M|}$$

又

$$D = 2 (\Delta + f'_o) \operatorname{tg} u'_0 \approx 2 (\Delta + f'_o) \sin u'_0$$

再由阿贝正弦条件

$$n y \sin u_0 = n' y' \sin u'_0$$

和物镜的横向放大率

$$V_x = \frac{y'}{y} = - \frac{\Delta}{f'_o}$$

得

$$\begin{aligned} \sin u'_0 &= \frac{n y \sin u_0}{n' y'} = - \frac{f'_o}{\Delta} \frac{n}{n'} \sin u_0 \\ &= - \frac{f'_o}{\Delta} n \sin u_0 \quad (n' = 1) \end{aligned}$$

将各式代入 D' 表达式得

$$\begin{aligned} D' &= \left(- \frac{1}{f'_o + \Delta} \right) \left(\frac{\Delta s_0}{f'_o |M|} \right) 2 (\Delta + f'_o) \left(- \frac{f'_o}{\Delta} n \sin u_0 \right) \\ &= 2 s_0 \frac{n \sin u_0}{|M|} \end{aligned}$$

由此可见，出瞳口径与放大率成反比。显微镜倍率越高，则出瞳

越小,以致小于眼瞳,此时对眼睛来说,其有效入瞳口径就由显微镜的出瞳口径限制,从而降低了眼睛的相对孔径,使象场变暗。

·3. 拟用玻璃 K 9 ($n_D = 1.5163$, $n_F = 1.5220$, $n_C = 1.5139$) 和重火石玻璃 F 4 ($n_D = 1.6199$, $n_F = 1.6321$, $n_C = 1.6150$) 来做消色差粘合透镜, 焦距 100 mm, 若已确定其负透镜的非粘合面为平面, 试求其余各面的曲率半径。

解 联立下列二方程

$$P_D = (n_{1D} - 1)k_1 + (n_{2D} - 1)k_2$$

$$= \frac{1}{100 \times 10^{-3}} = 10.0 \text{ 屈光度}$$

$$P_F = P_C = (n_{1F} - n_{1C})k_1 + (n_{2F} - n_{2C})k_2 \\ = 0$$

以 $n_{1D} = 1.5163$, $n_{2D} = 1.6199$, $n_{1F} = 1.5220$, $n_{1C} = 1.5139$, $n_{2F} = 1.6321$, $n_{2C} = 1.6150$ 代入解得

$$k_1 = 44.90$$

$$k_2 = -21.27$$

即

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 44.90$$

$$\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} = -21.27$$

令 $r_4 = \infty$, $r_2 = r_3$, 算出

$$r_1 = 15.1 \text{ mm}$$

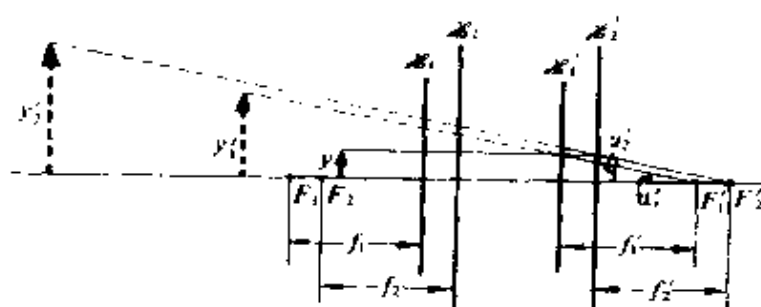
$$r_2 = -47.0 \text{ mm}$$

式中 r_1 为正透镜非粘合面曲率半径, r_2 为粘合面曲率半径。

·4. 试论证: 对助视光学仪器来说, 消除焦距色差就能消除视角色差。

证 对薄透镜来说, 由于不同波长的主面仍然重合于过透镜光心的平面, 所以一旦消除了焦距色差, 也必定同时消除了焦点色差。

但是对厚透镜或透镜组来说，由于不同波长的主面并不重合（如图），所以即使消除了焦距色差使 $f_1(\lambda_1) = f_2(\lambda_2)$ ，两个焦点 F_1' 与 F_2' ， F_1 与 F_2 并不重合，从而横向放大率色差和纵向位置色差依然存在。不过，此时两种不同颜色的象虽然大小和位置均不同，但它们各自对后焦点 F_1' ， F_2' 所张的角度 u_1' ， u_2' 是相等的，这一点从图上看得很清楚。须知对于助视光学仪器来说，出瞳位置正在后焦点附近，此处是眼瞳最佳位置，故 $u_1' = u_2'$ 表明两种颜色的象的视角是相等的，在视网膜上便能很好重叠一致，从而消除了视角色差。



题 4 图

从图中还可以算出，有仪器时的视角

$$\operatorname{tg} u_1' = \operatorname{tg} u_2' = -\frac{y}{f_1'} = -\frac{y}{f_2'}$$

而无仪器时的视角

$$\operatorname{tg} u_0 = -\frac{y}{s_0} \quad (s_0 \text{ 为明视距离})$$

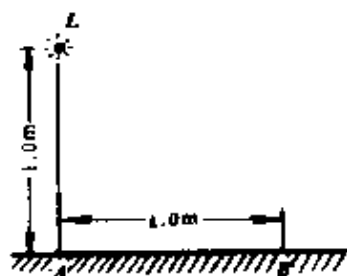
故视角放大率

$$M = \frac{\operatorname{tg} u_1'}{\operatorname{tg} u_0} = \frac{s_0}{f'}$$

与焦点位置无关，仅由焦距决定，只要眼睛置于目镜后焦点附近，上式总是成立的。

§ 11 光度学基本概念

1. 在离桌面1.0 m处有盏100坎德拉的电灯 L , 设 L 可看作是各向同性的点光源, 求桌面上 A, B 两点的照度(见附图)。



题1图

解 按点光源照明时的照度公式

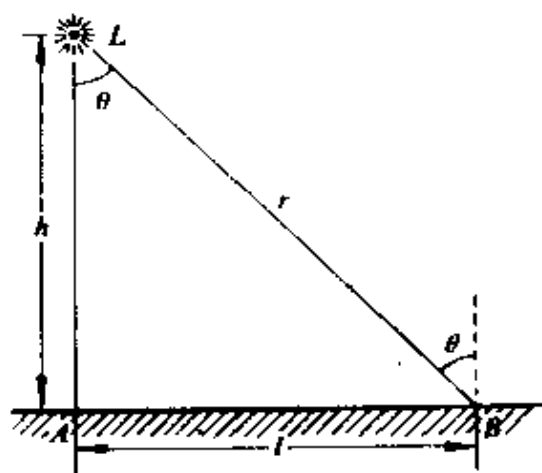
$$E = \frac{I \cos \theta}{r^2}$$

並以 $I = 100 \text{ cd}$ (坎德拉), $\cos \theta_A = \cos 0^\circ = 1$, $r_A = 1.0 \text{ m}$, $\cos \theta_B = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, $r_B = \sqrt{2} r_A$ 代入分别算出 A, B 两点的照度为

$$E_A = 100 \text{ lx (勒克斯)}$$

$$E_B = 35 \text{ lx}$$

2. 若上题中电灯 L 可以垂直上下移动, 问怎样的高度使 B 点的照度最大。



题2图

解 如图, 设照明处 B 与灯泡垂足 A 的距离为 l , 灯泡位于不同高度将同时改变距离 r 和倾角 θ , 选 θ 为变量, 则 r

$l = \sin \theta$, 照度公式改写为

$$E = \frac{I \cos \theta}{r^2} = \frac{I}{l^2} \cos \theta \sin^3 \theta$$

对上式求导得

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{I}{l^2} \sin \theta (2 - 3 \sin^2 \theta)$$

令 $\frac{dE}{d\theta} = 0$, 解得

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

则可得

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} l$$

此时横向固定距离处的照度最大。以 $l = 1.0 \text{ m}$ 代入得

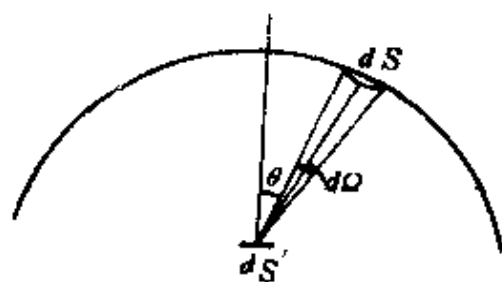
$$h = 0.7 \text{ m}$$

• 3. (1) 设天空为亮度均匀的朗伯体, 其亮度为 B , 试证明, 在露天水面上的照度 $E = \pi B$ 。

(2) 在上面的计算中, 与我们假设天空是怎样形状的发光面有无关系? 与被照射面的位置有无关系?

(3) 试证明, 一个理想漫射体受到照度为 E 的辐射时, 反射光的亮度 $B = E / \pi$ 。

证 (1) 如附图(a), 若天空为朗伯体, 由互易关系, 亮度为 B 的天空照射在水平面元 dS' 上的光通量 $\Delta\Phi'$ 等于亮度为 B 的面 dS' 发射于整个天空上的光通量 $\Delta\Phi$, 于是水平面元的照度为



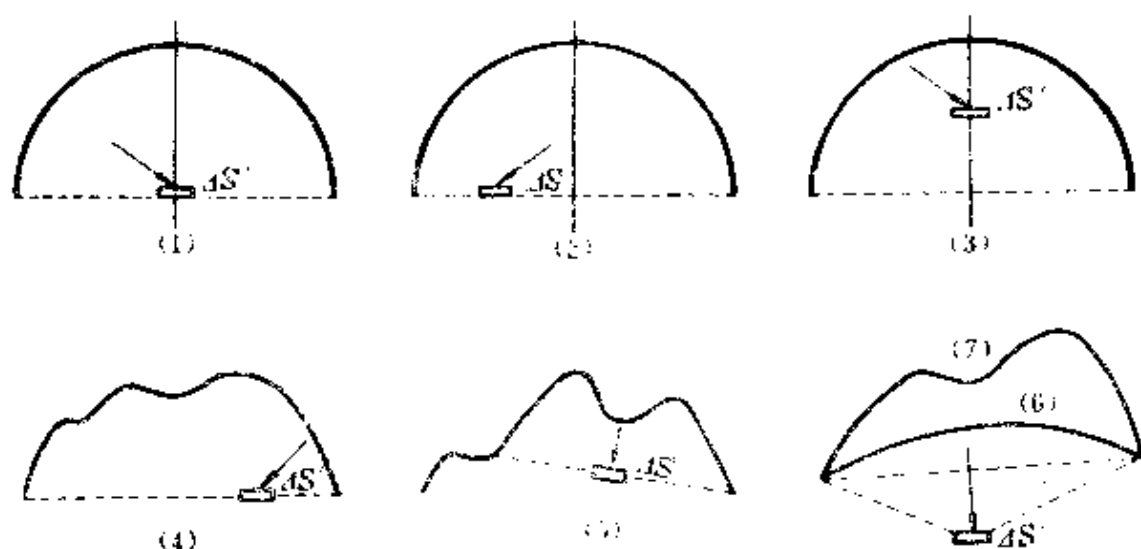
题3图(a)

$$\begin{aligned} E &= \frac{\Delta\Phi'}{dS'} = \frac{\Delta\Phi}{dS'} = \frac{1}{dS'} \iint B dS' \cos\theta d\Omega \\ &= \iint B \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \\ &= B \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \\ &= \pi B \end{aligned}$$

(2) 以上论证表明, 面元的照度决定于投射于该面元的总光通量, 也就决定于亮度为 B 的假想面元向实际面光源所张立

体角范围内所发射的光通量，显然，这个光通量数值与实际朗伯体的形状无关，而与立体角的大小有关。因此上面的计算结果与天空形状和水平被照面的位置均无关。按这个概念就可以对图(b)几种情况下的照度大小作出正确的判断。结果应当是

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4, \quad E_5 = \pi B \neq E_6 = E_7$$



题3图(b)

(3) 如果引入面发光度的概念，此题更易于证明。对于一个面光源来说，某处 dS 面元向外辐射的总光通量为 $d\Phi$ ，则定义

$$R = \frac{d\Phi}{dS}$$

为面光源该处的面发光度。对于朗伯体来说，如果亮度为 B ，则

$$d\Phi = \iint B dS \cos \theta d\Omega = B dS \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\pi B dS$$

所以亮度 B 与面发光度 R 的关系为

$$R = \pi B$$

当然，面光源既可以是真实的发光体，也可以是被照明的反射物。如果忽略吸收，反射物的照度便等于它作为光源的面发光度，即 $R = E$ 。如果它又是一个漫射体，当作朗伯体处理，则其亮度

$$B = \frac{R}{\pi} = \frac{E}{\pi}$$

4. 阳光垂直照射地面时, 照度为 $1.5 \times 10^{11} \text{ lx}$ 。若认为太阳的亮度与光流方向无关, 并忽略大气对光的吸收, 且已知地球轨道半径为 $1.5 \times 10^8 \text{ km}$, 太阳的直径为 $1.4 \times 10^6 \text{ km}$, 求太阳的亮度。

解一 设地面的照度为 E , 地球的轨道半径为 z , 太阳的半径为 r 。由球对称性和太阳的总光通量为

$$\Phi = E \cdot 4\pi z^2$$

太阳的面发光度为

$$R = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{E z^2}{r^2}$$

由面发光度与亮度的关系得太阳的亮度为

$$B = \frac{R}{\pi} = \frac{E z^2}{\pi r^2}$$

$$= 1.5 \times 10^{11} \text{ lm} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr} \quad (\text{流明} \cdot \text{米}^{-2} \cdot \text{球面度})$$

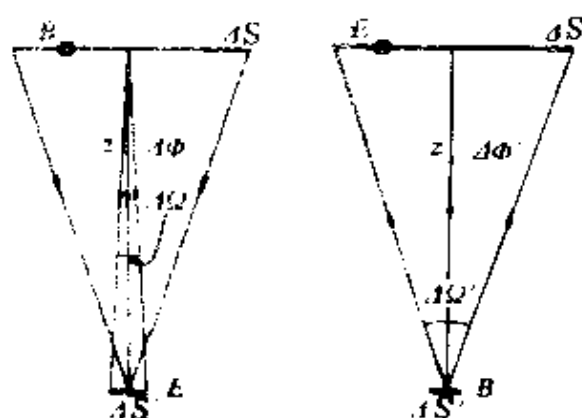
$$= 1.5 \times 10^8 \text{ 熙提}$$

如果考虑到光功当量为 $k_v = 683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$, 则太阳的亮度也可以表示为

$$B = 2.2 \times 10^8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr} \quad (\text{瓦} \cdot \text{米}^{-2} \cdot \text{球面度})$$

如果对大气层的吸收 (以致地面照度降低) 作修正, 并考虑到太阳辐射于整个波段 (不限于可见光范围) 的功率, 那么太阳辐射亮度值自然比以上数值还要高。目前在大气层上边界所测的太阳辐射亮度值为 $2 \times 10^{11} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}$ 。

解二 如附图, 根据



题 4 图

互易关系, 亮度为 B 的太阳照射在地球面元 $\Delta S'$ 上的光通量等于亮度为 B 的面元 $\Delta S''$ 照射在太阳上的光通量。即

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi' = B\Delta S'\Delta\Omega'$$

现已知太阳光投射于地球的照度 $E = \Delta\Phi/\Delta S'$, 又由太阳的半径和太阳至地球的距离可以算出太阳对地球所张的立体角 $\Delta\Omega' \approx \pi r^2/z^2$, 解出

$$B = \left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta S'}\right) \left(\frac{z^2}{\pi r^2}\right) = \frac{Ez^2}{\pi r^2} \\ = 1.5 \times 10^8 \text{ 熙提}$$

§ 12 象的亮度、照度和主观亮度

* 1. 太阳表面的辐射亮度为 $2 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \cdot \text{sr}$ 。用相对孔径 $D/f = 1.5$ 的放大镜将阳光聚集成光斑的最大辐射照度是多少?

解 在光能被聚焦, 用于点火、钻孔、熔化、烧毁等过程中, 起作用的光度学量是照度, 而不是光源本身的亮度。利用远物 (成象于聚光透镜的焦面附近) 成象的照度公式

$$E = \frac{\pi}{4} B \left(\frac{D}{f}\right)^2$$

以 $B = 2 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \cdot \text{sr}$, $D/f = 1.5$ 代入算出太阳象斑的最大辐射照度值为

$$E = 3.5 \times 10^7 \text{ W/m}^2$$

整个光斑集中的光功率 $\Delta W'$ 为

$$\Delta W' = E\Delta S'$$

式中 $\Delta S'$ 为光斑面积 (忽略衍射效应)。

$$\Delta S' = V^2 \Delta S = \left(\frac{f}{z}\right)^2 \Delta S$$

设 $f = 1 \text{ m}$, 取太阳面积 $\Delta S = \pi r^2 = \pi (1.1 \times 10^6/2)^2 \text{ km}^2$, 地球

到太阳的平均距离 $z = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ，求得

$$\Delta S' = \pi \frac{r^2}{z^2} f^2 = 0.68 \text{ cm}^2$$

如仍保持相对孔径为1.5,即选取透镜口径 $D = 1.5 \text{ m}$ (够大的了!), 则

$$\Delta W' = 2.4 \times 10^3 \text{ W}$$

通过以上讨论,应强调指出,远物成象的照度正比于相对孔径的平方,或象斑的面积正比于焦距平方。据此判断,相传古代阿基米德曾用长焦距镜面会聚日光烧毁远处敌舰的传说,只是一种没有科学根据的妄说。与长焦距匹配,应有足够大的镜面,才能获得较大的照度。

2. 一屏放在离烛100cm处,把一会聚透镜放在烛和屏之间,透镜有两个位置可以在屏上得到烛的象,这两个位置相距20cm,在屏上烛的两个象的照度相差多少倍?

解 这两对共轭物象满足互易关系,即物距 s_1 及其象距 s_1' , 物距 s_2 及其象距 s_2' 满足

$$s_2 = s_1'$$

$$s_1' = s_2$$

又 $s_1 + s_1' = s_1 + s_2 = l = 100 \text{ cm}$

$$s_1 - s_2 = \Delta S = 20 \text{ cm}$$

解出

$$s_1 = 60 \text{ cm}, \quad s_1' = 40 \text{ cm}$$

$$s_2 = 40 \text{ cm}, \quad s_2' = 60 \text{ cm}$$

对于朗伯体,两种情况下象面接收的光通量 $\Delta\Phi_1$, $\Delta\Phi_2$ 之比为

$$\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta\Phi_2} = \frac{k\pi B\sigma \sin^2 u_{1,0}}{k\pi B\sigma \sin^2 u_{2,0}} \approx \frac{u_{1,0}^2}{u_{2,0}^2} = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2$$

式中 k , B 和 σ 分别为透镜的透光系数, 光源的亮度和面积, u_{10} , u_{20} 分别为两种情况下的入射孔径角。成象面积 σ_1 , σ_2 之比为

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{s'_1}{s_1} \frac{s_2}{s'_2} \right)^2$$

所以象的照度之比

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} &= \left(\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta\Phi_2} \right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) = \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^2 \left(\frac{s'_1}{s'_2} \frac{s_1}{s'_1} \right)^2 \\ &= \left(\frac{s'_2}{s'_1} \right)^2 = \left(\frac{60}{40} \right)^2 = 2.25 \text{ 倍} \end{aligned}$$

即小象照度大。

3. 望远镜物镜的直径为 75 mm, 求放大率为 (1) 20 倍、(2) 25 倍、(3) 50 倍时, 望远镜中月亮的象的主观亮度与天然主观亮度之比。设眼瞳的直径为 3.0 mm。

解 天然主观亮度是无仪器时视网膜上象的照度, 计算公式为

$$H_0 = \frac{k\pi B}{4} \left(\frac{De}{f} \right)^2$$

有仪器时的视网膜上象的照度称为主观亮度, 计算公式为

$$H = \frac{k\pi B}{4} \left(\frac{De'}{f} \right)^2$$

式中 De 为有效眼瞳直径, 当望远镜出瞳直径 $D' \geq De$ 时, 应取 $De' = De$, 此时主观亮度与天然主观亮度相等, 当 $D' < De$ 时, 应取 $De' = D'$, 主观亮度小于天然主观亮度, 两者之比为

$$\frac{H_0}{H} = \left(\frac{De}{D'} \right)^2 = \left(\frac{DeM}{D} \right)^2$$

讨论 $De = 3.0 \text{ mm}$, $D = 75 \text{ mm}$ 时的情况:

(1) 当 $M = 25$ 时, 则

$$D' = \frac{D}{M} = 3.75 \text{ mm} > D_e = 3.0 \text{ mm}$$

此时

$$\frac{H_0}{H} = 1$$

(2) 当 $M = 25$ 时, 则

$$D' = \frac{D}{M} = 3.0 \text{ mm} = D_e$$

此时

$$\frac{H_0}{H} = 1$$

(3) 当 $M = 50$ 时, 则

$$D' = \frac{D}{M} = 1.5 \text{ mm} < D_e$$

此时

$$\frac{H_0}{H} = \left(\frac{D_e M}{D} \right)^2 = \left(\frac{3.0 \times 50}{75} \right)^2 = 4.0$$

4. 有一天文望远镜的物镜直径等于18 cm, 透光系数为0.50, 已知肉眼可直接观察到六等星。求:

(1) 用此望远镜所能看到的最高星等;

(2) 最适宜观察星的放大率 (正常放大率);

(3) 当放大率为10倍时可见到星的等次。设眼睛的瞳孔直径可取3.0 mm。

[注: 星等增加一等, 其亮度减少到 $1/\sqrt[5]{100} \approx 1/2.5$ 。]

解 (1) 此题应将星体当作点光源处理, 视网膜上象点的亮度直接取决于进入眼瞳的全部光通量。无望远镜时, 进入眼瞳的光通量为

$$\Delta\Phi_0 \propto D_e^2$$

有望远镜时, 进入物镜的光通量为

$$\Delta\Phi \propto D^2$$

考虑系统的透光系数 k , 从出瞳通过的光通量减为

$$\Delta\Phi' = k\Delta\Phi \propto kD^2$$

当 $D' \leq D_e$ 时, 显然从望远镜出瞳通过的光通量全部进入眼瞳, 故此时

$$\frac{\Delta\Phi'}{\Delta\Phi_0} = k \left(\frac{D}{D_e} \right)^2 = 0.50 \times \left(\frac{180}{3.0} \right)^2 = 1800$$

按天文学上关于星等划分标准, 此时所能看到的最高星等(弱星)为

$$\begin{aligned} N &= N_0 + \log_2 1800 = 6 + 8 \\ &= 14 \text{ 等} \end{aligned}$$

(2) 为满足 $D' \leq D_e$ 条件, 合理的设计应是望远镜的放大率 M 满足

$$D' = \frac{D}{M} \leq D_e$$

算出

$$M = \frac{D}{D_e} = \frac{180}{3.0} = 60 \text{ 倍}$$

(3) 若放大率过小, 以致 $D' > D_e$, 显然从望远镜出瞳通过的光通量只有部分进入眼瞳, 按比例应为

$$\Delta\Phi'' \propto k \left(\frac{D_e}{D'} \right)^2 D^2$$

故

$$\frac{\Delta\Phi''}{\Delta\Phi_0} = kM^2$$

当该望远镜的放大率 $M = 10$ 时, $D' = D/10 = 18 \text{ mm} > D_e$, 故按上式算出

$$\frac{\Delta\Phi''}{\Delta\Phi_0} = 50 \text{ 倍}$$

此时可见到的星等为

$$N' = N_0 + \log_{2.5} 50 = 6 + 4.3 \approx 10 \text{ 等}$$

*5. 求数值孔径为1.5的显微镜的正常放大率, 设瞳孔直径为3.0 mm

解 显微镜的数值孔径、放大率、出瞳孔径三者之间有一个简单关系:

$$D' = 2 s_0 \frac{N \cdot A}{|M|}$$

式中 s_0 为明视距离。显微镜的合理设计应使出瞳孔径 D' 等于眼瞳直径 D_0 , 在数值孔径 $N \cdot A$ 确定条件下, 此时放大率 (正常放大率)

$$|M| = \frac{2 s_0 N \cdot A}{D_0} = \frac{2 \times 250 \times 1.5}{3.0} = 250 \text{ 倍}$$

第二章 波动光学基本原理

§ 1 定态光波与复振幅描述

例 1. 钠黄光 (D 双线) 包含的波长为 $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$ 和 $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$, 设 $t = 0$ 时两波列的波峰在 O 点重合, 问:

(1) 自 O 点起算, 沿传播方向多远的地方两波列的波峰还会重合?

(2) 经过多长时间以后, 在 O 点又会出现两列波的波峰重合的现象?

解 (1) 波峰再重合时传播距离应为 λ_1 和 λ_2 的公倍数, 即

$$l = k\lambda_2 = (k + n)\lambda_1$$

式中 k, n 为满足上式之正整数。由上式得

$$k = n \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = \frac{n}{3} \times 2915$$

因此, 当 $n = 3$ 时, $k = 2915$, 得最小公倍数

$$l_m = n \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta\lambda} = 2915 \lambda_1 \approx 0.1736 \text{ cm}$$

即为再次重合时的传播距离。

有人认为再次重合时应满足 $k'\lambda_2 = (k' + 1)\lambda_1$, 则得

$$k' = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \approx 981.7$$

$$l' = k'\lambda_2 \approx 0.05788 \text{ cm}$$

由此可见, k' 并非整数, 这时两列波波峰并不严格重合。上述第一种考虑是可靠的, 计算结果是符合题意的。

(2) 这是关于扰动时间周期性的讨论, 不妨设光波长为 λ_1 的时间周期为 $T_1 = \lambda_1/c$, 光波长为 λ_2 的时间周期为 $T_2 = \lambda_2/c$, 仿照上面关于扰动空间周期性的讨论, 找出 T_1 和 T_2 的最小公倍数, 即为原点重新出现两种扰动峰值的时间间隔 t_m 。不过, 利用波动所具有的时间周期性和空间周期性的互相联系, 可以直接由(1)题求得的同时刻两波峰再次重合的纵向距离 l_m 算出同地点(原点)两波峰再次重合的时间间隔

$$t_m = \frac{l_m}{c} \approx 5.7879 \text{ ps (微微秒)}$$

它远远大于两种扰动本身的周期(3000倍左右)。

以上两题告诉我们, 两个非同频的简谐量的叠加结果仍然是一种周期性函数, 其周期长短与频差(或波长差, 或周期差)成反比, 频差越小, 则周期越长。“拍频”现象就是如此。

2. 写出沿 z 轴传播的平面波的复振幅。

解 沿 z 方向传播的平面波的位相分布为

$$\varphi(P) = kz + \varphi_0$$

其复振幅为

$$\tilde{U}(P) = A \exp i(kz + \varphi_0)$$

3. 写出在 xz 平面内沿与 z 轴成 θ 角的方向传播的平面波的复振幅。

解 如图, 该平面波波矢的三个分量分别为

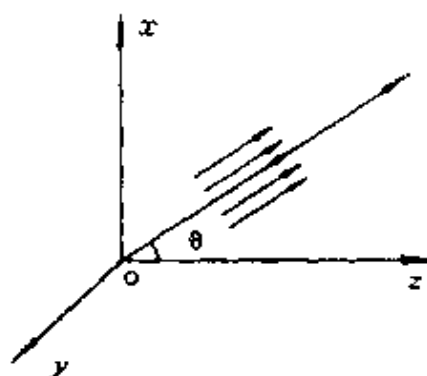
$$k_x = k \sin \theta, \quad k_y = 0, \quad k_z = k \cos \theta,$$

其复振幅为

$$\tilde{U}(P) = A \exp i[k(x \sin \theta + z \cos \theta) + \varphi_0]$$

4. 如附图, 一平面简谐波沿 x 方向传播, 波长为 λ , 设 $x = 0$ 点的位相 $\varphi_0 = 0$ 。

- (1) 写出沿 x 方向波的位相分布 $\varphi(x)$;
- (2) 写出沿 y 轴波的位相分布 $\varphi(y)$;
- (3) 写出沿 r 方向波的位相分布 $\varphi(r)$ 。



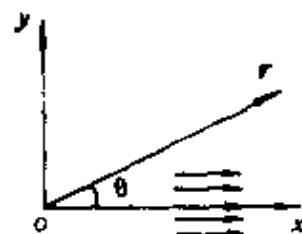
题 3 图

解 (1) $\varphi(x) = kx = \frac{2\pi}{\lambda}x$

(2) $\varphi(y) = -\varphi_0 = 0$

(3) $\varphi(r) = k \cdot r = k\hat{x} \cdot r = kr\cos\theta$

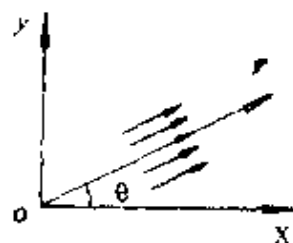
$$= \frac{2\pi}{\lambda}r\cos\theta$$



题 4 图

* 5. 如附图, 一平面简谐波沿 r 方向传播, 波长为 λ , 设 $r = 0$ 点的位相为 φ_0 。

- (1) 写出沿 r 方向波的位相分布 $\varphi(r)$;
- (2) 写出沿 x 轴波的位相分布 $\varphi(x)$;
- (3) 写出沿 y 轴波的位相分布 $\varphi(y)$ 。



题 5 图

解 (1) $\varphi(r) = kr + \varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}r + \varphi_0$

(2) $\varphi(x) = k \cdot x + \varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}x\cos\theta + \varphi_0$

(3) $\varphi(y) = k \cdot y + \varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}y\sin\theta + \varphi_0$

6. 写出向 $Q(x_0, y_0, z_0)$ 点会聚的球面波的复振幅。

解 如图, 设源点为 $Q(x_0, y_0, z_0)$, 场点为 $P(x, y, z)$, 则源点与场点的距离为

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

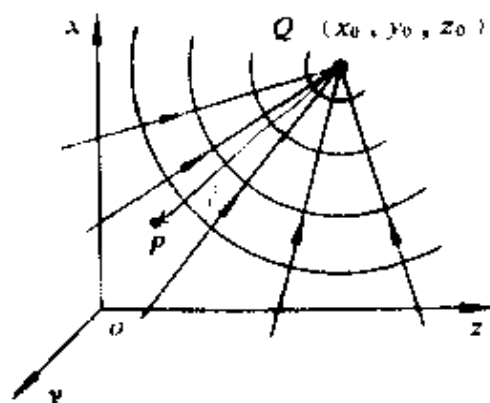
因为 Q 点是会聚中心, 所以沿靠近点源方向考察, 扰动位相逐点落后, 按符号约定应写成

$$\varphi(P) = \varphi(Q) - kr$$

再考虑到振幅系数, 这列球面波的复振幅为

$$\widetilde{U}(P) = \frac{A_0}{r} \exp[-i(kr + \varphi_0)]$$

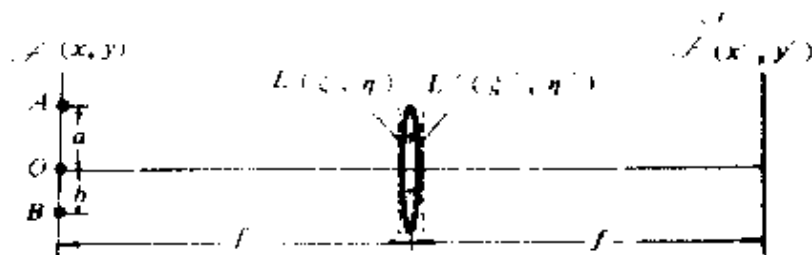
其 φ_0 为 Q 点源的实际初位相。



题 6 图

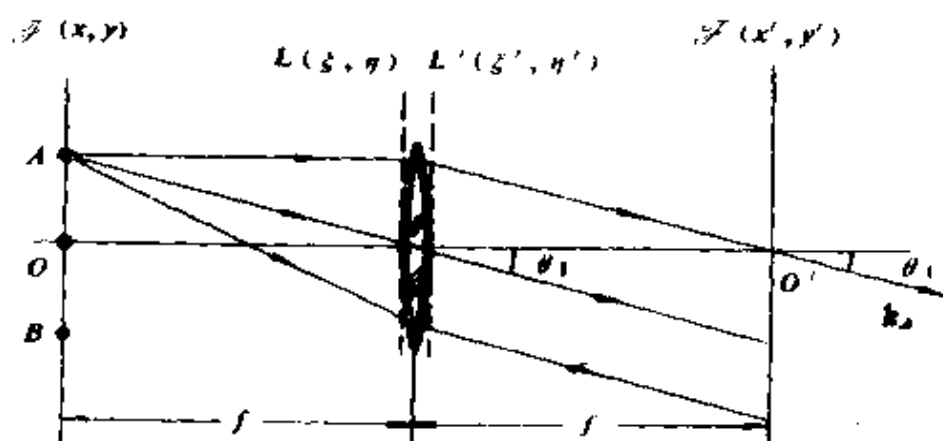
§ 2 波 前

1. 如附图 (a), 在一薄透镜的物方焦面上有三个点光源 O 、 A 、 B , 试分别写出由它们发出的光波经透镜折射后, 在象方焦面上产生的复振幅分布函数。



题 1 图 (a)

解 如图 (b), 处于前焦面上的三个点源 A 、 O 、 B 发射的球面波经透镜变换后, 成为三列平面波射于后焦面 (图中只画出了自 A 发出的一列)。设三列波的波长均为 λ , 波矢分别为 k_A , k_O , k_B , 其分量分别表示为



题 1 图 (b)

$$\begin{aligned} k_A &: (-k \sin \theta_1, 0, k \cos \theta_1) \\ k_O &: (0, 0, k) \\ k_B &: (k \sin \theta_2, 0, k \cos \theta_2) \end{aligned}$$

式中

$$k = |k_A| = |k_O| = |k_B| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{f^2 + a^2}}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{b}{\sqrt{f^2 + b^2}}$$

它们在后焦面上的复振幅分布函数分别为

$$\widetilde{U}_1(x', y') = A_1 \exp [-i(kx' \sin \theta_1 + \varphi_1)]$$

$$\widetilde{U}_0(x', y') = A_0 \exp (-i\varphi_0)$$

$$\widetilde{U}_2(x', y') = A_2 \exp [i(kx' \sin \theta_2 + \varphi_2)]$$

式中 $\varphi_1, \varphi_0, \varphi_2$ 分别是三列平面波在 $x'-y'$ 面上原点 O' 的实际初位相, A_1, A_0, A_2 分别是三列平面波的振幅。这些量将反映三个点源的发光强度和位相关系, 其具体数值在本题中并不要紧。

2. 考察上题中紧贴于薄透镜前后表面的两个平面的波前 $L(\xi, \eta)$ 和 $L'(\xi', \eta')$, 分别写出在傍轴条件下三列波在它们上面的复振幅分布。

解 在 $\mathcal{O}(x, y)$ 平面上三个点源的坐标分别为 $A(a, 0)$, $O(0, 0)$, $B(-b, 0)$, 在傍轴条件下, 它们与波前平面 $L(\xi, \eta)$ 的距离近似为焦距 f , 设三点源的初位相为零, 则其波前复振幅分布分别为

$$\widetilde{U}_A(\xi, \eta) = \frac{A_1}{f} \exp \left[ik \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2f} - \frac{a\xi}{f} + \frac{a^2}{2f} + f \right) \right]$$

$$\widetilde{U}_O(\xi, \eta) = \frac{A_0}{f} \exp \left[ik \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2f} + f \right) \right]$$

$$\widetilde{U}_B(\xi, \eta) = \frac{A_2}{f} \exp \left[ik \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2f} + \frac{b\xi}{f} + \frac{b^2}{2f} + f \right) \right]$$

式中 A_1, A_0, A_2 分别是三列傍轴球面波取决于点源强度的振幅系数。

三列球面波经透镜变换后成为三列平面波, 在 $L'(\xi', \eta')$ 平面上的波前函数与题1结果相同, 只是表达式中的参考位相 φ_0 ,

φ_0, φ_2 的含义有了变化, 应将它们看作三列平面波在 $L'(\xi', \eta')$ 平面原点的实际初位相。

3. 仿照上题的方法, 讨论一束倾斜的平行光经过一个凹透镜时, 在它前后两波前上复振幅分布的变化。

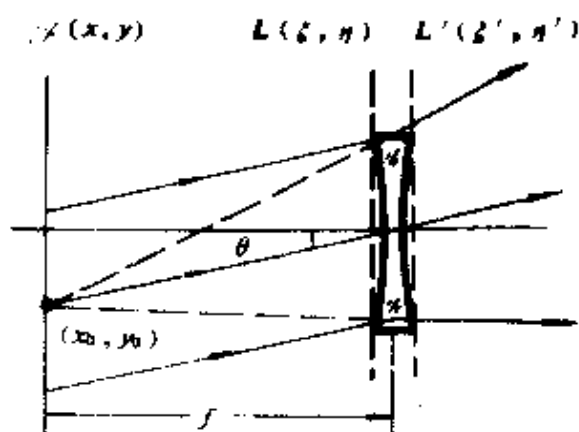
解 如图, 假定平行光与光轴成倾角 θ 。则在平面波前 $L(\xi, \eta)$ 上接收到的是斜入射的平面波, 在波前平面 $L'(\xi', \eta')$ 上接收到的是发散的球面波, 其中心在平面 $\Sigma(x, y)$ 上, 坐标为

(x_0, y_0) , 而且 $x_0 = -f \tan \theta, y_0 = 0$ 。设 $L(\xi, \eta)$ 平面上原点的初位相为零, 写出在该面上的波前函数为

$$\tilde{U}(\xi, \eta) = A \exp(ik\xi \sin \theta)$$

设发散中心 (x_0, y_0) 的初位相为零, 写出在 $L'(\xi', \eta')$ 平面上傍轴条件下的波前函数为

$$\tilde{U}(\xi', \eta') = A \exp \left[ik \left(-\frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2f} + \xi' \tan \theta + \frac{f \tan^2 \theta}{2} + f \right) \right]$$



题 3 图

§ 3 波的叠加和波的干涉

* 1. (1) 人眼视神经的时间响应能力约为 0.1s(秒), 在这段时间里光扰动经历了多少个周期?

(2) 目前光电接收器的最高时间响应能力可达 10^{-9} s(毫微秒量级), 在这段时间里光扰动经历了多少个周期?

(3) 自发辐射一列光波的持续时间不超过 10^{-6} s(秒), 其中约

包含多少次振动?

解 可见光波段的频率数量级为

$$\nu \approx 10^{14} \text{ Hz}$$

在人眼的可分辨的最小时间间隔 (时间响应能力) 0.1s 之内, 光扰动经历了

$$N_1 \approx 10^{14} \text{ 次}$$

即使对时间响应能力高达 10^{-8}s 的光电接收器来说, 在它可分辨的最小时间间隔内, 光扰动也经历了

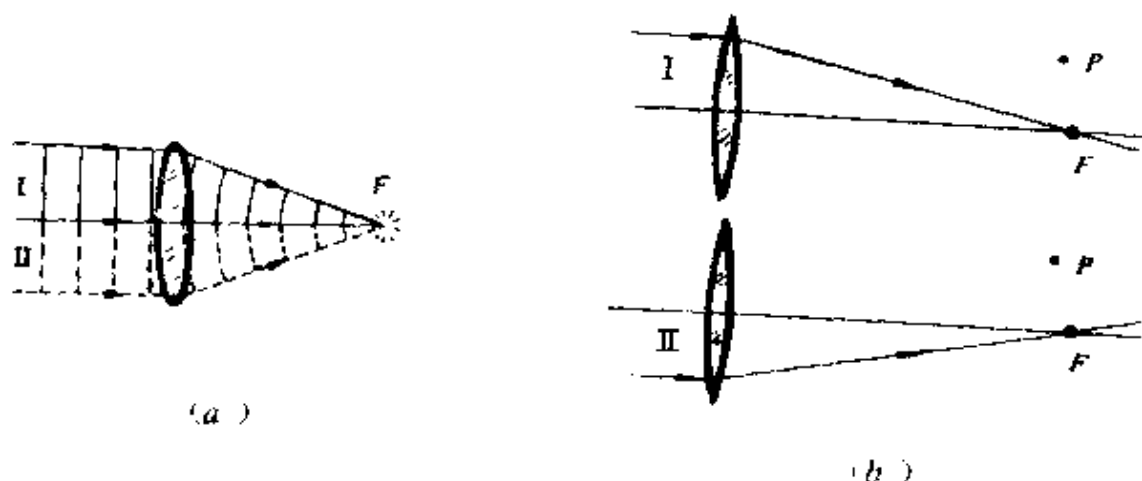
$$N_2 \approx 10^6 \text{ 次}$$

在波列持续时间为 10^{-8}s 这段时间内, 包含的扰动次数为

$$N_3 \approx 10^6 \text{ 次}$$

这些数量级表明, 鉴于光频很高, 目前接收器对光频的直接测量都是无能为力的。以上涉及三个时间尺度——光扰动周期 T , 持续发光时间 τ_0 , 接收仪器的时间响应能力 Δt , 当然实际测量过程中还有一个连续测量时间间隔 Δt 。自从激光问世以后, 在光的单色性不断提高的形势下, 虽然还是 $\Delta t \gg T$, 但已能够实现 $\Delta t \sim \tau_0$ 。这样, 对于干涉强度的测量就有了新的考虑, 它使两个独立的准单色光源产生的叠加场中干涉强度的不稳定性成为可分辨的了。换句话说, 如用高分辨的接收器 (配以适当的快门速度), 就可以拍摄下来一幅幅干涉图, 这一系列干涉图的区别只是空间略有位移。此时, 对于干涉强度第二次取时间平均的做法就不是绝对必要的了。

2. 在扩展强光束 (激光) 时。人们避免用“实聚焦”的方法 [附图 (a)], 因为在实焦点处的光功率密度太高, 可能引起空气“着火” (电离)。现在设想, 如果将入射光束挡住一半, 先后让 I, II 两部分聚焦于 F 点, 并不引起着火, 而同时开放, 让全部光束聚焦时, 就要发生空气着火现象。试问, 在这个过程中, 波的叠加原理是否成立? 这可算得是一种非线性效应吗?



题 2 图

解 两束光同时聚焦时焦点着火，这是一种次级效应。凡有了次级效应，波的叠加原理就将遭到破坏。为此，考虑轴外一点 P [如图 (b)]，显然，第一列波单独存在时，有

$$\tilde{U}_1(P) = 0$$

第二列波单独存在时，有

$$\tilde{U}_2(P) = 0$$

而两列波同时存在时，由于焦点着火，则

$$\tilde{U}(P) \neq 0$$

可见 $\tilde{U}(P) \neq \tilde{U}_1(P) + \tilde{U}_2(P)$

应该说，这是一种非线性效应。

§ 4 两个点源的干涉 杨氏实验

1. 在杨氏双孔实验中，孔距为 0.1 mm ，孔与幕的距离为 3 m ，对下列三条典型谱线求出干涉条纹的间距：

F 蓝线 (4861 \AA)，D 黄线 (5893 \AA)，A' 红线 (6563 \AA)。

解 根据杨氏双孔干涉条纹间距公式

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d}$$

得到三条谱线产生的条纹间距分别为

$$\Delta x_{\lambda_1} = 14.6 \text{ mm}, \Delta x_{\lambda_2} = 17.7 \text{ mm}, \Delta x_{\lambda_3} = 19.7 \text{ mm}$$

由此可见，如果入射光同时包含有这三条谱线或如白光那样的连续谱，则干涉场中将出现彩色条纹，它们分布在零级条纹两侧，短波蓝光靠里，长波红光靠外，而对各种波长来说，干涉零级位置是重合的。这也可以说是一种色散现象，是“干涉色散”效应。

* 2. 在杨氏双孔实验中，孔距为 0.45 mm ，孔与幕的距离 1.2 m ，测得10个亮纹之间的间距为 1.5 cm ，问光源的波长是多少？

解 由条纹间距可以推算本实验中光源的光波长为

$$\lambda = \frac{d}{D} \Delta x' = 6250 \text{ \AA}$$

在历史上，杨氏首先提出了“干涉”的概念，引入了“波长”一量，用波的叠加原理解释了薄膜的颜色，並设计了现在人所共知的著名的双缝干涉实验，来验证自己的理论。杨氏实验本身也就成为历史上最早测定光波长的一种实际方法。

3. 试计算两列相干光波的振幅比为下列数值时条纹的反衬度： $A_1/A_2 = 1, 1/3, 3, 1/6, 1/10$ 。

解 由双光束干涉反衬度与振幅比的关系式

$$p = \frac{2(A_1/A_2)}{1 + (A_1/A_2)^2}$$

得

当 $A_1/A_2 = 1$ 时， $p = 1$

当 $A_1/A_2 = 1/3$ 时， $p = 0.6$

当 $A_1/A_2 = 3$ 时， $p = 0.6$

当 $A_1/A_2 = 1/6$ 时， $p = 0.32$

当 $A_1/A_2 = 1/10$ 时， $p = 0.2$

* 4. 两束相干的平行光束，传播方向平行于 xz 面，对称

地斜射在记录介质 (xy 面) 上, 光波长为 6328 \AA , 问:

(1) 当两束光的夹角为 10° 时, 干涉条纹的间距为多少?

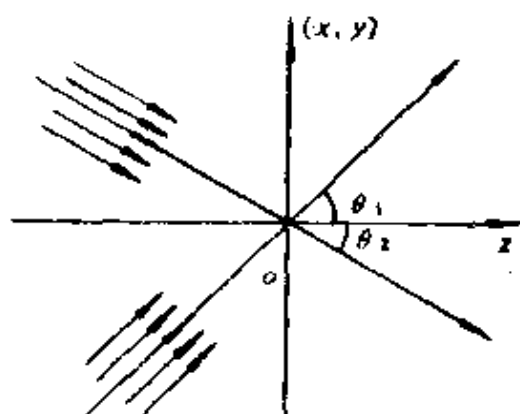
(2) 当两束光的夹角为 60° 时, 干涉条纹的间距为多少?

(3) 如果记录介质的空间分辨率为 2000 条/mm , 这介质能否记录上述两种条纹?

解 这种情况下, 干涉条纹走向与 x 轴正交, 即平行 y 轴。条纹间距公式为

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \theta_1 + \sin \theta_2}$$

$$= \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \quad (\text{对称入射})$$



题 4 图

θ_1, θ_2 角如图所示。

(1) 当 $\theta = 5^\circ$ 时, $\Delta x_1 = 3.6 \mu\text{m}$

(2) 当 $\theta = 30^\circ$ 时, $\Delta x_2 = 0.63 \mu\text{m}$

(3) 上述两种情况下干涉条纹的空间频率分别为

$$f_{1x} = \frac{1}{\Delta x_1} = 276 \text{ mm}^{-1}$$

$$f_{2x} = \frac{1}{\Delta x_2} = 1580 \text{ mm}^{-1}$$

均小于记录介质的空间分辨率, 所以该介质干板能记录上述两种条纹。

* 5. 在一焦距为 f 的薄凸透镜的物方焦面上有 O, Q 两个相干的点光源, O 在光轴上, Q 到光轴的距离为 a (满足傍轴条件)。

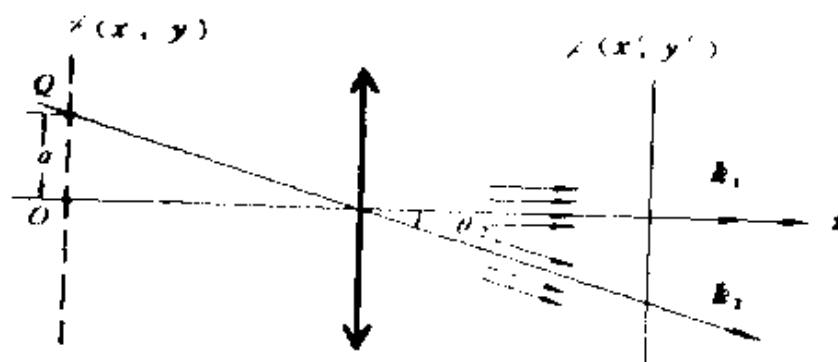
(1) 试分析象方焦面上接收到的干涉条纹的特征 (形状、间距和取向)。

(2) 如果将 \mathcal{S}' 上的屏幕向背离透镜的方向平移, 其上干涉

条纹有何变化?

解 (1) 如图, 后焦面 x' 上为两束平行光干涉, 只要将两束平行光相对于接收平面的倾角确定下来, 就能算出条纹间距。按题意 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 \approx a/f$ 条纹间距为

$$\Delta x' = \frac{\lambda}{\sin \theta_1 - \sin \theta_2} = -\frac{f\lambda}{a}$$



题 5 图

条纹形状为平行于 y' 轴 (与 O 、 Q 连线正交) 的一组平行条纹。

(2) 当接收屏幕移动时, 由于平行光束的倾角不变, 所以条纹形状、间隔、取向均不变; 但条纹总体上发生移动。当点源 Q 在 x 轴上方, 且屏幕移远时, 条纹向下方移动。当然, 当屏幕远离透镜过程中, 两光束的交叠区也随之减小, 将使条纹数目降低。

* 6. 如果在上题中把 O 点视为参考点源, Q 置于输入面 $x(x, y)$ 任何位置, 证明在输出面 $x'(x', y')$ 上的干涉条纹与 Q 点位置 (x, y) 有如下关系:

(1) 空间频率

$$\begin{cases} f_{x'} = \frac{1}{\Delta x'} = \frac{|x|}{\lambda f} \\ f_{y'} = \frac{1}{\Delta y'} = \frac{|y|}{\lambda f} \end{cases}$$

(2) 条纹取向 θ (与 x' 轴的夹角) 由下式决定

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{x}{y}$$

(3) 同一个 θ 值, 对应 Q 的几个方位? 用什么方法可将它们区别开来? (此题具体体现了干涉条纹是如何记录了波前上的位相分布, 从而记录了点源位置的。它实际上就是一张最简单的全息图。)

解 (1) 在 \mathcal{S}' 面上仍为两束平行光的干涉。来自 O 点的平行光正入射于 \mathcal{S}' 面, 其波前函数为

$$\widetilde{U}_1(x', y') = A_1$$

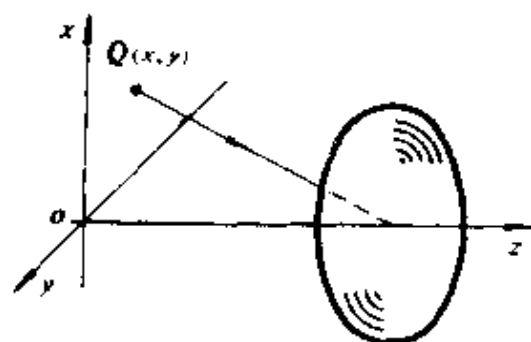
来自 Q 点的平行光斜入射于 \mathcal{S}' 面, 其波前函数为

$$\widetilde{U}_2(x', y') = A_2 \exp[ik(x' \cos \alpha + y' \cos \beta)]$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 是该波矢的方向余弦, 也就是点源 Q 指向透镜光心矢量 (如图 (a) 所示) 的方向余弦, 它们应当为

$$\cos \alpha = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} \approx -\frac{x}{f}$$

$$\cos \beta = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} \approx -\frac{y}{f}$$



题 6 图 (a)

因本题不涉及条纹的反衬度, 不妨设两列波的振幅相等; 本题也不关心亮 (暗) 纹的具体位置, 不妨设两列波在 \mathcal{S}' 面原点的位相相同。于是, 干涉强度分布函数为

$$\begin{aligned} I(x', y') &= (\widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2)(\widetilde{U}_1^* + \widetilde{U}_2^*) \\ &= I_0 [1 + \cos \delta(x', y')] \end{aligned}$$

式中位相差

$$\begin{aligned}\delta(x', y') &= k(x' \cos \alpha + y' \cos \beta) \\ &\approx k \frac{xx' + yy'}{f}\end{aligned}$$

故

$$I(x', y') = I_0 \left[1 + \cos \left(-\frac{kx}{f} x' + \frac{ky}{f} y' \right) \right]$$

相因子中的线性系数是强度分布的空间圆频率，于是求得条纹的空间频率分别为

$$f_{x'} = \left| \frac{kx}{2\pi f} \right| = \frac{|x|}{\lambda f}$$

$$f_{y'} = \left| \frac{ky}{2\pi f} \right| = \frac{|y|}{\lambda f}$$

或者说，条纹的空间周期为

$$\Delta x' = \frac{1}{f_{x'}} = \frac{\lambda f}{|x|}$$

$$\Delta y' = \frac{1}{f_{y'}} = \frac{\lambda f}{|y|}$$

(2) 由

$$\delta(x', y') = \text{常数} \quad (\text{不妨设为 } 0)$$

可以得到条纹的轨迹方程为

$$xx' + yy' = 0$$

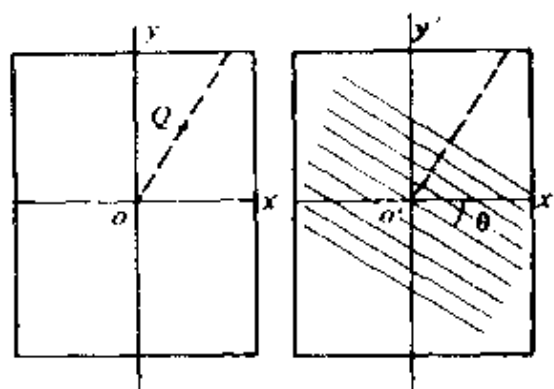
即

$$y' = -\frac{x}{y} x'$$

由方程可知条纹的形状为直线，如图 (b) 所示，斜率为

$$\tan \theta = \frac{x}{y}$$

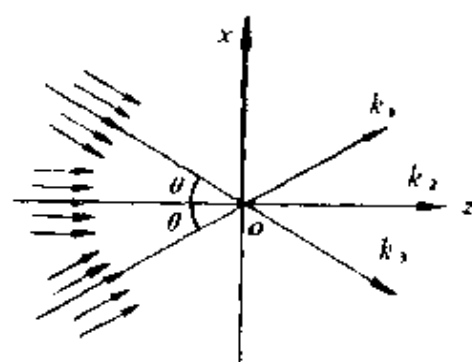
(3) 以上结果表明, 我们通过对条纹间距和条纹斜率的测量, 来确定点源 Q 的位置坐标。当 Q 点越靠近 O 点时, 条纹间距越大, 因而越便于测量, 从中可以初步看到这种干涉定位对于结构分析的意义。



题 6 图 (b)

但是, 我们还应注意到对同一斜率, 点源 Q 可能有两个位置, 这两个位置以原点为中心对称 (如一、三象限, 或二、四象限)。此时, 仅根据静态条纹的特征是无法唯一确定 Q 点位置的。可是当接收屏幕稍有移动时, 区别便显示出来了。当屏幕稍稍远离透镜时, 若条纹移动趋势向着 $x'y'$ 平面的第一象限, 则点源 Q 位于 xy 平面的第三象限。

* 7. 如图附(a), 三束平行光在 origin O 处的初位相 $\varphi_{10} = \varphi_{20} = \varphi_{30} = 0$, 振幅比 $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 2 : 1$, 传播方向与 xz 面平行, 与 z 轴夹角为 $\theta, 0, -\theta$, 试用复数法和矢量图解法求波前 $z = 0$ 面上的强度分布函数, 并分析干涉条纹的特征。



题 7 图 (a)

解 (1) 复数法

本题是三束平行光的干涉问题。因三束光是相干的, 其波矢数值相等, 即

$$k_1 = k_2 = k_3 = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

根据入射倾角, 可以写出三束平行光在 xy 平面上的位相分布函数分别为

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= kx \sin \theta \\ \varphi_2(x, y) &= 0 \\ \varphi_3(x, y) &= -kx \sin \theta\end{aligned}$$

相应的复振幅分布函数分别为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(x, y) &= A_1 \exp(i k x \sin \theta) \\ \tilde{U}_2(x, y) &= A_2 = 2A_1 \\ \tilde{U}_3(x, y) &= A_1 \exp(-i k x \sin \theta) \\ &= A_1 \exp(i k x \sin \theta)\end{aligned}$$

总的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x, y) &= \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3 \\ &= A_1 \exp(i k x \sin \theta) + 2A_1 + A_1 \exp(-i k x \sin \theta) \\ &= 2A_1 [1 + \cos(kx \sin \theta)]\end{aligned}$$

因此干涉场 xy 面上的强度分布函数为

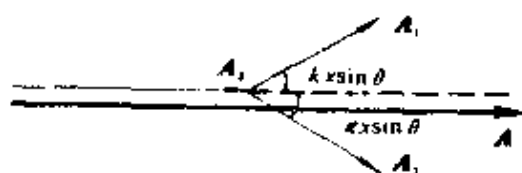
$$\begin{aligned}I(x, y) &= \tilde{U}(x, y) \tilde{U}^*(x, y) \\ &= 4A_1^2 [1 + \cos(kx \sin \theta)]^2 \\ &= 4I_0 [1 + 2\cos(kx \sin \theta) + \cos^2(kx \sin \theta)] \\ &= I(x)\end{aligned}$$

式中 $I_0 = A_1^2$, 为 k_1 波或 k_3 波的强度。强度分布与 y 无关, 说明干涉条纹为垂直于 x 轴的一系列直线。

(2) 矢量图解法

可根据矢量与复数的对应关系作矢量图如附图 (b)。图中

$$\begin{aligned}\vec{A}_1 &\leftrightarrow \tilde{U}_1 \\ \vec{A}_2 &\leftrightarrow \tilde{U}_2 \\ \vec{A}_3 &\leftrightarrow \tilde{U}_3 \\ \vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 &\leftrightarrow \tilde{U}\end{aligned}$$



题 7 图 (b)

如图可得合矢量的长度为

$$A = A_1 \cos(kx \sin \theta) + A_2 + A_3 \cos(-kx \sin \theta) \\ = 2A_1 [1 + \cos(kx \sin \theta)]$$

因此强度分布为

$$I(x, y) = A^2 = 4A_1^2 [1 + \cos(kx \sin \theta)]^2 \\ = 4I_0 [1 + 2\cos(kx \sin \theta) + \cos^2(kx \sin \theta)]$$

结果与用复数法求得的完全一样。

(3) 进一步分析干涉条纹的特征

为此, 可以作出强度分布曲线。先把强度分布函数改写成三项之和, 即

$$I(x) = I_1' + I_2' + I_3'$$

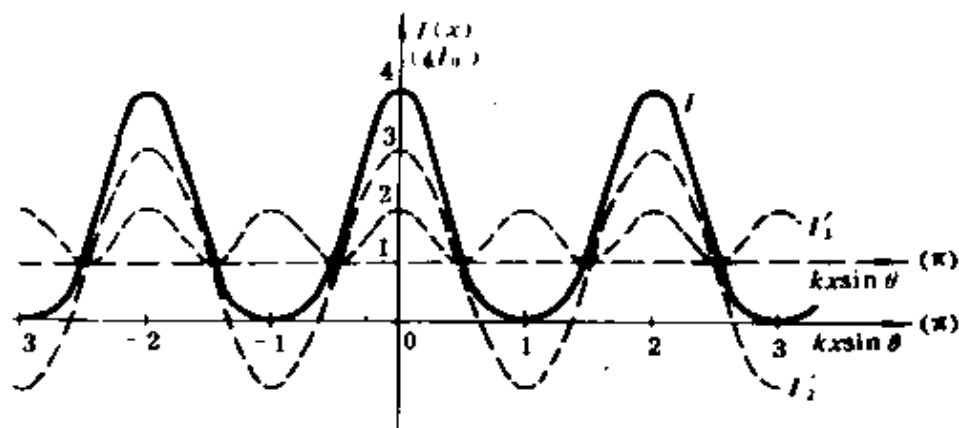
式中

$$I_1' = 4I_0$$

$$I_2' = 8I_0 \cos(kx \sin \theta)$$

$$I_3' = 4I_0 \cos^2(kx \sin \theta)$$

以 $4I_0$ 为单位取纵坐标 $I(x)$, 以 π 为单位取横坐标 $kx \sin \theta$, 先作出 I_1' , I_3' 曲线 (附图 (c) 中虚线), I_2' 和 I_3' 合成后再把横坐标下移一个单位, 即得总的强度分布曲线, 如附图 (c) 中实线所示。



题 7 图 (c)

由此可见, 干涉条纹具有以下特征:

1) 由强度分布 $I(x, y) = I(x)$, 与 y 无关已经知道干涉

条纹为垂直于 x 轴的直线。由强度分布曲线看到，除主极大外并无次极大，因此 xy 平面上只有一组直线条纹。

2) $I(x)$ 的空间周期与 $I'_0(x)$ 相同，因此条纹间隔为

$$\Delta x = \frac{2\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

3) 强度极大 $I_M = 16 I_0$ ，即 k_1 波或 k_2 波单独存在时的 16 倍。强度极小 $I_m = 0$ ，因此条纹的反衬度

$$y = 1$$

4) 如果没有 k_2 波，只有 k_1 波和 k_3 波造成双光束干涉，则

$$\begin{aligned} \tilde{U}'(x, y) &= \tilde{U}_1 + \tilde{U}_3 \\ &= A_1 \exp(i k x \sin \theta) + A_1 \exp(-i k x \sin \theta) \\ &= 2 A_1 \cos(k x \sin \theta) \\ I'(x, y) &= \tilde{U}'(x, y) \tilde{U}'^*(x, y) \\ &= 4 A_1^2 \cos^2(k x \sin \theta) \\ &= 4 I_0 \cos^2(k x \sin \theta) \end{aligned}$$

因此

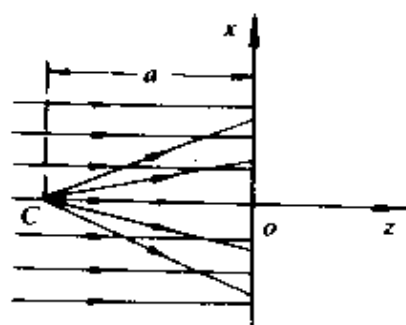
$$I'_M = 4 I_0, I'_m = 0, y' = 1 - y$$

$$\Delta x' = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} \Delta x$$

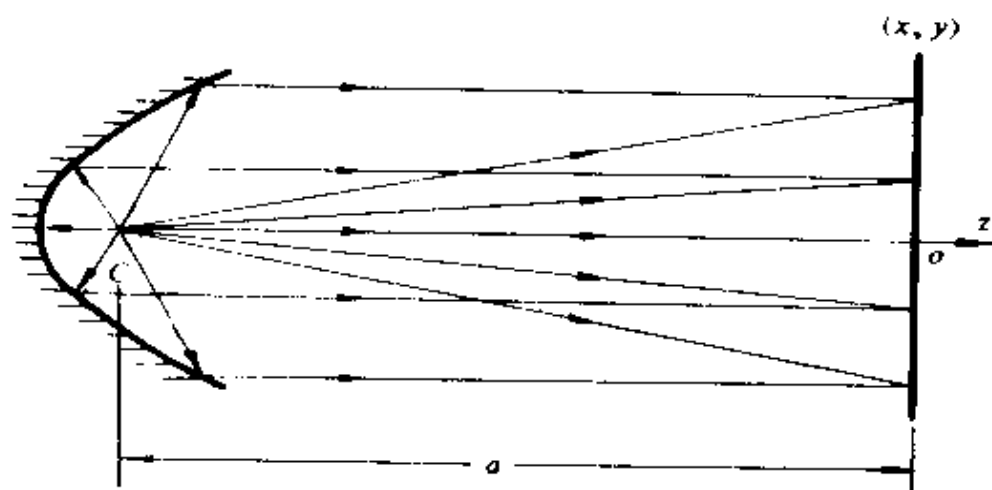
即条纹反衬度与三光束干涉时一样，条纹间隔比三光束干涉时缩小一半。但由于 $I_M = 4 I'_M$ ，与双光束干涉相比，三光束干涉条纹的锐度增加。参与干涉效应的光束数目越多，则干涉条纹越加细锐，这是多光束干涉的普遍特征，在本题三光束干涉的结果中已经初步看到这一趋势。

8. 如附图 (a)，一列平面波 \tilde{U}_1 正入射于波前 $z = 0$ 面上，与一列球面波 \tilde{U}_2 在傍轴范围内发生干涉，试分析干涉条纹的特征。

解 本题是平面波和球面波的干涉问题。实验上可以采用如图 (b) 所示的装置, 把一点源置于旋转抛物面反射镜的焦点上, 则经反射后照射在屏幕上的是一列正入射的平面波, 由点源直接照射在屏幕上的是一列发散的球面波, 且发散中心在轴上。



题 8 图 (a)



题 8 图 (b)

据题意可写出 xy 平面上平面波和傍轴球面波的复振幅分布函数分别为

$$\tilde{U}_1(x, y) = A_1$$

$$\tilde{U}_2(x, y) = A_2 \exp \left[i \left(k \frac{x^2 + y^2}{2a} + \phi_{20} \right) \right]$$

式中 ϕ_{20} = 常数, 为两列波在 origin O 处的位相差。因此总的复振幅分布为

$$\tilde{U}(x, y) = A_1 + A_2 \exp \left[i \left(k \frac{x^2 + y^2}{2a} + \phi_{20} \right) \right]$$

干涉强度分布为

$$\begin{aligned}
I(x, y) &= \tilde{U}(x, y) \tilde{U}^*(x, y) \\
&= \{A_1 + A_2 \exp[-i(k \frac{x^2 + y^2}{2a} + \varphi_{20})]\} \\
&\quad \{A_1 + A_2 \exp[-i(k \frac{x^2 + y^2}{2a} + \varphi_{20})]\} \\
&= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(k \frac{x^2 + y^2}{2a} + \varphi_{20}) \\
&= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \delta(x, y)
\end{aligned}$$

式中 $\delta(x, y) = k \frac{x^2 + y^2}{2a} + \varphi_{20}$, 它是 xy 面上任一场点两列波的位置相差。 $\delta(x, y) = \text{常数}$ 的轨迹即为等强度的轨迹, 也即干涉条纹的轨迹。因此任一干涉条纹的轨迹方程为

$$x^2 + y^2 = r^2 = \text{常数}$$

这是中心在坐标原点的圆的标准方程。由此可见干涉条纹形状是以原点为中心的一系列同心圆环。原点的强度究竟是亮还是暗, 取决于 φ_{20} 值。

第 N 级亮环条件为

$$k \frac{x^2 + y^2}{2a} + \varphi_{20} = N 2\pi$$

如 φ_{20} 为 2π 的整数倍, 即相当于原点为亮点的情形, 这时可略去 φ_{20} 不写, 得

$$\begin{aligned}
r_N^2 = x^2 + y^2 &= \frac{2a}{k} N 2\pi \\
&= N 2a\lambda \quad (N = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

则由中心向外第 N 个亮环的半径为

$$r_N = \sqrt{N 2a\lambda} = \sqrt{N} r_1$$

式中 r_1 为中心向外第一个亮环的半径。上式即为亮环的半径公式, 它与菲涅耳波带片半波带的半径公式 $\rho_N = \sqrt{N} \rho_1$ 形式一致。菲涅耳波带片是黑白型的。如在本题装置中, xy 面上用感光底片接

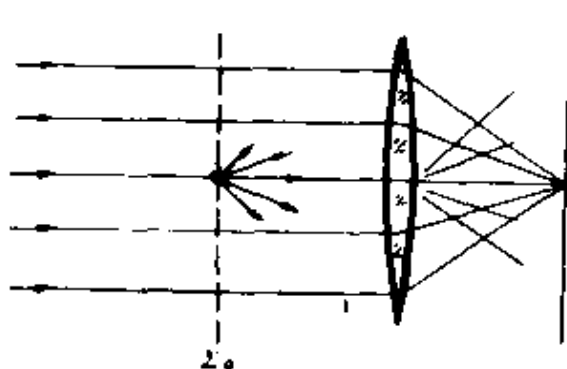
收，则径线性冲洗后可以得到一张正弦型的波带片。从全息照相的眼光看，该正弦型波带片是一张全息图，平行光作为参考光波，记录的是点源发出的物光波，这是后话。

§ 5 光的衍射现象和惠更斯—菲涅耳原理

* 1. 当一束截面很大的平行光束遇到一个小小的墨点时，有人认为它无关大局，其影响可以忽略，后场基本上还是一束平行光，这个看法对吗？你能设想一种场合，这小小墨点造成的后果是不可忽视的吗？

解 如图，不妨通过小墨点作一个假想平面 Σ_0 ，惠更斯—菲涅耳原理表明，后场是 Σ_0 面上所有次波源相干叠加的结果。如果没有墨点，相干叠加结果在后场仍为单纯的平行光。如果有了一个墨点，后场就少了一些相干叠加

成分。原波面在这一局部的缺损所带来的影响将牵动整个后场，将明显地影响后场的方向性。使后场衍射波通过聚焦透镜，就能容易地监测到小墨点的影响。若平行光通行无阻，经透镜后在后焦面上出现一个亮点（在轴上），



题 1 图

轴外强度为零。若有一个墨点在前场，后焦面上轴外的衍射强度就不为零了。按巴俾涅原理，有墨点时的轴外衍射强度分布就是与墨点互补的圆孔衍射图样。

总之，在分析衍射问题时，要十分注意相干叠加这一特点。相干叠加可以使“部分大于整体”，使“局部牵动全局”。整个衍射场如同一张绷紧的弹簧床，不论那里断缺了几个小弹簧，必将影响整个床的形态，其影响波及整个衍射场。须知，波场中波面上各次波源是互相关联的。在光路中有一个小墨点，同光路

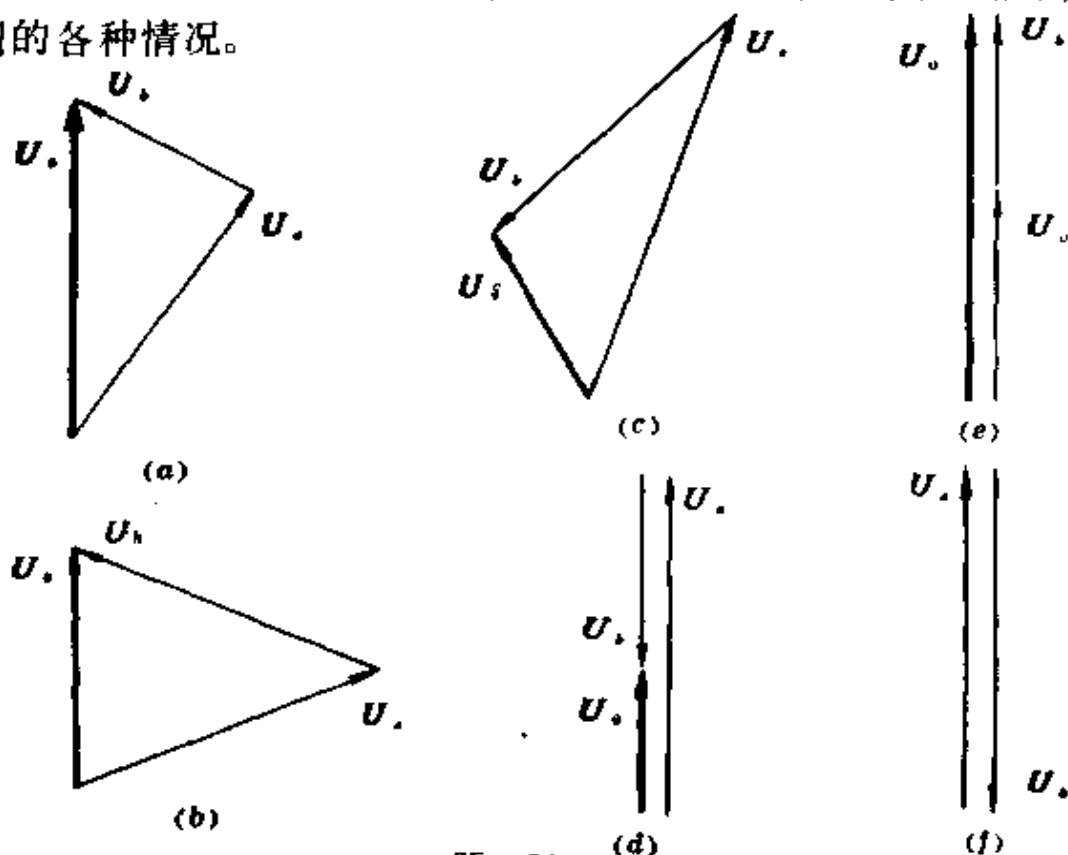
中有一个小孔一样，都将成为“散射源”。这一概念在下一节关于菲涅耳圆孔、圆屏衍射问题的分析中将更为明确。

2. 关于两个互补屏在同一场点的衍射强度之关系，有人说一个强度是亮（暗）的，则另一个强度是暗（亮）的。这样理解衍射巴俾涅定理，对吗？

解 这里又一次涉及对于相干叠加概念的理解问题。巴俾涅定理告诉我们，互补屏产生的两个场 $\tilde{U}_a(P)$, $\tilde{U}_b(P)$ 与自由场 $\tilde{U}_0(P)$ 满足恒等式

$$\tilde{U}_a(P) + \tilde{U}_b(P) = \tilde{U}_0(P)$$

这是复振幅关系式，其中隐含了位相差的作用，不是简单的代数关系，反映在矢量图解上，三者是一个三角关系，这就可能出现如图的各种情况。



题 2 图

- | | |
|---|--|
| (a) $ \tilde{U}_a , \tilde{U}_b < \tilde{U}_0 $; | (b) $ \tilde{U}_a = \tilde{U}_b < \tilde{U}_0 $ |
| (c) $ \tilde{U}_a > \tilde{U}_b > \tilde{U}_0 $; | (d) $ \tilde{U}_a = \tilde{U}_b = \tilde{U}_0 $ |
| (e) $ \tilde{U}_a + \tilde{U}_b = \tilde{U}_0 $; | (f) $ \tilde{U}_a = \tilde{U}_b , \tilde{U}_0 = 0$ |

§ 6 菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射

1. 在菲涅耳圆孔衍射实验中,圆孔半径 2.0mm ,光源离圆孔 2.0m ,波长 $0.5\mu\text{m}$,当接收屏幕由很远的地方向圆孔靠近时,求:

(1) 前三次出现中心亮斑(强度极大)的位置;

(2) 前三次出现中心暗斑(强度极小)的位置;

解 由菲涅耳圆孔衍射半波带半径公式

$$\rho_k = \sqrt{\frac{Rb}{R+b}} k\lambda$$

得

$$k = \frac{\rho_k^2}{\lambda} \frac{1}{b} + \frac{\rho_k^2}{\lambda} \frac{1}{R}$$

上式说明在圆孔半径 ρ ,光源离圆孔距离 R ,光波长 λ 等量确定时,圆孔所露半波带数 k 与观察点离圆孔距离 b 之间呈双曲线关系, b 减小时 k 不断增加。当 $b \rightarrow \infty$ 时得

$$k = \frac{\rho^2}{\lambda R} = \frac{(2.0 \times 10^{-3})^2}{0.5 \times 10^{-6} \times 2.0} = 4$$

所以屏幕由很远处向圆孔靠近时, $k > 4$ 。当 $k = 5, 7, 9$ 时出现前三次亮斑,除无穷远外,当 $k = 6, 8, 10$ 时出现前三次暗斑。为了计算亮、暗斑位置 b ,将上式改写为

$$b = \frac{R\rho^2}{kR\lambda - \rho^2}$$

以 $R = 2.0\text{m}$, $\rho = 2.0\text{mm}$, $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ 代入得

$$b_k = \frac{8.0}{k - 4.0} \text{ m}$$

(1) 分别取 $k = 5, 7, 9$ 得前三次出现中心亮斑的位置分别为

$$b_5 = \frac{8.0}{5 - 4.0} = 8.0 \text{ m}$$

$$b_7 = \frac{8.0}{7 - 4.0} = 2.7 \text{ m}$$

$$b_9 = \frac{8.0}{9 - 4.0} = 1.6 \text{ m}$$

(2) 分别取 $k = 6, 8, 10$ 得前三次出现中心暗斑的位置分别为

$$b_6 = \frac{8.0}{6 - 4.0} = 4.0 \text{ m}$$

$$b_8 = \frac{8.0}{8 - 4.0} = 2.0 \text{ m}$$

$$b_{10} = \frac{8.0}{10 - 4.0} = 1.3 \text{ m}$$

2. 在菲涅耳圆孔衍射实验中, 光源离圆孔 1.5 m , 波长 $0.63 \mu\text{m}$, 接收屏幕与圆孔距离 6.0 m , 圆孔半径从 0.5 mm 开始逐渐扩大, 求:

(1) 最先的两次出现中心亮斑时圆孔的半径;

(2) 最先的两次出现中心暗斑时圆孔的半径

解 由菲涅耳圆孔衍射半波带半径公式

$$\rho_k = \sqrt{\frac{Rb}{R+b} k \lambda} = \sqrt{k \rho_1}, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{Rb \lambda}{R+b}}$$

得

$$k = \frac{R+b}{Rb\lambda} \rho_k^2$$

上式说明在目前光源离圆孔距离 R ，观察点离圆孔距离 b ，光波长 λ 等量确定的条件下，圆孔露出半波带数 k 和圆孔半径 ρ_k 之间呈二次抛物线关系。当圆孔半径 ρ_k 逐渐扩大时，所露出半波带数显然增加。

开始 $\rho_k = 0.5 \text{ mm}$ 时，算得露出半波带数目为

$$k = 0.33$$

所以圆孔扩大过程中，当 $k = 1, 3$ 时出现头两次中心亮斑，当 $k = 2, 4$ 时出现头两次中心暗斑，代入数据得

$$\rho_k = \sqrt{k} \rho_1 = \sqrt{k} (0.87 \text{ mm})$$

(1) 分别取 $k = 1, 3$ 得最先两次出现中心亮斑的圆孔半径分别为

$$\rho_1 = \sqrt{1} \rho_1 = 0.87 \text{ mm}$$

$$\rho_3 = \sqrt{3} \rho_1 = 1.5 \text{ mm}$$

(2) 分别取 $k = 2, 4$ 得最先两次出现中心暗斑的圆孔半径分别为

$$\rho_2 = \sqrt{2} \rho_1 = 1.2 \text{ mm}$$

$$\rho_4 = \sqrt{4} \rho_1 = 1.7 \text{ mm}$$

3. 用直刀口将点光源的波前遮住一半（直边衍射），几何阴影边缘点上的光强是自由传播时的多少倍？

解 这种情况相当于自由传播时的所有半波带都被遮掉一半，各半环（半波带）对场点贡献的振幅因而减半，而位相关系不变。故此时场点的合成振幅为

$$A(P_0) = \frac{1}{2} A_0(P_0)$$

强度

$$I(P_0) = \frac{1}{4} I_0$$

即几何阴影线上各点的光强是自由传播时的四分之一。而几何阴影区内的光强将急剧衰减，具体计算颇费功夫，可参阅一般光学

书籍。

4. 求圆孔中露出 1.5 个半波带时衍射场中心强度与自由传播时强度之比。

解 作振动矢量图 如图 所示, 由图可知此时场点振幅

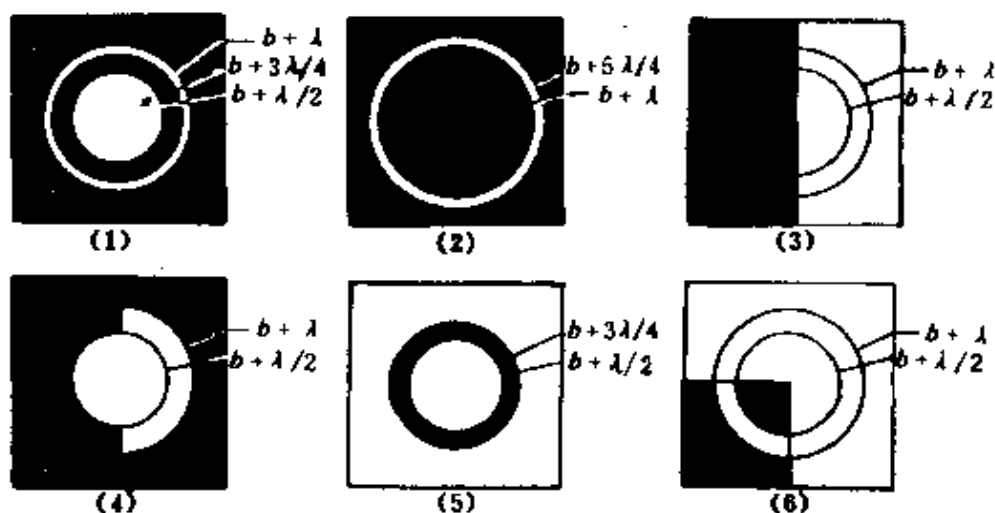
$$A(P_0) = \sqrt{2} A_0(P_0)$$

强度

$$I(P_0) = 2 I_0(P_0)$$

即 1.5 个半波带中心强度为自由传播时的 2 倍。

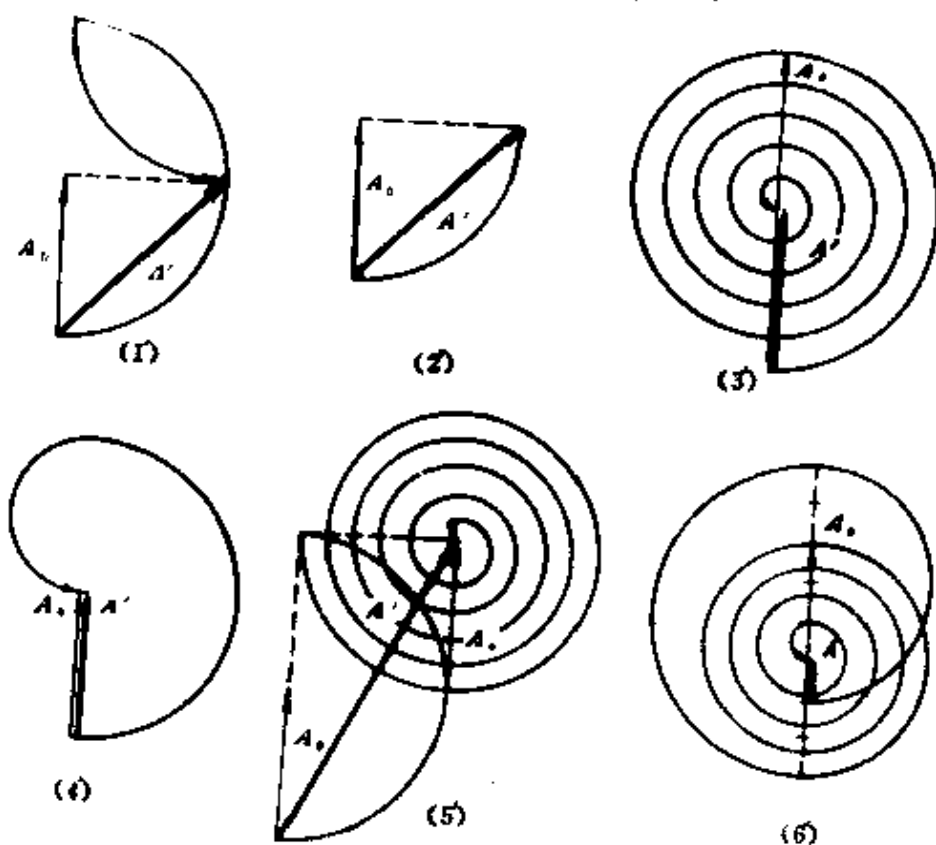
* 5. 用平行光照明衍射屏, 屏对波前作如附图 (1) — (6) 的几种方式的遮挡, 分别求轴上场点的光强与自由传播时之比 (附图中标出的是该处到场点的光程, 其中 b 是中心到场点的光程)。



题 5 图

解 设加衍射屏后轴上场点的振幅为 A' , 光强为 I' ; 自由传播时轴上场点的振幅为 A_0 , 光强为 I_0 。分别作振动矢量图如附

图 (1') ~ (6')，由振动矢量图分别求得：



题 5 图

(1) $A' = \sqrt{2} A_0$, $I' = 2 I_0$, 即

$$\frac{I'}{I_0} = 2$$

(2) $A' = \sqrt{2} A_0$, $I' = 2 I_0$, 即

$$\frac{I'}{I_0} = 2$$

(3) $A' = \frac{1}{2} A_0$, $I' = \frac{1}{4} I_0$, 即

$$\frac{I'}{I_0} = \frac{1}{4}$$

(4) $A' = A_0$, $I = I_0$, 即

$$\frac{I'}{I_0} = 1$$

(5) $A' = \sqrt{(2 A_0)^2 + A_0^2} = \sqrt{5} A_0$, $I' = 5 I_0$, 即

$$\frac{I'}{I_0} = 5$$

$$(6) \quad A' = \frac{1}{4} A_0, \quad I' = \frac{1}{16} I_0, \text{ 即}$$

$$\frac{I'}{I_0} = \frac{1}{16}$$

6. 若一个菲涅耳波带片只将前五个偶数半波带挡住, 其余地方都开放, 求衍射场中心强度与自由传播时之比。

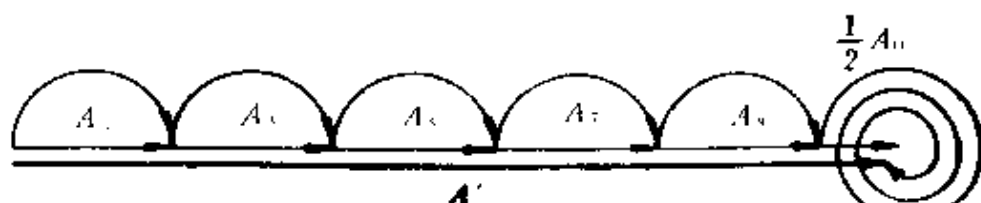
解 如图, 此时场点的振幅为

$$\begin{aligned} A' &= A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9 = \frac{1}{2} A_{10} \\ &\approx 5.5 A_1 = 11 A_0 \end{aligned}$$

强度

$$I' = 121 I_0$$

即中心强度为自由传播时的121倍



题 6 图

7. 若一个菲涅耳波带片将前50个奇数半波带遮挡, 其余地方都开放, 求衍射场中心强度与自由传播时之比。

解 此时场点振幅

$$\begin{aligned} A &= (A_2 + A_4 + \cdots + A_{98}) = \frac{1}{2} A_{100} \\ &\approx 49.5 A_1 = 99 A_0 \end{aligned}$$

强度 $I = 99^2 I_0 = 9801 I_0$

8. 菲涅耳波带片第一个半波带的半径 $\rho_1 = 5.0 \text{ mm}$,

(1) 用波长 $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ 的单色平行光照明, 求主焦距:

(2) 若要求主焦距为25cm, 需将此波带片缩小多少?

解 (1) 根据菲涅耳波带片主焦距公式

$$f = \frac{\rho_1^2}{\lambda}$$

算出

$$f = 23.6 \text{ m}$$

(2) 为使焦距缩小到 $f' = 25 \text{ cm}$, 则应将上述波带片用照相机收缩。由

$$\frac{f}{f'} = \frac{\rho_1^2}{\rho_1'^2}$$

求得

$$\frac{\rho_1}{\rho_1'} = \sqrt{\frac{f}{f'}} \approx 10$$

即此波带片的直径需缩小到原来的十分之一。

• 9. 如何制作一张满足以下要求的波带片:

(1) 它在4000 Å 紫光照明下的主焦距为80cm;

(2) 主焦点的光强是自由传播时的 10^3 倍左右。

解 (1) 由主焦距的要求算出第一个半波带的半径

$$\rho_1 = \sqrt{f\lambda} = 0.57 \text{ mm}$$

然后以 $\rho_k = \sqrt{k}\rho_1$ 比例刻划出一系列同心环, 再想法交替地遮断 (或露出) 奇数个半波带, 整个波带片的有效尺寸应由光强要求确定。

(2) 振幅比为

$$\frac{A}{A_0} = \sqrt{\frac{I}{I_0}}$$

又

$$A = A_2 + A_4 + \cdots + A_k \approx \frac{k}{2} A_2 = k A_0$$

所以波带片包含的最高半波带数目为

$$k = \sqrt{\frac{I}{I_0}} = \sqrt{10^3}$$

$$\approx 32$$

有效面积的半径为

$$\rho = \sqrt{k} \rho_1 \approx 3.2 \text{ mm}$$

10. 一菲涅耳波带片对 9000 \AA 的红外光主焦距为 30 cm ，改用 6328 \AA 的氦氖激光照明，主焦距变为多少？

解 波带片主焦距与光波长成反比，所以

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

得

$$f_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f_1$$

$$\approx 43 \text{ cm}$$

§ 7. 夫琅和费单缝和矩孔衍射

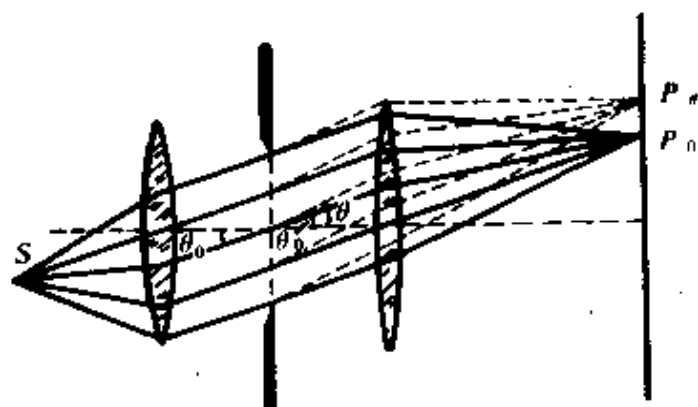
1. 如附图(a)，平行光以 θ_0 角斜入射在宽度为 a 的单缝上，试证明：

(1) 夫琅和费衍射的强度公式基本不变（忽略倾斜因子），即

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

(I_0 为零级中心强度)

只不过 α 的定义与正入射不同：



题 1 图(a)

$$\alpha = -\frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta + \sin \theta_0)$$

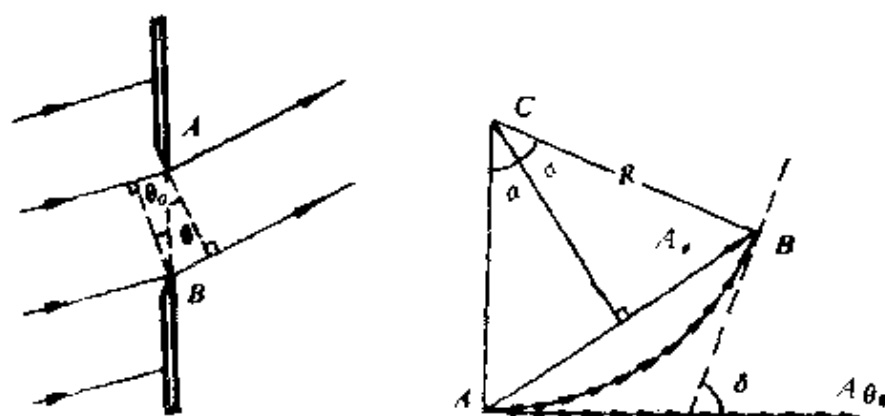
(2) 零级中心的位置在几何光学象点处;

(3) 零级斑半角宽度为

$$\Delta\theta = -\frac{\lambda}{a \cos \theta_0}$$

(4) 如果考虑到单缝两侧并非同一介质, 情况将怎样?

证 (1) 与正入射情况相比, 斜入射时光孔面上各点次波源的位相是不同的, 因此在分析到达场点的各次级扰动之间的位相关系时, 不仅要考虑后场光程差的影响, 而且还要考虑前场光程差的影响。如图 (b), 图 (c) 所示, 若用矢量图解法处理, 代表边缘两点 A, B 到达场点的位相差 δ 角应当成为



(b)

题 1 图

(c)

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta + \sin \theta_0)$$

其它运算与正入射相同, 于是强度分布函数成为

$$I(\theta) = I(\theta_0) \left(-\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta + \sin \theta_0)$$

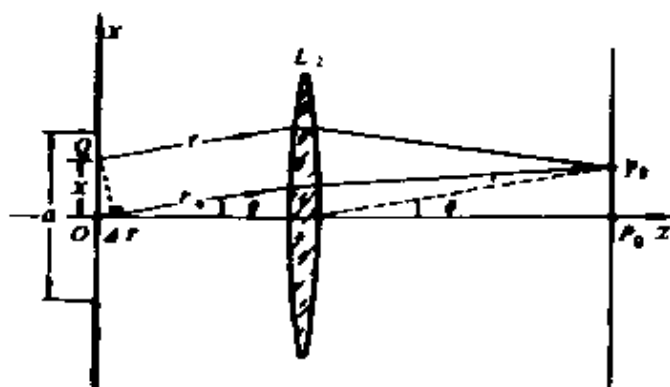
若用复数法处理，应先写出光孔面上的波前函数

$$\tilde{U}_0(x, y) = Ae^{ikx \sin \theta_0}$$

考虑到傍轴条件下的菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式为

$$\tilde{U}(P) = \iint \tilde{U}_0 e^{ikr} d\Sigma$$

在夫琅和费衍射时改写相因子〔见图(d)〕



题1图(d)

$$ikr = ikr_0 + ik(r - r_0)$$

$$= ikr_0 - ikx \sin \theta$$

于是单缝夫琅和费衍射场为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\theta) &= C \int e^{ikx \sin \theta_0} e^{-ikx \sin \theta} dx \\ &= C \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{-ikx(\sin \theta - \sin \theta_0)} dx \end{aligned}$$

与正入射时的夫琅和费衍射积分式相比，仅仅是被积函数的相因子中由 $(\sin \theta - \sin \theta_0)$ 替代原来的 $\sin \theta$ ，可见积分结果所得到的强度分布函数与正入射时的形式相同

$$I(\theta) = I(\theta_0) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

只是

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

(2) 根据强度分布公式，零级（极强）出现在 $\alpha = 0$ 的地方，此时 $\theta = \theta_0$ ，各衍射线（连同入射线）之间无光程差，根据费马原理推得的物象等光程性，这正是几何光学象点的位置。

(3) 令 $\alpha = \pm\pi$, 得到零级两侧第一暗点的衍射角 $\theta_{\pm 1}$ 满足

$$\sin \theta_{\pm 1} - \sin \theta_0 = \frac{\lambda}{a}$$

设零级半角宽度为 $\Delta\theta$, 则

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \sin \theta_0 = \frac{\lambda}{a}$$

注意到 $\Delta\theta$ 很小, 用微分运算近似, 得

$$\cos \theta_0 \Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a}$$

即

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a \cos \theta_0}$$

由此可见, 在缝宽 a 不变的条件下, 照明单缝的平行光的倾角越大, 零级斑的半角宽度也越大, 衍射效应更为明显, 这时相当于单缝有效宽度 $a \cos \theta_0$ 变小了。

(4) 如果衍射屏前后两侧为不同介质, 设前场照明空间折射率为 n_1 , 后场衍射空间折射率为 n_2 , 则衍射强度分布函数形式不变, 仍为

$$I(\theta) = I_0 \left(-\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

式中 α 应为

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda_0} (n_2 \sin \theta - n_1 \sin \theta_0)$$

λ_0 为真空光波长。零级角方位 θ_0' 由 $\alpha = 0$ 给出, 它也满足折射

定律

$$n_2 \sin \theta_0' = n_1 \sin \theta_0$$

零级半角宽度 $\Delta\theta$ 由下式确定:

$$n_2 \sin(\theta'_0 + \Delta\theta) - n_1 \sin\theta_0 = \frac{\lambda_0}{a}$$

即

$$n_2 \sin(\theta'_0 + \Delta\theta) - n_2 \sin\theta'_0 = \frac{\lambda_0}{a}$$

取微分近似得

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda_0}{n_2 a \cos\theta'_0} = \frac{\lambda_0}{a \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_0}}$$

2. 估算下列情形光束在媒质界面上反射和折射时反射光束和折射光束的衍射发散角。设界面的线度为 1 cm，光波波长为 $0.6 \mu\text{m}$ ，折射率为 1.5。

(1) 平行光正入射；

(2) 入射角为 75° ；

(3) 入射角为 89° （掠入射）。

解 考虑到监测元件总有一定的灵敏度，故衍射发散角取半角宽度更为实际，而不必取零级附近的暗点（或暗环）的全部角间隔。根据上题得到的反射光束的半角宽度公式

$$\Delta\theta = \frac{\lambda_0}{a \cos\theta_0} \quad (\text{空气中 } \lambda \approx \lambda_0)$$

和折射光束的半角宽度公式

$$\Delta\theta' = \frac{\lambda_0}{a \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_0}}$$

可分别计算反射光束和折射光束的衍射发散角。以 $\lambda_0 = 0.6 \mu\text{m}$ ， $a = 1 \text{ cm}$ ， $n_1 = 1.0$ ， $n_2 = 1.5$ 代入，分别算出：

(1) 当 $\theta_0 = 0^\circ$ 时，得

$$\Delta\theta = \frac{0.6}{1.0 \times 10^{-4}} = 0.6 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 12.4''$$

$$\Delta\theta' = \frac{0.6}{1.5 \times 1.0 \times 10^4} = 0.4 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 8.2''$$

(2) 当 $\theta_0 = 75^\circ$ 时, 得

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \frac{0.6}{1.0 \times 10^4 \times \cos 75} \approx 2.3 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ &\approx 47.4''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\theta' &= \frac{0.6}{1.0 \times 10^4 \times \sqrt{1.5^2 - \sin^2 75}} \approx 5.2 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ &\approx 10.7''\end{aligned}$$

(3) 当 $\theta_0 = 89^\circ$ 时, 得

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \frac{0.6}{1.0 \times 10^4 \times \cos 89} \approx 3.4 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ &\approx 700''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\theta' &= \frac{0.6}{1.0 \times 10^4 \times \sqrt{1.5^2 - \sin^2 89}} \approx 5.4 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ &\approx 11.1''\end{aligned}$$

以上计算结果表明, 虽然掠入射时界面的有效宽度变小, 因而衍射发散角变大, 但其量级与正入射时相比高不了多少, 只在入射角非常逼近 90° 时, 才有明显的增加。

• 3. 试用巴俾涅原理证明: 互补的衍射屏产生的夫琅和费衍射图样相同。

证 设 a, b 两屏互补, 造成的衍射场分别为 $\widetilde{U}_a(P)$, $\widetilde{U}_b(P)$, 自由传播场为 $\widetilde{U}_0(P)$, 则由巴俾涅原理有

$$\widetilde{U}_a(P) + \widetilde{U}_b(P) = \widetilde{U}_0(P)$$

在夫琅和费衍射中, 除几何象点外 $\widetilde{U}_0(P)$ 皆等于零。从而, 除几

何象点外处处有

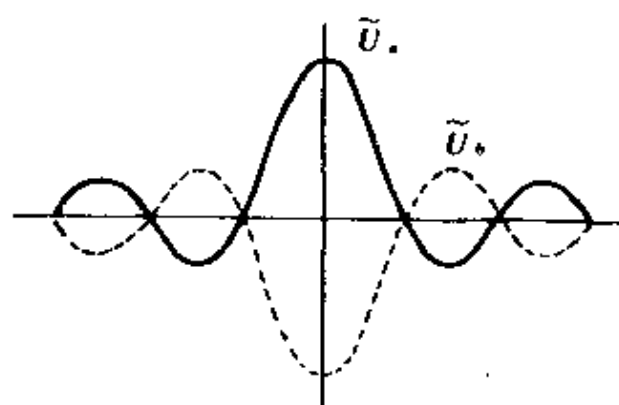
$$\widetilde{U}_a(P) = -\widetilde{U}_b(P)$$

如附图所示。因此

$$I_a(P) = I_b(P)$$

即除零级斑中心以外的区域，互补屏造成的衍射强度分布完全一样。

再看零级斑中心点的情形。从理论上说这是一个奇异点，因为如果不考虑透镜有限口径的衍射，则自由传播时该处成为几何象点——



题 3 图

振幅无限大。若互补屏之一在此处产生的衍射振幅 $U_a(0)$ 为有限值，则另一屏在此处产生的衍射振幅 $\widetilde{U}_b(0)$ 还是无限大。反正它们都是亮的。不过，衍射测量术中利用的是零级斑中心点以外暗点（暗纹或暗环）的角分布或强度分布，并不直接关心零级斑中心点的绝对强度。

* 4. 衍射细丝测径仪是将单缝夫琅和费衍射装置中的单缝用细丝代替。今测得零级衍射斑的宽度（两个一级暗纹间的距离）为 1 cm，求细丝的直径。已知光波长 $0.63 \mu\text{m}$ ，透镜焦距 50 cm。

解 根据上题分析，细丝夫琅和费衍射强度分布与其互补的单缝强度分布，在象点以外是处处相同的，故零级斑半角宽度取同一公式

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a} \approx \frac{\Delta l}{2f}$$

在本题中应将 a 看作细丝直径， Δl 为零级斑的线宽度，由此算出

$$a = \frac{2f\lambda}{\Delta l} = 63\mu\text{m}$$

* 5. 在白光照明下夫琅和费衍射的零级斑中心是什么颜色？零级斑外围是什么颜色？

解 白光是由各种波长的成份按一定比例组成的，经夫琅和费衍射后各种波长的零级斑中心仍重合于几何象点。但由衍射反比关系知，零级斑的半角宽度

$$\Delta\theta \propto \lambda$$

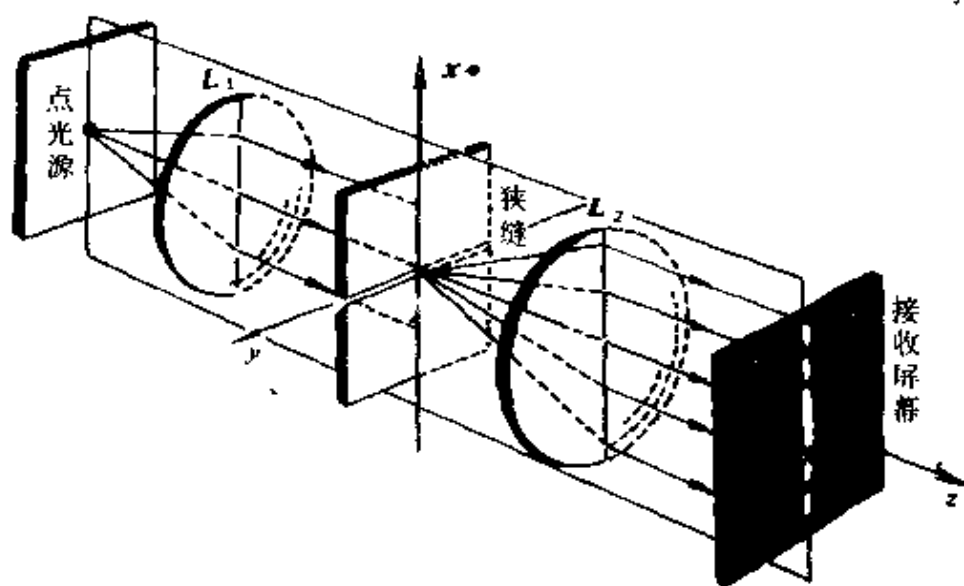
即长波比短波更加弥漫，这就必然导致中心点的长波成分减小，短波成分增加，使零级斑的中心不再严格保持白色，短波成分加重的结果应呈蓝白色。同理，零级斑的外围应呈彩色，长波（红色）成分靠外，短波（蓝色）成分靠里。根据菲涅耳·基尔霍夫衍射公式，发生这一现象应是预料中的事情，因为零级中心的振幅

$$\widetilde{U}(P_0) \propto \frac{1}{\lambda}$$

通常所说的“零级无色散”，是指零级中心位置重合，在空间上没有被分离。

* 6. 讨论单缝夫琅和费衍射装置有如下变动时，衍射图样的变化〔参见附图（a）〕：

- （1）增大透镜 L_1 的焦距；
- （2）增大透镜 L_1 的口径；
- （3）将衍射屏沿光轴 z 方向前后平移；
- （4）衍射屏作垂直于光轴的移动（不超出入射光束照明范围）；
- （5）衍射屏绕光轴 z 旋转；
- （6）点光源作垂直于 z 轴的移动，从轴上移到轴外；
- （7）把点光源改成与狭缝平行的线光源。



题 6 图 (a)

解 装置未作变动时,衍射图样为沿 x 方向的一系列衍射斑,零级斑在轴上,高级斑对称分布。设缝宽为 a ,则零级斑在 x 方向的半角宽度为

$$\Delta\theta_x \approx \frac{\lambda}{a}$$

(1) 若增大透镜 L_1 的焦距,衍射图样的形状和零级斑的半角宽度都不变。但亮斑的线度及其间距均同时被放大。

(2) 若增大透镜 L_2 的口径,则在接收屏幕上将增加高级衍射斑,原有衍射斑保持不变。

(3) 若沿光轴 z 方向前后平移衍射屏,则高级衍射斑将会有增加或减少,衍射屏移近透镜 L_2 时高级斑增加,反之减少,其余衍射斑保持不变。

(4) 若将衍射屏作垂直于光轴上下移动时,则零级斑保持不变,但高级斑可能不再对称分布。如衍射屏沿正 x 轴移动,则正 x 方向高级斑减少,而负 x 方向高级斑增多。

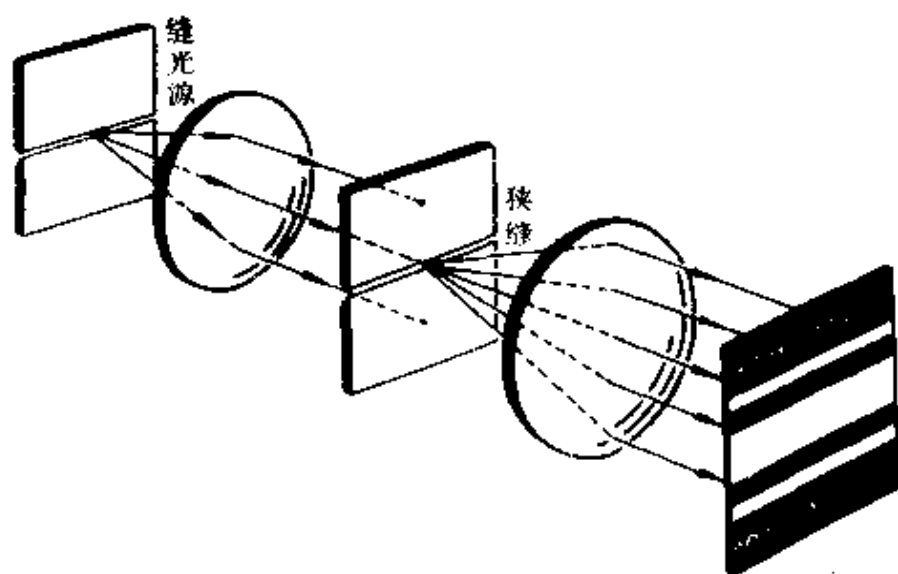
(5) 若衍射屏绕 z 轴旋转,则衍射斑整体跟着旋转,衍射

斑连线保持与狭缝正交。

以上五种变动，零级斑中心位置均保持不变。

(6) 若点光源由轴上移到轴外，则衍射图样整体向反方向平移，且零级斑中心始终保持在点源的几何光学象点的位置。

(7) 线光源可看成一系列非相干点源的集合，每一点源对应一套衍射斑，零级斑的中心分别在各自的几何光学象点的位置。若点光源沿平行狭缝方向扩展为线光源，则各套衍射斑不相干地叠加在一起，就在幕上得到一系列平行直线衍射条纹，其走向与狭缝平行，如附图(b)所示。



题6图(b)

在单缝夫琅和费衍射实验装置中，一定要区别点光源照明和线光源照明（在没有激光的条件下人们经常采用线光源照明）两种情形。如果不加区分地认为直线衍射条纹是由于狭缝造成的，这就犯了概念性的错误。

顺便指出，在线光源照明情形中，如果线光源与狭缝没有保持平行，则条纹会变得模糊不清，仅当二者保持平行时，衍射条纹最为清晰，这一结论不难从以上(6)，(7)两种情形的结果中得到，请读者自行分析。这一点在实验中是有实际意义的，

因为在实验中很难事先测定线光源与狭缝是否严格平行，而反过来由条纹的清晰程度（变化）来判断二者的平行程度是极为方便的。

§ 8 光学仪器和象分辨本领

1. 一对双星的角间隔为 $0.05''$ ，问：

(1) 需要多大口径的望远镜才能分辨它们？

(2) 此望远镜的角放大率应设计为多少才比较合理？

解 (1) 根据望远镜的最小分辨角公式

$$\Delta\theta_m = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

取光波长 $\lambda \approx 0.55 \mu\text{m}$ ， $\Delta\theta_m = 0.05'' \approx 2.4 \times 10^{-7} \text{ rad}$ ，
算出物镜口径

$$D = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{\Delta\theta_m} \approx 2.8 \text{ m}$$

(2) 仪器可分辨的角间隔（双星）还需要由仪器以适当放大率将它放大为人眼可分辨的最小角度 $\Delta\theta_e \approx 1' \approx 2.9 \times 10^{-4} \text{ rad}$ 。因此，与这台望远镜的分辨本领相匹配的视角放大率应当为

$$M = \frac{\Delta\theta_e}{\Delta\theta_m} \approx 1210 \text{ 倍}$$

· 2. 一台天文望远镜的口径为 2.16 m ，由这一数据你能进一步获得关于它在光学性能方面的哪些知识？

解 从物镜口径的数据可以初步推算出一台望远镜的以下几个光学性能：

(1) 望远镜的孔径光阑为物镜，从物镜的口径值可以推算出最小分辨角（取光波长为 $0.55 \mu\text{m}$ ）

$$\Delta\theta_m = 1.22 \frac{\lambda}{D} \approx 3.1 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.064''$$

(2) 望远镜的有效(正常)放大率应设计为使得最小分辨角放大成人眼最小可分辨角, 所以这台望远镜的视角放大率的正常值为

$$M = \frac{\Delta\theta_e}{\Delta\theta_m} = \frac{2.9 \times 10^{-4}}{3.1 \times 10^{-7}} \approx 935 \text{ 倍}$$

(3) 扩大口径不仅可以提高分辨本领, 而且可以提高集光能力——提高观察星体(点源)的主观亮度。根据第一章 § 12 节有关仪器主观亮度的知识可以知道, 当实际放大率等于或大于正常放大率时, 望远镜出瞳口径将等于或小于眼瞳直径, 此时被物镜接收的光通量(来自星体)将全部进入眼瞳, 主观亮度是自然主观亮度的 M 倍。

当然实际望远镜一般为反射型。以上由物镜口径的数据对光学性能的推算也适用于反射型。

3. 一台显微镜, 已知其 $N.A. = 1.32$, 物镜焦距 $f_o = 1.91 \text{ mm}$, 目镜焦距 $f_e = 50 \text{ mm}$, 求:

- (1) 最小分辨距离;
- (2) 有效放大率;
- (3) 光学筒长。

解 (1) 根据显微镜的最小分辨距离公式

$$\Delta y_m = 0.61 \frac{\lambda}{N.A.}$$

取光波长 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$, 算出

$$\Delta y_m \approx 0.25 \mu\text{m}$$

(2) 显微镜的有效(正常)放大率应使仪器可分辨的最小距离放大为人眼可分辨的最小距离

$$\begin{aligned} \Delta y_e &= s_0 \Delta\theta_e \quad (s_0 \text{ 为明视距离}) \\ &\approx (25 \times 10^{-2}) \times (2.9 \times 10^{-4}) \\ &= 72.5 \times 10^{-6} \text{ m} \\ &= 72.5 \mu\text{m} \end{aligned}$$