

宽度约为  $100\text{ }\mu\text{m}$ ，入射光波长  $6328\text{ }\text{\AA}$ ，问：

- (1) 接收屏幕至少应放多远？
- (2) 在接收屏幕的多大范围内才算是夫琅和费衍射场？
- (3) 0 级半角宽度为多少？
- (4) 在接收屏幕上 0 级的线宽度有多少？



题 1 图

解 (1) 相对于衍射屏线度  $a$  来说，远场条件要求纵向距离

$$z \gg \frac{a^2}{\lambda}$$

取  $a \approx 100\text{ }\mu\text{m}$ ， $\lambda = 0.63\text{ }\mu\text{m}$ ，选 30 倍作估算，得

$$z = 30 \frac{a^2}{\lambda} \approx 48\text{ cm}$$

(2) 夫琅和费衍射远场装置只要求接收范围  $\rho$  满足傍轴条件

$$\rho \ll z$$

取  $z \approx 50\text{ cm}$ ，选 10 倍作估算，得

$$\rho = \frac{1}{10} z \approx 5\text{ cm}$$

(3) 零级半角宽度公式仍然是

$$\Delta\theta_0 \approx \frac{\lambda}{a}$$

$$= 6.3 \times 10^{-3}\text{ rad} \approx 21.7' = 21' 12''$$

(4) 在接收屏幕零级两侧暗点之间的线宽度

$$\begin{aligned}\Delta l_0 &\approx 2 \Delta \theta_0 z \\ &\approx 2 \times (6.3 \times 10^{-3}) \times 50 \text{ cm} = 6.3 \text{ mm}\end{aligned}$$

• 2. 采用象面接收装置 [图 (a) 或 (b)] 接收单缝的夫琅和费衍射场, 设单缝宽度约为 1 mm, 入射光波长 4880 Å, 物距 40 cm, 象距 80 cm。

(1) 如果单缝置于透镜后方, 要求象面在 1 cm 范围内接收到夫琅和费衍射场, 单缝距象面至少多远?

(2) 如果单缝紧贴透镜后侧, 求 0 级半角宽度和接收屏幕上 0 级的线宽度:

(3) 如果单缝离透镜 40 cm 远, 求 0 级半角宽度及它在幕上的线宽度:

(4) 如果单缝置于透镜前方, 紧贴在其左侧, 情形如何?

解 (1) 如图 (a)。象面接收装置对衍射屏和接收屏都只要求傍轴条件, 即要求衍射屏线度  $a$  和接收屏横向线度  $\rho$  满足

$$z' \gg a, z' \gg \rho$$

如果选  $\rho \approx (1/2) \times 1.0 \text{ cm} = 0.5 \text{ cm}$ ,  $a \approx 0.1 \text{ cm}$ , 取

$$z' = 10 \rho = 5 \text{ cm}$$

即单缝与象面距离大于 5 cm, 便足以在象面 1 cm 范围内接收到夫琅和费衍射场。

(2) 如果取  $z' \approx s' = 80 \text{ cm}$ , 则象面上零级半角宽度公式仍然为

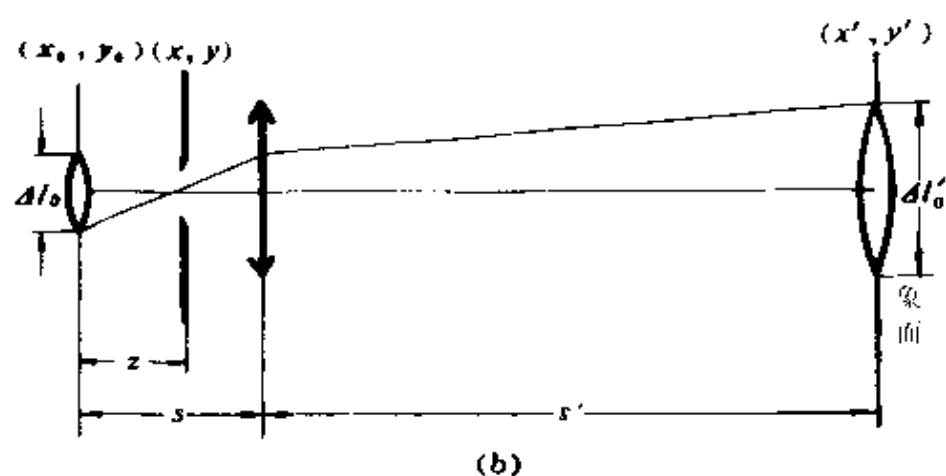
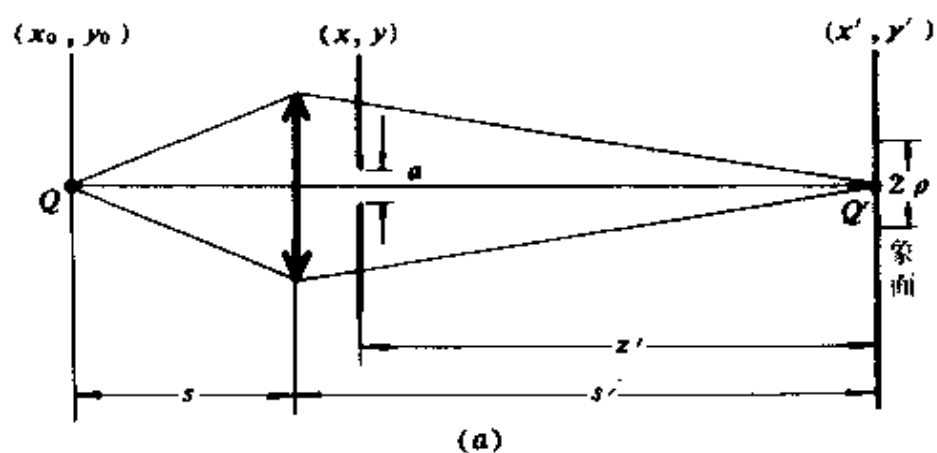
$$\Delta \theta_0 \approx \frac{\lambda}{a} = \frac{0.488}{1000} \approx 4.9 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\approx 1.7' = 1' 42''$$

而零级线宽

$$\begin{aligned}\Delta l_0 &\approx 2 \Delta \theta_0 z' = 2 \times (4.9 \times 10^{-4}) \times 80 \text{ cm} \\ &\approx 0.78 \text{ mm}\end{aligned}$$

(3) 如果单缝离透镜距离  $(s' - z') = 40 \text{ cm}$  远, 零



题 2 图

级半角宽度不变，仍为

$$\Delta\theta_0 \approx \frac{\lambda}{a} \approx 4.9 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

而零级线宽缩为

$$\Delta l_0 \approx 0.39 \text{ mm}$$

(4) 如果单缝紧贴透镜左侧，情况与 (2) 相近，零级半角宽度不变，仍为

$$\Delta\theta_0 \approx 4.9 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

零级线宽

$$\Delta l_0 \approx 0.78 \text{ mm}$$

如果衍射屏置于透镜前方某处〔如图(b)〕,用可逆共轭原理去处理最简单。先将光路逆转自右向左,视物面  $x_0, y_0$  为象面。此时零级线宽为

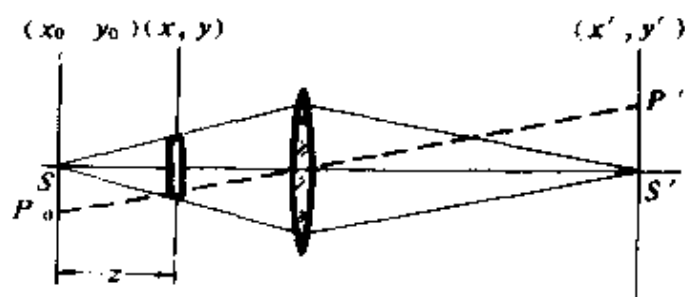
$$\Delta l_0 = 2 \Delta \theta_0 z = 2 \frac{\lambda}{a} z$$

再将光路还原,此时象面  $x', y'$  上的零级斑就是当初物面  $x_0, y_0$  上零级斑的共轭象,故零级线宽

$$\begin{aligned} \Delta l'_0 &= V \Delta l_0 = \frac{s'}{s} \left( 2 \frac{\lambda}{a} z \right) \\ &= 2 \frac{\lambda}{a} \frac{s'}{s} z \end{aligned}$$

3. 试论证衍射屏置于透镜前方时,象面接收的是夫朗和费衍射场,并给出此时衍射场的函数形式。

证 如图,利用书中已经给出的衍射屏置于透镜后方时的象面衍射场的结果,并根据光路可逆共轭原理,便可论证衍射屏置于透镜前方的情况。具体说明如下:设平面  $x_0, y_0$  是照明物点  $S$  所在的平面,其



题3图

共轭象面为  $x', y'$ , 衍射平面为  $x, y$ 。根据光的可逆性原理,如果将光路逆转自右向左,  $S'$  便成为物点,  $S$  便成为象点,此时衍射屏就成为透镜后方了,所得衍射场为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x_0, y_0) &= \frac{i}{\lambda z} e^{ikz} A_0 \times \\ &\times \iint \tilde{t}(x, y) \exp \left[ -ik \frac{1}{z} (x_0 x + y_0 y) \right] dx dy \end{aligned}$$

现在再将照明点源还原至  $S$  点, 则衍射场  $\tilde{U}(x_0, y_0)$  就回到  $x' y'$  面上, 即

$$P_0(x_0, y_0) \rightarrow P'(x', y') = (Vx_0, Vy_0)$$

$$\tilde{U}(x_0, y_0) \rightarrow \tilde{U}(x', y')$$

$$\tilde{U}(x', y') = \frac{-i}{\lambda Vz} e^{ikL_0} A_1 \times$$

$$\times \iint \tilde{U}(x, y) \exp \left[ -ik \frac{1}{zV} (x'x + y'y) \right] dx dy$$

上式符合夫琅和费衍射积分的标准形式, 它就是衍射屏置于透镜前方时象面上接收的夫琅和费衍射场的具体形式。

## § 5 傅里叶变换 $\delta$ 函数

1 若

$$\tilde{g}(x) \Longleftrightarrow \tilde{G}(f) = G(f) e^{i\varphi(f)}$$

证明 (1) 当  $\tilde{g}(x)$  是实函数时, 有

$$\tilde{G}(f) = \tilde{G}^*(-f), \quad \tilde{G}^*(f) = \tilde{G}(-f)$$

$$g(x) = 2 \int_0^\infty G(f) \cos [2\pi f x + \varphi(f)] df$$

(2) 当  $\tilde{g}(x)$  是偶函数时, 有

$$\tilde{G}(f) = 2 \int_0^\infty \tilde{g}(x) \cos 2\pi f x dx$$

$$\tilde{g}(x) = 2 \int_0^\infty \tilde{G}(f) \cos 2\pi f x df$$

(3) 当  $\tilde{g}(x)$  是实数偶函数时, 有

$$G(f) = 2 \int_0^\infty g(x) \cos 2\pi f x dx, \quad \varphi(f) = 0,$$

$$g(x) = 2 \int_0^{\infty} G(f) \cos 2\pi f x \, df.$$

证 (1) 如果  $g(x)$  仅是实函数, 其频谱则可能是复函数,

$$\begin{aligned} \widetilde{G}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi fx} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 g(x) e^{-i2\pi fx} dx + \int_0^{\infty} g(x) e^{-i2\pi fx} dx \\ &= \int_0^{\infty} g(-x) e^{i2\pi fx} dx + \int_0^{\infty} g(x) e^{-i2\pi fx} dx \\ &= \int_0^{\infty} [g(-x) e^{i2\pi fx} + g(x) e^{-i2\pi fx}] dx \end{aligned}$$

$$\widetilde{G}(-f) = \int_0^{\infty} [g(-x) e^{-i2\pi fx} + g(x) e^{i2\pi fx}] dx$$

由于  $g(x)$  是实函数,  $g(-x) e^{i2\pi fx}$  与  $g(-x) e^{-i2\pi fx}$  共轭,  $g(x) e^{-i2\pi fx}$  与  $g(x) e^{i2\pi fx}$  共轭. 故证得

$$\widetilde{G}(f) = \widetilde{G}^*(-f), \quad \widetilde{G}^*(f) = \widetilde{G}(-f) \quad (a)$$

这一关系的光学意义是当屏函数为纯振幅型时, 其傅里叶频谱强度 (夫琅和费衍射图样) 是中心对称的, 绕光轴 ( $z$  轴) 转  $\pi$  图样不变, 如图.

实函数的频谱展开式为

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(f) e^{i2\pi fx} df \\ &= \int_{-\infty}^0 \widetilde{G}(f) e^{i2\pi fx} df \\ &\quad + \int_0^{\infty} \widetilde{G}(f) e^{i2\pi fx} df \end{aligned}$$

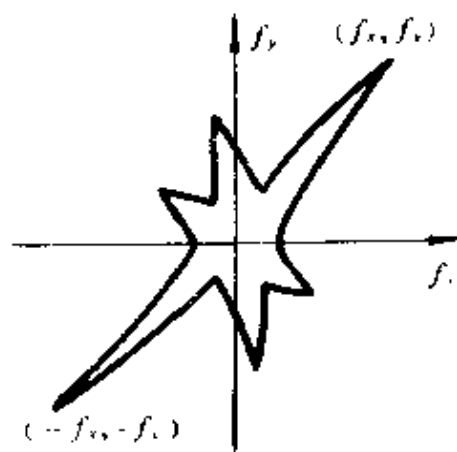


图 1 图

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \widetilde{G}(-f) e^{-i2\pi f x} df + \int_0^{\infty} \widetilde{G}(f) e^{i2\pi f x} df \\
&= \int_0^{\infty} [\widetilde{G}(-f) e^{-i2\pi f x} + \widetilde{G}(f) e^{i2\pi f x}] df \\
&= 2 \int_0^{\infty} G(f) \cos [2\pi f x + \varphi(f)] df \quad (b)
\end{aligned}$$

以上证明仅用了  $g(x)$  为实函数这一性质。

(2) 当  $\widetilde{g}(x)$  为偶函数时,  $\widetilde{g}(x) = \widetilde{g}(-x)$ , 于是频谱函数演变为

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g}(x) e^{-i2\pi f x} dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \widetilde{g}(x) e^{-i2\pi f x} dx + \int_0^{\infty} \widetilde{g}(x) e^{-i2\pi f x} dx \\
&= \int_0^{\infty} [\widetilde{g}(-x) e^{i2\pi f x} + \widetilde{g}(x) e^{-i2\pi f x}] dx \\
&= 2 \int_0^{\infty} \widetilde{g}(x) \cos 2\pi f x dx \quad (c)
\end{aligned}$$

且有  $\widetilde{G}(f) = \widetilde{G}(-f)$

原函数

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(f) e^{i2\pi f x} df \\
\widetilde{g}(-x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(f) e^{-i2\pi f x} df
\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(x) &= \frac{1}{2} [\widetilde{g}(x) + \widetilde{g}(-x)] \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(f) (e^{i2\pi f x} + e^{-i2\pi f x}) df
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(f) \cos 2\pi f x \, df \\
&= 2 \int_0^{\infty} \widetilde{G}(f) \cos 2\pi f x \, df \quad (d)
\end{aligned}$$

由式(c), (d)可看出, 当原函数为偶函数时, 频谱函数也为偶函数, 且傅里叶变换具有余弦变换形式。

(3) 当  $g(x)$  为实数偶函数时, 式(c), (d)进一步演变为

$$G(f) = 2 \int_0^{\infty} g(x) \cos 2\pi f x \, dx \quad (e)$$

$$g(x) = 2 \int_0^{\infty} G(f) \cos 2\pi f x \, df \quad (f)$$

此时频谱函数才是实数形式, 位相频谱恒为零, 只有振幅频谱。

\* 2. 证明傅里叶变换中的微积分运算公式:

$$(1) \quad \frac{dg(x)}{dx} \rightleftharpoons i 2\pi f G(f)$$

$$(2) \quad \int g(x) \, dx \rightleftharpoons \frac{1}{i 2\pi f} G(f)$$

$$(3) \quad -i 2\pi x g(x) \rightleftharpoons \frac{dG(f)}{df}$$

$$(4) \quad \frac{g(x)}{-i 2\pi x} \rightleftharpoons \int G(f) \, df$$

证 (1) 因为

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i 2\pi f x} \, df$$

所以

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i 2\pi f x} \, df$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} [G(f) e^{i2\pi fx}] df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [i2\pi f G(f)] e^{i2\pi fx} df
\end{aligned}$$

即

$$\frac{dg(f)}{dx} \rightleftharpoons i2\pi f G(f), \text{ 或 } \frac{d}{dx} \rightleftharpoons i2\pi f$$

(2) 以  $g(x)$  的傅里叶变换式代入

$$\begin{aligned}
\int g(x) dx &= \int \left[ \int G(f) e^{i2\pi fx} df \right] dx \\
&= \int \left[ \int G(f) e^{i2\pi fx} dx \right] df \\
&= \int \left[ \frac{1}{i2\pi f} G(f) \right] e^{i2\pi fx} df
\end{aligned}$$

即

$$\int g(x) dx \rightleftharpoons \frac{1}{i2\pi f} G(f), \text{ 或 } \int dx \rightleftharpoons \frac{1}{i2\pi f}$$

(3) 同理, 以  $G(f)$  的傅里叶变换式代入

$$\begin{aligned}
\frac{dG(f)}{df} &= \frac{d}{df} \int g(x) e^{-i2\pi fx} dx \\
&= \int \frac{d}{df} [g(x) e^{-i2\pi fx}] dx \\
&= \int [-i2\pi x g(x)] e^{-i2\pi fx} dx
\end{aligned}$$

即

$$-i2\pi x g(x) \rightleftharpoons \frac{dG(f)}{df}, \text{ 或 } -i2\pi x \rightleftharpoons \frac{d}{df}$$

(4) 以  $G(f)$  的傅里叶变换式代入

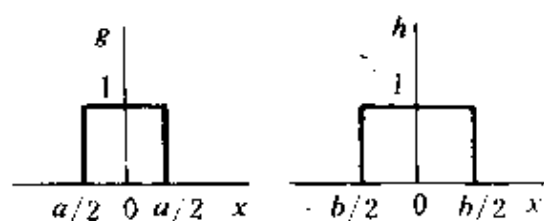
$$\begin{aligned}\int G(f) df &= \int \left[ \int g(x) e^{-i2\pi fx} dx \right] df \\ &= \int \left[ \int g(x) e^{-i2\pi fx} df \right] dx \\ &= \int \left[ \frac{1}{i2\pi x} g(x) \right] e^{-i2\pi fx} dx\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{i2\pi x} g(x) \Longleftrightarrow \int G(f) df, \text{ 或 } \frac{1}{i2\pi x} \Longleftrightarrow \int df$$

•3. 如图(a),  $g(x)$  和  $h(x)$  是宽度分别为  $a$  和  $b$  的单位方垒函数, 求它们的卷积。

解 卷积函数的几何意义是  $h$  函数平移再翻转, 与  $g$  函数相乘再积分。对于单位垒函数来说, 这种平移、翻转、乘积、积分就是重叠面积 [如图(b)]。据此算出

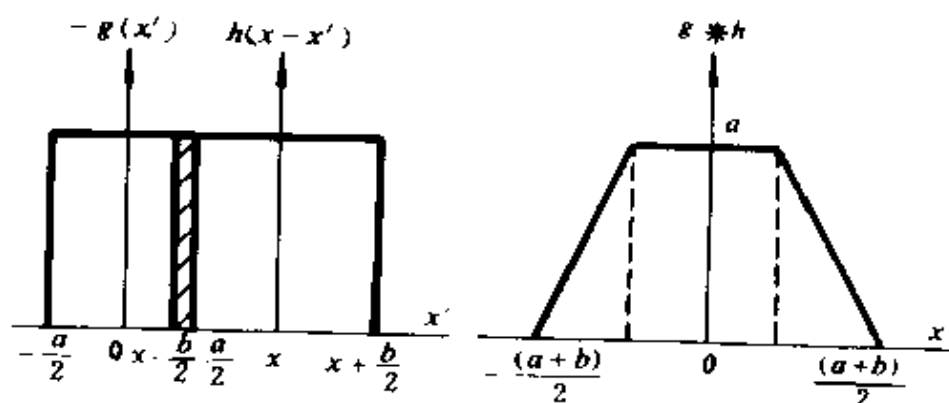


题3图(a).

$$g(x) \cdot h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x') h(x-x') dx'$$

$$= \begin{cases} 0, & |x| > \frac{1}{2}(a+b) \\ \frac{1}{2}(a+b) - |x|, & \frac{1}{2}|b-a| < |x| < \frac{1}{2}(a+b) \\ a, & |x| \leq \frac{1}{2}|b-a| \end{cases}$$

•4. 证明卷积的频谱等于频谱的乘积, 即若



题 3 图 (b)

$$g \rightleftharpoons G, h \rightleftharpoons H$$

则

$$g * h \rightleftharpoons GH$$

证 由卷积定义式

$$g * h = \int_{-\infty}^{\infty} g(x') h(x - x') dx'$$

得其频谱表达式为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g * h\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (g * h) e^{-i2\pi f x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x') h(x - x') e^{-i2\pi f x} dx' dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x') e^{-i2\pi f x'} h(x - x') e^{-i2\pi f (x - x')} dx' d(x - x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x') e^{-i2\pi f x'} h(y) e^{-i2\pi f y} dx' dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x') e^{-i2\pi f x'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} h(y) e^{-i2\pi f y} dy \\ &= \mathcal{F}\{g\} \mathcal{F}\{h\} \end{aligned}$$

•5. 证明相关函数的频谱关系为

$$g \circledast h \Longleftrightarrow G^* H$$

证 由相关函数定义式

$$g \circledast h = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x') h(x+x') dx'$$

得其频谱表达式为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g \circledast h\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (g \circledast h) e^{-i2\pi f x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x') h(x+x') e^{-i2\pi f x} dx' dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x') e^{i2\pi f x'} h(x+x') e^{-i2\pi f (x+x')} dx' d(x+x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g^*(x') e^{i2\pi f x'}]^* h(y) e^{-i2\pi f y} dx' dy \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(x') e^{-i2\pi f x'} dx' \right]^* \int_{-\infty}^{\infty} h(y) e^{-i2\pi f y} dy \\ &= \mathcal{F}^*\{g\} \mathcal{F}\{h\} \end{aligned}$$

•6. 证明  $g \circledast g = g * g^*$ 。

证 用频谱语言证明。因为自相关的频谱等于频谱绝对值的平方，即

$$g \circledast g \Longleftrightarrow |G(f)|^2 = G(f) G^*(f)$$

又因为卷积的频谱等于频谱的乘积，即

$$g \circledast g^* \Longleftrightarrow G(f) G^*(f)$$

可见两式右端频谱相同，则原函数亦相同，故有

$$g \circledast g = g * g^*$$

7. 证明两个高斯函数

$$g(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2}, \quad h(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-bx^2}$$

的卷积仍为高斯函数：

$$g(x) * h(x) = \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{-cx^2}$$

式中  $c = ab/(a+b)$

证 利用卷积的频谱关系

$$g(x) * h(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(f) H(f)$$

证明本题更为方便。高斯函数的频谱仍为高斯型，即

$$G(f) = \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{a}\right)$$

$$H(f) = \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{b}\right)$$

故有

$$\begin{aligned} G(f) H(f) &= \exp\left[-\pi^2 f^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{c}\right) \end{aligned}$$

式中  $c = ab/(a+b)$

所以卷积

$$\begin{aligned} g(x) * h(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{c}\right)\right\} \\ &= \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{-cx^2} \end{aligned}$$

式中  $c = ab/(a+b)$

• 8. 证明两个洛伦兹函数

$$g(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad h(x) = \frac{b}{\pi} \frac{1}{b^2 + x^2}$$

的卷积仍为洛伦兹函数：

$$g(x) * h(x) = \frac{c}{\pi} \frac{1}{c^2 + x^2}$$

式中  $c = a + b$

证 利用卷积的频谱关系证明本题更为方便。

$$g(x) \Leftrightarrow G(f) = \exp(-2\pi a|f|)$$

$$h(x) \Leftrightarrow H(f) = \exp(-2\pi b|f|)$$

$$\begin{aligned} g(x) * h(x) &\Leftrightarrow G(f)H(f) = \exp[-2\pi(a+b)|f|] \\ &= \exp(-2\pi c|f|) \end{aligned}$$

式中  $c = a + b$ 。所以卷积

$$\begin{aligned} g(x) * h(x) &= \mathcal{F}^{-1} \{ e^{-2\pi c|f|} \} \\ &= \frac{c}{\pi} \frac{1}{c^2 + x^2} \end{aligned}$$

9. 一质量为  $m$  的质点位于空间  $(x_0, y_0, z_0)$  处, 试用  $\delta$  函数写出空间里的密度分布函数  $\rho(x, y, z)$ 。

解 此时质量密度分布函数为

$$\rho(x, y, z) = m\delta[(x-x_0), (y-y_0), (z-z_0)]$$

10. 点电荷  $q$  位于坐标原点, 写出静电场所满足的泊松方程。

解 静电场电位分布函数  $U(x, y, z)$  所满足的泊松方程的一般形式为

$$\nabla^2 U = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

如果电荷是点状分布, 且点电荷  $q$  位于坐标原点, 则体电荷密度分布函数为

$$\rho(x, y, z) = q\delta(x, y, z)$$

故泊松方程为

$$\nabla^2 U = -\frac{1}{\epsilon_0} q\delta(x, y, z)$$

\*11. 试证明  $\delta$  函数的以下性质:

(1)  $\delta$  函数是偶函数;

(2)  $\delta$  函数的选择性, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)f(x)dx = f(x_0)$$

(3)  $\delta$  函数的卷积性质, 即

$$f(x) * \delta(x) = f(x);$$

(4)  $\delta$  函数的缩放性, 即

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

证 (1) 从  $\delta(x)$  函数的定义出发便可说明

$$\delta(-x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x) dx = - \int_{\infty}^{-\infty} \delta(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') dx' = 1$$

这三条性质都与  $\delta(x)$  相同, 故

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

即  $\delta$  函数是偶函数。

(2) 以原点为中心取任意小的变量区间  $\pm \epsilon$ , 因区间以外  $\delta(x) = 0$ , 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) f(x) dx$$

因  $\epsilon \rightarrow 0$ , 区间以内连续函数  $f(x)$  为常量  $f(0)$ , 故可提出积分号则得

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) f(x) dx = f(0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = f(0)$$

于是证得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

同理, 对于轴外  $\delta$  函数, 我们可以  $x_0$  点为中心考虑一个任意小的变量区间, 证得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} \delta(x - x_0) f(x) dx$$

$$= f(x_0) \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x-x_0) dx$$

$$= f(x_0)$$

(3) 按卷积定义式

$$f(x) * \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x-x') dx'$$

根据  $\delta$  函数的偶对称性

$$\delta(x-x') = \delta(x'-x)$$

再由  $\delta$  函数的选择性便可证得

$$f(x) * \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x'-x) dx' = f(x)$$

在物理上, 尤其是在光学里, 常将某一连续分布函数如物平面上的光强分布或复振幅分布看为点源的集合, 对这一处理手段的数学描述就是这里所证的  $\delta$  函数的卷积性质——相当于用一个  $\delta$  脉冲在整个区间扫描, 从而探测出函数分布  $f(x)$ 。

(4) 由  $\delta$  函数的归一化要求

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax) d(ax) = |a| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

得

$$|a| \delta(ax) = \delta(x)$$

即

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

• 12. 求  $\mathcal{F}\{\delta(x-x_0) + \delta(x-2x_0)\}$  及其模的平方  $\mathcal{F}\mathcal{F}^*$ 。

解 因为

$$\delta(x-x_0) \Longleftrightarrow e^{-j2\pi f x_0}$$



$$\delta(x - 2x_0) \rightleftharpoons e^{-i4\pi f x_0}$$

所以由傅里叶变换的线性定理得

$$\delta(x - x_0) + \delta(x - 2x_0) \rightleftharpoons e^{-i2\pi f x_0} + e^{-i4\pi f x_0}$$

其模的平方

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathcal{F}^* &= (e^{-i2\pi f x_0} + e^{-i4\pi f x_0})(e^{i2\pi f x_0} + e^{i4\pi f x_0}) \\ &= 2 + 2\cos 2\pi x_0 f \end{aligned}$$

这里运算的光学实例便是透镜前焦面上有两个间距为  $x_0$  的相干点源，它们在后焦面上相干叠加的强度分布就是  $\mathcal{F}\mathcal{F}^*$ 。当然，应该明确空间频率  $f$  与装置中的场点坐标  $x'$  的关系为

$$x' = Ff\lambda \quad (F \text{ 为透镜焦距})$$

于是

$$I(x') = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = 2 + 2\cos\left(2\pi \frac{x_0}{\lambda F} x'\right)$$

13. 求  $\mathcal{F}\{\delta(x - x_0) + \delta(x - 2x_0) + \delta(x - 3x_0)\}$  及其  $\mathcal{F}\mathcal{F}^*$ 。

解 利用傅里叶变换的线性定理得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta(x - x_0) + \delta(x - 2x_0) + \delta(x - 3x_0)\} \\ &= e^{-i2\pi f x_0} + e^{-i4\pi f x_0} + e^{-i6\pi f x_0} \\ \mathcal{F}\mathcal{F}^* &= 3 + 2\cos 2\pi f x_0 + 2\cos 4\pi f x_0 + 2\cos 6\pi f x_0 \\ &= 1 + 4\cos 2\pi f x_0 + 4\cos^2 2\pi f x_0 \end{aligned}$$

这里运算的光学实例便是透镜前焦面上有三个等间距的相干点源，它们在后焦面上相干叠加的强度分布就是  $\mathcal{F}\mathcal{F}^*$ ；用场点的坐标  $x'$  表示，有

$$x' = Ff\lambda$$

$$I(x') = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = 1 + 4\cos\left(2\pi \frac{x_0}{\lambda F} x'\right) + 4\cos^2\left(2\pi \frac{x_0}{\lambda F} x'\right)$$

14. 大量点源无规地分布在  $x$  轴上，其振幅分布可写为

$$\tilde{U}(x) = \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n)$$

(1) 求  $\mathcal{F}\{\tilde{U}(x)\}$

(2) 试证  $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = N$ 。

解 (1) 由傅里叶变换的线性定理得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\tilde{U}(x)\} &= \mathcal{F}\left\{\sum \delta(x-x_n)\right\} \\ &= \sum \mathcal{F}\{\delta(x-x_n)\} \\ &= \sum_{n=1}^N e^{-i2\pi f x_n}\end{aligned}$$

(2) 此时

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mathcal{F}^* &= \left(\sum e^{-i2\pi f x_n}\right) \left(\sum e^{i2\pi f x_n}\right)^* \\ &= \left(\sum e^{-i2\pi f x_n}\right) \left(\sum e^{i2\pi f x_m}\right) \\ &= N + \sum_{\substack{n \neq m \\ n, m=1 \\ n, m=N}}^N e^{i2\pi f (x_n - x_m)}\end{aligned}$$

式中交叉项

$$\sum_{\substack{n \neq m \\ n, m=1 \\ n, m=N}}^N e^{i2\pi f (x_n - x_m)} = \sum_{\substack{n \neq m \\ n, m=1 \\ n, m=N}}^N \cos[2\pi f (x_n - x_m)]$$

由于点源位置  $x_n$ ,  $x_m$  无规分布, 点源数目  $N$  足够大, 致使交叉项统计结果, 内部互相抵消, 总和为零, 故

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^* = N$$

这个例子的意义是, 虽然这些大量点源是相干的, 由于其空间排列是无序的, 致使它们产生的夫琅和费衍射强度分布回到了非相干叠加的结果, 处处是单一点源产生的强度的  $N$  倍。

## § 6 空间滤波和信息处理

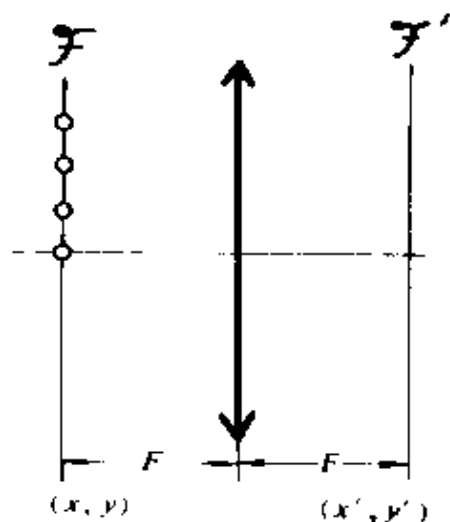
\*1. 在透镜的前焦面上有一系列同位相的相干光源等距排列在  $x$  轴上, 形成一维点阵。用傅里叶变换法求后焦面上的夫琅和费衍射场。

解 点源的复振幅应由  $\delta$  函数来描述, 沿  $x$  轴等距排列的一维点阵 [如图 (a)] 表示为

$$\tilde{U}(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - nd, y)$$

后焦面上的夫琅和费衍射场为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x', y') &= \mathcal{F}\{\tilde{U}(x, y)\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{F}\{\delta(x - nd, y)\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(2\pi f_x)nd} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-iN\beta'}} \end{aligned}$$



题 1 图 (a)

式中  $\beta' = 2\pi f_x d$ ,  $f_x = \frac{x'}{F\lambda}$

衍射场强度分布为

$$\begin{aligned} I(x', y') &= \tilde{U}(x', y') \tilde{U}^*(x', y') \\ &= \left( \frac{1}{1 - e^{-iN\beta'}} \right) \left( \frac{1}{1 - e^{iN\beta'}} \right) \\ &= \frac{2}{2} \cdot \frac{2 \cos N\beta'}{2 \cos \beta'} = \frac{\sin^2 \frac{N\beta'}{2}}{\sin^2 \frac{\beta'}{2}} \\ &= \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta} \end{aligned}$$

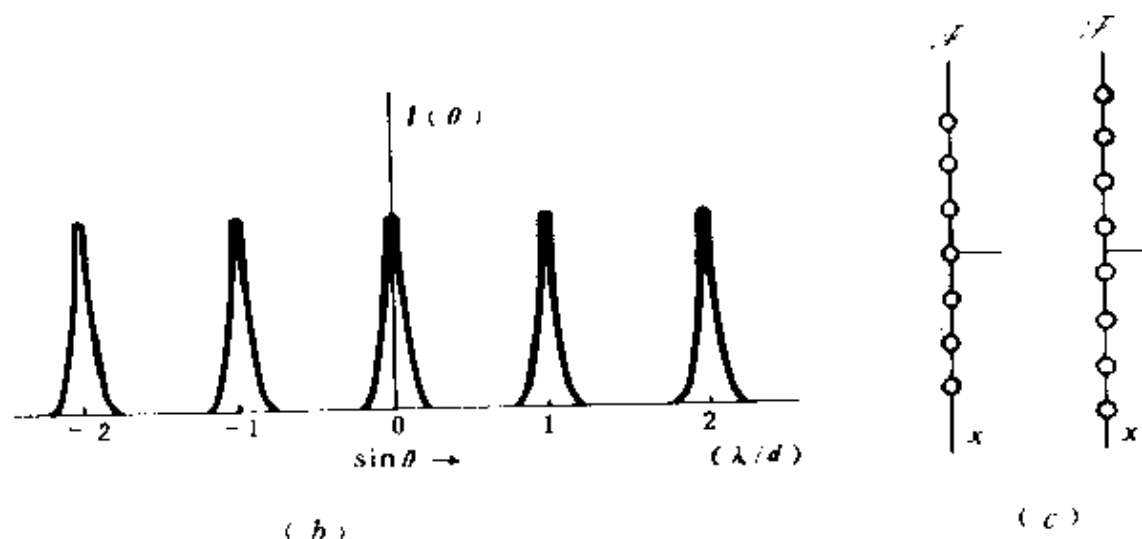
式中

$$\beta = \frac{\beta'}{2} = \pi d f_x = \frac{\pi d}{\lambda} \cdot \frac{x'}{F}$$

其强度分布曲线如图 (b) 所示, 是一组等间隔等高度的空间脉冲, 若横坐标以衍射角正弦值  $\sin\theta$  标定, 则脉冲角间隔  $\Delta\theta$  和脉冲角宽度  $\delta\theta$  分别表示为

$$\Delta\theta(d\cos\theta) \approx \lambda$$

$$\delta\theta(Nd\cos\theta) \approx \lambda$$



题 1 图

最后顺便交代一下，实际上总是将一维点阵对称地安排成图 (c) 那样，这相当于把图 (a) 那种安排沿  $x$  轴向下位移适当距离  $x_0$ ，其实这只要在上述复振幅表达式中添加一个常数相因子  $\exp(i2\pi f x_0)$ ，而并不影响衍射强度表达式。

\*2. 设透镜直径  $D = 5\text{ cm}$ ，焦距  $F = 60\text{ cm}$ ，图象（衍射屏）线度  $l = 2\text{ cm}$ ，入射光波长  $\lambda = 0.6\text{ }\mu\text{m}$ 。

(1) 分别算出后焦面上  $(x', y') = (0, 0), (0, 1), (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (0.5, 2), (3, -5), (-10, -15)$ （单位皆为  $\text{mm}$ ）等处所对应的空间频率  $(f_x, f_y)$  的具体数值（单位皆为  $\text{mm}^{-1}$ ）；

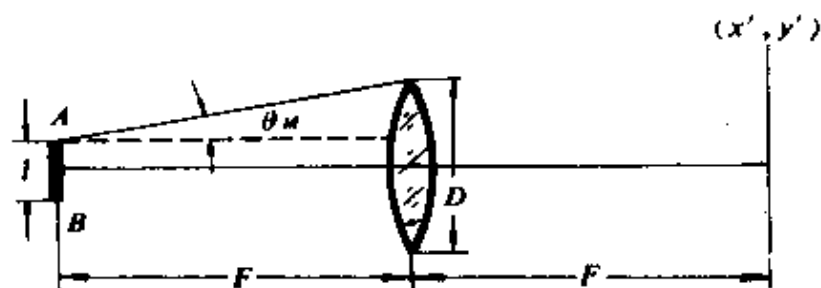
(2) 计算系统的截止频率。

解 (1) 夫琅和费衍射场点位置  $(x', y')$  与屏函数空间频率  $(f_x, f_y)$  的关系为

$$(x', y') = F\lambda(f_x, f_y), \text{ 或 } (f_x, f_y) = \frac{1}{F\lambda}(x', y')$$

按题意算出  $(f_x, f_y)$  值列表如下:

$(x', y') \text{ (mm)}$	$(0, 0) (0, 1)$	$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$	$(0.5, 2)$	$(3, -5)$
$(f_x, f_y) \text{ (mm)}$	$(0, 0) (0, 2.8)$	$(2.0, 2.0)$	$(1.4, 5.6)$	$(8.3, -13.9)$



题 2 图

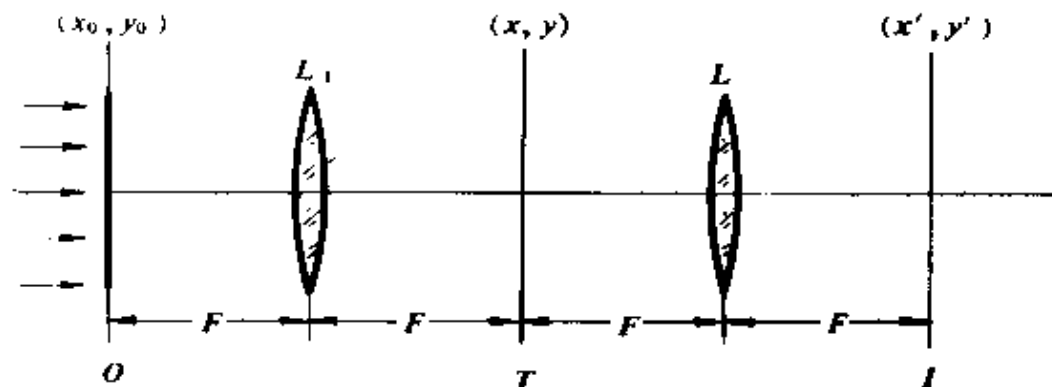
(2) 如图, 透镜所能接收的最大衍射角  $\theta_m$  满足

$$\sin \theta_m \approx \frac{(D/2) - l/2}{F} = \frac{D-l}{2F}$$

因此, 透镜作为漏高频的低通滤波器, 其截止频率为

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{\sin \theta_m}{\lambda} \\ &= \frac{D-l}{2F\lambda} \approx 42 \text{ mm}^{-1} \end{aligned}$$

\*3. 光信息处理的  $4F$  系统如图。在系统的输入平面  $O$  上放置一张较大的图片, 其振幅透过率函数为



题 3 图

$$\widetilde{T}_1 = t_0 + t_1 \cos 2\pi f x,$$

式中  $t_0 = 0.6$ ,  $t_1 = 0.3$ ,  $f = 400 \text{ mm}^{-1}$ ,  $F = 20 \text{ cm}$ , 现以单色平行光照明图片, 光波长为  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ .

(1) 求变换平面  $T$  上获得的衍射图样的主要特征 (衍射斑的方位及相对强度):

(2) 求输出平面  $I$  上获得的图象光强分布:

(3) 如果用一张黑纸 (作为空间滤波器) 挡掉零级斑, 求输出图象的光强分布, 并算出空间频率的具体数值:

(4) 如果用一张黑纸挡掉上半部非零级衍射斑, 求输出图象的光强分布, 并算出空间频率的具体数值.

解 (1) 变换平面  $T$  是系统第一次夫琅和费的衍射场, 正弦光栅在变换平面上的衍射图样是三个衍射斑. 目前这三个衍射斑沿  $x$  轴分布, 其角方位分别为

$$\sin\theta = \begin{cases} 0 & (0 \text{ 级斑}) \\ \pm f\lambda & (\pm 1 \text{ 级斑}) \end{cases}$$

按  $f = 400 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$  算出

$$\theta_{\pm 1} \approx \pm 14^\circ 36'$$

$\pm 1$  级衍射斑的中心强度与 0 级斑的比值为

$$\frac{I_{\pm 1}}{I_0} = \left( \frac{t_1}{2t_0} \right)^2 \approx 6.3\%$$

(2) 在变换平面不加滤波器的情况下, 输出图象等于输入图象再绕轴倒置, 即输出场的复振幅分布为

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_2(x', y') &= \widetilde{T}_1(-x', -y') \\ &= t_0 + t_1 \cos 2\pi f x' \end{aligned}$$

输出光强分布为

$$\begin{aligned} I_2(x', y') &\propto \widetilde{T}_1 \widetilde{T}_2^* \\ &= t_0^2 + 2t_0 t_1 \cos 2\pi f x' + t_1^2 \cos^2 2\pi f x' \end{aligned}$$

(3) 变换平面上的零级斑反映物平面上的  $t_0$  相联系的直

流信息。挡掉零级斑相当于完全通过系统的物信息成为

$$\widetilde{t}_0'(x_0, y_0) = t_1 \cos 2\pi f x_0$$

这时输出信息为

$$\widetilde{t}_1(x', y') = \widetilde{t}_0'(-x', -y') = t_1 \cos 2\pi f x'$$

输出图象的光强分布为

$$\begin{aligned} I_1(x', y') &= \widetilde{t}_1 \widetilde{t}_1^* = t_1^2 \cos^2 2\pi f x' \\ &= \frac{1}{2} t_1^2 + \frac{1}{2} t_1^2 \cos 4\pi f x' \end{aligned}$$

除直流成分外, 其交变成分的空间频率为

$$f' = 2f = 800 \text{ mm}^{-1}$$

(4) 此时挡掉的是 +1 级斑。展开输入平面上的物信息得

$$t_0(x_0, y_0) = t_0 + \frac{1}{2} t_1 e^{i2\pi f x_0} + \frac{1}{2} t_1 e^{-i2\pi f x_0}$$

变换平面上的 +1 级斑与物信息  $(t_1 e^{i2\pi f x_0})/2$  相对应, 挡掉 +1 级斑, 相当于完全通过系统的物信息成为

$$\widetilde{t}_0''(x_0, y_0) = t_0 + \frac{1}{2} t_1 e^{-i2\pi f x_0}$$

此时输出信息为

$$\begin{aligned} \widetilde{t}_1''(x', y') &= \widetilde{t}_0''(-x', -y') \\ &= t_0 + \frac{1}{2} t_1 e^{-i2\pi f x'} \end{aligned}$$

输出图象的光强分布为

$$I_1(x', y') = \widetilde{t}_1'' \widetilde{t}_1''^* = t_0^2 + \frac{1}{4} t_1^2 + t_0 t_1 \cos 2\pi f x'$$

除直流成分外, 其交变成分的空间频率为

$$f'' = f = 400 \text{ mm}^{-1}$$

当然, (3)、(4)两问还可以从以下两种方法解答, 一种是将留下来的两个衍射斑作为两个相干点源, 经第二个透镜成为两束相干的平行光, 则输出图象是两束平行光在后焦面上的干涉场,

如此处理对于我们也是熟悉的。或者将留在变换平面上的两个衍射斑当作两个  $\delta$  函数，用傅里叶变换式求得第二次夫琅和费的衍射场，即为输出场。

4. (1) 以一张黑白图案作光学滤波器，在黑的地方开个孔，这张滤波器的透过率函数是图案与孔的透过率函数的相乘还是相加？

(2) 若在上述图案中白的地方点上一黑点，图案与黑点的透过率函数是相乘还是相加？

解 (1) 此时，滤波器的透过率函数应是黑白图案与孔函数的相加，而不是相乘

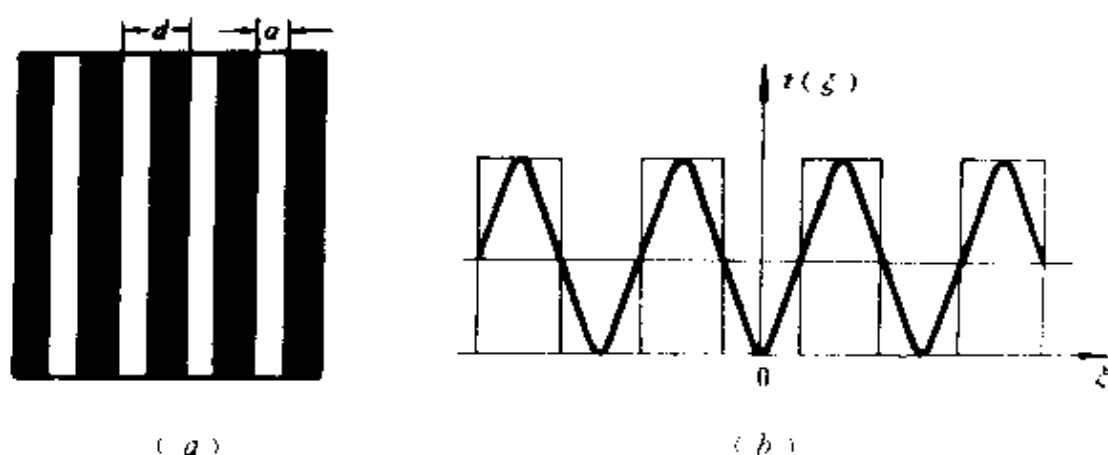
(2) 此时，滤波器的透过率函数应是黑白图案与黑点函数的相乘而不是相加。

5. 用一块正弦光栅（或  $d : a = 2 : 1$  的黑白光栅）作为  $4F$  系统的滤波器，设物波前为  $\tilde{U}_0$ 。

(1) 经过变换平面中心的是不透光的黑条纹 [如图 (a) 所示]，求象面上的复振幅分布；

(2) 在光栅的正中央黑条纹上开一个小洞，求此时象面上的复振幅分布；

(3) 这一装置能否实现反衬度完全反转？



题 5 图



解 (1) 如图 (b), 此时滤波函数应当写成

$$t_r(\xi, \eta) = t_0 + t_1 \cos(2\pi f_0 \xi - \pi)$$

完全通过系统的物信息变为

$$\tilde{U}_0(x, y) = \tilde{U}_i(x, y) * \mathcal{F}^{-1}\{t_r(\xi, \eta)\}, (f_0, f_0) = \frac{1}{\lambda F}(\xi, \eta)$$

而滤波函数的傅里叶逆变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{t_r\} &= \mathcal{F}^{-1}\{t_0 + t_1 \cos(2\pi f_0 \xi - \pi)\} \\ &= t_0 \delta(x, y) + \frac{1}{2} t_1 e^{i\pi} \delta(x + \lambda F f_0) + \frac{1}{2} t_1 e^{-i\pi} \delta(x - \lambda F f_0) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(x, y) &= t_0 \tilde{U}_i(x, y) + \frac{1}{2} t_1 e^{i\pi} \tilde{U}_i(x + \lambda F f_0, y) \\ &\quad + \frac{1}{2} t_1 e^{-i\pi} \tilde{U}_i(x - \lambda F f_0, y) \end{aligned}$$

最后输出场为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_l(x', y') &= \tilde{U}_0(-x', -y') = t_0 \tilde{U}_i(-x', -y') \\ &\quad + \frac{1}{2} t_1 e^{i\pi} [\tilde{U}_i(-x' - \lambda F f_0, -y')] \\ &\quad + \tilde{U}_i(-x' + \lambda F f_0, -y')] \end{aligned}$$

在象面上出现位置错开的三个物图象, 相当于 0 级象和  $\pm 1$  级象。

(2) 如果不开小孔, 中央全是黑条纹, 挡住了直流成分, 这意味着最后输出的三项的直流成分之和为零, 即

$$t_0 \mathcal{F}\{\tilde{U}_0\}_0 = \frac{1}{2} t_1 \mathcal{F}\{\tilde{U}_{+1}\}_0 = \frac{1}{2} t_1 \mathcal{F}\{\tilde{U}_{-1}\}_0 = 0$$

于是

$$t_0 \mathcal{F}\{\tilde{U}_0\}_0 = \frac{1}{2} t_1 \mathcal{F}\{\tilde{U}_{+1}\}_0 + \frac{1}{2} t_1 \mathcal{F}\{\tilde{U}_{-1}\}_0$$

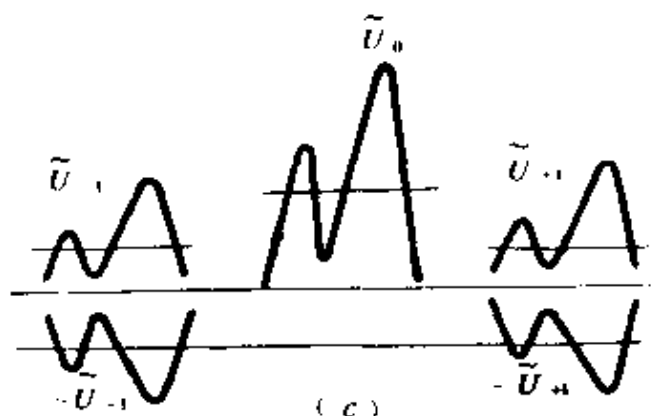
现在在滤波器正中开个小孔, 这意味着物图象的零级完全通过, 输出图象应当是 (1) 问结果再加  $t_0 \mathcal{F}\{\tilde{U}_0\}_0$ , 即

$$\begin{aligned}\tilde{U}'_i(x', y') &= \tilde{U}_i(x', y') + t_0 \mathcal{F}\{\tilde{U}_0\}_0 \\ &= t_0 \tilde{U}_0(-x', -y') + \frac{1}{2} t_1 \tilde{U}_{-1} - \frac{1}{2} t_1 \tilde{U}_1 + t_0 \mathcal{F}\{\tilde{U}_0\}_0\end{aligned}$$

利用式 (a) 得

$$\begin{aligned}\tilde{U}'_i(x', y') &= t_0 \tilde{U}_0 + \frac{1}{2} t_1 \tilde{U}_{-1} - \frac{1}{2} t_1 \tilde{U}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} t_1 \mathcal{F}\{\tilde{U}_{-1}\}_0 + \frac{1}{2} t_1 \mathcal{F}\{\tilde{U}_1\}_0 \\ &= t_0 \tilde{U}_0 + \frac{1}{2} t_1 (\mathcal{F}\{\tilde{U}_{-1}\}_0 - \tilde{U}_{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} t_1 (\mathcal{F}\{\tilde{U}_1\}_0 - \tilde{U}_1)\end{aligned}$$

(3) 一个信息与其直流成分的相减结果, 有可能使强度反衬度完全反转, 以上结果中的括号两项正是这种情况 [如图 (c)]。



题5图

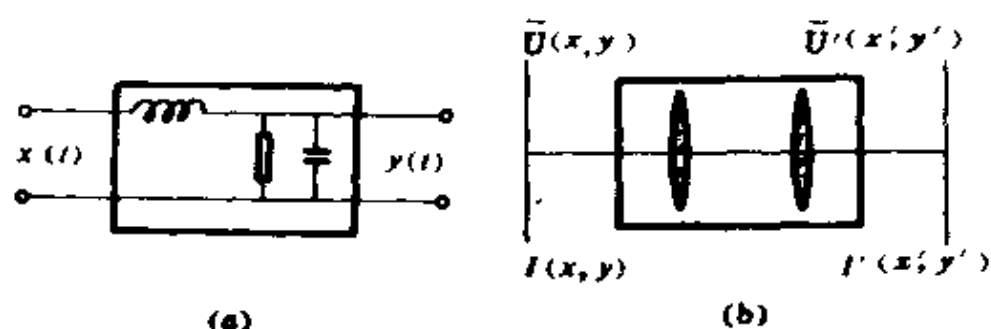
## §7 点扩展函数 与光学传递函数

1. 证明简谐信息是线性不变系统的本征信息。

**证** 所谓系统的本征信息是指这样一类简单信息, 它经系统变换以后, 输出信息的函数线型不变, 仍为同类的简单信息。系统的变换作用仅在于改变本征信息的特征参量。对于线性不变系统来说, 不论其具体装置是变换时间讯号的电学系统 [如图 (a) 所示], 或是变换空间图象的光学系统 [如图 (b) 所示], 其本征信息是简谐型信息。对此, 有以下三种证明方法。

(1) 由卷积关系直接证明

为书写简单起见, 以图 (a) 为例。设输入信息为



题 1 图

$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$

系统的脉冲响应函数为  $h(t)$ 。当系统是线性不变系统时，输出信息等于输入信息与脉冲响应函数的卷积。因此，目前的输出信息应当为

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t-t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') x(t-t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t') A \cos [\omega_0 (t-t')] dt' \end{aligned}$$

再展开  $\cos [\omega_0 (t-t')]$ ，在积分运算中将  $t$  看作常量，最后仍然可将输出信息写成简谐型，即

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

式中  $B(\omega_0)$ ， $\varphi(\omega_0)$  均为频率  $\omega_0$  的函数。。以上证明的中间运算过程，可参阅《光学》书中正文

(2) 利用卷积的频谱关系证明

因为

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

于是频谱

$$\mathcal{F}\{y\} = \mathcal{F}\{x\} \mathcal{F}\{h\}$$

设

$$\mathcal{F}\{h\} = \tilde{H}(\omega)$$

$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$

$$\begin{aligned} \text{得 } \mathcal{F}\{y\} &= \widetilde{H}(\omega) \mathcal{F}\{A \cos \omega_0 t\} \\ &= \widetilde{H}(\omega) \frac{A}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

再由傅里叶逆变换求得输出函数

$$y(t) = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \widetilde{H}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\left( \nu = \frac{\omega}{2\pi} \right)$$

利用  $\delta$  函数的选择性, 得

$$y(t) = \frac{A}{2} [\widetilde{H}(\omega_0) e^{i\omega_0 t} + \widetilde{H}(-\omega_0) e^{-i\omega_0 t}]$$

由于描述时间讯号点脉冲或空间光强点脉冲的  $\delta$  函数为实函数, 其正负两支频谱互为共轭, 即

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(-\omega_0) &= \widetilde{H}^*(\omega_0), \\ \widetilde{H}(\omega_0) &= H(\omega_0) e^{-i\varphi_H(\omega_0)} \end{aligned}$$

于是简化得

$$y(t) = A H \cos(\omega_0 t - \varphi_H)$$

可见输出函数仍为同频的简谐信息, 与输入信息相比, 输出信息的振幅变化和位相变化集中于  $\widetilde{H}(\omega_0)$ 。

(3) 利用线性运算操作证明。

设运算操作  $T$  为抽象的线性变换, 即

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

为简单起见, 设简谐信息为

$$x(t) = A e^{i\omega_0 t}$$

则

$$y(t) = T\{A e^{i\omega_0 t}\}$$

因系统具有不变性 (电网络的时间稳定性或光学系统的空间不变性), 故有

$$\begin{aligned}
 y(t+\tau) &= T \{ A e^{i\omega_0(t+\tau)} \} \\
 &= T \{ A e^{i\omega_0 t} e^{i\omega_0 \tau} \} = e^{i\omega_0 \tau} T \{ A e^{i\omega_0 t} \} \\
 &= e^{i\omega_0 \tau} y(t)
 \end{aligned}$$

以上关系对任意  $\tau$  都成立。令  $t=0$ ，得

$$y(\tau) = y(0) e^{i\omega_0 \tau}$$

即输出函数仍为同频的简谐信息。与输入信息相比，输出信息的振幅变化和位相变化集中于  $y(0)/A$ ， $y(0)$  可能是复数

2. 在理论分析中，OTF (光学传递函数) 在  $f_x = f_y = 0$  处都等于 1，这是为什么？OTF 值可能大于 1 吗？如果光学系统真的实现了点物成点象，其 OTF 曲线应该怎样？

解 (1) 系统的 OTF 是点扩展函数的频谱，即

$$h(x, y) \sim \widetilde{H}(f_x, f_y)$$

须知，频谱的零点值等于原函数在全区域的积分值（面积），即

$$\widetilde{H}(0, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx dy$$

在理论分析中不考虑系统对光能流的损耗，认定物面上单位光功率的点源总能流都将全部弥漫在象面上，这便导致点扩展函数的归一化，即

$$\begin{aligned}
 \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx dy &= 1 \\
 \widetilde{H}(0, 0) &= 1
 \end{aligned}$$

(2) OTF 值是不可能大于 1 的。系统对点源的扩展，扩展函数对物面简谐光强的卷积，必定使象面强度的反衬度下降，虽然象面强度仍是简谐型的。

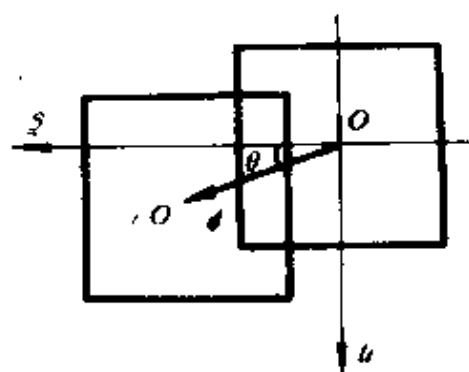
(3) 只有当理想成象，象面与物面才有点点对应的关系。此时点扩展函数本身便是  $\delta$  函数， $\delta$  函数的频谱为常数 1，这说明此时对各种空间频率来说，其 OTF  $\equiv 1$ ，这当然是理想情形。

\*3. 画出正方形光瞳的一组 OTF 曲线，以  $\rho/a$  为横坐标

( $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ,  $a$  为光瞳边长),  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ 。

解 如图 (a)。正方形瞳函数为

$$t(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |\xi| \leq \frac{a}{2}, |\eta| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{当 } |\xi| > \frac{a}{2}, |\eta| > \frac{a}{2} \end{cases}$$



题 3 图 (a)

OTF 为瞳函数的自相关, 即

$$\widetilde{H}(f_x, f_y) = \widetilde{t}(\xi, \eta) (*) \widetilde{t}(\xi, \eta)$$

式中  $(\xi, \eta) = \lambda f_x(f_y)$ 。自相关的几何意义是位移  $\rho$  以后两个方孔的重叠面积  $\bar{A}$  与全面积  $A$  之比, 全面积为

$$A = a^2$$

重叠面积为

$$\bar{A} = \begin{cases} (a - |\xi|)(a - |\eta|), & |\xi| \leq a, |\eta| \leq a \\ 0, & |\xi| > a, |\eta| > a \end{cases}$$

所以

$$\widetilde{H}(f_x, f_y) = \begin{cases} (1 - \frac{|\xi|}{a})(1 - \frac{|\eta|}{a}), & |\xi| \leq a, |\eta| \leq a \\ 0, & |\xi| > a, |\eta| > a \end{cases}$$

设位移矢量为  $\rho(\rho, \theta)$ , 与  $(\xi, \eta)$  的关系为

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta$$

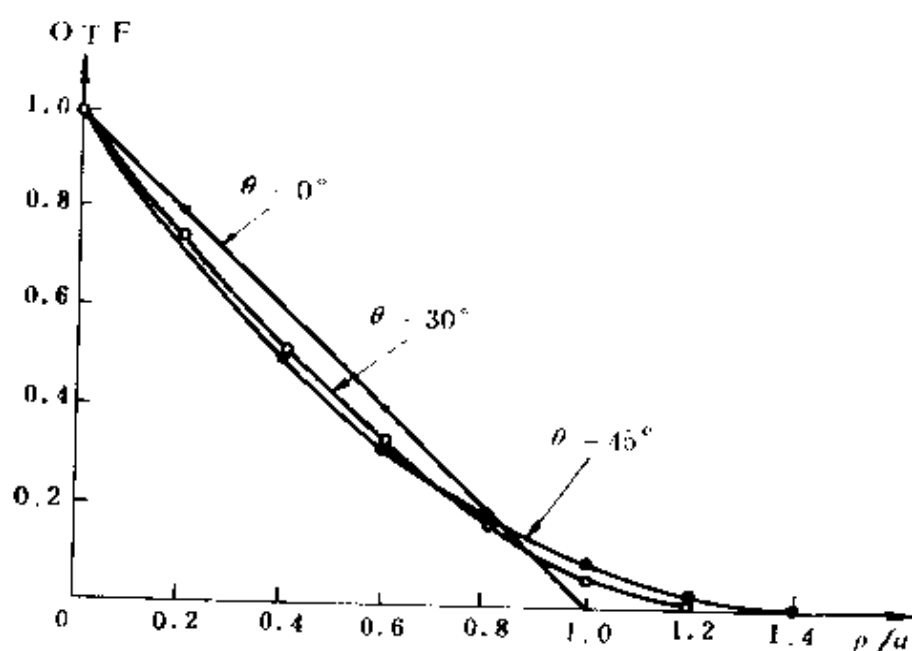
由于方孔的对称性, 只需具体分析第一象限  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  的  $\widetilde{H}$  的仔细情况。用  $(\rho, \theta)$  表示的  $\widetilde{H}$  为

$$\widetilde{H}(f_x, f_y) = \begin{cases} (1 - \frac{\rho}{a} \cos \theta)(1 - \frac{\rho}{a} \sin \theta), & \xi, \eta \leq a \\ 0, & \xi, \eta > a \end{cases}$$

以  $\rho/a$  为变量, 计算出不同  $\theta$  时的 OTF 值, 列表如下, 再以  $\rho/a$

为横坐标，画出 OTF 曲线如图 (b)。

$\rho/a$		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
OTF	0	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0	0	0
	30	1.0	0.74	0.52	0.34	0.18	0.067	0	0	0
	45	1.0	0.74	0.51	0.33	0.19	0.086	0.023	0	0



题3图 (b)

从表中看出，在  $\rho/a = 1.0 \sim 1.4$  范围内，不同  $\theta$  方位的 OTF 曲线开始取 0 值，由此可以算出正方光瞳的截止频率为

$$f_M = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \frac{1}{\lambda s'} \sqrt{s'^2 + \eta^2}$$

$$\frac{1}{\lambda s'} \rho = \frac{a}{\lambda s'} \left( \frac{\rho}{a} \right)$$

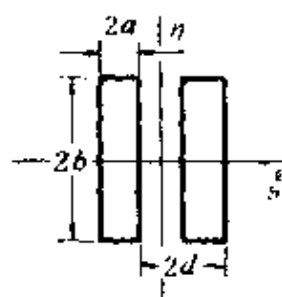
取  $\rho/a = 1$ ，则截止频率  $f_M$  及其对应的最小空间周期  $d_m$  分别为

$$f_M = \frac{1}{s'} = \frac{a}{\lambda}, \quad d_m = \frac{1}{f_M} = s' = \frac{\lambda}{a}$$

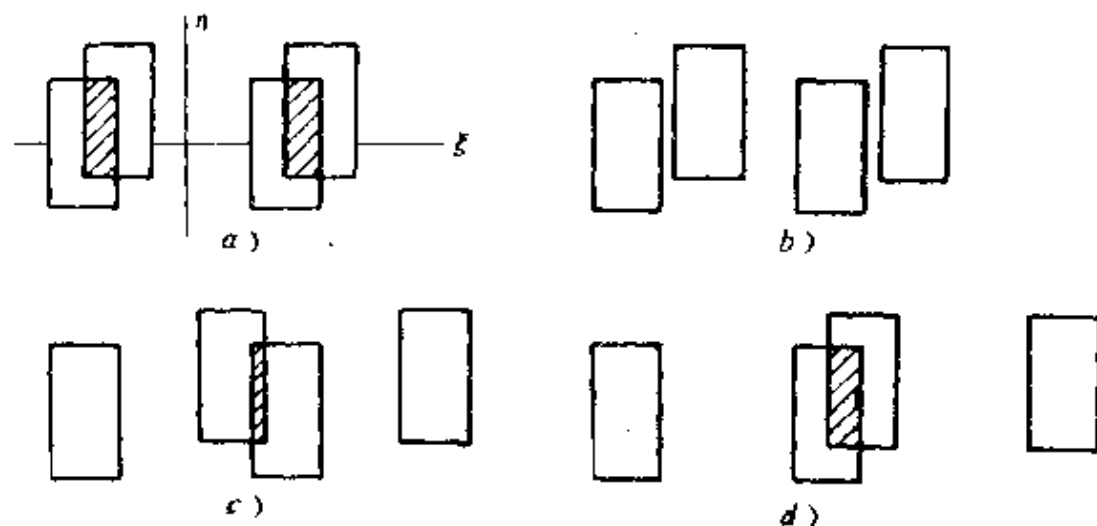
式中  $s'$  是象距。

4. 导出双缝光瞳 [如图(a)] 的 OTF 表达式, 并画出沿  $\xi$  方向的 OTF 曲线。

解 随位移矢量  $\rho$  值的增加, 一对双缝之间的重叠面积出现如图那样的几种情况, 先是重叠面积逐渐减少的区间 a), 继而存在一段重叠面积为 0 的区间 b), 又开始一段重叠面积逐渐增加的区间 c), 继而又出现重叠面积逐



题 4 图 (a)



题 4 图 (b)

渐减少以至为 0 的区间 d), 再往后就一直无重叠面积了。定量讨论如下: 双缝瞳函数为

$$t(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & (d+a) \geq |\xi| \geq (d-a), |\eta| \leq b \\ 0, & |\xi| < (d-a) \text{ 或 } |\xi| > (d+a) \text{ 或 } |\eta| > b \end{cases}$$

设位移为  $\rho(\xi, \eta)$ , 则重叠面积为

$$A = \begin{cases} 2(2a - \xi)(2b - \eta), & \xi \leq 2a, \eta \leq 2b \\ 0, & (2d - 2a) \leq \xi \leq 2a \text{ 或 } \eta \leq 2b \\ [ \xi - (2d - 2a) ] (2b - \eta), & 2d \leq \xi \leq (2d + 2a), \eta \leq 2b \\ [ 2a - (\xi - 2d) ] (2b - \eta), & (2d + 2a) \leq \xi \leq 2d, \eta \leq 2b \\ 0, & \xi \geq (2d + 2a) \end{cases}$$



全面积为

$$A = 2(2a)(2b) = 8ab$$

所以双缝光瞳的传递函数为

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(f_x, f_y) &= \frac{\widetilde{A}}{A} \\ &= \begin{cases} (1 - \frac{\xi}{2a})(1 - \frac{\eta}{2b}), & \xi < 2a, \eta < 2b \\ 0, & (2d - 2a) > \xi > 2a, \text{ 或 } \eta > 2b \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{d}{a} + \frac{\xi}{2a})(1 - \frac{\eta}{2b}), & 2d > \xi > (2d - 2a), \eta < 2b \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{d}{a} - \frac{\xi}{2a})(1 - \frac{\eta}{2b}), & (2d + 2a) > \xi > 2d, \eta < 2b \\ 0, & \xi < -(2d + 2a) \end{cases} \end{aligned}$$

如果平移仅限于沿 $\xi$ 轴方向, 此时 $\eta = 0, f_y = 0$ , 传递函数为

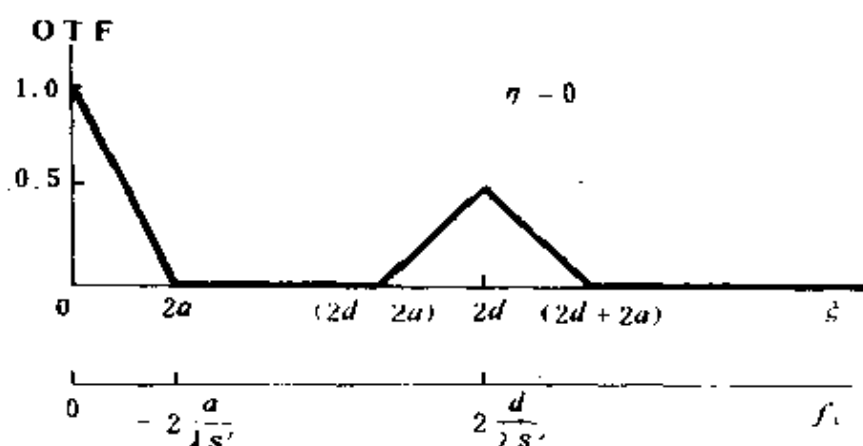
$$\widetilde{H}(f_x) = \begin{cases} (1 - \frac{\xi}{2a}), & \xi < 2a \\ 0, & (2d - 2a) > \xi > 2a \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{d}{a} + \frac{\xi}{2a}), & 2d > \xi > (2d - 2a) \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{d}{a} - \frac{\xi}{2a}), & (2d + 2a) > \xi > 2d \\ 0, & \xi < -(2d + 2a) \end{cases}$$

其变化曲线如图(c)。由于空间频率 $(f_x, f_y)$ 与位移坐标 $(\xi, \eta)$ 的对应关系为

$$(f_x, f_y) = -\frac{1}{\lambda s'}(\xi, \eta)$$

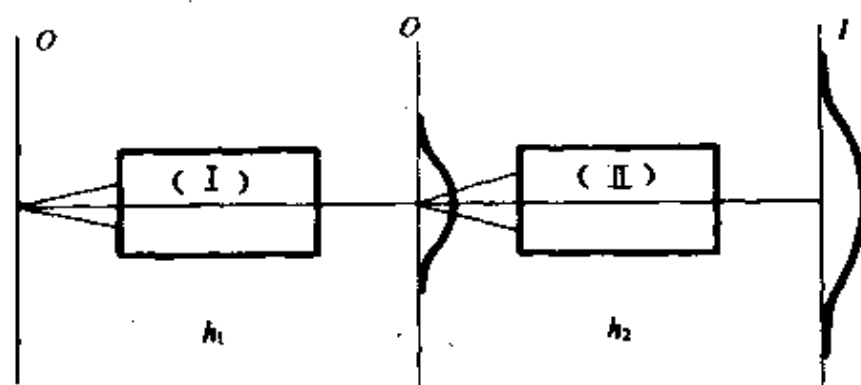
因此横坐标也可以用 $f_x$ 标定。

从曲线图中看出, 与圆形或矩形等单孔光瞳相比, 双缝或多缝等多孔光瞳的特点是具有选频性能, 相当于电学中的谐振回路。



题 4 图 (c)

\*5. 实际上象点的扩展不仅发生在光波通过光学系统的传输过程中,而且也发生在最后的接收器件上,如乳胶底片,荧光屏,光学纤维面板等。设透镜系统的 OTF 为  $\tilde{H}_0$ , 象面接收器的点扩展函数为  $h_1$ , 求这台光学仪器总的 OTF。



题 5 图

解 如图,设系统从物面  $O$  到象面  $I$  先后经历两个分系统 (I) 和 (II), 各自的点扩展函数分别为  $h_1$  和  $h_2$ , 当物面上有一点源输入, 则最后象面强度  $I_i$  是两次扩展的结果。设此时中间象面  $O'$  上强度分布为  $I'$ , 则

$$I' = h_1$$

$$I_i = I' * h_2 = h_1 * h_2$$

因此全系统的传递函数为

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(f_x, f_y) &= \mathcal{F}\{\widetilde{T}_1\} \cdot \mathcal{F}\{h_1 * h_2\} \\ &= \mathcal{F}\{h_1\} \cdot \mathcal{F}\{h_2\} \\ &= \widetilde{H}_1 \widetilde{H}_2\end{aligned}$$

结合本题情况，透镜系统可视为上述的分系统（I），象面接收元件可视为分系统（II），故这台光学仪器的OTF为

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}_0 \cdot \mathcal{F}\{h_1\}$$

## 第六章 全息术原理

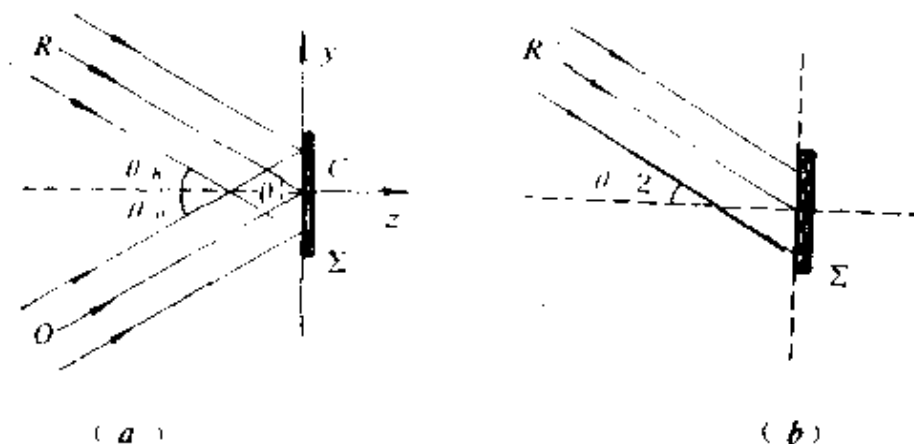
1. 如附图(a), 参考光束  $R$  和物光束  $O$  均为平行光, 对称地斜入射于记录介质  $\Sigma$  上, 即  $\theta_R = -\theta_O$ , 二者间的夹角为  $\theta = 2\theta_0$ .

- (1) 试说明全息图上干涉条纹的形状;
- (2) 试分别写出物光波和参考光波在  $\Sigma$  平面上的位相分布函数  $\varphi_o(y)$  和  $\varphi_R(y)$ ;
- (3) 试证明全息图上干涉条纹的间距公式为

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)}$$

(4) 试计算, 当夹角  $\theta = 1^\circ, 60^\circ$  时, 间距  $\Delta y$  分别为多少? (采用  $\text{He-Ne}$  激光记录,  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ );

(5) 某感光胶片厂生产一种可用于全息照相的记录干板, 其性能为: 感光层厚度  $8 \mu\text{m}$ , 分辨率为  $3000 \text{ 条/mm}$  以上。利用(4)问所得数据, 试说明: 当  $\theta = 60^\circ$  时, 用该记录干板是否构成



题1图

一张体全息图？该记录干板的分辨率是否匹配？

(6) 如附图(b), 采用与参考光束  $R$  同样波长同样倾角的重现光波  $R'$  照射该张全息图, 试分析 0 级, +1 级, -1 级三列衍射波都出现在什么方向上, 并作图表示。

解 (1) 条纹形状为一组与  $y$  轴正交的等距的直线。

(2) 物光波和参考光波在  $\Sigma$  平面上的位相分布函数分别为

$$\begin{aligned}\varphi_o(y) &= k y \sin \theta_o + \varphi_o \\ \varphi_k(y) &= k y \sin \theta_k = -k y \sin \theta_o\end{aligned}$$

式中  $\varphi_o$  为物光波和参考光波在  $\Sigma$  面上坐标原点处的位相差。

(3) 应从位相差的改变来确定条纹的间距。当场点坐标改变一个条纹间距  $\Delta y$  时, 则位相差改变  $2\pi$ , 干涉强度还原。由 (2) 知道物光波与参考光波在  $\Sigma$  面上的位相差分布为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x, y) &= \varphi_o(y) - \varphi_k(y) \\ &= (2k \sin \theta_o) y + \varphi_o\end{aligned}$$

改变量为

$$\delta(\Delta\varphi) = 2k \sin \theta_o \delta y$$

令  $\delta(\Delta\varphi) = 2\pi$ , 得条纹间距为

$$\Delta y = \frac{2\pi}{2k \sin \theta_o} = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)}$$

(4) 当  $\theta = 1^\circ$  时, 得

$$\Delta y = 36.26 \mu\text{m}$$

当  $\theta = 60^\circ$  时, 得

$$\Delta y = 0.6328 \mu\text{m}$$

(5) 当  $\theta = 60^\circ$  时, 条纹间距  $\Delta y$  和感光层厚度  $l$  之间满足

$$l \gg \Delta y$$

故该记录干板可以构成一张体全息图。干板的最小分辨距离为

$$d = \frac{1}{3000} \text{ mm} = 0.33 \mu\text{m}$$

可见,  $d \ll \Delta y$ , 且同数量级, 二者是匹配的。

(6) 记录时干涉场的强度分布为

$$I_H(x, y) = (\tilde{U}_o + \tilde{U}_R)(\tilde{U}_o + \tilde{U}_R)^*$$

经线性冲洗后, 这张全息底片的透过率函数为

$$\begin{aligned} \tilde{t}_H(x, y) &= t_0 + \beta I_H(x, y) \\ &= (t_0 + \beta A_o^2 + \beta A_R^2) + \beta \tilde{U}_R^* \tilde{U}_o + \beta \tilde{U}_R \tilde{U}_o^* \end{aligned}$$

经照明光波  $\tilde{U}_k$  作用, 透射场为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t(x, y) &= \tilde{t}_H \tilde{U}_k \\ &= (t_0 + \beta A_o^2 + \beta A_R^2) \tilde{U}_k + \beta \tilde{U}_k^* \tilde{U}_R \tilde{U}_o + \beta \tilde{U}_k \tilde{U}_R^* \tilde{U}_o^* \end{aligned}$$

式中  $\tilde{U}_k, \tilde{U}_o, \tilde{U}_R$  分别为照明光波、物光波、参考光波三列平面波的波前函数, 可将它们写成

$$\tilde{U}_k = \tilde{U}_R = A_R \exp(-ik y \sin \frac{\theta}{2})$$

$$\tilde{U}_o = A_o \exp(ik y \sin \frac{\theta}{2} + i\varphi_o)$$

于是透射场具体形式为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t &= A_o' \exp(-ik y \sin \frac{\theta}{2}) + A_1 \exp(ik y \sin \frac{\theta}{2} + i\varphi_o) \\ &\quad + A_1 \exp(-ik 2 y \sin \frac{\theta}{2}) \exp(-ik y \sin \frac{\theta}{2} - i\varphi_o) \end{aligned}$$

运用相因子判断法可以看到, 透射场包含的主要成分是三列平面衍射波, 可写成

$$\tilde{U}_t = \tilde{U}_0 + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1}$$

其中 0 级波为

$$\tilde{U}_0 = A_o' \exp(-ik y \sin \frac{\theta}{2})$$

它是照明光束照直前进的透射平面波, 当然振幅  $A_o'$  有所下降:

+1级波为

$$\widetilde{U}_{+1} = A_1 \exp \left[ i \left( k y \sin \frac{\theta}{2} + \varphi_0 \right) \right]$$

它是物光波  $\widetilde{U}_0$  波的再现波, 但振幅  $A_1$  有所变化; -1级波为

$$\widetilde{U}_{-1} = A_1 \exp \left[ -i \left( k 3 y \sin \frac{\theta}{2} + \varphi_0 \right) \right]$$

它是方向被进一步偏转的物光共轭波, 偏转角  $\theta_{-1}$  的正弦值为

$$\sin \theta_{-1} = 3 \sin \frac{\theta}{2}$$

如选  $\theta = 30^\circ$ , 则

$$\theta_{-1} = 50^\circ 56'$$

如选  $\theta = 60^\circ$ , 则出现

$$\sin \theta_{-1} = \frac{3}{2}$$

的费解, 实际上此时的 -1级衍射波已经失掉正常平面波的特性而成为倏逝波 (或称衰逝波)。

三列平面衍射波的方向如图 (c) 所示。

2. 若在上题中改为用正入射的平面波再现,  $\pm 1$ 级衍射波各发生什么变化?

解 参考上题分析, 结合目前情况应将照明光波前函数写成

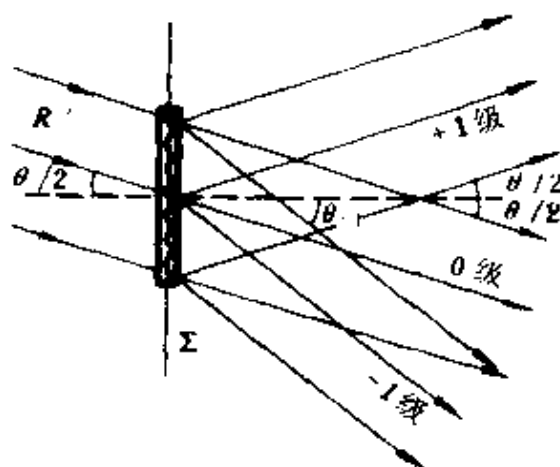
$$\widetilde{U}_k = A_k$$

透射波前仍然包含三列平面衍射波, 即

$$\widetilde{U}_t = \widetilde{U}_0 + \widetilde{U}_{+1} + \widetilde{U}_{-1}$$

式中

$$\widetilde{U}_0 = (t_0 + \beta A_0^2 + \beta A_k^2) \widetilde{U}_k = A'_0$$



题1图 (c)

它是照明光波照直前进（正出射）的平面透射波成分：

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_{+1} &= \beta \widetilde{U}_k' \widetilde{U}_k^* \widetilde{U}_0 \\ &= A_1 \exp(i k y \sin \frac{\theta}{2}) \exp \left[ i \left( k y \sin \frac{\theta}{2} + \varphi_0 \right) \right] \\ &= A_1 \exp \left[ i \left( k 2 y \sin \frac{\theta}{2} + \varphi_0 \right) \right]\end{aligned}$$

它是方向被偏转了的物光波，偏转角  $\theta_{+1}$  的正弦值为

$$\sin \theta_{+1} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

第三种成分为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_{-1} &= \beta \widetilde{U}_k' \widetilde{U}_k^* \widetilde{U}_0^* \\ &= A_1 \exp(-i k y \sin \frac{\theta}{2}) \exp \left[ -i \left( k y \sin \frac{\theta}{2} + \varphi_0 \right) \right] \\ &= A_1 \exp \left[ -i \left( k 2 y \sin \frac{\theta}{2} + \varphi_0 \right) \right]\end{aligned}$$

它是方向被偏转了的物光共轭波，偏转角  $\theta_{-1}$  的正弦值为

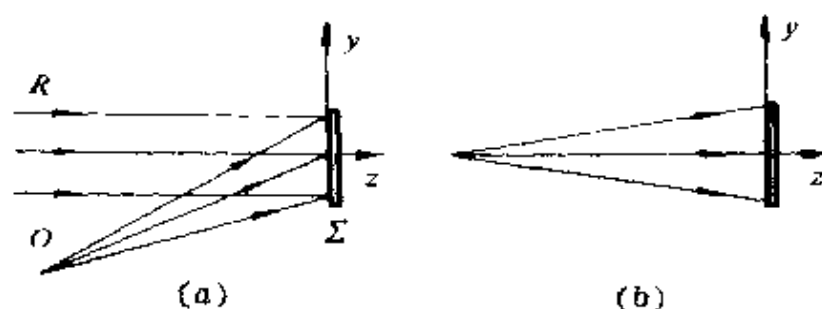
$$\sin \theta_{-1} = -2 \sin \frac{\theta}{2}$$

可见，在照明光波正入射条件下，如果当初物光波和参考光波是对称入射的，则  $\widetilde{U}_{+1}$  波与  $\widetilde{U}_{-1}$  波仍然保持对称出射，但它们的倾角不再等于入射角，这张全息底片的作用等效于两个偏转棱镜。对物光波的作用相当于顶角在下方的棱镜；对物光共轭波的作用相当于顶角在上方的棱镜。

\*3. 如附图（a），用正入射的平面参考光波记录轴外物点 O 发出的球面波。如附图（b），用轴上点源 R' 发出的球面波再现波前，求  $\pm 1$  级两象点的位置。

解 首先分别写出物光波  $\widetilde{U}_0$ ，参考光波  $\widetilde{U}_k$ ，照明光波  $\widetilde{U}_k'$  的波前函数。设物点 O 的坐标为  $(0, y_0, z)$ ，物点的初位相不为零以使其波前在  $\Sigma$  面原点的位相为零，于是在傍轴条件下，有





题 3 图

$$\tilde{U}_0(x, y) \approx A_0 \exp \left[ ik \left( \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{y_0 y}{z} \right) \right]$$

正入射时的平面参考光波波前函数为

$$\tilde{U}_R(x, y) = A_R \exp(i\varphi_R)$$

设轴上照明点源  $R'$  的坐标为  $(0, 0, z')$ ，在傍轴条件下，其波前函数为

$$\tilde{U}_{R'}(x, y) = A_{R'} \exp \left[ i \left( k \frac{x^2 + y^2}{2z'} + \varphi_{R'} \right) \right]$$

将它们代入线性冲洗条件下透射场的标准形式

$$\begin{aligned} \tilde{U}_T(x, y) &= (t_0 + \beta A_0^2 + \beta A_R^2) \tilde{U}_{R'} + \beta \tilde{U}_{R'} \tilde{U}_R \tilde{U}_0 + \beta \tilde{U}_{R'} \tilde{U}_R \tilde{U}_0 \\ &= \tilde{U}_0' + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1} \end{aligned}$$

即可分别求得 0 级， $\pm 1$  级衍射波。其中 0 级衍射波的波前函数为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0' &= (t_0 + \beta A_0^2 + \beta A_R^2) \tilde{U}_{R'} \\ &= A_0' \exp \left[ i \left( k \frac{x^2 + y^2}{2z'} + \varphi \right) \right] \end{aligned}$$

显然，它表示中心在  $(0, 0, z')$  的发散球面波，也就是照明波的直接透射波，但振幅  $A_0'$  不同于  $A_{R'}$ 。 $\pm 1$  级衍射波的波前函数为

$$\begin{aligned}
\widetilde{U}_{+1} &= \beta \widetilde{U}'_R \widetilde{U}_R^* \widetilde{U}_0 \\
&= A_1 \exp \left[ i \left( k \frac{x^2 + y^2}{2 z'} + \varphi'_R \right) \right] \times \\
&\times \exp(-i \varphi_k) \exp \left[ i k \left( \frac{x^2 + y^2}{2 z} - \frac{y_0 y}{z} \right) \right] \\
&= A_1 \exp \left[ i k \left( \frac{x^2 + y^2}{2 z_{+1}} - \frac{y}{z_{+1}} \frac{z_{+1}}{z} y_0 \right) \right] \exp(i \varphi)
\end{aligned}$$

式中

$$\frac{1}{z_{+1}} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z}$$

$$\varphi = \varphi'_R - \varphi_R = \text{常数 (无关紧要)}$$

运用相因子判断法可知,  $\widetilde{U}_{+1}$  波是一列中心在轴外的发散球面波, 其中心坐标 (即象点位置) 为  $(0, z_{+1}, y_0/z, z_{+1})$ , 换句话说,  $\widetilde{U}_{+1}$  波是变换了的物光波。与物光波的中心坐标  $(0, y_0, z)$  相比, 纵向位置由

$$z \rightarrow z_{+1} = \frac{z' z}{z' + z}$$

横向位置由

$$y_0 \rightarrow \frac{z_{+1}}{z} y_0 = \frac{z'}{z' + z} y_0$$

即横向放大率为

$$V_{+1} \equiv \frac{y_{+1}}{y_0} = \frac{z_{+1}}{z} = \frac{z'}{z' + z} \quad (y_{+1} = \frac{z_{+1}}{z} y_0)$$

透射场的第三项称为 -1 级衍射波, 其波前函数为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_{-1} = & B \widetilde{U}_R \widetilde{U}_R \widetilde{U}_0^* \\ & A_1 \exp \left[ i \left( k - \frac{x^2 + y^2}{2z} + \varphi_R' \right) \right] \\ & \times \exp(i\varphi_R) \exp \left[ -ik \left( -\frac{x^2 + y^2}{2z} + \frac{y_0 y_1}{z} \right) \right] \\ & A_1 \exp \left[ -ik \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_1} + \frac{y}{z_1} + \frac{z_1 + y_0}{z} \right) \right] \exp(i\varphi)\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}\times \frac{1}{z_1} = & \frac{1}{z} - \frac{1}{z'} \\ \varphi = & \varphi_R' + \varphi_R, \text{ 常数 (无关紧要)}\end{aligned}$$

运用相因子判断法可知,  $\widetilde{U}_{-1}$  波是一列中心在轴外的傍轴球面波。究竟它是会聚球面波还是发散球面波, 这就要看  $z_1$  的正负号了。不难看出, 当  $z' = z$  时,  $z_1 = 0$ ,  $\widetilde{U}_{-1}$  波为会聚球面波; 当  $z' > z$  时,  $z_1 < 0$ ,  $\widetilde{U}_{-1}$  波为发散球面波。总之, -1 级球面衍射波的中心坐标 (即象点位置) 为  $(0, z_1, y_0/z, z_1)$ 。

横向放大率为

$$V_{-1} = \frac{y_1}{y_0} = -\frac{z_1}{z} = -\frac{z'}{z' - z} \quad (y_1 = -\frac{z_1}{z} y_0)$$

当  $z' = z$ , 则  $V_{-1} = 0$ ; 当  $z' > z$ , 则  $V_{-1} < 0$ 。

通过以上具体分析, 有两点值得强调指出:

第一, 照明球面波  $\widetilde{U}_R$  的作用是在  $\widetilde{U}_0$  波和  $\widetilde{U}_0^*$  波前面提供了一个二次相因子的变换函数, 实际上相当于透镜的作用。当照明球面波为发散型时, 其作用相当于负透镜, 当照明球面波为会聚型时, 其作用相当于正透镜。等效透镜的焦距便是照明点源的纵向距离。所谓“全息成象是无透镜的透镜成象”, 其道理就在于此。

第二, 通常说, 全息底片再现时将孪生两个象, 一个是物光波的再现象 (虚象), 另一个是物光波的共轭象 (实象), 这个具体结论是有条件的, 在参考光波和照明光波均为平面波时, 通常如此。如果照明光波或参考光波为球面波时, 情况就不一定是这样了。既然此时照明光波或参考光波相当于一个透镜的作用, 那么  $\widetilde{U}_0$  波和  $\widetilde{U}_0^*$  波将重新成象而被移位, 缩放, 甚至可能使它俩全是发散波 (全是虚象), 或全是会聚波 (全是实象)。

4. 与题 3 情况类似, 只是照明光波改为不同波长的正入射的平面波, 试求 +1 级两象点的位置。

解 此时, 照明光波波前函数为

$$\widetilde{U}_R = A'_R e^{i \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}$$

透射场仍然包含三项

$$\widetilde{U}_t(x, y) = \widetilde{U}_0 + \widetilde{U}_{+1} + \widetilde{U}_{-1}$$

在运用相因子判断法分析衍射场的主要特征时, 必须将波函数改写为以照明波的波数  $k' = 2\pi/\lambda'$  为特征的标准形式。透射场中

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_0 &= (t_0 + \beta A_0^2 + \beta A_R^2) \widetilde{U}_R \\ &= A'_0 e^{i \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}\end{aligned}$$

这一项很简单, 它代表正出射的平面衍射波。第二项

$$\widetilde{U}_{+1} = \beta \widetilde{U}_R \widetilde{U}_R^* \widetilde{U}_0$$

$$= A_1 e^{i \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} e^{-i \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \exp \left[ i k \left( \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{y_0 y}{z} \right) \right]$$

$$= A_1 \exp \left[ i k' \left( \frac{x^2 + y^2}{2z(\frac{k'}{k})} - \frac{y_0 y}{z(\frac{k'}{k})} \right) \right] \exp(i\varphi)$$

$$= A_1 \exp \left[ i k' \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_{+1}} - \frac{y_0 y}{z_{+1}} \right) \right] \exp(i\varphi)$$

式中

$$z_{+1} = \frac{k'}{k} z$$

$\varphi = \varphi'_k - \varphi_k = \text{常数}$  (无关紧要)

由此可见, 波前  $\widetilde{U}_{+1}$  代表轴外发散的球面衍射波, 其发散中心坐标 (即 +1 级象点位置) 为  $(0, y_0, z_{+1})$ 。

纵向位置的放大率为

$$V_{+z} \equiv \frac{z_{+1}}{z} = \frac{k'}{k} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

而横向坐标不变。第三项为

$$\widetilde{U}_{-1} = \beta U'_k \widetilde{U}_k \widetilde{U}_0^*$$

$$= A_1 e^{i\varphi'_k} e^{i\varphi_k} \exp \left[ -ik \left( \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{y_0 y}{z} \right) \right]$$

$$= A_1 \exp \left[ -ik' \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_{-1}} - \frac{y_0 y}{z_{-1}} \right) \right] \exp(i\varphi')$$

式中

$$z_{-1} = \frac{k'}{k} z$$

$\varphi' = \varphi'_k + \varphi_k = \text{常数}$  (无关紧要)

由此可见, 波前  $\widetilde{U}_{-1}$  代表轴外会聚的球面衍射波, 其会聚中心坐标 (即 -1 级象点位置) 为  $(0, y_0, z_{-1})$ 。

纵向位置的放大率为

$$V_{-z} \equiv \frac{z_{-1}}{z} = \frac{k'}{k} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

而横向坐标不变。

不过, 应当注意到如果照明光波是斜入射的平面波时, 横向放大率将不等于 1, 与波长比值  $\lambda'/\lambda$  有关。

\* 5. 附图所示是全息术的创始者加伯 (Gabor) 最初设计的一类共轴全息装置。设物是高度透明的, 其振幅透过率函数

为

$$\tilde{t}(x, y) = t_0 + \Delta \tilde{t}(x, y)$$

式中  $|\Delta \tilde{t}| \ll t_0$ 。

(1) 求记录时全息底片  $H$  上的振幅与光强分布;

(2) 线性冲洗后全息图的振幅透过率函数;

(3) 分析再现的波场;

(4) 讨论这种共轴系统的缺点与局限性。

解 (1) 由于是正入射的平行光照明物平面, 故入射场为

$$\tilde{U}_1 = A_1$$

物平面的透射场为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2 &= \tilde{t} \tilde{U}_1 = [t_0 + \Delta \tilde{t}(x, y)] A_1 \\ &= A_1 t_0 + A_1 \Delta \tilde{t}(x, y) \end{aligned}$$

它包含两项。第一项为

$$\tilde{U}_R(x, y) = A_1 t_0$$

代表正出射的平面衍射波, 直达记录平面  $H$ , 这一项与物平面的本底透射率  $t_0$  相联系; 第二项为

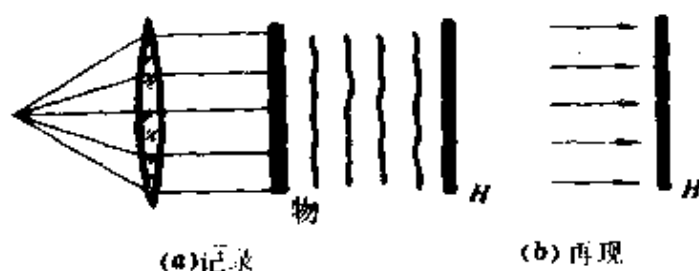
$$\tilde{U}_0'(x, y) = A_1 \Delta \tilde{t}(x, y)$$

它代表弥漫的衍射波, 携带了物信息  $\Delta \tilde{t}(x, y)$  而波及记录平面  $H$ , 设这一项到达  $H$  平面的衍射场为  $\tilde{U}_0(x, y)$ , 当然  $\tilde{U}_R$  与  $\tilde{U}_0'$  的关系应由惠更斯-菲涅耳原理确定。由此可见, 此时到达记录平面  $H$  的仍然可看作有两列波  $\tilde{U}_R$  和  $\tilde{U}_0$ ,  $\tilde{U}_R$  为参考波,  $\tilde{U}_0 = A_0 \exp(i\varphi_0)$  为物光波。  $H$  面上的振幅分布为

$$\tilde{U}_H(x, y) = \tilde{U}_R(x, y) + \tilde{U}_0(x, y)$$

干涉强度分布为

$$I_H(x, y) = \tilde{U}_H \tilde{U}_H^* = (\tilde{U}_R + \tilde{U}_0)(\tilde{U}_R + \tilde{U}_0)^*$$



题5图

(2) 对记录底片作线性处理后, 其振幅透过率函数为

$$\begin{aligned}\widetilde{t}_H(x, y) &= \widetilde{t} + \beta I_H \\ &= (\widetilde{t} + \beta t_0^2 A_1^2 + \beta A_0^2) + \beta \widetilde{U}_R \widetilde{U}_0 + \beta \widetilde{U}_R \widetilde{U}_0^*\end{aligned}$$

(3) 如果用一束平行光  $\widetilde{U}_R$  正入射照明底片, 设

$$\widetilde{U}_R = A_2$$

则透射场为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_I(x, y) &= \widetilde{t}_H \widetilde{U}_R \\ &= (\widetilde{t} + \beta t_0^2 A_1^2 + \beta A_0^2) A_2 \\ &\quad + \beta A_1 A_2 t_0 \widetilde{U}_0 + \beta A_1 A_2 t_0 \widetilde{U}_0^*\end{aligned}$$

它包含三种主要成分, 可写成

$$\widetilde{U}_I = \widetilde{U}_0' + \widetilde{U}_{+1} + \widetilde{U}_{-1}$$

第一项为

$$\widetilde{U}_0' = (\widetilde{t} + \beta t_0^2 A_1^2 + \beta A_0^2) A_2$$

式中除  $A_0(x, y)$  外的其它量都是常量, 考虑到  $A_0(x, y)$  是当初物平面上与  $\Delta \widetilde{t}(x, y)$  相联系的衍射到  $H$  面上的振幅分布, 而  $|\Delta \widetilde{t}| \ll t_0$ , 故可以认为  $\beta A_0^2$  不起主要作用, 即  $\widetilde{U}_0'$  波基本上是正出射的平面衍射波。第二项为

$$\widetilde{U}_{+1} = \beta A_1 A_2 t_0 \widetilde{U}_0$$

是物光波的再现波, 当然振幅系数有所改变。第三项为

$$\widetilde{U}_{-1} = \beta A_1 A_2 t_0 \widetilde{U}_0^*$$

是物光波共轭波。值得注意的是这两列衍射波  $\widetilde{U}_{+1}$  和  $\widetilde{U}_{-1}$  都同  $\widetilde{U}_0'$  波共轴。

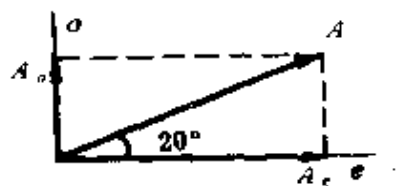
(4) 再现波场所包含的三种成分共轴展现, 是这种全息装置的最大缺点, 它给人们观测带来很大麻烦, 不便于分离两个孪生象  $\widetilde{U}_{+1}$  波和  $\widetilde{U}_{-1}$  波, 而且受  $\widetilde{U}_0'$  波的干扰也很大。

## 第七章 光在晶体中的传播

### § 1 双折射

1. 一束线偏振的钠黄光垂直射入一块方解石晶体, 振动方向与晶体的主平面成  $20^\circ$  角, 试计算  $o$ 、 $e$  两光束折射光的相对振幅和强度。

解 线偏振光射入方解石晶体后电矢量被分解为垂直于主平面的  $o$  振动和平行于主平面的  $e$  振动。如图, 主平面是通过  $e$  轴垂直纸面的。设入射线偏振的振幅为  $A$ , 则  $o$  光、 $e$  光振幅分别为



题 1 图

$$A_o = A \sin 20^\circ = 0.34 A$$

$$A_e = A \cos 20^\circ = 0.94 A$$

二者之比为

$$A_o : A_e = \tan 20^\circ = 0.36$$

在考虑两束光的强度问题时, 应注意光强与折射率成正比, 而且  $e$  光 (非常光) 的折射率还与传播方向有关, 因此,  $o$  光和  $e$  光的强度应分别为

$$I_o = n_o A_o^2 = n_o A^2 \sin^2 20^\circ = 0.12 n_o A^2$$

$$I_e = n(\theta) A_e^2 = n(\theta) A^2 \cos^2 20^\circ = 0.88 n(\theta) A^2$$

强度之比为

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{n_o}{n(\theta)} \tan^2 20^\circ = 0.11 \frac{n_o}{n(\theta)}$$

式中  $\theta$  为  $e$  光法线速度和光轴的夹角, 题中并未给定。

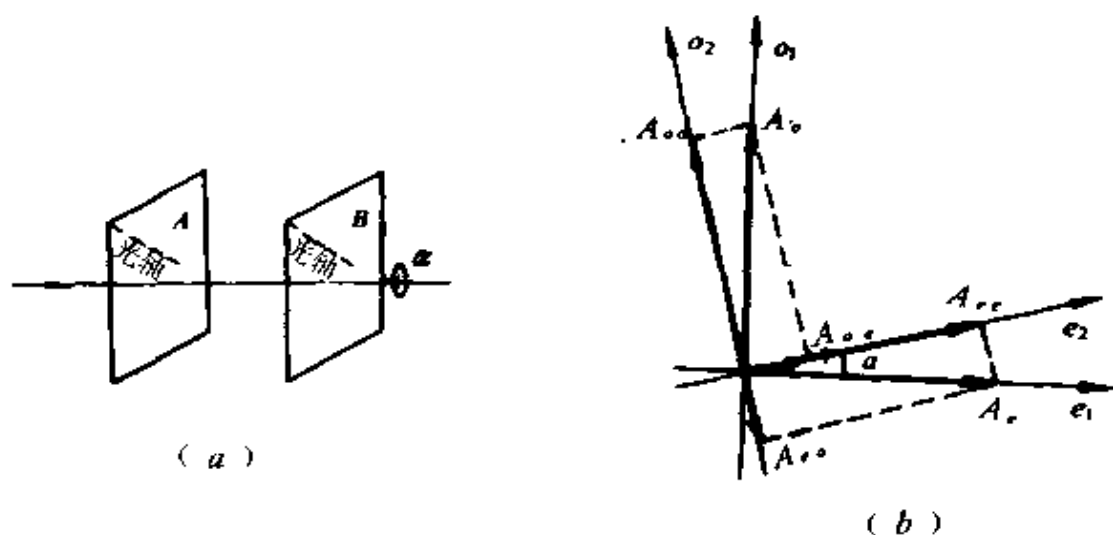


如光轴与晶体表面平行，则有

$$n(\theta) = n_e$$

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{n_o}{n_e} \tan^2 20^\circ = \frac{1.66}{1.49} \times 0.14 = 0.16$$

2. 如图 (a)，两大小相同的冰洲石晶体  $A$ 、 $B$  前后排列，强度为  $I$  的自然光垂直于晶体  $A$  的表面入射后相继通过  $A$ 、 $B$ 。 $A$ 、 $B$  的主截面（入射界面的法线和光轴组成的平面）之间夹角为  $\alpha$ （图中  $\alpha$  为  $0$ ）。求  $\alpha = 0^\circ$ ， $45^\circ$ ， $90^\circ$ ， $180^\circ$  时由  $B$  射出光束的数目和每束光的强度（忽略反射、吸收等损失）。



题 2 图

解 自然光垂直射入  $A$  以后，被分解为平行于晶体  $A$  主截面的  $e_1$  振动和垂直主截面的  $o_1$  振动，由于光轴与表面既不平行又不垂直， $o_1$  光和  $e_1$  光的传播方向不同，从  $A$  出射后被分解为垂直  $A$  表面的两束光，其强度分别为

$$I_o = \frac{1}{2}I$$

$$I_e = \frac{1}{2}I$$

这两束光射入  $B$  后，又分别被分解为  $B$  内的  $o_2$  振动和  $e_2$  振动，一般来说其传播方向也要继续分离，从  $B$  出射的将有四束光（除

特殊夹角外），它们的强度与  $A$ 、 $B$  两晶体主截面的夹角  $\alpha$  有关  
 [参见图 (b)]。一般地说，这四束光的强度分别为

$$I_{oo} = A_{oo}^2 = I_o \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} I \cos^2 \alpha$$

$$I_{oe} = A_{oe}^2 = I_o \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} I \sin^2 \alpha$$

$$I_{eo} = A_{eo}^2 = I_e \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} I \sin^2 \alpha$$

$$I_{ee} = A_{ee}^2 = I_e \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} I \cos^2 \alpha$$

当  $\alpha = 0^\circ$  时，得

$$I_{oo} = I_{ee} = \frac{1}{2} I$$

$$I_{oe} = I_{eo} = 0$$

即从  $B$  出射的为两束光，强度均为  $I/2$ 。  $I_{oe} = I_{eo} = 0$ ，是因为这时两个主截面之夹角为  $0$ ，如图 (c)  $\alpha = 0$ ， $A$  中的  $o$  振动进入  $B$  后仍为  $o$  振动，无  $e$  分量； $A$  中的  $e$  振动进入  $B$  后仍为  $e$  振动，无  $o$  分量。

当  $\alpha = 45^\circ$  时，得

$$I_{oo} = I_{ee} = I_{oe} = I_{eo} = \frac{1}{4} I$$

即从  $B$  出射的为四束光，强度均为  $I/4$ 。

当  $\alpha = 90^\circ$  时，得

$$I_{oo} = I_{ee} = 0$$

$$I_{oe} = I_{eo} = \frac{1}{2} I$$

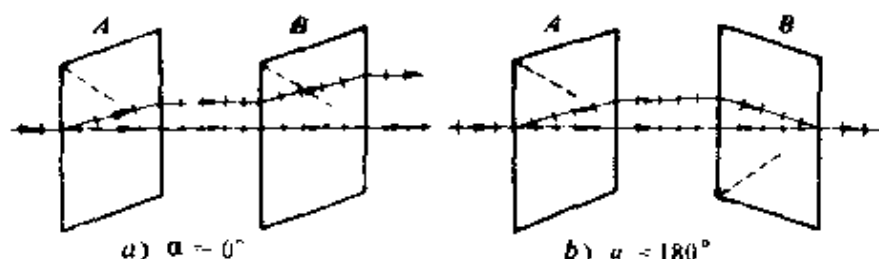
即从  $B$  出射的为两束光，强度均为  $I/2$ 。这时  $A$  中的  $o$  振动到  $B$  内全部为  $e$  振动； $A$  中的  $e$  振动到  $B$  内全部为  $o$  振动。

当  $\alpha = 180^\circ$  时，得

$$I_{oo} = I_{ee} = \frac{1}{2}I$$

$$I_{oe} = I_{eo} = 0$$

这时  $A$  中的  $o$  振动进入  $B$  后仍全部为  $o$  振动;  $A$  中的  $e$  振动进入  $B$  后仍全部为  $e$  振动。两个分量的强度均为  $I/2$ 。但由于这时  $A, B$  中的光轴方向对称于表面的法线, 如图 (c)  $b$ ,  $e$  光在  $A$  中的偏折方向与在  $B$  中的偏折方向相反, 因此从  $B$  出射后  $e, o$  振动的传播方向重合, 复合为一束光, 非相干叠加的结果强度仍为  $I$ 。



题 2 图 (c)

3. 一水晶平板厚  $0.850\text{mm}$ , 光轴与表面平行。用水银灯的绿光 ( $5461\text{\AA}$ ) 垂直照射, 求:

(1)  $o, e$  两光束在晶体中的光程;

(2) 二者的位相差 (用度表示)。

解 (1) 水银绿光 ( $5461\text{\AA}$ ) 在水晶中的主折射率分别为  $n_o = 1.54617, n_e = 1.55535$ 。据题意应按主折射率计算绿光通过  $l = 0.850\text{ mm}$  的光程

$$L_o = n_o l \approx 1.314\text{ mm}$$

$$L_e = n_e l \approx 1.322\text{ mm}$$

(2) 位相差

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \varphi_o - \varphi_e &= -\frac{2\pi}{\lambda} (L_o - L_e) \\ &\approx +92.04\text{ rad} = 5273.5^\circ \end{aligned}$$

4. 一束钠黄光以 $50^\circ$ 的入射角射到冰洲石平板上, 设光轴与板表面平行, 并垂直于入射面, 求晶体中 $o$ 光和 $e$ 光的夹角。

解 在此特殊情况下,  $o$ 光线与 $e$ 光线在晶体内的传播方向均服从普通的折射定律, 即

$$n_o \sin i_o = \sin i$$

$$n_e \sin i_e = \sin i$$

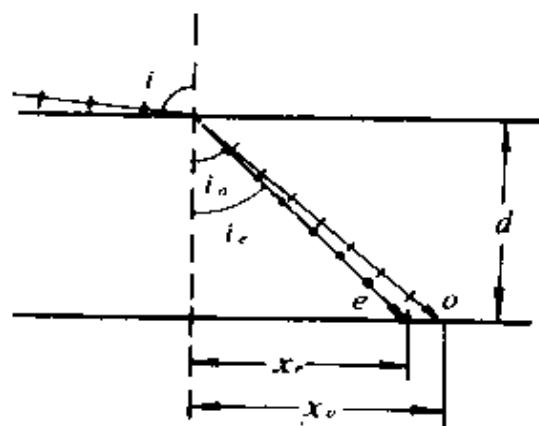
以 $n_o = 1.65836$ ,  $n_e = 1.48641$ ,  $i = 50^\circ$ 代入以上两式, 算出

$$i_o = 27.51^\circ, \quad i_e = 31.02^\circ$$

两束光在晶体中的夹角为

$$\Delta i = i_e - i_o \approx 3.51^\circ$$

5. 一束钠黄光掠入射到冰的晶体平板上, 光轴与入射面垂直, 平板厚度为 $4.20\text{mm}$ , 求 $o$ 光和 $e$ 光射到平板对面上两点的间隔。已知对于钠黄光冰的 $n_o = 1.3090$ ,  $n_e = 1.3104$ 。



题 5 图

解 这时入射角

$$i \approx 90^\circ, \quad \sin i \approx 1$$

与上题同理, 根据

$$n_o \sin i_o = \sin i \quad n_e \sin i_e = \sin i$$

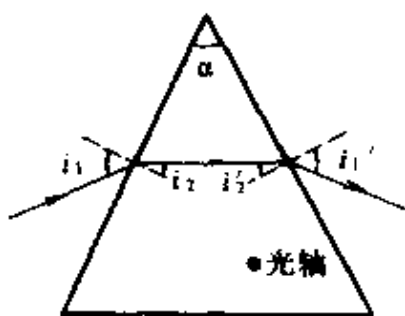
求得折射角 $i_o$ 和 $i_e$ 。再分别求出两光线射向对面的位置坐标 (参见附图)

$$x_o = d \operatorname{tg} i_o, \quad x_e = d \operatorname{tg} i_e$$

最后算出两点间隔为

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_o - x_e = d(\operatorname{tg} i_o - \operatorname{tg} i_e) \\ &\approx 12.7 \mu\text{m} \end{aligned}$$

• 6. 用ADP (磷酸二氢铵  $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ ) 晶体制成  $50^\circ$  顶角的棱镜, 光轴与棱镜主截面垂直,  $n_o = 1.5246$ ,  $n_e = 1.4792$ 。试求  $o$  光和  $e$  光的最小偏向角及其二者之差。



题 6 图

解 按题意, 此时  $o$  光和  $e$  光皆按通常的折射定律在棱镜内部传播。须知最小偏向角的条件是光线对称入射和出射, 即如图

$$i_1 = i_1', \quad i_2 = i_2' = \frac{\alpha}{2}$$

由于  $o$  光和  $e$  光有不同的折射率, 它们的外角  $i_1, i_1'$  是不同的, 分别为

$$i_{1o} = \sin^{-1} \left( n_o \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \sin^{-1} (1.5246 \times \sin 25^\circ) \\ \approx 40.11^\circ$$

$$i_{1e} = \sin^{-1} \left( n_e \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \sin^{-1} (1.4792 \times \sin 25^\circ) \\ \approx 38.70^\circ$$

各自的最小偏向角分别为

$$\delta_o = 2i_{1o} - \alpha \approx 30.22^\circ$$

$$\delta_e = 2i_{1e} - \alpha \approx 27.40^\circ$$

偏向角之差为

$$\Delta\delta = \delta_o - \delta_e = 2.82^\circ$$

• 7. 设一水晶棱镜的顶角为  $60^\circ$ , 光轴与棱镜主截面垂直。钠黄光以最小偏向角的方向在棱镜中折射, 用焦距为  $1\text{ m}$  的透镜聚焦,  $o$  光和  $e$  光两谱线的间隔为多少?

解 与上题同理得

$$i_{1o} = i_{1o}' = \sin^{-1} \left( n_o \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= \sin^{-1}(1.54425 \times \sin 30^\circ) \\ \approx 50.55^\circ$$

$$i_{1e} = i'_{1e} = \sin^{-1}(n_e \sin \frac{\alpha}{2}) \\ = \sin^{-1}(1.55336 \times \sin 30^\circ) \\ \approx 50.96^\circ$$

值得注意的是一束光的入射角严格地说不能同时使  $o$  光和  $e$  光满足最小偏向角的条件，实际上可近似地以  $i_{1o}$  和  $i_{1e}$  的平均值入射，这时两束出射光线的角间隔为

$$\Delta i = i_{1e} - i_{1o} \approx 0.41^\circ \approx 7.16 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

经透镜聚焦后，两束光线的间隔为

$$\Delta x = f \Delta i = 7.16 \text{ mm}$$

8. 求冰洲石晶体中光线和波法线间的最大夹角。

解 根据射线速度倾角（与光轴的夹角） $\xi$  和法线速度倾角  $\theta$  的关系

$$\text{ctg } \theta = \frac{n_o^2}{n_e^2} \text{ctg } \xi \quad (a)$$

直接写出两者夹角  $\alpha$  的公式为

$$\alpha = \xi - \theta = \xi - \text{ctg}^{-1} \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} \text{ctg } \xi \right) \quad (b)$$

为求  $\alpha$  的极值，令  $\frac{d\alpha}{d\xi} = 0$ ，即有

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = 1 - \left[ \frac{\frac{n_o^2}{n_e^2} \left( -\frac{1}{\sin^2 \xi} \right)}{1 + \left( \frac{n_o^2 \text{ctg } \xi}{n_e^2} \right)^2} \right] = 0$$

整理得

$$\frac{n_o^2}{n_e^2} \sin^2 \xi + \frac{n_o^2}{n_e^2} \cos^2 \xi = 1$$

解出使偏离角  $\alpha$  出现极大的条件为

$$\operatorname{ctg} \xi = \frac{n_e}{n_o}, \text{ 或 } \operatorname{ctg} \theta = \frac{n_o}{n_e} \quad (c)$$

此时偏离角的极大值  $\alpha_M$  由下式给出

$$\operatorname{tg} \alpha_M = \frac{n_o^2 - n_e^2}{2 n_o n_e} \quad (d)$$

以钠黄光为例, 冰洲石的  $n_o = 1.65836$ ,  $n_e = 1.48641$ , 代入 (d) 式算得

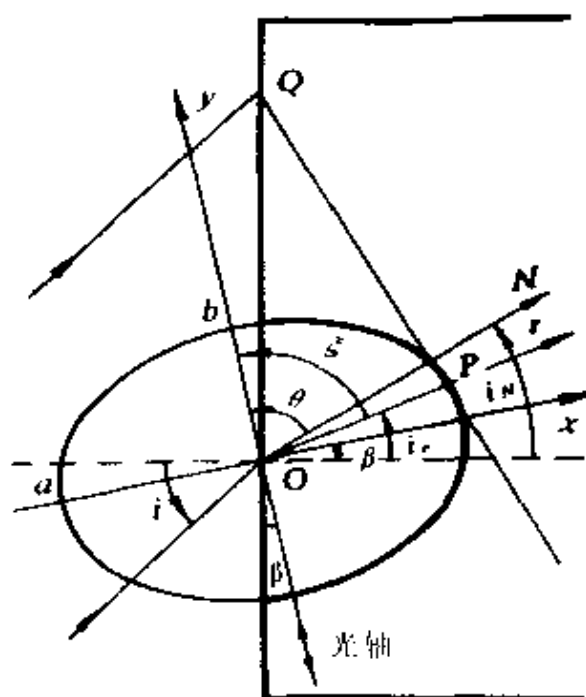
$$\alpha_M \approx 6.95^\circ$$

9. 钠黄光以  $45^\circ$  的入射角入射到方解石晶体的表面, 设光轴与晶体表面成  $30^\circ$  角, 入射面与主截面重合。

(1) 求晶体中  $o$  光和  $e$  光的方向;

(2) 求  $e$  光的折射率。

解 在斜入射斜光轴情形下, 即使主截面与入射面重合, 如何定量地确定  $e$  光的传播方向, 也是一个比较麻烦的问题。



题 9 图

如图, 入射角为  $i$ , 光轴与晶体表面夹角为  $\beta$ , 以  $O$  点 (次波源) 为原点, 取坐标系  $xOy$ , 并令  $y$  轴沿光轴方向。设  $e$  光传播方向  $r$  与  $y$  轴夹角为  $\xi$ , 相应的  $e$  光波法线方向  $N$  与  $y$  轴的夹角为  $\theta$ , 两者相对晶体表面法线方向的夹角分别为  $i_e$  和  $i_n$ 。根

据晶体中的惠更斯作图法和有关椭圆的解析几何理论可以导出

$$\operatorname{tg} \theta = n_e^2 \frac{\sin \beta \cos \beta + \sqrt{\left(\frac{\sin i \cos \beta}{n_o}\right)^2 + \left(\frac{\sin i \sin \beta}{n_o}\right)^2 - \left(\frac{\sin i}{n_o n_e}\right)^2}}{\sin^2 i - n_o^2 \sin^2 \beta} \quad (a)$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{n_e^2}{n_o^2} \operatorname{tg} \theta \quad (b)$$

$$i_o = \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \xi \quad (c)$$

$$i_e = \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \theta \quad (d)$$

将  $i = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $n_o = 1.6584$ ,  $n_e = 1.4864$

代入式 (a)、(b)、(c) 及 (d) 中, 计算得

$$\xi = 88.652^\circ, \quad \theta = -88.323^\circ$$

$$i_o = 28.652^\circ, \quad i_e = 28.323^\circ$$

另外, 根据折射定律算出  $o$  光传播方向角为

$$i_o = 25.238^\circ$$

在作数值运算时应注意, 若按式 (c) 或式 (d) 算出  $i_o$  或  $i_e$  角的绝对值大于  $90^\circ$  时 (返回左侧), 应取反方向, 即应再减去  $180^\circ$ , 才是  $e$  光射线和波法线的实际方向。

最后, 按  $e$  光折射率公式  $n_e(\theta)$  算出此时的  $e$  光折射率为

$$\begin{aligned} n_e(\theta) &= \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta}} \\ &= n_e(88.323^\circ) = \sqrt{2.2098} = 1.4865 \end{aligned}$$

\* 10. 试导出斜入射斜光轴 (入射面与主截面重合) 情形下  $e$  光的传播方向公式。

解 这个问题比较复杂, 下面我们结合作图 (参见上题图) 程序, 逐步导出  $e$  光折射角  $i_e$  公式。



(1) 设入射角为  $i$ ，入射光束两边缘光线的入射点分别为  $O$  点与  $Q$  点，并设

$$\overline{OQ} = l \quad (a)$$

(2) 以入射点  $O$  为原点，取正交坐标系  $xy$ ， $y$  轴沿光轴方向，光轴与晶体表面夹角为  $\beta$ 。

(3) 以次波源  $O$  为中心，作一次波椭圆，椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b)$$

其长短轴分别为

$$\begin{cases} a = v_e t = \frac{c}{n_e} t \\ b = v_o t = \frac{c}{n_o} t \end{cases} \quad (c)$$

时间  $t$  应等于入射光束到达  $O$ ， $Q$  两点的时差，即

$$t = \frac{l \sin i}{c} \quad (d)$$

(4) 从  $Q$  点向椭圆作切线，切点为  $P$ ，则  $O$ ， $P$  连线方向便是  $e$  光传播方向  $r$ ，它与光轴 ( $y$  轴) 的夹角为  $\xi$ ，与晶体表面法线夹角为  $i_e$ 。从  $O$  点作  $Q$ ， $P$  连线的法线  $N$ ，便是波法线方向，它与光轴 ( $y$  轴) 的夹角为  $\theta$ 。

随后有两种计算  $i_e$  的方法。一种方法是设法确定  $P$  点坐标  $(x_0, y_0)$ ，由此求得  $r$  与  $x$  轴的夹角，再加  $\beta$  角便是折射角  $i_e$ 。另一种方法是设法确定  $PQ$  直线方程，由此求得法线  $N$  与光轴 ( $y$  轴) 的夹角  $\theta$ ，再根据

$$\operatorname{tg} \xi = -\frac{n_o^2}{n_e^2} \operatorname{tg} \theta \quad (e)$$

和

$$i_e = \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) + \xi \quad (f)$$

求得折射角  $i_e$ 。两种方法的计算量相近，都要利用解析几何中有

关直线方程和椭圆切线方程的知识。我们采取第二种方法。过椭圆上一点  $P(x_0, y_0)$  的切线方程为

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad (g)$$

将它写成直线方程的标准形式

$$y = kx + h$$

其中斜率

$$k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

截距

$$h = \frac{b^2}{y_0} \quad \text{或} \quad h^2 = a^2 k^2 + b^2 \quad (h)$$

须知上述切线方程应当与  $Q, P$  连线的直线方程一致。设  $Q$  点坐标为  $(x', y')$ ，则

$$x' = l \sin \beta$$

$$y' = l \cos \beta$$

过点  $Q(x', y')$  而斜率为  $k$  的直线方程为

$$\frac{y - y'}{x - x'} = k$$

即

$$y = kx + (y' - kx')$$

截距为

$$h = y' - kx' \quad (i)$$

将式  $(i)$  代入式  $(h)$  就得到斜率  $k$  所满足的一元二次方程，并解出

$$k = \frac{-x' y' \pm \sqrt{a^2 y'^2 + b^2 x'^2 - a^2 b^2}}{a^2 - x'^2}$$

$$-\sin\beta\cos\beta \pm \sqrt{\left(\frac{\sin i \cos\beta}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{\sin i \sin\beta}{n_o}\right)^2 - \left(\frac{\sin i}{n_o n_e}\right)^4}$$

$$\frac{\left(\frac{\sin i}{n_e}\right)^2 - \sin^2\beta}{\sin^2 i - (n_e \sin\beta)^2}$$

因此有

$$\operatorname{tg} \theta = -k$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{n_o^2}{n_e^2} \operatorname{tg} \theta$$

$$= n_o^2 \frac{\sin\beta\cos\beta \pm \sqrt{\left(\frac{\sin i \cos\beta}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{\sin i \sin\beta}{n_o}\right)^2 - \left(\frac{\sin i}{n_o n_e}\right)^4}}{\sin^2 i - (n_e \sin\beta)^2}$$

(根号前应取正号)

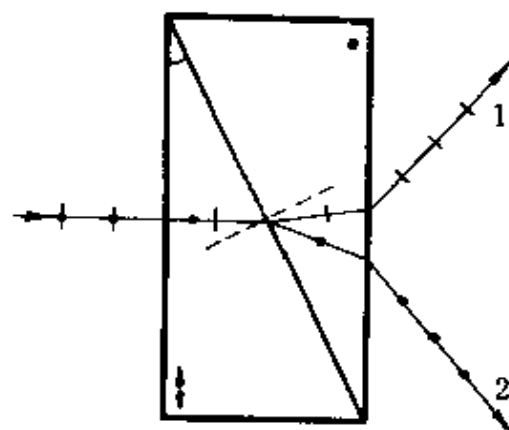
最后得

$$i_o = \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \xi$$

## § 2 晶体光学器件

1. 如附图所示, 渥拉斯顿棱镜的顶角  $\alpha = 15^\circ$  时, 两出射光线间的夹角为多少?

解 如图, 在中间界面上发生的折射情形是, 光线 1 由折射率  $n_o > n_e$ , 光线 2 由折射率  $n_o > n_e$ , 入射角均为  $\alpha_e$ . 折射角分别设为  $i_1$  和  $i_2$ . 此时, 两光线在第二块棱镜中的传播



题 1 图

方向仍由通常的折射定律确定, 取  $n_o = 1.65836$ ,  $n_e = 1.48641$  算出

$$i_1 = \sin^{-1} \left( \frac{n_e}{n_o} \sin \alpha \right) \approx 13.41$$

$$i_2 = \sin^{-1} \left( \frac{n_o}{n_e} \sin \alpha \right) \approx 16.78$$

再考虑 1, 2 两条光线在最后界面的折射情形。根据几何关系, 此时它们的入射角分别为

$$i_1' = \alpha - i_1 \approx 1.59^\circ$$

$$i_2' = \alpha - i_2 \approx -1.78$$

相应的折射角为

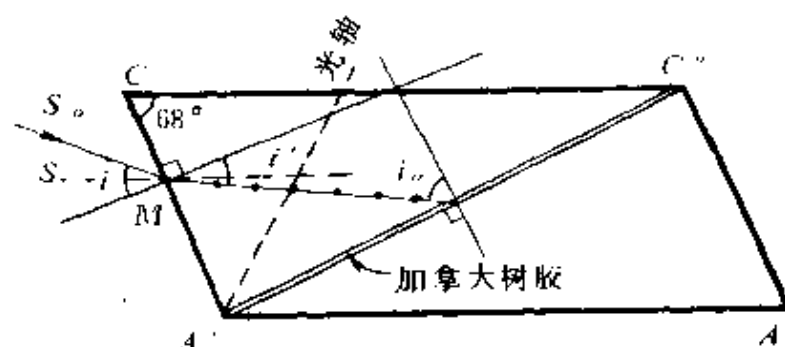
$$i_1'' = \sin^{-1} (n_o \sin i_1') \approx 2.637$$

$$i_2'' = \sin^{-1} (n_o \sin i_2') \approx -2.646$$

两光线夹角为

$$\Delta i = i_1'' - i_2'' \approx 5.28$$

2. 附图所示的尼科耳棱镜中,  $\angle CA''C'$  为直角,  $SM$  平行于  $A''A'$ 。试计算此时能使  $o$  光在棱镜粘合面上发生全反射的最大入射角度以及相应的  $\angle S_0MS$ 。设以钠黄光入射。



题 2 图 尼科耳棱镜

解 尼科耳棱镜的两部分是用加拿大树胶 ( $n = 1.55$ ) 粘合的,  $o$  光 ( $n_o = 1.65836$ ) 在界面上全反射临界角 (参见附图) 为

$$i_o = \sin^{-1} \left( \frac{1.55}{1.65836} \right) \approx 69.17$$