目　录

第一章　函数的极限与连续

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学．由于事物的发展变化一般都涉及到量的变化，因此，自然科学与社会科学中的诸多问题，都可以用数学这一工具来加以研究．无怪乎英国著名哲学家培根曾经说过："数学是科学的大门和钥匙"．

同学们在中学阶段学习的代数、几何、三角等数学学科的有关知识，都有一个共同的特点，即它们所研究的对象是不变的量，我们称其为常量．因此，初等数学往往又称作常量数学．常量数学是描述静态事物的有力工具，但对于客观实践中提出的大量数学问题，如曲线的切线斜率、变速直线运动的速度、曲边梯形的面积等，常量数学却无能为力，这是因为以上问题的解决需要在变量的变化过程中去研究变量间的相互关系．在历史上，正是由于对这些问题的深入研究，从而导致数学的发展由常量数学进入了变量数学阶段，它的主要标志之一就是以牛顿和莱布尼兹作为奠基人的"微积分"的创立．

微积分是利用极限方法来研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支．极限方法是微积分学的理论基础，而连续函数又是微积分学要着重讨论的一类重要函数．因此，本章在回顾有关函数方面的主要内容后，将主要介绍极限与连续函数的概念，并讨论极限与连续的基本性质等．

第一节　区间和邻域

微积分研究的主要对象是函数及其函数的性质．而函数的自变

量是在实数范围内取值，因此，本节我们将主要介绍一些与实数有关的基本知识.

一、实数与数轴

（一）实数

人类最早掌握的数系是自然数系．但随着客观实际发展的需要，人们又逐渐认识了分数、正数、负数，从而将自然数系扩展到有理数系．有理数可以表示为两个整数相除的形式，它包括整数、分数．分数可以用有限小数或无限循环小数表示．以后又发现了无限不循环小数，它不能表示为两个整数相除的形式.

有理数与无理数统称为**实数**，全体实数构成的集合称为实数集，记为 R．一般地，我们有以下实数系表：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

实数有如下的基本性质：

1．有序性：任意两个实数 a 与 b 都可以比较大小，即在下列三类关系中有且仅有一个成立：$a>b$，$a=b$，$a<b$.

2．稠密性：即在任意两个不同的实数之间一定存在无穷多个不同的实数.

3．连续性：即实数与数轴上的点具有一一对应关系.

（二）数轴

规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做**数轴**（如图 1－1）.

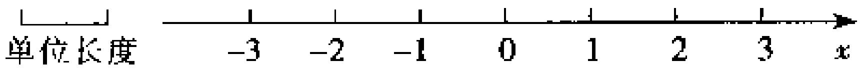

图 1－1

任一实数都对应数轴上惟一的一个点，反之，数轴上的每一个点也对应着惟一的一个实数，这样，全体实数与数轴上的点形成一一对应关系. 实数无孔隙地充满了整个数轴，这就是实数的连续性.

在后面的叙述中，常常将实数与数轴上的点不加区别，用相同符号表示，如“实数 a”与“点 a”是相同的意思.

（三）实数的绝对值

在微积分的论证中，经常用到实数的绝对值的概念.

一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

由此可知 $|x|$ 总是表示正数或零.

$|x|$ 的几何意义： $|x|$ 在数轴上表示点 x 与原点之间的距离.

根据绝对值的定义易知：

1. $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$，
2. $|x|\leqslant a\ (a\geqslant 0)$ 与 $-a\leqslant x\leqslant a$ 等价，
3. $|x|=\sqrt{x^2}$.

例 1.1.1 去掉 $|3x-1|$ 的绝对值的符号.

解 根据绝对值的定义得

$$|3x-1|=\begin{cases}3x-1, & 3x-1\geqslant 0\\ -(3x-1), & 3x-1<0\end{cases}=\begin{cases}3x-1, & x\geqslant \dfrac{1}{3},\\ 1-3x, & x<\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

二、区间

在讨论函数时，由于自变量的取值往往是在某两个实数之间的

范围内，为此引入区间的概念.

区间是指介于两个实数之间的全体实数. 一般有以下几种：

定义 1.1.1　设 a、$b \in R$，且 $a<b$. 定义

1. 闭区间：$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；
2. 开区间：$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$；
3. 半开区间：$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$，
$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$.
4. 无限区间

$(-\infty, b]=\{x \mid -\infty<x \leqslant b\}=\{x \mid x \leqslant b\}$；

$(-\infty, b)=\{x \mid -\infty<x<b\}=\{x \mid x<b\}$；

$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}=\{x \mid x \geqslant a\}$；

$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}=\{x \mid x>a\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}=R$.

通常，将上述的闭区间、开区间、半开区间称为**有限区间**. 区间的右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 称为**区间的长**.

三、邻域

当讨论函数在一点附近的局部性质时，还需引入邻域的概念.

定义 1.1.2　设 x_0、$\delta \in R$，$\delta>0$，称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ **邻域**，记作 $U(x_0, \delta)$. 点 x_0 称为该邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**.（如图 1－2）

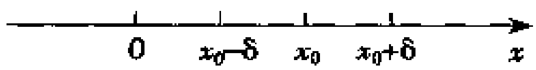

图 1－2

在点 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内去掉中心 x_0 后所成的集合称为点 x_0 的**空心邻域**，记作 $U^{\circ}(x_0, \delta)$. 并称开区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 为点 x_0 的**左邻域**，$(x_0, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的**右邻域**.

第二节　函　　数

一、函数的概念

在自然科学与社会科学中，往往同时有几个变量共同在变化，但这几个变量不是孤立地变化，而是相互存在联系. 例如商品的需求量受商品价格的影响，反之，商品的价格也受到需求量的影响. 变量之间的这种相互依赖关系用数学的方法加以抽象和描述，便得到一个重要概念——函数.

定义 1.2.1　设 D 为一非空实数集，如果存在一个对应规则 f，使得对于 $\forall x \in D$（“$\forall$” 表示“任给”或“每一个”），都能由 f 惟一地确定一个实数 y，则称对应规则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数. 记作

$$y=f(x),\quad x \in D.$$

称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，集合 D 为 $f(x)$ 的**定义域**，记为 D_f；当定义域为区间时，则称此区间为**定义区间**；对于每一个 $x_0 \in D_f$，函数 y 的对应值 y_0 称为 x_0 所对应的**函数值**，记作 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$；全体函数值所构成的集合称为函数的**值域**，记为 Z_f.

关于函数的概念，再作以下四点说明.

（一）函数的两要素

由定义 1.2.1 可以看出，一个函数由它的定义域 D 和对应规则 f 完全确定，我们将函数的定义域和对应规则称为函数的两要素. 对于已知的两个函数，如果它们的定义域和对应规则相同，那么它们就是相同函数，否则就是不同函数. 例如，函数 $y=3+2x^4$ 和 $u=3+2v^4$，它们的定义域都是 $D=R$，且对应规则相同，因此它们是相同函数. 由此可见，函数与表示其变量的符号无关. 但对于函数 $y=\dfrac{5}{x-2}$ 与

$y=\frac{5x+5}{(x+1)(x-2)}$，由于它们的定义域不同，所以它们是不同函数.

（二）函数的表示法

函数一般有三种表示法：

1. **解析法**（又称公式法）用数学式子来表示两个变量之间的对应关系.

2. **图象法**（又称图示法）用平面直角坐标系中的曲线来表示两个变量之间的对应关系.

3. **列表法**（又称表格法）将自变量的一些值与相应的函数值列成表来表示变量之间的对应关系.

在函数的三种表示法当中，解析法是对函数的精确描述，它便于运算与分析；图象法是对函数的直观描述，通过图形可以清楚地看出函数的一些性质；列表法是在变量之间的对应关系难以由一个确定的解析式来表示时，通过表格反映变量之间的对应关系.

（三）函数符号 $f(x)$ 的使用

函数 $y=f(x)$ 中的"f"表示变量之间的对应规则，$f(x)$ 表示将对应规则 f 施用于 x. 如果把括号中的 x 换成定义域中的某个具体数值或字母以及某个数学式子，则表示将对应规则 f 施用于那个具体的数值或字母以及数学式子.

例 1.2.1 已知 $f(x)=x^2$，求当 x 分别取 2，a，$-\frac{1}{y}$，$f(x)$ 时的函数值.

解 $y=f(x)=x^2$ 说明函数 f 是通过平方运算将自变量 x 变成相应的函数值 y 的，于是

$$f(2)=2^2=4,\quad f(a)=a^2$$

$$f\left(-\frac{1}{y}\right)=\left(-\frac{1}{y}\right)^2=\frac{1}{y^2},$$

$$f[f(x)]=[f(x)]^2=(x^2)^2=x^4.$$

例 1.2.2　(1) 已知 $f(x+1)=x^2-x$，求 $f(x)$；

(2) 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1+x}$，求 $f(x)$.

解 (1) 将原式写成含有 $x+1$ 的表达式：

$$\begin{aligned}f(x+1)&=x^2-x\\&=[(x+1)-1]^2-[(x+1)-1]\\&=(x+1)^2-3(x+1)+2\end{aligned}$$

再将 $f(x+1)$ 中的 $x+1$ 换成 x 得

$$f(x)=x^2-3x+2$$

(2) 将原式写成含有$\frac{1}{x}$的表达式：

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}+1}$，再将 $f\left(\frac{1}{x}\right)$中的$\frac{1}{x}$换成 x，有

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

(四) 函数定义域的求法

对于一个由解析法表示的函数 $y=f(x)$，其定义域就是使表达式有意义的所有 x 构成的集合. 对于实际问题中的函数，其定义域应由问题的实际意义来确定.

例 1.2.3　求函数 $f(x)=x+\frac{\lg(x^2-1)}{\sqrt{2-x}}$的定义域.

解　对于 $\lg(x^2-1)$，要求 $x^2-1>0$，即 $|x|>1$；

对于$\frac{1}{\sqrt{2-x}}$，要求 $2-x>0$，即 $x<2$；因此原函数的定义域为 $(-\infty, -1)\cup(1, 2)$.

二、基本初等函数

通常称常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及

反三角函数这六种函数为基本初等函数.

（一）常量函数

$y=c$　c 是常数，$x\in(-\infty,\ +\infty)$.
它的图象是一条与 x 轴平行的直线（图 1－3).

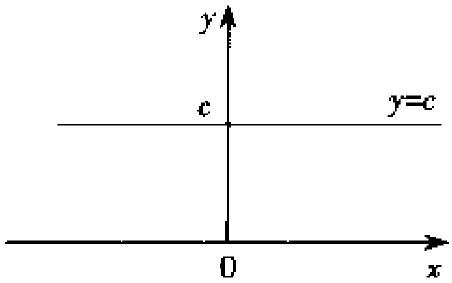

图 1－3

（二）幂函数

$$y=x^{\alpha}.$$

幂函数的定义域要根据指数 α 的取值情况加以确定．例如，α 为正整数时，它的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$；α 为负整数时，它的定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$ 等.

图 1－4 给出了几种常用的幂函数的图象.

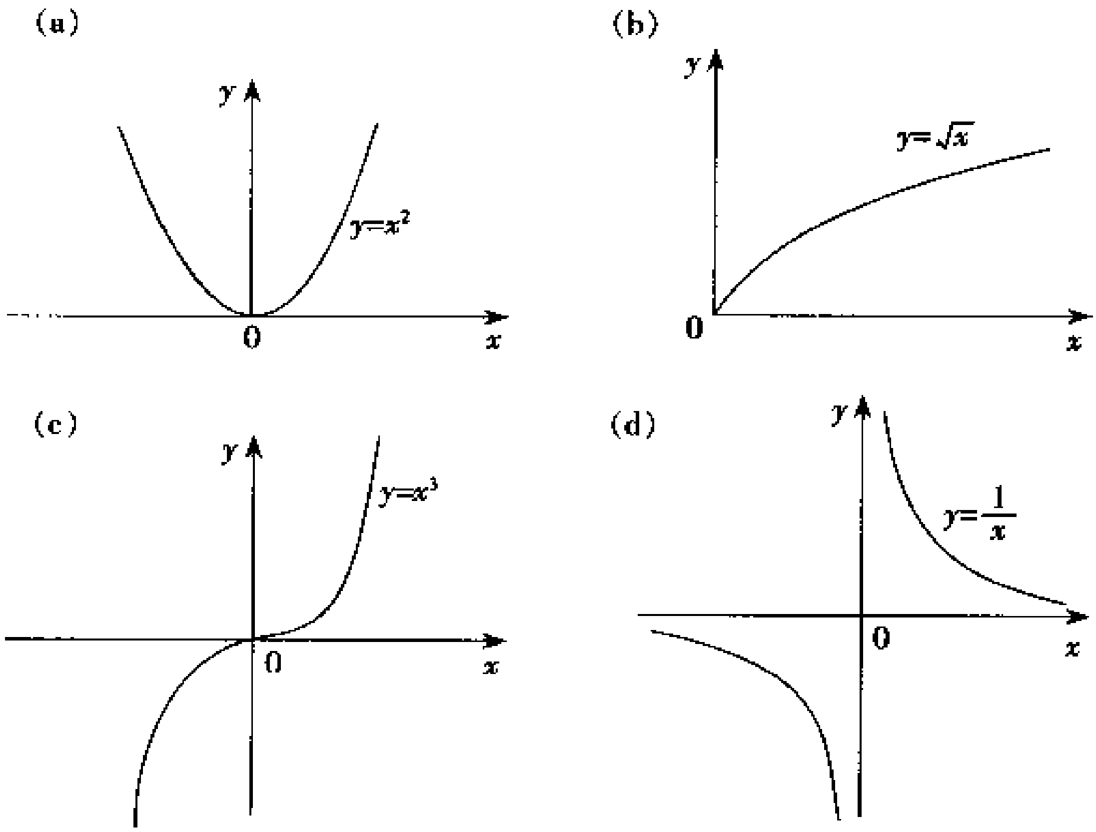

图 1－4

(三) 指数函数

$$y=a^{x}\quad(a>0,\ a\neq1),\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

它的图象如图 1－5.

(四) 对数函数

$$y=\log_{a}x\quad(a>0,\ a\neq1),\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

其图象如图 1－6.

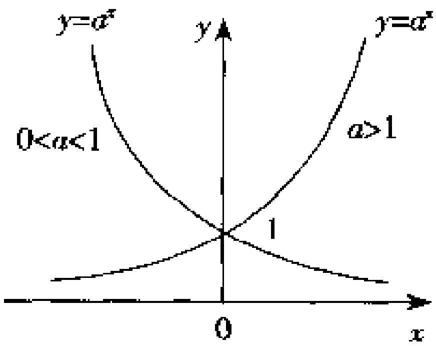

图 1－5

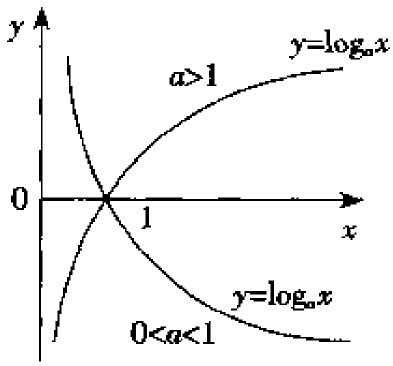

图 1－6

(五) 三角函数

三角函数包括正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$.

其中正弦与余弦函数的图象如图1－7（a）、（b）.

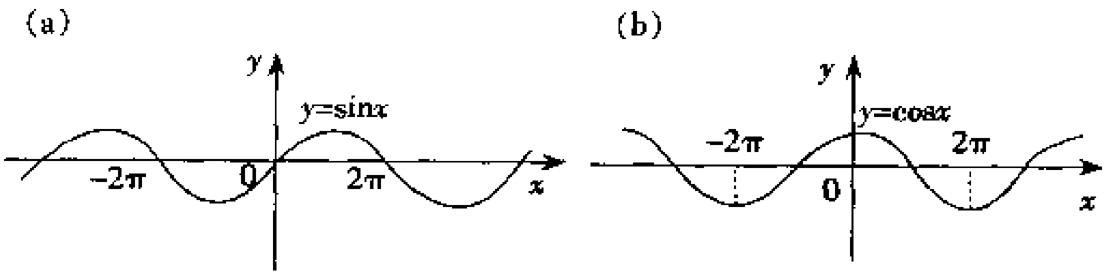

图 1－7

(六) 反三角函数

反正弦函数

$$y=\arcsin x,\quad x\in[-1,1],\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];$$

反余弦函数

$$y=\arccos x,\quad x\in[-1,1],\ y\in[0,\pi];$$

反正切函数

$$y=\arctan x,\quad x\in(-\infty,+\infty),\ y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right);$$

反余切函数

$$y=\operatorname{arccot} x,\quad x\in(-\infty,+\infty),\ y\in(0,\pi).$$

其中反正切与反余切函数的图象如图 1－8 (a)、(b).

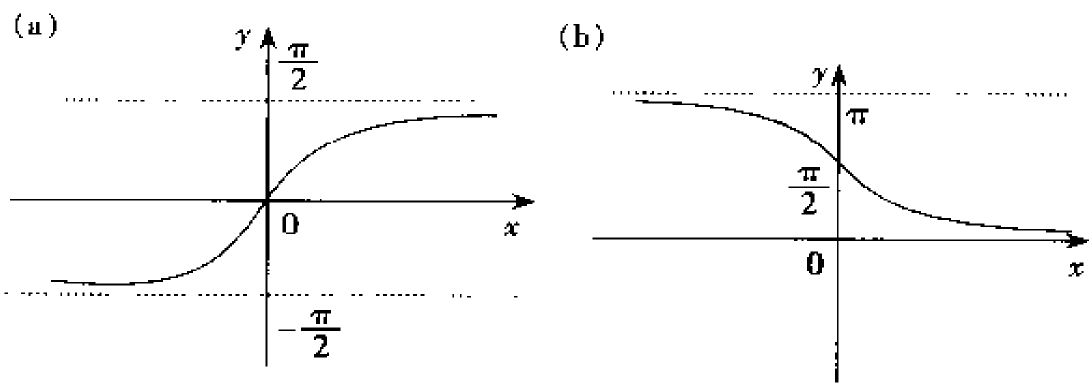

图 1－8

三、复合函数

在某些实际问题中，两个变量之间的联系有时不是直接的，而是通过另一个变量作为中间媒介建立起来的. 例如，函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x+1$，其中 y 是 u 的函数，u 是 x 的函数. 作为两个独立的函数，变量 y 与变量 x 之间并没有联系，但如果将变量 u 作为媒介，将函数 $u=x+1$ 代到函数 $y=\sqrt{u}$ 中，便得到一个新的函数 $y=\sqrt{x+1}$,

我们称函数 $y=\sqrt{x+1}$ 为由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x+1$ 复合而成的复合函数.

需要指出的是，函数 $u=x+1$ 的定义域与值域都是 $(-\infty,+\infty)$. 但函数 $y=\sqrt{u}$ 中要求 $u\geqslant 0$，因而为了使复合函数 $y=\sqrt{x+1}$ 有意义，必须限制 $u=x+1\geqslant 0$，即 $x\geqslant -1$.

一般地，有如下复合函数的定义：

定义 1.2.2 设有函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空，即 $Z_\varphi\cap D_f\neq\varnothing$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，并且称 $y=f(u)$ 为**外函数**，$u=\varphi(x)$ 为**内函数**，u 为**中间变量**.

定义中的复合函数是由两个函数复合而成，不难将这一概念推广到多个函数复合的情形. 例如，由三个函数 $y=u^3$，$u=\sin\sqrt{v}$，$v=1-x^2$ 复合而成的复合函数是 $y=(\sin\sqrt{1-x^2})^3$，$x\in[-1,1]$.

对于复合函数，还要指出以下两点：

1. 不是任何两个函数都可以复合.

例如 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 与 $u=\varphi(x)=\lg x$，$x\in(0,1)$，由于 $Z_\varphi=(-\infty,0)$，$D_f=[0,+\infty)$，因此 $Z_\varphi\cap D_f=\varnothing$，所以，以上两个函数不能复合成一个新的函数.

2. 一个复合函数也可以分解成几个简单函数，这一点对于后面的求导运算是非常重要的. 简单函数一般是指六种基本初等函数.

例 1.2.4 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

1. $y=\ln\sin(x^2+1)$，　2. $y=\sqrt{\tan e^x}$.

解 1. $y=\ln\sin(x^2+1)$ 是由 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$ 复合而成的；

2. $y=\sqrt{\tan e^x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=e^x$ 复合而成的.

从以上两例的解题过程可以看到，将一个复合函数分解成几个简单函数的关键，是记住六种基本初等函数，从复合函数的外层开始，一层一层往里分解.

四、分段函数

一个函数并不是在其定义域内处处有相同的解析式. 在实际应用中经常会遇到这样一类函数，它们的自变量在不同的变化范围内所对应的函数表达式不同，这类函数称为**分段函数**.

例如，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

及符号函数 $$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

它们都是定义在（$-\infty$，$+\infty$）上的分段函数（图1－9，1－10）.

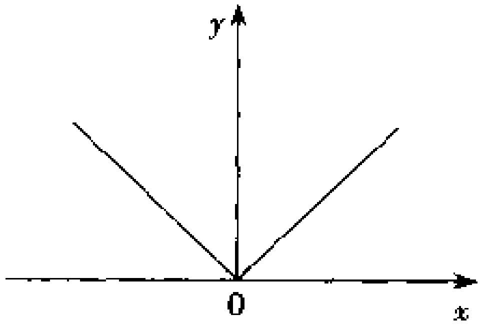

图 1－9

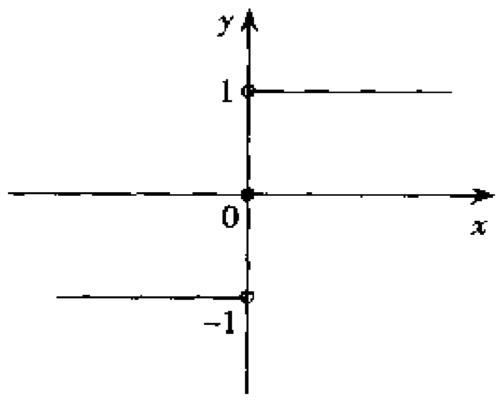

图 1－10

例 1.2.5 用分段函数表示 $y=3-|x-1|$.

解 由于 $|x-1|=\begin{cases}-(x-1), & x-1<0\\ x-1, & x-1\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ x-1, & x\geqslant 1,\end{cases}$

因此

$$y=3-|x-1|=\begin{cases}3-(1-x), & x<1\\ 3-(x-1), & x\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x<1,\\ 4-x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

其图形如图1－11.

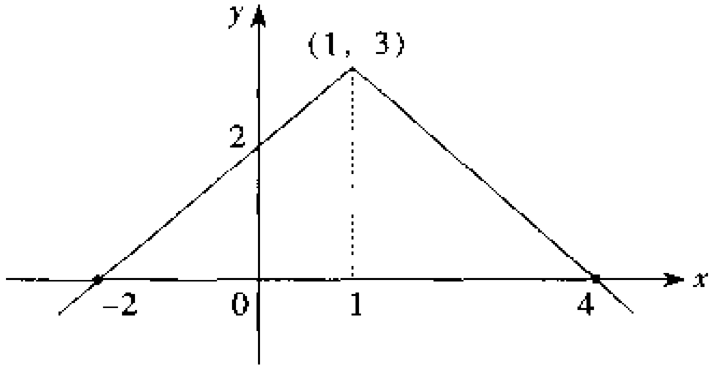

图 1－11

五、显函数与隐函数

一般地，如果变量 y 与 x 的函数关系可直接由 $y=f(x)$ 表示，则称这样的函数为**显函数**，例如 $y=x^2+1$，$y=\sin x^2$ 等；如果变量 y 与 x 的函数关系是由方程 $F(x, y)=0$ 所确定，则称这样的函数为**隐函数**，例如 $x^2+y^2=1$，$e^y+xy-e=0$ 等.

六、初等函数

定义 1.2.3　由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合所构成的可以用一个解析式子表示的函数称为**初等函数**.

例如，$y=\ln\sin\sqrt{x}$，$y=\arctan(1+x^2)+e^{2x}$ 等都是初等函数. 绝对值函数 $y=|x|$ 可以写成 $y=\sqrt{x^2}$，因此它是初等函数，而符号函数不是初等函数.

初等函数是函数中的一类重要函数，一方面，初等函数本身就有很多应用；另一方面，对其他函数的研究也常常直接或间接地借助于初等函数.

第三节 函数的几种特性

我们所讨论的函数，往往具有一些特殊性质，例如奇偶性、周期性、单调性及有界性等，下面简单加以介绍.

一、函数的奇偶性

定义 1.3.1 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对 $\forall x \in D$，恒有

(1) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；

(2) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

由定义可以看出，奇、偶函数的定义域是关于原点对称的数集. 偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

二、函数的周期性

定义 1.3.2 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在正的常数 T，对于 $\forall x \in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. 满足上式的最小正数 T_0，称为 $f(x)$ 的最小正**周期**. 今后谈到周期一般指最小正周期.

函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的函数；$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 是以 π 为周期的函数.

三、函数的单调性

定义 1.3.3 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对于 $\forall x_1$，$x_2 \in D$，当 $x_1<x_2$ 时，总有

① $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上**单调增加**（或递增）；

② $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上**单调减少**（或递减）.

在此定义中，若将 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ 改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_2)\geqslant f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 D 上**单调不减（单调不增）**. 单调增加、单调减少以及单调不减、单调不增的函数，统称为**单调函数**.

利用定义可以判断一些较为简单的函数的单调性，在本书第三章的导数应用中，将给出判断函数单调性的一种简单方法.

四、函数的有界性

定义 1.3.4　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，使得对于 $\forall x\in D$，恒有

(1) $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**，如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**；

(2) $f(x)<M$，则称 $f(x)$ 在 D 上**有上界**；

(3) $f(x)>-M$，则称 $f(x)$ 在 D 上**有下界**.

可以证明，函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在集合 D 上既有上界又有下界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 R 上是有界函数，因为对 $\forall x\in R$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$；而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在其定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上是无界的，但在区间 $[1,+\infty)$ 上却是有界的. 由此看出，函数的有界性与所讨论的区间有关.

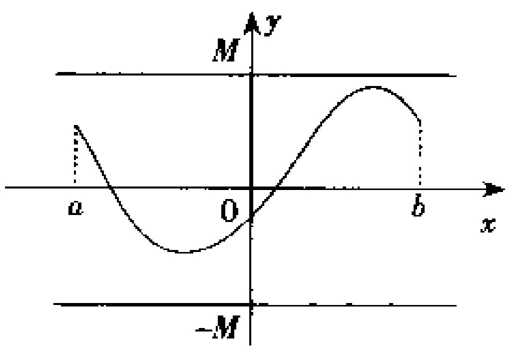

图 1-12

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界的几何意义是，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象位于以两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 为边界

的带形区域内（如图 1－12）.

第四节 经济分析中几个常用的经济函数

利用数学方法去解决实际问题，需要找出该问题中各变量之间的函数关系. 在经济分析中，常用的函数有以下几种：

一、总成本函数

总成本是指生产一定数量的产品所需费用的总和，用 C 表示，它包括固定成本和可变成本两部分. 固定成本是指不随产量的变化而变化的那部分费用，用 C_0 表示. 例如厂房费用，企业管理费等；可变成本是指随产量变化而变化的那部分费用，用 C_1 表示. 例如原材料费、动力费、生产者工资等.

如果用 x 表示产品产量，则总成本函数可表示为

$$C(x)=C_0+C_1(x).$$

常见的成本函数的形式有一次函数和二次函数.

在生产过程中，管理者不仅关心总成本，也非常关注生产单位产品所需的费用，即平均成本. 平均成本用 $\overline{C}(x)$ 表示，$\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$.

例 1.4.1 设某企业每年生产某种产品最大产量为 b 个单位，最低产量为 a 个单位，其中，固定费用为 2 000 元，每生产 1 个单位产品成本需增加 70 元，求总成本函数与平均成本函数.

解 设该种产品的年产量为 x 个单位，则总成本函数为：

$$C(x)=2\ 000+70x\ (\text{元}),\quad x\in[a,b];$$

平均成本函数为

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=70+\frac{2\ 000}{x}\ (\text{元})$$

二、总收益函数

总收益是指生产者出售一定数量的商品所得到的全部收入，用 R 表示，总收益一般取决于所出售商品的数量与该商品的价格. 如果销售量用 x 表示，价格用 $P(x)$ 表示，那么总收益函数（或总收入函数）是 $R(x)=xP(x)$.

三、总利润函数

总利润是指总收入减去总成本后的剩余部分，用 L 表示，总利润函数是

$$L(x)=R(x)-C(x).$$

例 1.4.2　某企业生产一种商品的总成本为 $C(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{29}{4}$（单位：千元），如果该商品的单价为 $\frac{13}{8}$ 千元，试求

（1）该商品的总利润函数；

（2）出售 4 件及 16 件商品的总利润.

解　（1）由已知得出售该商品 x 件的总收益是 $R(x)=\frac{13}{8}x$.

因此该商品的总利润函数是

$$L(x)=R(x)-C(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{33}{8}x-\frac{29}{4}.$$

（2）出售 4 件及 16 件商品的利润分别为

$$L(4)=-\frac{1}{4}\times4^2+\frac{33}{8}\times4-\frac{29}{4}=5\frac{1}{4}\text{（千元）};$$

$$L(16)=-\frac{1}{4}\times16^2+\frac{33}{8}\times16-\frac{29}{4}=-5\frac{1}{4}\text{（千元）}.$$

盈亏分析　一般情况下，大家会认为出售的商品数量越多，企业所获得的利润就越大，但从例 1.4.2 可以看出，企业所获利润并

不是随销售量的增加而增加，在一定的时候，销售的收入会低于生产成本，这时企业非但没有获取利润，反而出现亏本现象．因此在企业的经营管理中，需要进行生产的盈亏分析．由总利润函数可知：

当 $L(x)=R(x)-C(x)>0$ 时，企业盈利；

当 $L(x)=R(x)-C(x)<0$ 时，企业亏损；

当 $L(x)=R(x)-C(x)=0$ 时，企业既不盈也不亏．

通常称使 $L(x)=0$ 的点 x_0 为**盈亏平衡点**（又称**保本点**）．

在例 1.4.2 中，由 $L(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{33}{8}x-\frac{29}{4}=0$ 得盈亏平衡点分别为 $x_1=2$ 与 $x_2=14\frac{1}{2}$．从图 1－13 中可以看出，当 $2<x<14\frac{1}{2}$ 时，收入高于成本，企业盈利；当 $x<2$ 及 $x>14\frac{1}{2}$ 时，成本超过收入，企业亏损．

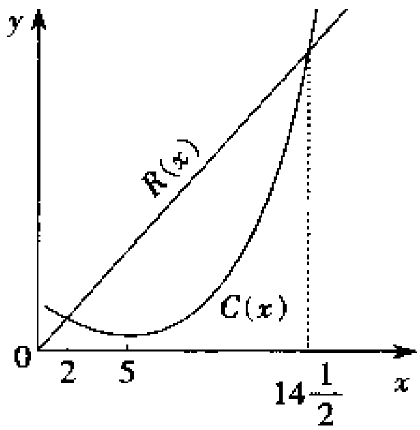

图 1－13

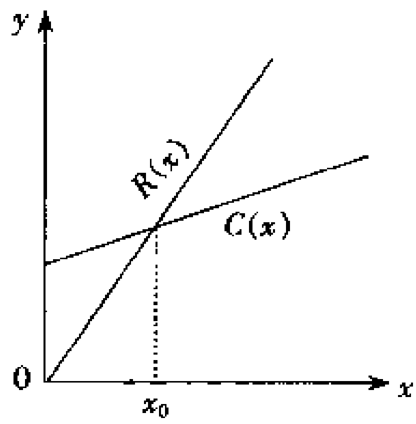

图 1－14

为了扭转亏损状态，企业可以通过降低成本或调整售价得到新的成本函数或收益函数，以重新找到新的盈亏平衡点，从而使企业达到扭亏增盈的目标．

在上例中，成本函数是二次函数．如果成本函数为一次函数

$C(x)=C_0+C_1x$，收益函数为 $R(x)=Px$，则由利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=(P-C_1)x-C_0=0$ 得盈亏平衡点为 $x_0=\dfrac{C_0}{P-C_1}$．从图 1－14 看出，当 $x<x_0$ 时企业亏损，$x>x_0$ 时企业盈利．

例 1.4.3　某企业生产一种汽车配件，设每天生产 x 件的成本为 $C(x)=3\,000+80x$（元）．

（1）若售价为 120 元/件，问每天应销售多少件才能使收支平衡（或才能保本）？

（2）若每天至少能销售 100 件，问每件销售价定为多少就可保证不亏本？

解　（1）由题设知，收益函数 $R(x)=120x$，
因此，利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=40x-3\,000$．

令　$L(x)=40x-3\,000=0$ 得 $x=75$（件），

即每天应销售 75 件才能保本．

（2）设每件售价定为 a 元，则

收益函数 $R(x)=ax$，

利润函数 $L(x)=(a-80)x-3\,000$．

由 $L(100)=(a-80)\times100-3\,000=0$ 得 $a=110$（元/件）

即每件售价定为 110 元就可保证不亏本．

四、需求函数与供给函数

需求量是指在一定价格条件下，消费者愿意购买，且有支付能力购买的商品量．一般地，需求量受到较多因素的影响，例如商品的价格、消费者的收入与偏好等．其中，价格是一个很重要的因素．如果不考虑其他因素的影响，那么需求量 Q_d 可看作是价格 P 的一元函数

$$Q_d=f_d(P),$$

称为**需求函数**．其反函数 $P=f_d^{-1}(Q_d)$ 称为**价格函数**．

供给量是指在一定价格条件下，生产者愿意出售并且有能力提

供的商品量．一般地，供给量也是受到较多因素的影响，例如商品的价格、生产该商品的成本等．如果仅考虑价格因素，那么供给量 Q_s 可看作是价格 P 的一元函数

$$Q_s = f_s(P),$$

称为**供给函数**．

一般地，价格越高，消费者的需求量就越少，而生产者的生产量就越多．因此，需求函数一般是单调减少函数，而供给函数一般是单调增加函数．

最简单的需求函数与供给函数是线性函数，它们可分别表示为

$$Q_d = a - bP, \quad a>0,\ b>0;$$

$$Q_s = -c + dP,\ c>0,\ d>0.$$

市场均衡价格　对于一种商品，如果市场需求量与供给量相等，那么这种商品就达到了市场均衡．我们称使一种商品的市场需求量与供给量相等的价格为**市场均衡价格**．在均衡价格水平下的相等的供求数量称为**均衡数量**．

当需求函数与供给函数为一元函数时，如图 1－15 所示，需求曲线与供给曲线交点处的横坐标 P_0，即为市场均衡价格．当 $0<P<P_0$ 时，需求量大于供给量，市场出现“供不应求”；当 $P>P_0$ 时，需求量小于供给量，市场出现“供过于求”．因此，企业需根据供求情况及时加以调节，以使价格逐渐趋向于均衡价格．

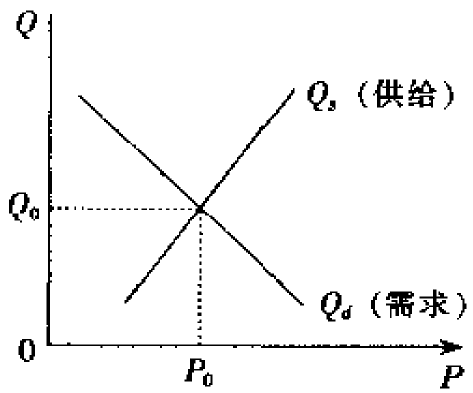

图 1－15

第五节　函数的极限

在本章开始，我们谈到曲线的切线斜率、曲边梯形的面积等问

题，都不是初等数学能够解决的．对于这些问题的处理，需要用一种新的方法，这就是本节要介绍的极限方法．极限可以描述变量在某一变化过程中的变化趋势，是一种从近似到精确的数学方法．它是研究微积分的基本方法．

对于函数 $f(x)$ 的极限问题，有两种情形需要研究：第一，自变量 x 无限地趋近于 x_0（记作 $x \to x_0$）时对应的函数值的变化趋势；第二，自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大（记作 $x \to \infty$）时对应的函数值的变化趋势．下面分别讨论这两种情形下函数 $f(x)$ 的极限．

一、$x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

例 1.5.1　函数 $y = x^2 + 1$（如图 1－16），当 x 沿 x 轴自任一方向无限趋近于 0 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于 1．

例 1.5.2　函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$（如图 1－17），当 x 无限地趋近于 1 时（但 $x \neq 1$），对应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于 2．

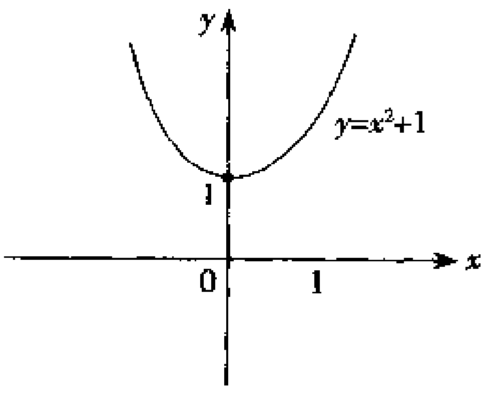

图 1－16

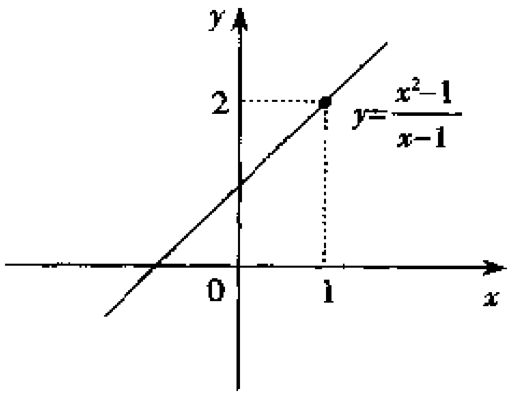

图 1－17

上面两例的共同特点是，当 x 沿 x 轴以任意方式无限趋近于 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 就无限地趋近于某一常数 A，这时我们称

当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 有极限 A.

定义 1.5.1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内（点 x_0 可以除外）有定义，如果当 x 无限趋近于 x_0（但 $x \neq x_0$）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于某一常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的**极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$

注 1.5.1 （1）定义 1.5.1 是一个直观描述性定义，其中的"x 无限趋近于 x_0（但 $x \neq x_0$）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于某一常数 A"的意思，是指当 $|x - x_0|$ 无限减小时（但 $|x - x_0| > 0$），$|f(x) - A|$ 可以任意地小.

（2）由定义看出，函数 $f(x)$ 在 x_0 点有没有极限，与 $f(x)$ 在 x_0 点有无定义没有关系. 因为我们讨论的是当 x 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，与 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点的值无关. 如例 1.5.2 中的函数虽在 $x = 1$ 点没有定义，但当 $x \to 1$ 时函数的极限存在.

根据极限定义，例 1.5.1 与例 1.5.2 可以分别记为 $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 + 1) = 1$；$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

例 1.5.3 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

设 $f(x) = x$，当 x 无限趋近于 x_0 时，显然 $f(x) = x$ 也无限趋近于 x_0，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

例 1.5.4 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$ （C 是常量）.

因为 $f(x) = C$ 是常量函数，当 x 无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 始终为常数 C，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

函数的极限实质上是描述在自变量的某一变化过程中，函数是否有确定的变化趋势，如果有确定的变化趋势，则极限存在，否则函数的极限就不存在. 例如，当 $x \to 0$ 时，函数 $y = \dfrac{1}{x}$（如图 1－18）不能无限地趋近于某个确定的常数，因此极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ 不存在.

在讨论当 $x\to x_0$，函数 $f(x)$ 的极限时，自变量 x 是从 x_0 的左、右两侧无限趋近于 x_0 的. 但有的函数仅在 x_0 点的一侧有定义，例如函数 $y=\sqrt{x}$的定义域是 $x\geqslant 0$，其自变量只能从 0 的右侧趋近于 0；而分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ 3x+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

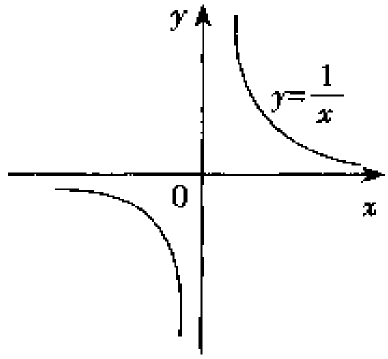

图 1 - 18

在 $x=0$ 点两侧的解析式不同，当讨论 $x\to 0$，$f(x)$ 的极限时，就需要分别考察 x 在 $x=0$ 点的左右两侧趋近于 0 时，$f(x)$ 的变化趋势. 为此我们引入下面的左极限与右极限的概念.

定义 1.5.2 如果当 x 从 x_0 的左（或右）侧无限趋近于 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$，当x 趋于 x_0 时的左（或右）极限. 记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

$$(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A).$$

注 1.5.2 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 分别表示 $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限值，不要与 $f(x)$ 在 x_0 点的函数值 $f(x_0)$ 混淆.

函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限与它在 x_0 点的左、右极限之间有如下重要关系：

定理 1.5.1 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在而且等于 A 的充分必要条件是，函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限都存在且等于 A，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

利用这个定理可以证明函数在一点的极限不存在.

例 1.5.5 设 $f(x)=\begin{cases}2, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

试讨论 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 的极限（如图 1－19）.

解 在 $x=1$ 点的左侧，$f(x)=2$，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 点的左极限为

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}2=2,$$

在 $x=1$ 点的右侧，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 点的右极限为

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

由于 $f(1-0)=f(1+0)=2$，根据定理 1.5.1 知，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

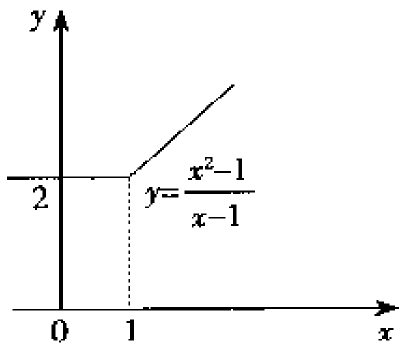

图 1－19

例 1.5.6 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 2x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 试讨论 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限（如图 1－20）.

解 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$,

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}2x=0.$$

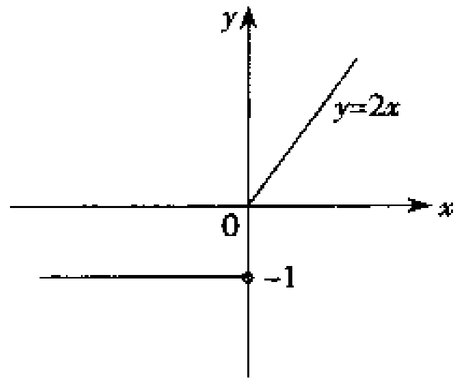

图 1－20

由于 $f(0-0)\neq f(0+0)$，因此 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

二、$x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

（一）$x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

例 1.5.7 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$（如图 1－18），当 x 沿 x 轴向正负两个方向趋于无穷，即当 $|x|$ 无限增大时，所对应的函数值无限地趋近于 0. 这时我们称 0 为函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 x 趋于无穷大时的极限.

定义 1.5.3 设函数 $f(x)$ 对于绝对值无论怎样大的 x 值是有定义的，如果当 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近

于某一常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时的极限. 记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to\infty).$$

对于 $f(x)=\frac{1}{x}$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

(二) $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x)=\arctan x$ 的图象（如图 1－8（a）），当 x 沿 x 轴正方向趋于正无穷时（记作 $x\to+\infty$），$\arctan x$ 无限趋近于 $\frac{\pi}{2}$，当 x 沿 x 轴负方向趋于负无穷时（记作 $x\to-\infty$），$\arctan x$ 无限趋近于 $-\frac{\pi}{2}$，这时分别称当 $x\to+\infty$ 时 $\arctan x$ 的极限为 $\frac{\pi}{2}$，当 $x\to-\infty$ 时 $\arctan x$ 的极限为 $-\frac{\pi}{2}$. 并分别记作

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

一般地，有

定义 1.5.4 如果 x 取正值且无限增大时（或 x 取负值且 $|x|$ 无限增大时），对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于某个常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷大（或负无穷大）时的极限. 记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to+\infty).$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to-\infty)\right).$$

例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

由于当 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 时，正弦函数 $f(x)=\sin x$ 与余弦函数 $f(x)=\cos x$ 的值在 ±1 之间摆动，都不是无限地趋近于某个常数，因此，当 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 时函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的极限不存在.

与定理 1.5.1 类似，函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 与 $x\to\pm\infty$ 时的极限有

如下关系：

定理 1.5.2 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在而且等于 A 的充分必要条件是，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在且等于 A，即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

(三) 数列的极限

由于数列是一个定义在正整数集合上的函数 $y_n=f(n)$，$n=1$，2，3，……，因此数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 是函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的一个特殊情况．其差别在于，函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 中的自变量 x 是沿 x 轴以任意方式趋向于正无穷，而数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 中的自变量 n 是跳跃形式地趋向于正无穷，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$ 的定义，只需将极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 定义中的 x 换成正整数 n.

定义 1.5.5 设有数列 $y_n=f(n)$，如果当正整数 n 无限增大时，对应的函数值 $f(n)$ 无限趋近于某个常数 A，则称常数 A 为数列 $f(n)$ 当 n 趋于无穷时的**极限**．记作

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=A \quad 或 \quad f(n)\to A \quad (n\to\infty).$$

如果数列 $\{y_n\}$ 有极限，则称数列 $\{y_n\}$ **收敛**；否则称数列 $\{y_n\}$ **发散**.

在判断数列的敛散性时，常会用到下面的结论：

数列 $\{y_n\}$ 收敛的充分必要条件是，其奇数项构成的数列 $\{y_{2n-1}\}$ 与偶数项构成的数列 $\{y_{2n}\}$ 皆收敛，且极限相等.

对于数列 $\{y_n\}$：$1，\frac{1}{2^2}，1，\frac{1}{2^4}，1，\frac{1}{2^6}，\cdots\cdots$，

其中 $\{y_{2n-1}\}$：$1，1，1，\cdots\cdots，\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n-1}=1$，

$\{y_{2n}\}$：$\frac{1}{2^2}，\frac{1}{2^4}，\frac{1}{2^6}，\cdots\cdots，\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n}=0.$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n-1}\neq\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n}$，因此该数列的极限不存在.

前面我们讨论了自变量在 $x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，

$x\to-\infty$ 及 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限问题，这些极限定义的实质都是相同的. 这样，在以后进一步讨论极限的性质等有关问题时，只需对其中的一种变化过程加以研究即可. 后面，我们一般讨论 $x\to x_0$ 时的极限情况，相应各结论对其他过程的极限也成立.

三、无穷小量与无穷大量

（一）无穷小量

无穷小量是一种在理论和应用上都起着重要作用的变量，下面我们加以研究.

定义 1.5.6 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的**无穷小量**，简称无穷小.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，所以当 $x\to0$ 时，$f(x)=x$ 是无穷小量. 而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$是无穷小量.

注 1.5.3 （1）一个变量是否为无穷小量，是与它的变化过程紧密相关的.

例如，当 $x\to0$ 时，$f(x)=x$ 是无穷小量；而当 $x\to1$ 时，$f(x)=x$ 就不是无穷小量.

（2）无穷小量是一个特殊的变量，即以 0 为极限的变量，不能把它理解为是一个很小的量或一个很小的数. 常数中只有零可看作是无穷小量.

（3）无穷小量一般用希腊字母 α、β、γ 等表示.

（4）无穷小量与函数极限之间有如下关系：

定理 1.5.3 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$函数 $f(x)$ 可以表示为 A 与一个无穷小量的和，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$$

其中 $\alpha\to0\quad(x\to x_0)$.

无穷小量具有以下性质：

（1）两个无穷小量的代数和仍为无穷小量；

（2）两个无穷小量的积仍为无穷小量；

（3）无穷小量乘有界变量仍为无穷小量.

例 1.5.7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\sin x$ 是有界变量，又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$是有界变量 $\sin x$ 与无穷小量$\dfrac{1}{x}$的乘积，根据无穷小量的性质（3）有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

（二）无穷大量

前面曾经指出，当 $x\to 0$ 时函数 $y=\dfrac{1}{x}$不能无限地趋近于某个确定的常数，因此极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$不存在. 但观察 $y=\dfrac{1}{x}$的图象可以看到，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}$的绝对值$\left|\dfrac{1}{x}\right|$在无限增大，针对这种变化趋势，引入以下无穷大量的概念.

定义 1.5.7 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内（点 x_0 可以除外）有定义，如果当 x 无限趋近于 x_0（但 $x\neq x_0$）时，$|f(x)|$无限增大，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的**无穷大量**. 借助于极限的符号，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty \quad 或 \quad f(x)\to\infty \quad (x\to x_0).$$

在定义 1.5.7 中，如果变量 $f(x)$ 在 x_0 点附近只取正值（或负值），则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的**正无穷大量**（**或负无穷大量**）. 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty \quad 或 \quad f(x)\to+\infty\ (x\to x_0).$$

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad 或 \quad f(x)\to -\infty\ (x\to x_0)).$$

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\lg x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

无穷大量具有以下性质：

（1）两个无穷大量的积仍为无穷大量；

（2）无穷大量与有界变量的和仍为无穷大量.

（三）无穷大量与无穷小量的关系

无穷大量与无穷小量之间有如下的互为倒数关系：

在 x 的同一变化过程中，若函数 $f(x)$ 是无穷大量，则其倒数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小量；反之，若 $f(x)$ 是无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大量.

在求极限的过程中，往往要用到无穷大量与无穷小量的这个关系.

（四）无穷小量的比较

由无穷小量的性质知，两个无穷小量的和、差、积仍是无穷小量，但是，两个无穷小量的商却不一定都是无穷小量. 例如，当 $x\to 0$ 时，x、x^2、$x+x^2$ 都是无穷小量，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$. 以上两个无穷小之比的极限出现了不同情况，是因为它们趋于 0 的速度“快慢”有差别；当 $x\to 0$ 时，x^2 比 x 趋于 0 的速度快，而 $x+x^2$ 与 x 趋于 0 的速度相当，为了比较这种快慢程度，我们给出如下定义：

定义 1.5.8　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，且 $g(x)\neq 0$.

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ **高阶**的无穷小量，或称 $g(x)$ 是比 $f(x)$ **低阶**的无穷小量. 记作 $f(x)=o(g(x))\quad (x\to x_0)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$ (C 为常量)，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小量，记作 $f(x)=O(g(x))\,(x\to x_0)$.

特别地，当 $C=1$ 时，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量，记作 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$.

例如，当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 x 高阶的无穷小，即 $x^2=o(x)$ $(x\to 0)$；$x\to 0$ 时，$x+x^2$ 与 x 是等价无穷小，即 $x+x^2\sim x$ $(x\to 0)$.

第六节　极限的基本性质与运算法则

一、极限的基本性质

函数极限具有下列性质：

性质 1（惟一性）　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则其极限值惟一.

性质 2（局部保号性）　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$（或 $A<0$），则函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某空心邻域内，恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

这一性质揭示了函数 $f(x)$ 在 x_0 点的极限值符号与在 x_0 点附近的函数值符号之间的关系. 反过来，函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近的函数值符号与在 x_0 点的极限值符号之间有如下关系：

性质 3　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且在 x_0 点的某空心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

注意　性质 3 中若将条件 $f(x)\geqslant 0$ 改为 $f(x)>0$，其结论仍为 $A\geqslant 0$，不能把等号去掉.

例如，在 $x=0$ 点的某空心邻域内，虽有 $f(x)=x^2>0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.

二、极限的运算法则

如何计算函数的极限，是我们要讨论的主要内容．以下将介绍极限的运算法则．

定理 1.6.1　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在，则

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

特别地，设 c 为常数，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)]=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$；

（1）与（2）还可推广为：

设极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)$，…，$\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$ 都存在，c_1，c_2，…，c_n 为常数，则

$$\lim_{x\to x_0}[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)]$$
$$=c_1\lim_{x\to x_0}f_1(x)+c_2\lim_{x\to x_0}f_2(x)+\cdots+c_n\lim_{x\to x_0}f_n(x)；$$

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$　$(g(x)\neq0,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq0)$．

证　只给出和的极限的证明，从证明中可以看到定理 1.5.3 的应用．

设　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，　　$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$．

由定理 1.5.3 知

$$f(x)=A+\alpha，其中\ \alpha\to0\ (x\to x_0)，$$
$$g(x)=B+\beta，其中\ \beta\to0\ (x\to x_0)．$$

则　$f(x)+g(x)=(A+\alpha)+(B+\beta)=(A+B)+(\alpha+\beta)$，

因为当 $x\to x_0$ 时，α 与 β 都是无穷小量，因此它们的和 $\alpha+\beta$ 也是无穷小量，即 $\alpha+\beta\to0$ $(x\to x_0)$，再由定理 1.5.3 知

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=A+B=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x).$$　证毕．

此外，我们不加证明地给出运算法则（4）：

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n$, n 为任意实数.

例如 $$\lim_{x\to x_0}\sqrt{2x-3}=\sqrt{\lim_{x\to x_0}(2x-3)}=\sqrt{2x_0-3}.$$

例 1.6.1 求 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-x+2)$.

解 $$\lim_{x\to 2}(3x^2-x+2)=3(\lim_{x\to 2}x)^2-\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2$$
$$=3\cdot 2^2-2+2=12.$$

例 1.6.2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+1}{x^2+5x-2}$.

解 可以验证分母的极限不为0,则

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+1}{x^2+5x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5x-2)}=\frac{2(\lim\limits_{x\to 1}x)^3+\lim\limits_{x\to 1}1}{(\lim\limits_{x\to 1}x)^2+5\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}2}$$
$$=\frac{2\times 1+1}{1+5-2}=\frac{3}{4}.$$

例 1.6.3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{1-x^3}$.

解 由于分母的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^3)=0$, 所以不能直接利用商的运算法则. 但由于分子的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3\neq 0$, 因此其倒数的极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{4x-1}=\dfrac{0}{3}=0$, 根据无穷小量与无穷大量的关系得

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{1-x^3}=\infty.$$

例 1.6.4 ($\dfrac{0}{0}$型极限) 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-7x+12}$, (2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$.

解 (1) 易验证其分子与分母的极限都为0 (称这种形式的极限为$\dfrac{0}{0}$型未定式), 本题可首先约去分子与分母的公因式 $(x-3)$ (称为零因子), 则

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-4)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-4}=-6.$$

（2）易验证该极限也为$\frac{0}{0}$型极限．但本题不是采取分解因式约去零因子的方法，而是通过乘共轭根式后再约去零因子．

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4} &= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

例 1.6.5（$\infty-\infty$ **型极限**）　求 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$.

解　当 $x\to -1$ 时，$\frac{1}{x+1}$与$\frac{3}{x^3+1}$都趋于∞（称这种形式的极限为$\infty-\infty$型未定式），本题可通过通分使其转化为$\frac{0}{0}$型极限.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right) &= \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}\ \left(\frac{0}{0}\text{型}\right) \\
&= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1} \\
&= \frac{-1-2}{(-1)^2-(-1)+1} = -1.
\end{aligned}
$$

例 1.6.6　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+3}{5x^4+3x-1}$.

解　分子、分母同除以 x^4，得

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+3}{5x^4+3x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^4}}{5+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}} = \frac{0}{5} = 0.
$$

一般地，对于有理函数

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，　$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m，n 为非负整数，可求得以下结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

计算极限时，可直接利用这一结论. 例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+1)^{30}(4x^2-x+4)^{10}}{(6x^2+4x+1)^{40}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{6x^2+4x+1}\right)^{30}\left(\frac{4x^2-x+4}{6x^2+4x+1}\right)^{10}$$
$$=\left(\frac{2}{6}\right)^{30}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{10}=\frac{2^{10}}{3^{40}}.$$

例 1.6.7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)$.

解 $n\to\infty$ 时，括号中的每一项都是无穷小量，但不是有限项的和，因此不能直接应用运算法则，但

$$\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

因此，原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

第七节 两个重要极限

以下介绍两个极限存在的判别准则，并在此基础上介绍两个重要极限.

一、极限存在准则

准则 1 （夹逼定理或迫敛性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，且

在点 x_0 的某空心邻域内恒有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，则极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

准则Ⅱ　*单调有界数列必存在极限.*

这两个准则的几何直观都是明显的. 例如准则Ⅱ，不妨设数列 $\{x_n\}$ 是单调递增有上界的，那么 x_n 的对应点 A_n 在数轴上向右方移动，又因为 $\{x_n\}$ 有上界，所以点 A_n 不能无限远离原点，只能无限接近于某个定点 A（如图 1－21）.

图 1－21

二、两个重要极限

（一）两个重要极限

利用准则Ⅰ与准则Ⅱ可分别证明以下两个重要极限：

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；

2. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$　（$\mathrm{e} = 2.7182818\cdots$，**e 是无理数**）.

这两个极限的证明从略. 对于第二个重要极限，当 x 取正整数时，即为数列极限 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$，观察下表可以看出，数列 $f(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 是单调增加的，且发展趋势稳定，越来越接近某一个常数.

n	1	2	10	100	1 000	10 000	100 000	……
$(1+\frac{1}{n})^n$	2	2.25	2.59374	2.70481	2.71692	2.71814	2.71827	……

可以证明，数列$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$为单调增加且有上界的（小于3）．由准则Ⅱ知，该数列的极限存在，通常将其极限值记为e．在此基础上，再进一步证明，当正整数n换为连续变化的变量x，且$x\to\infty$时，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的极限存在且也等于e．

注 1.7.1 在计算极限时，常用到这两个极限的以下等价形式：

（1）设$x=\frac{1}{\alpha}$，则当$x\to0$时有$\alpha\to\infty$，那么第一个重要极限可写为

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha\sin\frac{1}{\alpha}=1 \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1.$$

（2）设$\frac{1}{x}=\alpha$，则当$x\to\infty$时有$\alpha\to0$，那么第二个重要极限可写为

$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e \quad 或 \quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

这两个极限之所以重要，是因为它们在计算极限中有较广泛的应用．在实际问题中，只要被求极限的函数具备它们的形式，就可直接得出结果．因此，我们必须掌握这两个极限的结构的形式特点，一般地

1．第一个重要极限可写成$\lim\limits_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$，其中□里可以是任何其他的字母或代数式，分子中正弦函数的变量与分母的变量完全相同．例如

$$\lim_{\boxed{2x}\to0}\frac{\sin\boxed{2x}}{\boxed{2x}}=1 \quad 即 \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}=1;$$

$$\lim_{\boxed{x-1}\to0}\frac{\sin\boxed{x-1}}{\boxed{x-1}}=1 \quad 即 \quad \lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=1.$$

2. 第二个重要极限可写成 $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$，其中“底数和中”除 1 以外的另一项与指数互为倒数关系. 例如

$$\lim_{\boxed{3x}\to 0}(1+\boxed{3x})^{\frac{1}{\boxed{3x}}}=\mathrm{e}\quad 即\quad \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}=\mathrm{e};$$

$$\lim_{\boxed{-2x}\to 0}(1+\boxed{-2x})^{\frac{1}{\boxed{-2x}}}=\mathrm{e}\quad 即\quad \lim_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}=\mathrm{e}.$$

根据以上的结构特点，在计算极限时，需要对函数作恒等变形.

例 1.7.1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$

这一结果在计算极限时可以直接使用.

例 1.7.2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{x}$.

解　把 $\dfrac{\sin 9x}{x}$ 凑成第一个重要极限的形式：$\dfrac{\sin 9x}{x}=9\cdot\dfrac{\sin 9x}{9x}$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}=\lim_{x\to 0}9\cdot\frac{\sin 9x}{9x}=9\cdot 1=9.$$

例 1.7.3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\dfrac{3}{5}.$

例 1.7.4　求 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\tan(x+3)}{\sin(x+3)}$.

解　$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\tan(x+3)}{\sin(x+3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\dfrac{\tan(x+3)}{x+3}(x+3)}{\dfrac{\sin(x+3)}{x+3}(x+3)}=\dfrac{1}{1}=1.$

例 1.7.5 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{4x}$.

解 本题要用到第一个重要极限的等价形式：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4}\left(4x\cdot\sin\frac{1}{4x}\right)=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

例 1.7.6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

例 1.7.7 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

解 凑成第二个重要极限的等价形式：

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^3=e^3.$$

例 1.7.8 求 $\lim\limits_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{1}{t}+1}$

解 $$\lim_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{1}{t}+1}=\lim_{t\to 0}\left[(1-2t)^{\frac{1}{t}}\cdot(1-2t)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1-2t)^{-\frac{1}{2t}}\right]^{-2}\cdot\lim_{t\to 0}(1-2t)=e^{-2}.$$

例 1.7.9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{x}\right)^x$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\right]^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}}.$$

例 1.7.10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^x$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2}$$

$$=\frac{e^{-1}}{e^2}=e^{-3}.$$

例 1.7.11 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\cdot\left(\frac{x}{x-1}\right)^x\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x}\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}$$
$$=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e^{-1}}=1.$$

(二) 第二个重要极限的典型模式——连续复利

第二个重要极限在实际问题中有广泛的应用，其中一个典型模式是银行储蓄中的“连续复利”问题.

当储户把一笔资金存入银行后，很关心的是利息问题. 利息是指银行对储蓄货币者支付的除本金（存款总数）以外的酬金. 一般计算利息的方法有两种：单利与复利.

1. 单利与复利

单利是指银行在计算利息时，以存款总额作为本金计算利息，其所生利息不计入本金重复计算利息.

复利是指银行在一定周期内结息一次，结息后将利息加入本金作为下一期的本金，重复计算利息的方法.

若设本金为 A_0，年利率为 r（年利率是指在一年内，利息额与本金额之间的比率），则第一年度末的本利和为
$$A_1=A_0+A_0r=A_0(1+r),$$
再以 A_1 作为第二年度初的本金，则第二年度末的本利和
$$A_2=A_1+A_1r=A_1(1+r)=A_0(1+r)^2,$$
依次继续下去，则至第 n 年度末的本利和
$$A_n=A_0(1+r)^n$$

2. 连续复利

如果将一年分成 n 期计息，年利率仍为 r，则每期利率为 $\frac{r}{n}$. 若仍采取复利的计息方法，则类似于上面的推导，可得第一年度末的本利和为

$$A_n = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n,$$

至 t 年末的本利和为

$$A_n(t) = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

若把一年无限细分，即令 $n\to\infty$，则 t 年末的本利和为

$$A(t) = \lim_{n\to\infty}A_n(t) = \lim_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt} = A_0\mathrm{e}^{rt}.$$

上面的 $n\to\infty$ 是说明每年结算的次数趋于无穷，这表明在每一瞬时，“立即存入，立即结算”，这样的复利称为**连续复利**. 在计算 $A(t)$ 时，用到了第二个重要极限. 在现实世界中，有许多事物都属于这种模型，例如人口的增长、细胞的繁殖、镭的衰变等，都是“立即产生，立即结算”，最终归结为极限 $A(t)=\lim\limits_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=A_0\mathrm{e}^{rt}$.

第八节 连续函数

在客观世界中，很多量的变化是连续不断的. 例如，气温的变化、自由落体的高度等，都随着时间的变化而连续变化，所谓连续变化，是指气温或自由落体的高度不会突然跳跃，而是当时间的改变非常小时，气温或高度的变化也非常小，为了对这种情况作进一步研究，本节我们将利用极限来讨论连续函数.

一、连续函数的概念

在给出连续函数的定义之前，先引人改变量的概念.

(一) 改变量

设有函数 $y=f(x)$，当自变量 x 从 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地由 $f(x_0)$ 改变到 $f(x_0+\Delta x)$，令

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

称 Δx 为自变量 x 在 x_0 点的改变量；称 Δy 为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的改变量（如图 1－22（a））.

注意 改变量可以为正，也可以为负.

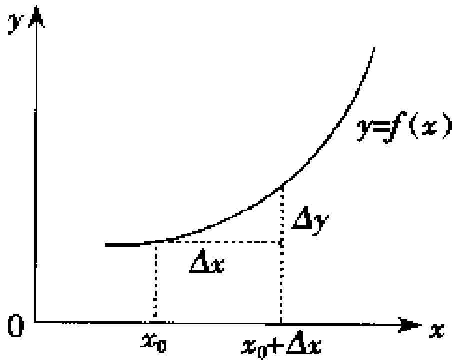

图 1－22（a）

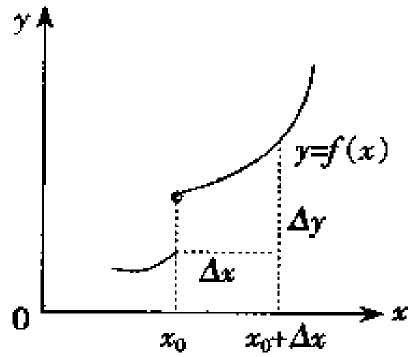

图 1－22（b）

(二) 连续函数的概念

观察图 1－22（a）与图 1－22（b）可以发现，函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续或不连续（间断）的差别在于，$f(x)$ 在 x_0 点附近的变化情况不同. 图 1－22（a）中的函数，当自变量 x 在 x_0 点的改变量极其微小时，函数的相应改变量 Δy 也极其微小，且当 Δx 趋于 0 时，Δy 也随之趋于 0. 但图 1－22（b）中的函数却不具备这一特

点，由此我们可以利用极限来定义连续函数.

定义 1.8.1 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点**连续**，并称点 x_0 为 $f(x)$ 的**连续点**.

记 $x=x_0+\Delta x$，即 $\Delta x=x-x_0$，那么 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，且$\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$. 于是可得出函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的等价定义.

定义 1.8.2 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0 \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点**连续**.

定义 1.8.2 说明，若函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则 $f(x)$ 在 x_0 点的极限值等于 $f(x)$ 在 x_0 点的函数值.

（三）左连续与右连续

有时我们只讨论 $f(x)$ 在 x_0 点的左侧或右侧的情况，为此引入下面的左连续与右连续的概念.

定义 1.8.3 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ （$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$），则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点**左（右）连续**.

观察图 1－22（b）可知，该函数在 x_0 点左连续.

根据连续性定义及定理 1.5.1 可以得到：

函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分必要条件是，$f(x)$ 在 x_0 点既左连续又右连续.

以上给出了函数在一点连续的定义，在此基础上可给出函数在区间连续的定义.

（四）函数在区间连续的概念

定义 1.8.4 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内任意一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续；如果 $f(x)$ 在开

区间 (a, b) 内连续，且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

例 1.8.1 试证正弦函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证 根据定义 1.8.1，我们只须证明在 x_0 点有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

$\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$，则有

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\left[\Delta x \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right],$$

由于 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$，而 $\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$ 为有界变量，因此 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 1 \times 0 = 0$.

根据定义 1.8.1 知，函数 $y=\sin x$ 在 x_0 点连续，再由 x_0 点的任意性知，$y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 证毕.

类似可证，$y=\cos x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

二、函数的间断点

由定义 1.8.2 易知，函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，必须同时满足以下三个条件：

(1) $f(x)$ 在 x_0 点有定义；

(2) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中至少有一个不满足，则 $f(x)$ 在 x_0 点不连续. 此时称 $f(x)$ 在 x_0 点**间断**，并称 x_0 为**间断点**.

例 1.8.2 求下列函数的间断点.

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$　　(2) $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

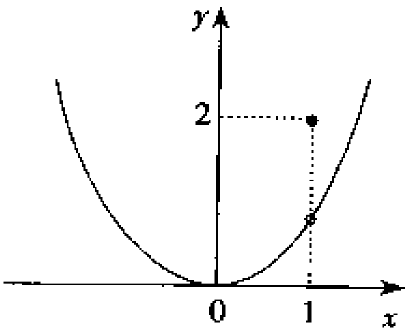

图 1－23 (a)

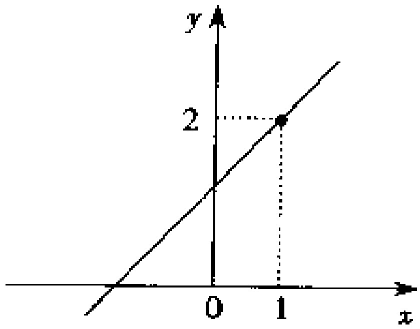

图 1－23 (b)

解 (1) $f(x)$ 在 $x=1$ 点的函数值 $f(1)=2$,
$f(x)$ 在 $x=1$ 点的极限值 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}x^2=1$,

由于 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1\neq f(1)=2$, 因此函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=1$ (如图 1－23 (a)).

(2) 显然函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 点没有定义, 因此 $g(x)$ 的间断点为 $x=1$ (如图 1－23 (b)).

例 1.8.3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的连续性.

解 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, 因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的右极限不存在, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的极限不存在, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 点间断 (如图 1－24).

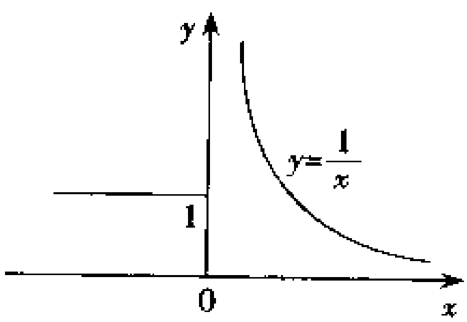

图 1－24

三、连续函数的运算法则及初等函数的连续性

（一）连续函数的四则运算

根据连续函数的定义和极限的运算法则，可以证明连续函数的以下运算法则：

定理 1.8.1　若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 点连续，则函数 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ 在 x_0 点也连续.

以下对 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 点连续的情形加以证明，其他的类似可证.

证　因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 点连续，所以有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),\ \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

根据极限的运算法则得

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0),$$

因此，$f(x)+g(x)$ 在 x_0 点连续.　　证毕.

利用上述定理易证以下结论：

（1）有理整函数 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 在其定义域 $(-\infty,\ +\infty)$ 内连续；

（2）有理分式函数 $f(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$ 在其定义域内连续；

（3）由于正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 在其定义域内连续，因此其他三角函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 也在其定义域内连续.

（二）复合函数的连续性

连续函数的复合函数仍是连续函数，即

定理 1.8.2 设函数 $y=f(u)$ 在 u_0 点连续，$u=\phi(x)$ 在 x_0 点连续，且 $u_0=\phi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\phi(x)]$ 在 x_0 点连续. 即

$$\lim_{x\to x_0} f[\phi(x)]=f[\phi(x_0)]=f[\lim_{x\to x_0}\phi(x)].$$

（三）初等函数的连续性

前面已证明了幂函数、三角函数在其定义域内连续，还可以证明，其他几种基本初等函数在其定义域内也是连续的. 由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算和复合而得到的，根据定理 1.8.1 及定理 1.8.2 可以得到

定理 1.8.3 初等函数在其定义域内是连续函数.

由于函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续时，有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，因此函数的连续性又给出了求极限的一种方法.

例 1.8.4 求 $\lim\limits_{x\to 1}[\ln(2-x)+e^{\sin(x-1)}]$

解 由于 $\ln(2-x)+e^{\sin(x-1)}$ 是初等函数，因此在其定义域 $(-\infty, 2)$ 内连续，又因 $1\in(-\infty, 2)$，所以

$$\lim_{x\to 1}[\ln(2-x)+e^{\sin(x-1)}]=\ln(2-1)+e^{\sin(1-1)}=\ln 1+e^0=1.$$

四、分段函数连续性的讨论

由于分段函数在其分界点两侧的表达式不同，因此讨论分段函数的连续性，一般应在其定义的各个区间及分界点处分别讨论.

例 1.8.5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1+\cos x, & x\leqslant 0,\\ x^2+2, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的连续性.

首先指出，对于分段函数在分界点的连续性，一般按以下三步考察：

1. 求 $f(x)$ 在分界点处的函数值；
2. 求 $f(x)$ 在分界点处的极限值或判断它不存在；
3. 若 $f(x)$ 在分界点处的极限存在，则比较在分界点处的极限

值与函数值是否相等.

解 在 $x=0$ 点的函数值 $f(0)=1+\cos 0=2$,

又 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\cos x)=2$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+2)=2$,

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的极限值存在,且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2=f(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

上例是考察分段函数在分界点处的连续性,如果是考察分段函数 $f(x)$ 在其定义域内的连续性,一般应按以下四步进行:

1. 求函数 $f(x)$ 的定义域;
2. 考察 $f(x)$ 在各定义区间内的连续性;
3. 讨论 $f(x)$ 在分界点处的连续性;
4. 总结以上结果得出结论.

例 1.8.6 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ 3+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在其定义域内的连续性.

解 由题设知 $D_f=(-\infty,+\infty)$.

由于当 $x>0$ 及 $x<0$ 时,$f(x)$ 都为初等函数,因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续.

当 $x=0$ 时,$f(0)=2$,

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0^-}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\left(3+x\sin\frac{1}{x}\right)=3,$$

由于 $f(0-0)=f(0+0)=3$,因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$,

但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3\neq f(0)=2$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点间断.

综上所述可得,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连

续，在 $x=0$ 点间断.

五、闭区间上连续函数的性质

下面介绍闭区间上连续函数的三条基本性质，这些性质的几何意义很明显，但其证明要用到其他的理论，故从略.

定理 1.8.4（有界性） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

定理 1.8.5（最值性） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定能取到最小值 m 及最大值 M.

所谓取到，是指在 $[a, b]$ 上至少存在两点 ξ_1 和 ξ_2，使 $f(\xi_1)=m$, $f(\xi_2)=M$（如图 1－25）.

定理 1.8.6（介值性） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值分别为 m 和 M，则对介于 m 和 M 之间的任何实数 C（即 $m<C<M$），至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=C$ （如图 1－26）.

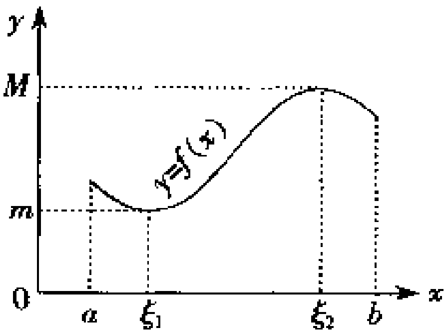

图 1－25

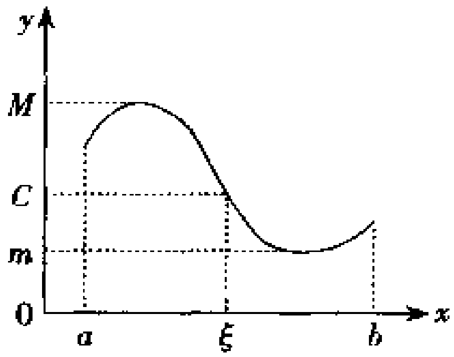

图 1－26

*第九节 极限的精确定义

在第五节中已经指出，我们所给出的函数极限的定义是一个直

观描述性的定义. 这种定义方法易于理解，但对于极限的性质与运算法则等，不能给出严格的理论证明. 本节将对极限概念给出精确定义，并作为一个示例，给出极限的局部保号性的证明.

一、极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的精确定义

对于极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，在注 1.5.1（1）中曾经指出："$x$ 无限趋近于 x_0（但 $x \neq x_0$）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于某一常数 A" 的意思，是指当 $|x - x_0|$ 无限减小时（但 $|x - x_0| > 0$），$|f(x) - A|$ 可以任意地小. 现在把这一说明再进一步精确化，便是如下的定义.

定义 1.9.1（函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义） 设有函数 $f(x)$，若存在常数 A，使对任意小的正数 ε，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称常数 A 为 x 无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的**极限**. 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$

注 1.9.1 定义中 $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$，这说明讨论 $f(x)$ 在点 x_0 的极限与函数在点 x_0 的情况无关.

例 1.9.1 用定义证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$

证 $\forall \varepsilon > 0$，要使 $\left|\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| = |x - 1| < \varepsilon$，

只要取 $\delta = \varepsilon$，则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时，恒有 $\left|\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| < \varepsilon$，

因此
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$
证毕.

该例中，函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 点虽无定义，但 $f(x)$ 在 $x = 1$ 点的极限存在.

由于 $|f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，因此，**极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的几何意义是**：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 x 位于点 x_0 的空心 δ 邻域时，相应的曲线 $y=f(x)$ 全部落在以直线 $y=A\pm\varepsilon$ 为边界的带形区域内（如图 1－27）.

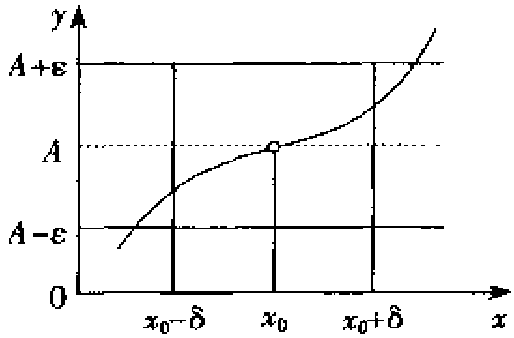

图 1－27

二、极限局部保号性的证明

极限的局部保号性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$（或 $A<0$），则函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某空心邻域内，恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

证 $A>0$ 时，因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对 $\varepsilon_0=\dfrac{A}{2}>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon_0=\dfrac{A}{2}$，即

$$A-\frac{A}{2}<f(x)<A+\frac{A}{2},$$

取左边的不等号，可得 $f(x)>A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}>0$，

因此，在 x_0 点的该空心 δ 邻域内，恒有 $f(x)>0$.

$A<0$ 的情形类似可证. 证毕.

习 题 一

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$，　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1}{1+x^2}$，

(3) $y=\cos 2x+e^{1-x^2}$，　　(4) $y=\lg(x-1)+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}}$，

(5) $y=\arctan x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$,　　　(6) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-3x+2$，求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(x+\Delta x)$.

3. 下列各题中的两个函数是不是相同的函数？为什么？

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$　与　$g(x)=1$,

(2) $f(x)=\lg x^2$　与　$g(x)=2\lg x$,

(3) $f(x)=x$　与　$g(x)=\sqrt{x^2}$,

(4) $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}$　与　$g(u)=\frac{e^u}{\sqrt{1+u^2}}$.

4. (1) 设函数 $f(x-1)=x(x-1)$，求 $f(x)$.

(2) 设函数 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

5. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x^2}, & -1\leqslant x<2,\\ 0, & x=2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$$

求　(1) $f(x)$ 的定义域,

(2) $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$.

6. 用分段函数表示 $y=5-|2x-1|$.

7. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=(2+5x)^{10}$,　　　(2) $y=e^{\sin 2x}$,

(3) $y=\tan^2(1+e^x)$,　　　(4) $y=\ln(\cos x^2)$,

(5) $y=\arcsin(x^2+1)$,　　　(6) $y=\sqrt{\ln\ln\ln x}$.

8. 某厂生产一个机器零件的可变成本为 15 元，每天的固定成本为 2 000 元，如果每个机器零件的出厂价为 20 元，每天生产 x 个机器零件，求每天生产的总成本函数和总收益函数.

9. 某厂生产某种产品 1 000 吨，定价为 130 元/吨，当售出量在 700 吨以内时，按原定价出售，超过 700 吨的部分按原定价的九

折出售，又生产该种产品 x 吨的费用为 $c(x)=5x+200$（元），试将销售总利润表示成销售量的函数.

10. 已知某产品的需求函数为 $Q_d=\frac{100}{3}-\frac{2}{3}P$，供给函数为 $Q_s=-20+10P$，求相应的市场均衡价格 P_0.

11. 设手表的价格为 70 元时，销售量为 10 000 只，若每只手表的价格提高 3 元，需求量就减少 1 500 只，求手表的需求函数.

12. 某公司每天生产某种食品 x 公斤的总成本为 $c(x)=45x+1\,200$（元）.

（1）若该食品的售价为 48 元/公斤，问每天销售多少公斤才能保本？

（2）若该食品售价提高为 54 元/公斤，问其保本点是多少？

（3）若每天至少能够销售 3 600 公斤，问每公斤定价为多少才能保证不亏本？

13. 观察图象写出下列极限结果：

（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$，　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$，

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$，　　（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$.

14. （1）设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

试求极限 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

（2）证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$不存在.

15. 求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to-1}(4x^2+3x-2)$，　　（2）$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-1}{x^4+x^2-4}$，

（3）$\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+\frac{x}{x^3+1}\right)$，　　（4）$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x+1}{x^2-4}$，

（5）$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$，　　（6）$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$，

(7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$,　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$,

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$,　　(10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$,

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x^2+4x^3}{1+x-3x^3}$,

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}}{(x+2)^{15}(2x-5)^{15}}$,

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$,

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$,

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{2x+\cos x}$,　　(16) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^4+x}(1+\sin x)$.

16. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 6x}$,　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{\tan 2(x-2)}$,　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2}{x}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\tan x}{x}$,　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x}$,

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$,　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$,

(9) $\lim\limits_{t\to 0}(1+2t)^{\frac{1}{t}+1}$,　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$,

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$,　　(12) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-x}$,

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$,　　(14) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$

17. (1) 当 $x\to 0$ 时，比较 $1-\cos^2 x$ 与 x 的阶.

(2) 设 $k\neq 0$，若 $x\to 0$ 时，$\ln(1+kx)\sim 2x$，求 k 的值.

18. 求下列函数的间断点：

(1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+x-2}$，

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{2x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0.\end{cases}$

(4) $f(x)=\dfrac{e^x+2}{\lg x}$.

19. 讨论下列分段函数在分界点的连续性：

(1) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$

20. 讨论下列分段函数在定义域内的连续性：

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x+\dfrac{1}{2}, & x\leqslant 0\\ \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}, & x>0.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4}, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0.\end{cases}$

21. 给 $f(0)$ 补充定义，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+3}}{x}$，

（2）$f(x)=\ln(1+3x)^{\frac{2}{x}}$.

22. 设 $f(x)=\begin{cases} kx^2-1, & x\leqslant 1, \\ e^x, & x>1. \end{cases}$

k 取何值能使 $f(x)$ 在 $x=1$ 点连续?

第二章　导数与微分

导数与微分是微分学中的两个基本概念．微积分学的主要内容是研究函数的性质以及函数值的计算或近似计算，而导数与微分是解决这些问题的重要工具．本章将从两个实际例子出发介绍导数的概念，基本求导公式与求导方法，进而介绍微分的概念以及在近似计算中的应用．

第一节　导数的概念

一、引出导数概念的两个实际例子

在讨论实际问题时，一般很关注一个变量的变化速度，这一问题如何从数学角度加以刻画，我们先看以下两个实际例子．

（一）变速直线运动的速度

设一物体沿一直线作变速运动，经过时间 t 后所走的距离是 t 的函数 $S=f(t)$．一般地，物体在不同时刻的运动速度是不同的，我们的问题是，"如何求物体在 t_0 时刻的速度 $V(t_0)$"（称 $V(t_0)$ 为瞬时速度）．

对于这一问题，可以这样考虑解决：

在 $t=t_0$ 时任给时间 t 一个很小的改变量 Δt，先求物体在 t_0 与 $t_0+\Delta t$ 这一时间段的平均速度 $\overline{V}_{\Delta t}$，并以 $\overline{V}_{\Delta t}$ 作为 $V(t_0)$ 的近似值．

显然，$|\Delta t|$越小，其近似程度就越好，而要完成从近似值到精确值的转化，可利用极限方法，也就是求极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\overline{V}_{\Delta t}$. 将这一思路具体化，即为：

第一步　求瞬时速度 $V(t_0)$ 的近似值 $\overline{V}_{\Delta t}$

1. 求物体在 t_0 与 $t_0+\Delta t$ 这一时间段的运动距离 ΔS：$\Delta S=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$；

2. 求物体在 t_0 与 $t_0+\Delta t$ 这一时间段的平均速度 $\overline{V}_{\Delta t}$：$\overline{V}_{\Delta t}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$.

第二步　利用极限思想定义瞬时速度.

令 $\Delta t\to 0$ 取极限，如果极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$存在，则称此极限值为物体在时刻 t_0 的瞬时速度，记为 $V(t_0)$.

这样，作变速直线运动的物体在时刻 t_0 的瞬时速度，是当包含 t 的时间段不断缩小时，取该时间段上的平均速度的极限得到的，并由此转化为数学中的如下问题：

求函数的改变量与自变量的改变量之比，当自变量的改变量趋于零时的极限.

（二）曲线的切线斜率

在平面几何中，我们把圆的切线定义为与圆仅有一个交点的直线. 但对于一般曲线，这一定义并不符合我们对“相切”的直观理解. 如图 2－1（a），直线 H 虽与曲线 $y=f(x)$ 仅有一个交点，但我们并不认为 H 与曲线相切，而直线 L 虽与曲线有两个交点，但在每个交点上可以认为是与曲线“相切”. 因此，我们有必要对切线的概念作一严格的定义.

在函数 $y=f(x)$ 表示的曲线上任取一点 $A(x_0,\ y_0)$，下面讨论曲线过 A 点的切线及切线斜率问题（图 2－1（b））.

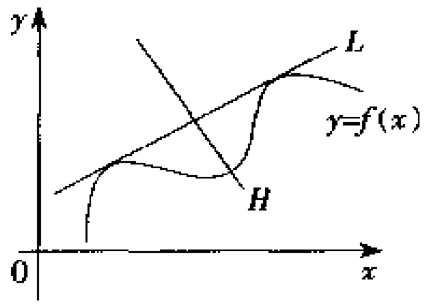

图 2－1 (a)

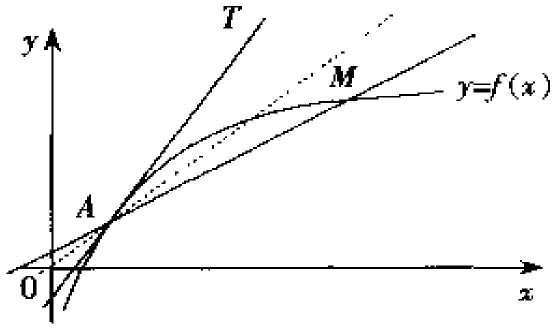

图 2－1 (b)

首先利用极限思想来定义切线. 在点 A 的邻近任取曲线上的另一点 M, 作割线 AM, 当点 M 沿曲线无限趋近于点 A 时, 割线的极限位置 AT 叫做曲线 $y=f(x)$ 在 A 点处的**切线**.

切线的这一定义, 给我们提供了"求曲线 $y=f(x)$ 过 A 点的切线斜率 K_{AT}"这一问题的解决思路:

由于 M 点与 A 点的距离很近, 我们先求割线 AM 的斜率 K_{AM}, 并以 K_{AM} 作为切线斜率 K_{AT} 的近似值; 再令 M 沿曲线无限趋近于 A 点 (即令 $\Delta x \to 0$) 求极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} K_{AM}$. 具体地:

第一步　求切线斜率 K_{AT} 的近似值 K_{AM}.

设 A 点的坐标为 $(x_0, f(x_0))$, M 点的坐标为 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$, 则割线 AM 的斜率

$$K_{AM}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

第二步　令 $\Delta x \to 0$ 取极限.

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称此极限值 K_{AT} 为曲线 $y=f(x)$ 在 A 点的切线斜率.

上面的切线斜率的极限表达式也转化为数学中的如下问题:

求函数的改变量与自变量的改变量之比, 当自变量的改变量趋于零时的极限.

在以上的物理与几何两个问题中, 变量所代表的实际意义完全

不同，但解决的方法实质是相同的，那就是：

（1）求出函数的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$（称作差商比）；

（2）求出当自变量的改变量 Δx 趋于零时，差商比的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

经过这一抽象，下面引进导数的概念.

二、导数的概念

（一）导数的定义

定义 2.1.1　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域内有定义，当自变量在 x_0 点有改变量 Δx 时（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内），相应地函数有改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果当 $\Delta x\to 0$ 时，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称这个极限值为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数，记作 $f'(x_0)$（读作 f 撇 x_0），并称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导. 若这个极限不存在，就称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点不可导.

导数定义还有如下的等价形式：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}，\text{其中 } x=x_0+\Delta x.$$

注 2.1.1　（1）如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 为无穷大，导数是不存在的. 但有时为方便计，也称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数为无穷大，记作 $f'(x_0)=\infty$.

（2）导数的记号还可记为 $y'(x_0)$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 等.

(3) 由定义 2.1.1 看出，导数 $f'(x_0)$ 是函数的平均变化率(即差商比)，当 $\Delta x \to 0$ 时的极限值，因此它表示了函数 $f(x)$ 在点 x_0 的变化率. 在自然科学、经济研究等领域中，讨论有关函数变化率的问题时，就需要用到导数概念.

有了导数定义后，上面所讲的两个问题就可分别表述为：

1. 设变速直线运动的运动方程为 $S=f(t)$，则导数 $f'(t_0)$ 表示物体在时刻 t_0 的瞬时速度.

2. 设平面曲线的方程为 $y=f(x)$，则导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

(二) 导数的几何意义

以上 2 中的叙述就是导数的几何意义，即

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

1. 设切线与 x 轴正向的夹角为 α，那么 $f'(x_0)=\tan\alpha$. 并且若 $f'(x_0)>0$，则切线与 x 轴正向的夹角为锐角；若 $f'(x_0)<0$，则切线与 x 轴正向的夹角为钝角；若 $f'(x_0)=0$，则切线与 x 轴平行(图 2-2).

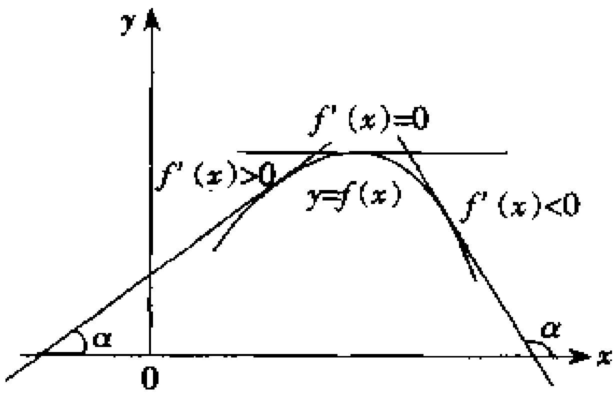

图 2-2

2. 由中学的解析几何知道，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率为 k，则曲线过 A 点的切线方程(点斜式)为：

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

现根据导数的几何意义，可以将该切线方程写为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

3. 如果一条曲线上处处存在切线，我们称这条曲线是**光滑曲线**.

（三）左导数与右导数

在定义 2.1.1 中，如果 Δx 只从大于零的方向或只从小于零的方向趋近于零，则得到左右导数的概念.

定义 2.1.2 若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的**左导数**，记作 $f'_-(x_0)$. 类似地可定义 $f(x)$ 在 x_0 点的右导数为

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

由导数的等价定义还可得左右导数的等价定义为：

$$f'_-(x_0)=\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

根据左右极限的性质，有

定理 2.1.1 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导的充分必要条件是，$f(x)$ 在 x_0 点的左、右导数存在且相等.

（四）导函数

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内任意一点都可导，则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导；如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导，且在 a 点的右导数存在，在 b 点的左导数存在，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导，那么对于 (a, b) 内的每一点 x，都有惟一的导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，这样在 (a, b) 内就定义了一个新的函数，称为函数 $f(x)$ 的**导函数**，简称**导数**，记作

$$f'(x),\ y'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx}\text{等}.$$

注 2.1.2 符号$\dfrac{dy}{dx}$也被看成$\dfrac{d}{dx}(y)$，意思是"y 对于 x 的导数"，例如，$\dfrac{d}{dx}(x^3+2x)$ 即为"x^3+2x"对 x 的导数.

三、函数的可导性与连续性的关系

在导数的定义中，并没有明确要求函数$f(x)$ 在 x_0 点连续，那么，函数在 x_0 点可导与在 x_0 点连续有什么关系?

定理 2.1.2 若函数$f(x)$ 在 x_0 点可导，则$f(x)$ 在 x_0 点一定连续.

证 根据连续性定义，只需证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 因为$f(x)$ 在 x_0 点可导，因此

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

从而，$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)]=f'(x_0)\cdot 0=0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，所以$f(x)$ 在 x_0 点连续. 证毕.

该定理说明，函数$f(x)$ 在 x_0 点连续是$f(x)$ 在 x_0 点可导的必要条件. 那么，它是否是$f(x)$ 在 x_0 点可导的充分条件? 我们来看绝对值函数 $y=|x|$ (图 1-9). 该函数在 $x=0$ 点连续，但由图 1-9 可以看出，曲线 $y=|x|$在 $x=0$ 点是不光滑的，曲线在此出现了一个"尖点"，过该点的切线不存在，也就是说，$y=|x|$在 $x=0$ 点虽然连续但不可导 (不可导的理论证明请看第二章的例 2.4.13).

注 2.1.3 函数$f(x)$ 在 x_0 点连续是$f(x)$ 在 x_0 点可导的必要但不充分条件.

第二节 导数的基本公式与运算法则

一、根据定义求导数

根据定义求函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数，一般按以下步骤去做：

1. 求函数的改变量 Δy：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

2. 求差商比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

3. 求极限值 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

例 2.2.1 求函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 点的导数，并求曲线 $y=x^2$ 上过点（1，1）处的切线方程.

解 在 $x=1$ 点，$f(1)=1$，

$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1=2\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x$，

因此 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

曲线 $y=x^2$ 上过点（1，1）处的切线方程为：

$$y-1=2(x-1).$$

根据以上的求导步骤，我们可以求出几个基本初等函数的导数.

二、几个基本初等函数的导数

（一）常量函数 $f(x)=c$ 的导数

从几何上看，常量函数 $f(x)=c$ 的图象是一条平行于 x 轴的直

线，过这条直线上每一点的切线都平行于 x 轴，即切线的斜率等于 0. 也就是说，$f'(x)=c'=0$. 下面根据导数的定义来推证这一结论.

证 在任一点 x，都有 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$，因此 $c'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$.

所以，常量函数的导数为 0，即 $c'=0$. 证毕.

（二）幂函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数）的导数

解

$$\begin{aligned}\Delta y&=(x+\Delta x)^n-x^n\\&=x^n+c_n^1x^{n-1}\cdot\Delta x+c_n^2x^{n-2}\cdot(\Delta x)^2+\cdots+c_n^n(\Delta x)^n-x^n\\&=c_n^1x^{n-1}\cdot\Delta x+c_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(x^n)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c_n^1x^{n-1}\cdot\Delta x+c_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n}{\Delta x}\\&=c_n^1x^{n-1}=nx^{n-1},\end{aligned}$$

所以幂函数 $f(x)=x^n$ 的导数 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

以后我们还会证明，这个导数公式对于 n 为任意实数 α 时也成立，即 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$. 在未证明之前，我们可以先加以利用. 例如

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2},\ (\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

（三）正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$ 的导数

解 $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$,

因此

$$\begin{aligned}(\sin x)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.\end{aligned}$$

所以正弦函数的导数是余弦函数，即 $(\sin x)'=\cos x$. 类似可以推得，余弦函数的导数是负的正弦函数，即 $(\cos x)'=-\sin x$.

（四）对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）的导数

解 $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

因此 $(\log_a x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}.$

利用对数的换底公式，还可将上面结果写为

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x}\,\frac{\ln \mathrm{e}}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，如果 $f(x)=\ln x$，则有

$$(\ln x)'=\frac{1}{x\ln \mathrm{e}}=\frac{1}{x}.$$

其他的基本初等函数，如 $\tan x$，$\sec x$，a^x 等，如果都按照定义去求导，一般计算量较大. 下面先介绍导数的一些运算法则，然后再去求它们的导数.

三、导数的运算法则

（一）导数的四则运算

对于函数的和、差、积、商的导数，有以下的求导法则.

定理 2.2.1 如果函数 $u(x)$，$v(x)$ 都在 x 点处可导，则

1. $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

即两个函数的代数和的导数等于它们的导数的代数和.

2. $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

即两个函数乘积的导数等于第一个因于的导数乘第二个因子再加上第一个因子乘第二个因子的导数.

特别地，如果 $v(x)$ 等于常数 c，由于 $c'=0$，因此 $[cu(x)]'=cu'(x)$，

即常数因子可以移到导数符号外边来.

3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad(v(x)\neq0)$;

即两个函数的商的导数等于原来函数分子的导数乘分母减去分母的导数乘分子再除以原来函数分母的平方所得的商.

特别地，当分子 $u(x)=1$ 时，

$$\left[\frac{1}{v(x)}\right]'=\frac{(1)'v(x)-1\cdot v'(x)}{v^2(x)}=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

下面只给出（2）的证明，其余可类似推证.

证 设 $y=u(x)v(x)$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\&=[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)]\\&\quad+[u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)]\\&=[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]\\&=\Delta u\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot\Delta v,\end{aligned}$$

因此 $[u(x)v(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\lim\limits_{\Delta x\to0}u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$,

已知 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 点可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x)$，$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x)$；再根据 $v(x)$ 的可导性可知 $v(x)$ 为连续函数，那么 $\lim\limits_{\Delta x\to0}v(x+\Delta x)=v(x)$，于是

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

证毕.

注 2.2.1 (1) $[u(x)v(x)]'\neq u'(x)v'(x)$;

(2) 公式 1、2 可以推广为有限个可导函数的情形. 例如

$$[u(x)\pm v(x)\pm w(x)]'=u'(x)\pm v'(x)\pm w'(x),$$

$$[u(x)v(x)w(x)]' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x).$$

例 2.2.1　求函数 $y = 2x^4 + 3\sin x - \ln x + 10$ 的导数.

解　
$$\begin{aligned} y' &= (2x^4 + 3\sin x - \ln x + 10)' \\ &= (2x^4)' + (3\sin x)' - (\ln x)' + (10)' \\ &= 8x^3 + 3\cos x - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

例 2.2.2　求函数 $y = (2x-1)\cos x$ 的导数.

解　
$$\begin{aligned} y' &= [(2x-1)\cos x]' = (2x-1)'\cos x + (2x-1)(\cos x)' \\ &= 2\cos x + (2x-1)(-\sin x) = 2\cos x - (2x-1)\sin x. \end{aligned}$$

例 2.2.3　求正切函数 $y = \tan x$ 与余切函数 $y = \cot x$ 的导数.

解　
$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x. \end{aligned}$$

所以　$(\tan x)' = \sec^2 x$，$(\cot x)' = -\csc^2 x$.

例 2.2.4　求正割函数 $y = \sec x$ 与余割函数 $y = \csc x$ 的导数.

解　
$$\begin{aligned} (\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \tan x\sec x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\csc x)' &= \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x} = -\cot x \cdot \csc x. \end{aligned}$$

所以　$(\sec x)' = \sec x\tan x$，$(\csc x)' = -\csc x\cot x$.

（二）反函数的求导法则

为了求指数函数（对数函数的反函数）与反三角函数（三角函数的反函数）的导数，我们先讨论反函数的求导法则.

定理 2.2.2 设函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\phi(y)$，若 $f(x)$ 在 x 点可导，且 $f'(x)\neq 0$，则它的反函数 $x=\phi(y)$ 在 y 点（$y=f(x)$）可导，且

$$\phi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

该定理说明，反函数的导数等于原来函数导数的倒数.

定理 2.2.2 的严格证明略去，但粗略地看：

反函数 $x=\phi(y)$ 在 y 点的差商比为$\frac{\Delta x}{\Delta y}$，而原来函数 $y=f(x)$ 在 x 点的差商比为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，这两者显然是互为倒数关系：

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}},\ (\Delta x\neq 0,\ \Delta y\neq 0),$$

两端分别取极限就得定理的结论.

例 2.2.5 求指数函数 $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ 的导数.

解 指数函数 $y=a^x$ 的反函数是对数函数 $x=\log_a y$，由反函数求导法则，有

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a,$$

即 $$(a^x)'=a^x\ln a.$$

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，有

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x\ln\mathrm{e}=\mathrm{e}^x.$$

即以 e 为底的指数函数 e^x 的导数等于其本身.

例 2.2.6 求反三角函数的导数

(1) $y=\arcsin x\left(-1<x<1,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$.

解 首先说明，当 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos y>0$.

由反函数求导法则，有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2) $y=\arccos x(-1<x<1,\ 0<y<\pi)$.

解 当 $0<y<\pi$ 时，$\sin y>0$.

由反函数求导法则，有

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3) $y=\arctan x\left(-\infty<x<+\infty,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$.

解 $(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$.

即

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

(4) $y=\operatorname{arccot} x(-\infty<x<+\infty,\ 0<y<\pi)$.

解 与 (3) 类似可得

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

利用导数的运算法则与基本初等函数的导数，我们就可以求一些较复杂函数的导数了.

例 2.2.7 求下列函数的导数

(1) $y=3\tan x+2\sqrt{x}-\arcsin x$,

(2) $y=\sqrt{x\sqrt{x}}+5e^{\pi}+\arctan x$,

(3) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

解 (1) $y' = (3\tan x)' + (2\sqrt{x})' - (\arcsin x)'$

$$= 3\sec^2 x + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 3\sec^2 x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2) $y' = (\sqrt{x\sqrt{x}})' + (5e^{\pi})' + (\arctan x)'$

$$= (x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}})' + 0 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+x^2}.$$

(3) $y' = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}.$$

四、基本求导公式

基本初等函数的导数是求初等函数导数的基础. 为了便于记忆，现将其集中列出.

(一) 基本求导公式

1. $c' = 0$，其中 c 是常数.
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$，其中 α 是实数.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
4. $(a^x)' = a^x \ln a$, $\quad (e^x)' = e^x$.
5. $(\sin x)' = \cos x$, $\quad (\cos x)' = -\sin x$,

$(\tan x)' = \sec^2 x$, $\quad (\cot x)' = -\csc^2 x$,

$(\sec x)' = \sec x\tan x$，　$(\csc x)' = -\csc x\cot x$.

6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，　$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$，　$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

（二）导数的运算法则

设 u，v 为 x 的函数，则

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$；
2. $(uv)' = u'v + uv'$，$(cu)' = cu'$，c 是常数；
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$，$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$；
4. 设 $y = f(x)$ 的反函数为 $x = \phi(y)$，$f'(x) \neq 0$，则

$$\phi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

第三节　几种常用的求导法

先看这样一个问题：求复合函数 $y = \sin 3x$ 的导数，即 $(\sin 3x)' = ?$. 初看起来，这个问题挺简单，也许你会得到这样的答案：

根据 $(\sin x)' = \cos x$，因此 $(\sin 3x)' = \cos 3x$.

要判断这样做是否正确，我们先引入复合函数的求导法则.

一、复合函数求导法

定理 2.3.1　设函数 $y = f[\phi(x)]$ 是由 $y = f(u)$ 和 $u = \phi(x)$ 复合而成的复合函数，如果 $u = \phi(x)$ 在 x 点可导，$y = f(u)$ 在相应的 u 点可导，则复合函数 $y = f[\phi(x)]$ 在 x 点可导，且

$$\{f[\phi(x)]\}'=f'(u)\phi'(x)=f'[\phi(x)]\phi'(x). \qquad (2-1)$$

该定理说明，复合函数的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数.

我们给出该定理的一个粗略证明.

设函数 $u=\phi(x)$ 在 x 点的改变量为 Δu，而由 $y=f(u)$ 可得到 y 的改变量为 Δy，从而有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\text{假定 } \Delta u\neq 0),$$

由于 $y=f(u)$ 在 u 点可导，$u=\phi(x)$ 在 x 点可导，

因此 $$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u), \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\phi'(x),$$

由于 $u=\phi(x)$ 在 x 点连续，所以当 $\Delta x\to 0$ 时有 $\Delta u\to 0$，于是

$$\{f[\phi(x)]\}'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\cdot\phi'(x).$$

注 2.3.1 (1) 复合函数的求导法则又称链式求导法则. 式(2-1)可图示为 **y—u—x**.

(2) 复合函数的求导法则可以推广到任意有限个函数构成的复合函数. 例如

若 $y=f(u)$，$u=\phi(v)$，$v=\varphi(x)$ 都可导，则

$(f\{\phi[\varphi(x)]\})'=f'(u)\phi'(v)\varphi'(x)$，图示为 **$y$—$u$—$v$—$x$**.

(3) 式 (2-1) 中的记号 $\{f[\phi(x)]\}'$及 $\phi'(x)$ 均表示对 x 求导，而$f'[\phi(x)]$ 表示对 $\phi(x)$ 即对中间变量 u 求导. 必须搞清这些记号的含义，否则将导致运算的错误.

(4) 式 (2-1) 还可表示为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$或 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

有了复合函数的求导法则，下面就来回答开始提出的问题：$(\sin 3x)'$是否等于 $\cos 3x$?

分析：$y=\sin 3x$ 是由 $y=\sin u$ 与 $u=3x$ 构成的复合函数，根据链式求导法则有

$(\sin 3x)'=(\sin u)'(3x)'=\cos u\cdot 3=3\cos 3x.$

这一结果说明前面的做法是错误的. 错在何处? 由注 2.3.1 中

的（3）知：

$(\sin 3x)'$表示对 x 求导，而前面得出的（$\sin 3x)' = \cos 3x$ 相当于对中间变量“$3x$”求导，根据链式求导法则，这种求法缺了一个链条，即漏掉了中间变量“$3x$”对 x 的导数，因此出现了错误结论（图 2－3）.

$$y - u \boxed{(u = 3x) - x}$$

漏掉

图 2－3

例 2.3.1 求函数 $y = (x^2+1)^{20}$的导数.

解 将 $y = (x^2+1)^{20}$分解为几个简单函数，

设 $y = u^{20}$，$u = x^2+1$，由式（2－1）得

$$y' = (u^{20})' \cdot (x^2+1)' = 20u^{19} \cdot 2x = 40x(x^2+1)^{19}.$$

例 2.3.2 求函数 $y = \ln(2x^2 - x + 1)$ 的导数.

解 设 $y = \ln u$，$u = 2x^2 - x + 1$，由式（2－1）得

$$y' = (\ln u)'(2x^2 - x + 1)' = \frac{1}{u}(4x-1) = \frac{4x-1}{2x^2 - x + 1}.$$

例 2.3.3 求函数 $y = \sin^2 \ln x$ 的导数.

解 设 $y = u^2$，$u = \sin v$，$v = \ln x$，由链式求导法则有

$$y' = (u^2)'(\sin v)'(\ln x)' = 2u\cos v \cdot \frac{1}{x} = 2\sin\ln x \cdot \cos\ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\sin(2\ln x).$$（最后一个式子利用了倍角公式）

求复合函数的导数，如果都像上面例子那样，每次先写出中间变量后再求导，是一件很烦琐的事．一般地，当方法熟练后，可以省略写出中间变量的步骤，尽量使计算过程简化．为此，我们以例 2.3.3 为例，说明计算方法.

在 $y = \sin^2\ln x$ 中，首先将“$\sin\ln x$”作为一个整体看作中间变量记住，利用幂函数的求导公式及链式求导法则，有

$$y' = 2(\sin\ln x) \cdot (\sin\ln x)';$$

对于（$\sin\ln x)'$，再将“$\ln x$”作为一个整体看作中间变量记住，按正弦函数的求导公式及链式求导法则，有

$$y' = 2(\sin\ln x)(\cos\ln x)(\ln x)';$$

对于 $(\ln x)'$，直接利用求导公式，最后得

$$y'=2(\sin\ln x)(\cos\ln x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\sin(2\ln x).$$

把上面的分析过程综合起来，有

$$\begin{aligned}(\sin^2\ln x)'&=2\sin\ln x\cdot(\sin\ln x)'\\&=2\sin\ln x\cdot\cos\ln x\cdot(\ln x)'\\&=2\sin\ln x\cdot\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}\\&=\frac{1}{x}\sin(2\ln x).\end{aligned}$$

$$y—\boxed{\sin\ln x}—\boxed{\ln x}—x.$$

图示

这样，在求复合函数的导数时，不必写出中间变量，只须把中间变量当作一个整体记住，利用基本求导公式及链式求导法则，从复合函数的外层开始，一层一层往里求导.

例 2.3.4 求函数 $y=\ln[\ln(\ln x)]$ 的导数.

解 $$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{\ln(\ln x)}[\ln(\ln x)]'\\&=\frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{1}{\ln x}(\ln x)'\\&=\frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}.\end{aligned}$$

$$y—\boxed{\ln\ln x}—\boxed{\ln x}—x.$$

图示

例 2.3.5 求函数 $y=e^{\sqrt{x}}$ 的导数.

解 $$y'=e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

$$y—\boxed{\sqrt{x}}—x.$$

图示

例 2.3.6 求函数 $y=\sqrt[3]{\arctan 5x}$ 的导数.

解 $$\begin{aligned}y'&=[(\arctan 5x)^{\frac{1}{3}}]'=\frac{1}{3}(\arctan 5x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(\arctan 5x)'\\&=\frac{1}{3}(\arctan 5x)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{1+(5x)^2}(5x)'\\&=\frac{5}{3}(\arctan 5x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{1+25x^2}\\&=\frac{5}{3(1+25x^2)\sqrt[3]{(\arctan 5x)^2}}.\end{aligned}$$

$$y—\boxed{\arctan 5x}—\boxed{5x}—x.$$

图示

例 2.3.7　求函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的导数.

解　$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right]$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

对于幂函数的求导公式 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$，前面只给出了 α 为正整数情况的证明，现在讲了复合函数的求导法以后，就可以对指数 α 为任意实数的情形给出证明.

例 2.3.8　证明 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}(x>0)$ 对于任意实数 α 都成立.

证　利用对数恒等式 $N=a^{\log_a N}$，可以将 x^α 写为 $x^\alpha=e^{\ln x^\alpha}=e^{\alpha\ln x}$，再利用复合函数的求导法则得

$$(x^\alpha)'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$　证毕.

例 2.3.9　(1) 设 $y=e^{f(x)}$，求 y'；

(2) 设 $y=f[(x+a)^2]$，求 y'.

解　这两个函数虽属于显函数形式，但并没有给出具体的解析式于，称这种形式的函数为"抽象函数". 它们的导数就按复合函数的求导法则去做即可.

(1) $y'=[e^{f(x)}]'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$.

(2) $$y'=\{f[(x+a)^2]\}'=f'[(x+a)^2][(x+a)^2]'$$
$$=f'[(x+a)^2]\cdot 2(x+a)(x+a)'$$
$$=2f'[(x+a)^2](x+a).$$

二、隐函数求导法

在这里，首先假设由方程 $F(x, y)=0$ 惟一确定了一个可导函数 $y=f(x)$.

以下将介绍求隐函数 $y=f(x)$ 的导数的方法，这种方法不必从方程 $F(x, y)=0$ 中解出 y 的明确表达式. 事实上，在很多情况下很难甚至不可能求出它们来，例如 $e^y=xy^3$ 等.

先看一个例子

例 2.3.10 求由方程 $y^2-y+4x^2+5=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$的导数.

解 第一步 方程两端对 x 求导

$$\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(y)+\frac{d}{dx}(4x^2)+\frac{d}{dx}(5)=0,$$

注意到 y 是 x 的函数，因此 y^2 是以 y 为中间变量的 x 的复合函数，用复合函数的求导法则得

$$2y\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}+8x=0,$$

即
$$2yy'-y'+8x=0,$$

第二步 解出 y'

由上式解得
$$y'=\frac{8x}{1-2y}.$$

在本例的求解过程中，为了说明要将 y 看作中间变量，我们详细写出了第一步中的前两个式子. 大家在清楚了求导过程后，第一步中的前两个式子不必写出，可直接写出第三个式子，但必须记住"y 是中间变量".

例 2.3.11 求由方程 $e^x=xy^3$ 所确定的隐函数的导数.

解 第一步 方程两端对 x 求导，得

$$e^x=y^3+x\cdot 3y^2\cdot y'=y^3+3xy^2\cdot y',$$

第二步 解出 y'，得

$$y' = \frac{e^x - y^3}{3xy^2}.$$

例 2.3.12　求由方程 $\sin(xy) = x$ 所确定的隐函数的导数.

解　方程两端对 x 求导，得

$$\cos(xy)(xy)' = 1,$$

即
$$\cos(xy)(y + xy') = 1,$$

解出 y'，得

$$y' = \frac{1 - y\cos(xy)}{x\cos(xy)}.$$

三、取对数求导法

如果遇到的函数形式具备以下两种形式时，一般采用将要介绍的取对数求导法.

1　函数 $f(x)$ 为多个函数的积、商形式

例如　$y = 2x^2 \cdot \sin x \cdot \sqrt{x-1}$，　$y = \frac{(x-1)\ln^2 x}{1+x}$.

2　函数 $f(x)$ 为幂指函数 $y = g_{(x)}^{h(x)}$ 的形式

例如　$y = x^{\sin x}$.

我们知道，乘积与商的对数有如下运算法则：

$$\ln(M \cdot N) = \ln M + \ln N, \qquad \ln\frac{M}{N} = \ln M - \ln N.$$

这样，乘积与商的对数就可以转化为对数的和与差，显然对和与差的形式求导就要简单许多. 因此，以上两种形式的函数的求导，就可以用以下的所谓“取对数求导法”.

例 2.3.13　求函数 $y = 2x^2\sin x \cdot \sqrt{x-1}$ 的导数.

解　等式两边取对数（将乘积转化为和的形式），得

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln 2 + \ln x^2 + \ln\sin x + \ln\sqrt{x-1}\\ &= \ln 2 + 2\ln x + \ln\sin x + \frac{1}{2}\ln(x-1),\end{aligned}$$

两边对 x 求导（注意左边的 y 是中间变量），得

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{\sin x}(\sin x)'+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}(x-1)'$$

$$=\frac{2}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2(x-1)}=\frac{2}{x}+\cot x+\frac{1}{2(x-1)},$$

解出 y'，得

$$y'=y\left[\frac{2}{x}+\cot x+\frac{1}{2(x-1)}\right]$$

$$=2x^2\sin x\cdot\sqrt{x-1}\left[\frac{2}{x}+\cot x+\frac{1}{2(x-1)}\right].$$

例 2.3.14 求函数 $y=\frac{(x-1)x^2}{1+x}$ 的导数.

解 等式两边取对数，得

$$\ln y=\ln(x-1)+2\ln x-\ln(1+x),$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x}$$

解出 y'，得

$$y'=y\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{(x-1)x^2}{1+x}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x}\right).$$

例 2.3.15 求函数 $y=x^x$ 的导数.

解法一 等式两边取对数，得

$$\ln y=x\ln x,$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\ln x,$$

解出 y'，得

$$y'=x^x(1+\ln x).$$

解法二 对于幂指函数的求导，还可利用对数恒等式将它转化成指数函数的形式，再用复合函数的求导方法去做.

一般地，$g(x)^{h(x)}=e^{h(x)\ln g(x)}$，对于本题

$$y' = (x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\ln x)'$$
$$= x^x\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(1 + \ln x).$$

注 2.3.2 利用对数恒等式将幂指函数化成指数函数的形式，在第三章求未定式的极限时还要用到.

第四节 高阶导数

一、高阶导数

（一）高阶导数的概念

如果函数$f(x)$ 的导数$f'(x)$（亦称一阶导数）仍然是x的可导函数，则称$f'(x)$ 的导数为原来函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记作

$$f''(x)\text{（读作}f\text{两撇}x\text{）或 } y'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2f}{dx^2}.$$

根据导数定义，$f(x)$ 在x点的二阶导数就是下列极限：

$$f''(x) = \lim_{x \to x_0}\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}. \tag{2-2}$$

类似地，如果$f(x)$ 的二阶导数$f''(x)$ 的导数存在，则称这个导数为原来函数$y=f(x)$ 的**三阶导数**，记作

$$f'''(x),\ y''',\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^3f}{dx^3}.$$

一般地，如果$f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数存在，则称这个导数为原来函数$y=f(x)$ 的 ***n* 阶导数**，记作

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^nf}{dx^n}.$$

（二）二阶导数的一个实际例子

在讲导数的概念时已经知道，若变速直线运动的运动方程为 $S=f(t)$，则导数 $S'(t)$ 表示物体在时刻 t 的瞬时速度，即 $V(t)=S'(t)$. 在物理学中还有一个重要概念，即运动的加速度. 物体在时刻 t 的加速度 $a(t)$，实际上是物体的运动速度 $V(t)$ 对于时间 t 的变化率，因此也是速度函数 $V(t)$ 在点 t 的导数，即

$$a(t)=V'(t)=[S'(t)]'=S''(t).$$

这样，变速直线运动的加速度是路程对于时间的二阶导数.

（三）高阶导数的计算

由高阶导数的定义可知，求函数的高阶导数不需要另外的方法，只需按基本求导公式与求导法则，从一阶导数开始，逐阶进行求导.

例 2.4.1 求函数 $y=\sqrt{x\sqrt{x}}+4x^3-2x$ 的二阶导数.

解
$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{x\sqrt{x}}+4x^3-2x\right)'=(x^{\frac{3}{4}}+4x^3-2x)' \\ &= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}+12x^2-2 \end{aligned}$$

$$y''=\left(\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}+12x^2-2\right)'=-\frac{3}{16}x^{-\frac{5}{4}}+24x.$$

例 2.4.2 求函数 $y=xe^{2x}$ 的三阶导数.

解
$$\begin{aligned} y' &= (xe^{2x})'=e^{2x}+xe^{2x}(2x)' \\ &= e^{2x}+2xe^{2x}=(1+2x)e^{2x}, \end{aligned}$$

$$y''=[(1+2x)e^{2x}]'=2e^{2x}+(1+2x)e^{2x}\cdot 2=2(2+2x)e^{2x}$$

$$\begin{aligned} y''' &= [4(1+x)e^{2x}]'=4e^{2x}+4(1+x)e^{2x}\cdot 2 \\ &= 4(3+2x)e^{2x}. \end{aligned}$$

例 2.4.3 已知自由落体的运动方程是 $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$，求它的瞬时速度 $V(t)$ 与加速度 $a(t)$.

解 速度 $V(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=gt$,

加速度 $a(t)=S''(t)=(gt)'=g$.

即自由落体运动的加速度就是重力加速度 g.

例 2.4.4 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=x^n$, (2) $y=e^{ax}$,

(3) $y=\ln(1+x)$, (4) $y=\sin x$.

解 (1) $y'=(x^n)'=nx^{n-1}$,

$y''=(nx^{n-1})'=n(n-1)x^{n-2}$,

$y'''=[n(n-1)x^{n-2}]'=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,

……

观察各阶导数的系数与指数的规律，不难得出:

$$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]x^{n-n}=n!$$

顺便可以得到，函数 $y=x^n$ 的一切高于 n 阶的导数都等于 0.

(2) $y'=(e^{ax})'=e^{ax}(ax)'=ae^{ax}$,

$y''=(ae^{ax})'=ae^{ax}(ax)'=a^2e^{ax}$,

$y'''=(a^2e^{ax})'=a^2e^{ax}(ax)'=a^3e^{ax}$,

……

观察各阶导数表达形式的规律，易得

$$y^{(n)}=(e^{ax})^{(n)}=a^ne^{ax}.$$

(3) $y'=[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}(1+x)'=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$,

$y''=[(1+x)^{-1}]'=-(1+x)^{-2}(1+x)'$

$=(-1)(1+x)^{-2}$,

$y'''=[(-1)(1+x)^{-2}]'=(-1)(-2)(1+x)^{-3}$

$=(-1)^2 1\cdot 2(1+x)^{-3}$,

$y^{(4)}=[(-1)^2 1\cdot 2(1+x)^{-3}]'$

$=(-1)^2 1\cdot 2\cdot(-3)(1+x)^{-4}$

$=(-1)^3 1\cdot 2\cdot 3(1+x)^{-4}$,

……

总结各阶导数表达形式的规律，得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (-1)^{n-1}1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)(1+x)^{-n} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}. \end{aligned}$$

(4) 对于 $y=\sin x$ 的 n 阶导数，如果按以下步骤来做：

$y'=(\sin x)'=\cos x$, $\quad y''=(\cos x)'=-\sin x$,

$y'''=(-\sin x)'=-\cos x$, $\quad y^{(4)}=(-\cos x)'=\sin x$.

可以发现，求到 4 阶导数时又回到原题，依次重复下去. 这种规律可以用式子表示，但较为繁项. 一般地，求 $y=\sin x$ 的各阶导数是按以下的方法来做：

利用三角学中的一个诱导公式

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,$$

可以将每阶导数的结果进行变形：

$$y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right] \\ &= \sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''' &= \left[\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right] \\ &= \sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

……

此时的规律就很明显了，我们有

$$y^{(n)}=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

类似可得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

从以上四个例子看出，当求解某一函数的 n 阶导数时，一般先

求出前面的几阶导数，从中找出各表达式的规律（例如系数、指数与阶数的关系），进而写出 n 阶导数的一般结果（严格地讲，应利用数学归纳法加以证明）．大家不妨据此写出例 2.4.2 的 n 阶导数．

二、导数计算综合举例

在这一部分，我们除综合练习求一些较复杂的复合函数、隐函数的导数以及取对数求导法外，还要讨论分段函数的求导方法．

例 2.4.5 求函数 $y=\sin[\ln(x^2+1)]$ 的导数．

解 由复合函数的链式求导法得

$$\begin{aligned}y' &= \{\sin[\ln(x^2+1)]\}' = \cos[\ln(x^2+1)]\cdot[\ln(x^2+1)]' \\ &= \cos[\ln(x^2+1)]\cdot\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = \cos[\ln(x^2+1)]\frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{2x\cos[\ln(x^2+1)]}{x^2+1}.\end{aligned}$$

如果大家对基本求导公式和链式求导法则比较熟悉，上述书写过程还可以再简化，即把对中间变量的求导结果直接写出来．例如

$$\begin{aligned}\{\sin[\ln(x^2+1)]\}' &= \cos[\ln(x^2+1)]\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x \\ &= \frac{2x\cos[\ln(x^2+1)]}{x^2+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{\arctan 5x})' &= [(\arctan 5x)^{\frac{1}{3}}]' \\ &= \frac{1}{3}(\arctan 5x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{1+(5x)^2}\cdot 5 \\ &= \frac{5}{3}(\arctan 5x)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{1+25x^2} \\ &= \frac{5}{3(1+25x^2)\sqrt[3]{(\arctan 5x)^2}}\end{aligned}$$

例 2.4.6 设 $y=5^{x-\sin x}$，求 $\frac{dy}{dx}$．

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(5^{x-\sin x})=5^{x-\sin x}\ln 5\cdot(1-\cos x)$

$=\ln 5\cdot(1-\cos x)5^{x-\sin x}$.

例 2.4.7 求由方程 $e^{xy}+xy^2+\cos 2x=0$ 所确定的隐函数的导数.

解 方程两边对 x 求导，得

$$e^{xy}(y+xy')+y^2+x\cdot 2yy'-2\sin 2x=0,$$

整理得
$$(xe^{xy}+2xy)y'=2\sin 2x-y^2-ye^{xy},$$

解出 y'，得

$$y'=\frac{2\sin 2x-y^2-ye^{xy}}{xe^{xy}+2x}.$$

例 2.4.8 求函数 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(5-x)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数

解 等式两边取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(5-x)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x-5}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

解出 y'，得

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(5-x)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

例 2.4.9 求函数 $y=(\sin x)^x$ 的导数.

解 $y'=[(\sin x)^x]'=(e^{x\ln\sin x})'=e^{x\ln\sin x}\left(\ln\sin x+x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\cot x)$.

例 2.4.10 设 $y=\ln(x^2+1)$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[\ln(x^2+1)]=\frac{2x}{x^2+1}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

例 2.4.11　证明 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

证　当 $x>0$ 时，$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，

当 $x<0$ 时，$(\ln|x|)'=[\ln(-x)]'=-\dfrac{1}{x}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x}$，

因此
$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}.$$
证毕.

这一结论在第四章不定积分中经常用到，应当记住.

例 2.4.12　本例将讨论分段函数的求导问题.

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x^3+4, & x\leqslant 1,\\ 2x+3, & x>1,\end{cases}$　求 $f'(x)$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & -1<x\leqslant 0,\\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}, & 0<x<1,\end{cases}$

试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性与可导性.

分段函数的求导，一般按以下步骤进行：

(1) 在 $f(x)$ 的定义的各开区间内用求导公式及求导法则求导；

(2) 在分界点处，一般先按导数定义求出 $f(x)$ 的左、右导数，然后再去判断；

(3) 综合上述结果写出 $f'(x)$.

解　(1) 当 $x<1$ 时，$f'(x)=(x^3+4)'=3x^2$.

当 $x>1$ 时，$f'(x)=(2x+3)'=2$.

当 $x=1$ 时，$f(1)=1^3+4=5$，

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3+4-5}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}(x^2+x+1)=3,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+3-5}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+}2=2,$$

因为$f'_-(1)\neq f'_+(1)$，所以$f(x)$ 在 $x=1$ 点不可导，

综上有，$f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x<1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$

(2) 先讨论$f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性：

$f(0)=\ln(1+0)=0$,

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1+x)=0$,

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=0$,

因为 $f(0-0)=f(0+0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

又 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$，因此$f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

再讨论$f(x)$ 在 $x=0$ 点的可导性：

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+x)-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1,$$

因为$f'_-(0)=f'_+(0)=1$，所以$f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且$f'(0)=1$.

例 2.4.13 试证绝对值函数 $y=|x|$在 $x=0$ 点不可导.

证 $|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant0.\end{cases}$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-x-0}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-0}{x}=1,$$

因为$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $y=|x|$在 $x=0$ 点不可导. 证毕.

第五节 微 分

设有函数 $y=f(x)$，在实际问题中，不仅需要讨论 $f(x)$ 在 x_0 点的变化率，即导数问题，有时还要讨论另一个内容，即当自变量在 x_0 点取得微小改变量 Δx 后，所引起的函数改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的计算问题．本节的微分概念就是由此引出的．

一、引例

一般地，如果函数 $f(x)$ 是一个解析式较复杂的函数，要计算函数改变量 Δy 的精确值是很困难的．其实，在实际问题中，一般只要求计算 Δy 的近似值，但这个近似值一般应满足两条：

1．近似值容易计算；

2．近似程度要好．

为了解决这个问题，先考察一个具体例子．

设有一边长为 x 的正方形，其面积 $S=x^2$．如果给边长一个改变量 Δx，则 S 相应地有改变量．

$\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2$（图 2－3 的阴影部分）．

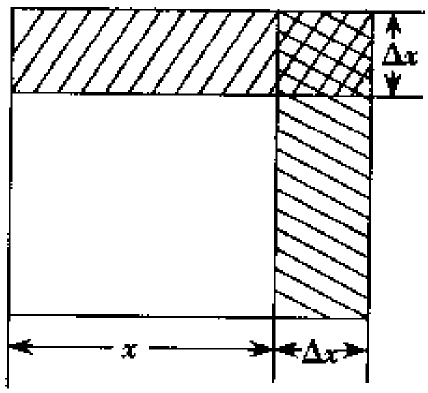

图 2－3

下面分析面积改变量 ΔS 的组成部分：

$$\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2, \qquad (2-3)$$

由式（2－3）看出，ΔS 由两部分组成：

第一部分 $2x\cdot\Delta x$——关于 Δx 的线性函数，如图 2－3 中带有单一斜线的两个矩形面积之和；

第二部分 $(\Delta x)^2$——比 Δx 高阶的无穷小量，即 $(\Delta x)^2=$

$o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$，如图 2－3 中带有网格线的小正方形的面积.

当所给边长 x 的改变量 Δx 很小时，如果用第一部分 $2x\cdot\Delta x$ 作为 ΔS 的近似值时，可以满足上面提出的两个条件：

（1）$2x\cdot\Delta x$ 是关于 Δx 的线性函数（边长 x 给定后，相对于 Δx，$2x$ 是一个常数），线性函数是结构很简单的函数形式，因此容易计算；

（2）由此引起的误差 $(\Delta x)^2$ 是一个比 Δx 高阶的无穷小量，因此近似程度较好.

综上所述，面积的改变量

$$\Delta S\approx 2x\cdot\Delta x=A\cdot\Delta x \qquad (A=2x),$$

由此引起的误差为

$$\Delta S-A\cdot\Delta x=(\Delta x)^2=o(\Delta x) \quad (\Delta x\to 0).$$

下面根据这一具体例子来分析一般情形. 设函数 $y=f(x)$，当给自变量 x 以一个改变量 Δx 时，函数相应的改变量为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，如果 Δy 也同 ΔS 一样由两部分组成，即

$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x) \qquad (\Delta x\to 0)$，$A$ 是一个常数，

那么，如果用关于 Δx 的线性函数 $A\cdot\Delta x$ 近似代替 Δy，所舍去的仅是一个较 Δx 高阶的无穷小量，这样，Δy 的近似计算问题就解决了. 下面我们对这一问题作具体讨论，并由此引入微分的定义.

二、微分的定义及几何意义

（一）微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x 点有一改变量 Δx，相应地函数的改变量为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

定义 2.5.1 如果 Δy 可以表示为 Δx 的线性函数 $A\cdot\Delta x$（A 是常数）与较 Δx 高阶的无穷小量两部分之和，即

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x) \qquad (\Delta x\to 0),$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 点**可微**，并称 $A\cdot\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在 x 点的**微**

分，记作

$$dy = A \cdot \Delta x.$$

由定义可知，dy 是 Δx 的线性函数，且 $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ 是一个较 Δx 高阶的无穷小量. 因此又称微分 dy 是 Δy 的线性主要部分，简称**线性主部**. 这样，我们就用微分 dy 作为 Δy 的近似值，即

$$\Delta y \approx dy = A \cdot \Delta x.$$

由微分的定义可知，引例中的面积函数 $S = x^2$ 在 x 点可微，且它的微分

$$dS = 2x \cdot \Delta x$$

也就是说，$A = 2x$. 而 $2x$ 恰等于 $S' = (x^2)' = 2x$.

一般地，设函数 $y = f(x)$ 在 x 点可微，即 $dy = A \cdot \Delta x$，那么 $A = ?$，A 是否等于 $f'(x)$？此外，函数在 x 点可微与可导之间有什么关系？以下讨论这些问题.

（二）函数可微与可导的关系

定理 2.5.1 函数 $y = f(x)$ 在 x 点可微的充分必要条件是函数在 x 点可导.

证 （1）必要性：即可微必可导

设 $y = f(x)$ 在 x 点可微，由定义，有

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$，$A$ 是常数.

于是
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

则
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right] = A,$$

因此函数 $y = f(x)$ 在 x 点可导.

（2）充分性：即可导必可微

设 $y = f(x)$ 在 x 点可导，则有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

根据定理 1.5.3 知，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \quad$（当 $\Delta x \to 0$ 时，$\alpha \to 0$），

从而 $$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x.$$

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，因此 $\alpha\cdot\Delta x=o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$，

于是 $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x=f'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$.

根据微分的定义知，函数 $f(x)$ 在 x 点可微. 　　证毕

定理 2.5.1 不仅说明了函数的可微性与可导性是等价的，同时在证明过程中又得出一个重要结论，即 $A=f'(x)$. 于是，$f(x)$ 在 x 点的微分

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x \tag{2-4}$$

设 $y=f(x)=x$，由微分的定义，有

$$dy=dx=(x)'\Delta x=\Delta x,$$

即自变量 x 的微分 dx 等于自变量 x 的改变量 Δx：$dx=\Delta x$. 如果用 dx 代替 Δx，则函数 $y=f(x)$ 在 x 点的微分 dy（式 2－4）又可以写成

$$dy=f'(x)dx. \tag{2-5}$$

即函数的微分等于函数的导数与自变量微分的乘积.

由 $dy=f'(x)dx$ 可得，$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$，这就是说，函数的导数等于函数的微分与自变量的微分的商，因此导数又称作**微商**.

注 2.5.1　(1) 前面的导数记号是一个整体记号，不具有商的意义，但引入微分概念后，符号 $\dfrac{dy}{dx}$ 可看作是一个分式.

(2) 由于求微分的问题归结为求导数的问题，所以求导数与求微分的运算统称为**微分法**.

例 2.5.1　设函数 $y=\ln\sin x$，求 dy.

解　$dy=(\ln\sin x)'dx=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x dx=\cot x dx$.

例 2.5.2　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 所确定，求 dy.

解　先求 y'，方程两边对 x 求导，得

$$y+xy'-e^x+e^y\cdot y'=0,$$

解出 y'，得 $$y'=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$$

因此 $$dy=y'dx=\frac{e^x-y}{e^y+x}dx.$$

（三）微分的几何意义

如图 2－4，设 AT 为曲线 $y=f(x)$ 上过点 $A(x,f(x))$ 的切线，切线的斜率为 $\tan\alpha=f'(x)$. 当横坐标由 x 改变到 $x+\Delta x$ 时，曲线 $y=f(x)$ 相应的纵坐标的改变量是线段 $\overline{NM}$，切线 AT 的纵坐标的改变量是线段 $\overline{NQ}$. 即

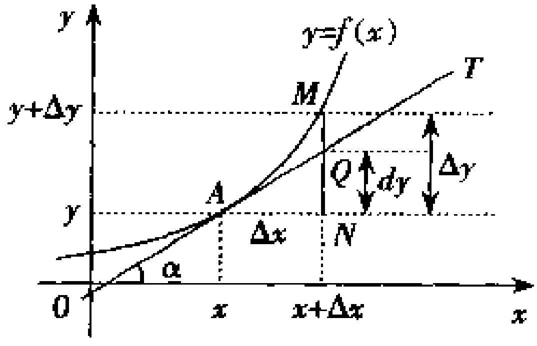

图 2－4

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\overline{NM},$$
$$dy=f'(x)\cdot\Delta x=\tan\alpha\cdot\Delta x=\overline{NQ}.$$

因此，用 dy 近似代替 Δy，其几何意义就是用切线的纵坐标的改变量近似代替曲线的纵坐标的改变量. 定义中的 $o(\Delta x)$ 即为线段 $\overline{QM}$，它是较 Δx 高阶的无穷小量（$\Delta x\to 0$ 时）.

从微分的几何意义可以看出，微分的基本思想是，在 x 点充分小的邻域内，用过 A 点的切线段近似代替相应的曲线段，也就是在局部范围内“以直代曲”. 这种思想在第五章的定积分概念中还会遇到.

三、微分的运算法则和基本公式

（一）微分的运算法则

由于函数的可微与可导是等价的，因此由导数的运算法则可相应地得到微分的运算法则.

设 u 与 v 为 x 的可微函数，则

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$,
2. $d(uv) = v du + u dv$,
3. $d(cu) = c du$　c 是常数,
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$　$(v \neq 0)$.

(二) 微分的基本公式

由于函数 $y = f(x)$ 的微分 $dy = f'(x)dx$，因此只要将基本求导公式中的每一个乘上自变量的微分 dx，就可以得到微分的基本公式：

1. $d(c) = 0$，c 是常数.
2. $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx$，$\alpha$ 是任意实数，
   $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}dx$，$d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx$，$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$.
4. $d(a^x) = a^x \ln a dx$，$d(e^x) = e^x dx$.
5. $d(\sin x) = \cos x dx$，$d(\cos x) = -\sin x dx$，
   $d(\tan x) = \sec^2 x dx$，$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$，
   $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$，
   $d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$.
6. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$，$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$，
   $d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx$，$d(\text{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$.

四、微分在近似计算中的应用

设函数 $y = f(x)$，当自变量 x 在 x_0 点取得微小的改变量 Δx 后，可引出两个数值的计算问题：

1. 函数 $y=f(x)$ 的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的计算；

2. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0+\Delta x$ 的函数值 $f(x_0+\Delta x)$ 的计算.

我们利用微分知识来解决这两个问题. 如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微，由微分定义知

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

由此可以得到计算以上两个问题的公式：

(1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x,$ (2-6)

(2) $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$ (2-7)

例 2.5.3 某厂生产 x 件产品的利润为 $L(x)=6\sqrt{1\,000x-x^2}$ 元，当产量由 100 件增至 102 件时，利润将增加多少？

解 由公式 (2-6) 知，利润的增加量

$$\Delta L=L(x_0+\Delta x)-L(x_0)\approx L'(x_0)\Delta x,$$

取 $x_0=100$，$\Delta x=2$，则

$$\Delta L\approx L'(100)\cdot 2=6\left.\frac{1\,000-2x}{2\sqrt{1\,000x-x^2}}\right|_{x=100}\times 2=16\ (\text{元})$$

所以利润将增加 16 元.

例 2.5.4 求 $\sqrt{0.97}$ 的近似值.

解 设 $f(x)=\sqrt{x}$，取 $x_0=1$，$\Delta x=0.97-1=-0.03$，由公式 (2-7) 知，

$$\begin{aligned}\sqrt{0.97}&=f(1-0.03)\approx f(1)+f'(1)\cdot(-0.03)\\&=\sqrt{1}+(\sqrt{x})'\big|_{x=1}\cdot(-0.03)=1+\frac{1}{2}\times(-0.03)\\&=0.985.\end{aligned}$$

在公式(2-7)中，如果取 $x_0+\Delta x=x$，即 $\Delta x=x-x_0$，则有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2-8)$$

现设函数 $f(x)$ 分别为 $\sin x$，$\tan x$，$\ln x$，e^x，由 (2-8) 可得它们在 $x_0=0$ 点，且 $|x|$ 充分小时的下列近似公式：

(1) $\sin x\approx x$， (2) $\tan x\approx x$，

(3) $\ln(1+x)\approx x$， (4) $\mathrm{e}^x\approx 1+x$.

习 题 二

1. 按定义求下列函数的导数:

(1) $y=x^2$, (2) $y=\sqrt{x}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导,试求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}$,

(3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,

(4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$.

3. 求下列函数的导数:

(1) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}+2$, (2) $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$,

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+x^2e^x+x}{x^2}$, (4) $f(x)=x^2\sin x$,

(5) $f(x)=x^3e^x\ln x$, (6) $f(x)=a^x\arctan x$,

(7) $f(x)=x\tan x+\log_a x$, (8) $f(x)=\dfrac{1}{x}\arcsin x$,

(9) $f(x)=\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$, (10) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,

(11) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$, (12) $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$,

(13) $f(x)=3^x\ln x$,求 $f'(1)$,

(14) $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$,求 $f'(0)$.

4. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程.

5. 曲线 $y=12x-x^3$ 上,过哪一点的切线与 x 轴平行?

6. 求下列复合函数的导数：

(1) $y=(2x^2+5)^{10}$，　　(2) $y=\ln(3x-2)$，

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$，　　(4) $y=e^{\sin x}$，

(5) $y=\tan(e^x+x)$，　　(6) $y=\arcsin e^x$，

(7) $y=\sin x^2$，　　(8) $y=\sin^2(3x+1)$，

(9) $y=\ln\sin\sqrt{x}$，　　(10) $y=x\sqrt{1-x^2}$，

(11) $y=e^{(x^2+1)^2}$，　　(12) $y=\sqrt{\ln(x^2+1)}$，

(13) $y=\ln\tan\dfrac{x}{4}$，　　(14) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

7. 求下列方程所确定的隐函数的导数：

(1) $y^3-3y+2x=0$，　　(2) $e^y=xy$，

(3) $y-x\ln y=0$，　　(4) $xy=e^{x+y}$，

(5) $y=1+xe^y$，　　(6) $e^{xy}-\sin x=0$.

8. 利用取对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=(x^3+1)\ln x\cdot e^{2x}$，　　(2) $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{(x+1)(x-3)}}$，

(3) $y=\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$，　　(4) $y=x^{2x}$，

(5) $y=x^{\cos x}$，　　(6) $y=(x+2)^{\sqrt{x}}$.

9. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=\ln(1+x)$，　　(2) $y=xe^{x^2}$，

(3) $y=e^{\sin x}$，　　(4) $y=\arctan x$，

(5) $y=\sec x$，　　(6) $y=\ln(1-\cos x)$.

10. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=a^x$，　　(2) $y=e^{-x}$，

(3) $y=xe^x$，　　(4) $y=(1+x)^m$　$(n<m)$，

(5) $y=\dfrac{1}{1+x}$，　　(6) $y=x\ln x$.

11. 求下列函数的导数：

(1) $y=\ln\cos(\sin^2 x)$, (2) $y=e^{\sqrt{\ln(2x-1)}}$,

(3) $y=f(e^x+1)$, (4) $y=e^{f(x)}$,

(5) $y=f(e^x+x^e)$, (6) $y=[xf(x)]^2$.

12. 讨论下列分段函数在分界点处的可导性：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1,\\ 2x-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

13. 设 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x<1,\\ 3x-2, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

14. 求下列函数的微分：

(1) $y=\cos x^2$, (2) $y=\ln(\sin x+\cos x)$,

(3) $y=\arctan e^x$, (4) $y=\arcsin\sqrt{x}$,

(5) $y=x^2e^{2x}$, (6) $y=1+xe^y$.

15. 求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

第三章　中值定理与导数应用

在利用导数研究函数的性质之前，还必须对导数本身的性质，特别是导数与函数之间的关系作进一步的研究，这就是本章将要介绍的中值定理. 在中值定理的基础上，再介绍导数在求未定式的极限、讨论函数的性质以及在经济研究中的应用.

第一节　中 值 定 理

中学数学中，我们是根据定义来判断结构简单的函数的单调性，而对于结构稍复杂的函数，用定义去判断它们的单调性，就是一件困难的事情了. 那么是否存在其他简便易行的判断方法呢？下面先从图象观察作一分析.

在图 3－1 中，设函数 $y=f(x)$ 在定义区间内可导，观察图象知，过曲线 $y=f(x)$ 上任意一点的切线与 x 轴正向的夹角 α 为锐

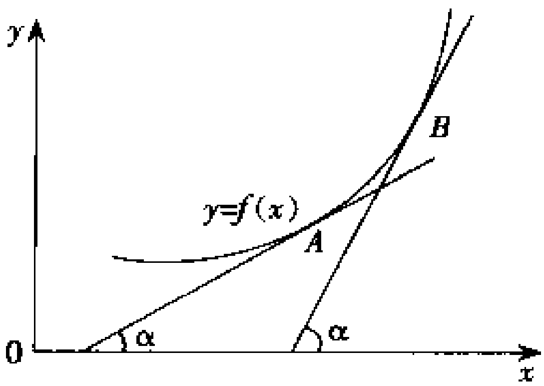

图 3－1

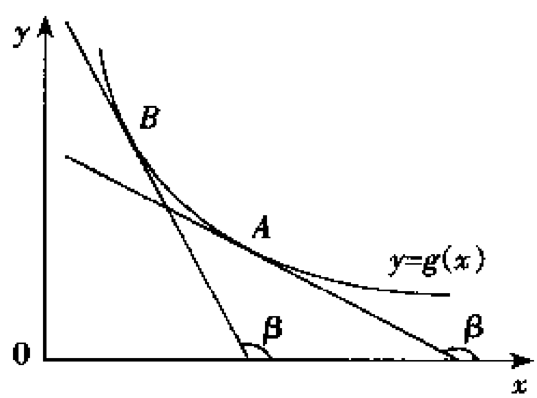

图 3－2

角，这说明 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=\tan\alpha>0$，此时函数 $y=f(x)$ 为递增函数.

在图 3-2 中，仍设函数 $y=g(x)$ 在定义区间内可导，观察图象知，过曲线 $y=g(x)$ 上任意一点的切线与 x 轴正向的夹角 β 为钝角，这说明 $g(x)$ 的导数 $g'(x)=\tan\beta<0$，此时函数 $y=g(x)$ 为递减函数.

几何直观的结果给出一个启示，即在函数 $f(x)$ 的可导区间内：

若 $f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 为递增函数；

若 $f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 为递减函数.

这一观察结论说明，函数的单调性与其导数之间存在密切联系. 当然，要证明这一结论，就需要在理论上探讨函数 $y=f(x)$ 本身与其导函数 $f'(x)$ 之间的更深刻的关系，这就是下面要介绍的三个中值定理.

一、罗尔（Rolle）定理

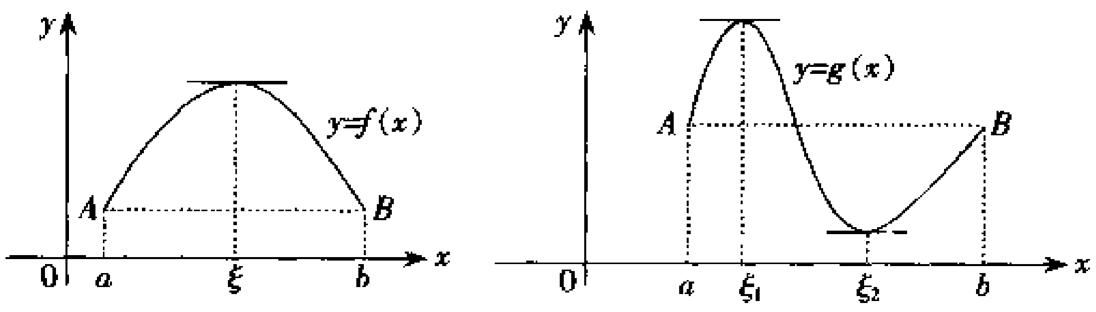

图 3-3

观察图 3-3 中的两条曲线，它们有几个共同特点：

1. 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在区间 (a, b) 内是连续光滑的；

2. 曲线在两个端点的纵坐标分别是相等的，即弦 $\overline{AB}$ 与 x 轴平行；

3. 这时，在两条曲线上都至少有一条切线与 x 轴平行（即与弦 $\overline{AB}$ 平行）. 也就是说，在区间 $(a,\ b)$ 内至少存在一点 ξ（希腊字母，汉语拼音读作 “kesai”），使 $f'(\xi)=0$.

以上观察的结果具有普遍性，即下面的罗尔定理.

定理 3.1.1（罗尔定理）　若函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续；

(2) 在开区间 $(a,\ b)$ 内可导；

(3) $f(a)=f(b)$.

则在开区间 $(a,\ b)$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=0 \tag{3-1}$$

证法分析： 该定理的证明也可从图 3－3 中得到启发. 观察图象可以发现，与 x 轴平行的切线，其切点恰好是曲线的最高点或最低点. 也就是说，定理中的 ξ 点是使函数 $y=f(x)$ 取得最值的点. 下面我们就遵循这条思路来加以证明.

证　由于 $f(x)$ 在闭区间上连续，因此 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上必取到最大值 M 和最小值 m. M 和 m 之间有两种情况：

1. $M=m$，这时 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上一定是一个常数，因此在该区间上有 $f'(x)=0$. 于是可以取 $(a,\ b)$ 内任意一点作为 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

2. $M>m$，由条件 (3) 知，此时最大值 M 和最小值 m 至少有一个在开区间 $(a,\ b)$ 内取得. 不妨设最大值 M 在开区间 $(a,\ b)$ 内的 ξ 点取得，即 $f(\xi)=M$. 下面证明 $f'(\xi)=0$.

因为 $f(\xi)=M$ 是 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的最大值，因此对任意 $x\in[a,\ b]$，都有 $f(x)-f(\xi)\leqslant 0$. 于是

当 $x>\xi$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0$，

当 $x<\xi$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0$.

由条件 (2) 知，$f(x)$ 在 ξ 点可导，因此有

$$f'(\xi)=f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0,$$

$$f'(\xi)=f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0.$$

所以必有 $f'(\xi)=0$. 证毕.

罗尔定理的几何意义：若连续曲线 $y=f(x)$ 的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上处处具有不垂直于 x 轴的切线，且两端点的纵坐标相等，则在这条弧上至少有一条切线与 x 轴平行（即与弦 $\overline{AB}$ 平行）.

例 3.1.1 验证罗尔定理对函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的正确性.

解 验证包含两个方面，一是验证 $f(x)=\sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上满足罗尔定理的三个条件，二是验证在 $(0, \pi)$ 内至少存在一点 ξ，使 $(\sin x)'|_{x=\xi}=0$. 下面加以验证.

(1) 由初等函数的连续性知，$f(x)=\sin x$ 在闭区间 $[0, 2\pi]$ 上连续；

(2) $f(x)=\sin x$ 在开区间 $(0, 2\pi)$ 内具有导数 $f'(x)=\cos x$，即 $f(x)=\sin x$ 在开区间内可导；

(3) $\sin 0=0$，$\sin 2\pi=0$，所以 $\sin 0=\sin 2\pi$.

因此 $f(x)=\sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上满足罗尔定理的条件.

由 $f'(x)=(\sin x)'=\cos x=0$，可在 $(0, 2\pi)$ 内解得 $\xi_1=\frac{\pi}{2}$，$\xi_2=\frac{3\pi}{2}$. 因此在 $(0, 2\pi)$ 内存在点 $\xi_1=\frac{\pi}{2}$，$\xi_2=\frac{3\pi}{2}$，使得 $f'(\xi)=0$.

罗尔定理的前两个条件是宽松的，因为很多初等函数都具备连续、可导的性质. 但其第三个条件就比较特别. 如果把这个条件舍去，定理的结论会发生什么变化？我们还是先观察图象. 取图 3-3中的左图，令 A 点位置不变，让弦 $\overline{AB}$ 绕 A 点旋转适当的角度，如图 3-4 所示. 你可以发现，此时原来的那条水平切线虽已变得倾斜，但它仍保持与弦

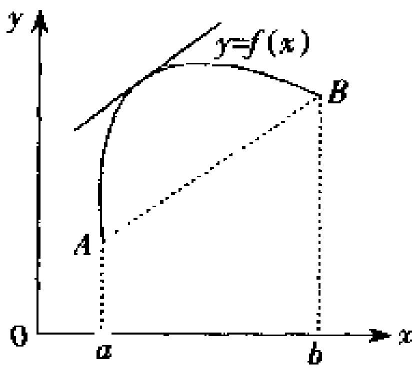

图 3-4

$\overline{AB}$ 平行. 也就是说，在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)$ $=$ 弦 $\overline{AB}$ 的斜率 $= \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

这一观察结果仍具普遍性，此即微分学中的一个重要定理——拉格朗日定理.

二、拉格朗日（Lagrange）中值定理

定理 3.1.2（拉格朗日定理） 若函数 $f(x)$ 满足下列条件：

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；
2. 在开区间 (a, b) 内可导.

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \tag{3-2}$$

(3-2) 式又称为拉格朗日中值公式.

证法分析：该定理的证明自然想到要以罗尔定理为基础，但这里需要一点技巧，即构造一个与 $f(x)$ 有关的辅助函数 $F(x)$，使 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理.

拉格朗日定理结论中的 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，其右式为弦 $\overline{AB}$ 的斜率，又 A 点坐标为 $(a, f(a))$，因此弦 $\overline{AB}$ 所在直线的方程为

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

即
$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

考虑到曲线弧 $\widehat{AB}$ 与弦 $\overline{AB}$ 的两端重合，不妨构造辅助函数 $F(x)$ 为：曲线方程 $y=f(x)$ 与弦 $\overline{AB}$ 方程 $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(x-a)$ 的差，即

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right],$$

那么函数 $F(x)$ 将会满足罗尔定理的第二个条件 $F(a)=F(b)$，因为 $F(a)$ 与 $F(b)$ 都等于0.

证 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right].$$

因为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，所以函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导. 易验证 $F(a)=F(b)=0$，因此函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理的三个条件. 根据罗尔定理知，在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$. 又

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

因此在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

即
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
证毕.

拉格朗日定理的几何意义： 若连续曲线 $y=f(x)$ 的弧 $\overparen{AB}$ 上处处具有不垂直于 x 轴的切线，则在这条弧上至少有一条切线与弦 $\overline{AB}$ 平行.

公式 (3-2) 尽管是在 $a<b$ 的情形下推证的，但显然，当 $a>b$ 时它也成立. 因此 (3-2) 式一般写为

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \ \xi \text{ 在 } a \text{ 与 } b \text{ 之间}, \tag{3-3}$$

若设 $a=x$，$b=x+\Delta x$，则公式 (3-3) 又写为

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\cdot\Delta x, \ \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x+\Delta x \text{ 之间}, \tag{3-4}$$

由于公式 (3-4) 的左端是函数 $y=f(x)$ 的改变量 Δy，因此又称拉格朗日中值公式为**有限增量公式**. 它与函数 $y=f(x)$ 的微分 $\Delta y\approx dy=f'(x)\cdot\Delta x$ 相比，有限增量公式是函数改变量的精确表达式（尽管不知道 ξ 点的确切位置），因此在理论研究上起着重要作用.

作为拉格朗日定理的一个推广，还可以得到下面的定理.

三、柯西（CauChy）中值定理

定理 3.1.3（柯西定理） 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) 对任意 $x\in(a,b)$，$g'(x)\neq0$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证法分析： 仍利用构造辅助函数法. 在柯西定理中，若取 $g(x)=x$，就有 $g(a)=a$，$g(b)=b$，$g'(x)=1$，此时柯西定理即为拉格朗日定理. 这样在构造辅助函数时，可以将证明拉格朗日定理时的辅助函数 $F(x)$ 中的 a，b，x 分别换为 $g(a)$，$g(b)$，$g(x)$，于是，辅助函数是

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

可以验证，$F(x)$ 满足罗尔定理的三个条件，由罗尔定理可证得所要求的结论.

证明从略.

从上述分析我们看到，在柯西定理中，若取 $g(x)=x$，则柯西定理即为拉格朗日定理，因此柯西定理是拉格朗日定理的推广.

而在拉格朗日定理中，若令 $f(a)=f(b)$，则拉格朗日定理即为罗尔定理，因此拉格朗日定理是罗尔定理的推广.

由于以上三个定理的结论都与自变量定义区间内的某个值有关，因此把它们统称为**中值定理**.

注 3.1.1 三个定理的条件都是充分但不必要条件. 即如果定理的条件缺少某一个，定理的结论不一定成立，也不一定不成立.

对于罗尔定理，试分析以下两个图形说明了什么问题？（在区间 $[a, b]$ 上）.

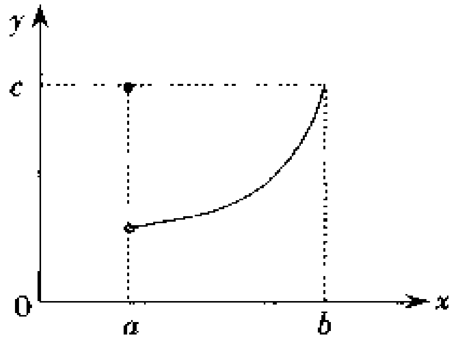

图 3－5

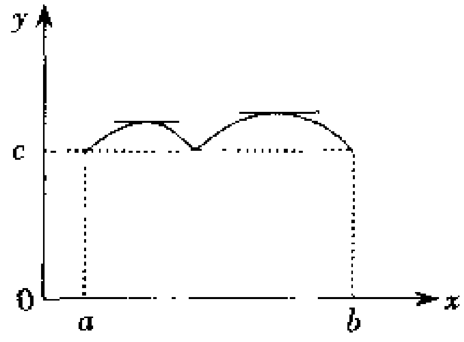

图 3－6

四、中值定理的应用

由于三个中值定理都是建立了函数本身与其导数之间的关系，因此这些定理应用的共同点是利用导数性质去研究函数的性质，下面介绍罗尔定理与拉格朗日定理的简单应用.

（一）罗尔定理的应用

由于罗尔定理的结论是，函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$，也就是方程 $f'(x)=0$ 在 (a, b) 内至少存在一个根. 因此常利用罗尔定理来判断导数方程 $f'(x)=0$ 的根的存在性及所在范围.

例 3.1.2 不求函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出各根所在的区间.

解 由 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=0$ 得方程的三个根分别为 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$.

在区间 $[1, 2]$ 上，易见 $f(x)$ 满足罗尔定理的三个条件，因此至少存在一点 $\xi_1\in(1, 2)$，使得 $f'(\xi_1)=0$，同理在区间 $(2, 3)$ 内至少存在一点 ξ_2，使 $f'(\xi_2)=0$.

又 $f(x)$ 为三次多项式，因此 $f'(x)=0$ 为二次方程，它最多有两个实根. 所以 $f'(x)=0$ 有且仅有两个实根，它们分别位于区间 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 内.

（二）拉格朗日定理的应用

1. 两个推论

推论 1　如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的导数恒为零，即 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内是一个常数.

证　在区间 (a,b) 内任取两点 x_1，x_2，根据拉格朗日定理，我们有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ \xi \text{ 在 } x_1 \text{ 与 } x_2 \text{ 之间}.$$

由已知，$f'(\xi)=0$，因此 $f(x_2)-f(x_1)=0$，即 $f(x_2)=f(x_1)$. 这就是说，$f(x)$ 在 (a,b) 内任意两点的函数值都相等，因此 $f(x)$ 在 (a,b) 内是一个常数.　　证毕.

推论 2　如果对 $\forall x\in(a,b)$，均有 $f'(x)=g'(x)$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 与 $g(x)$ 最多相差一个常数，即

$$f(x)-g(x)=C,\ C \text{ 为常数}.$$

证　设 $F(x)=f(x)-g(x)$，由已知有

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)=0,\ x\in(a,b),$$

于是，根据推论 1 知，$F(x)$ 在 (a,b) 内是一个常数，即 $F(x)=f(x)-g(x)=C$，C 是常数.　　证毕

以上两个推论在积分学中均起重要作用.

2. 证明不等式

例 3.1.3　试证对任何实数 x_1，x_2，都有

$$|\sin x_2-\sin x_1|\leqslant|x_2-x_1|.$$

证　设 $f(x)=\sin x$，在以 x_1 与 x_2 为端点的区间内，$\sin x$ 满足拉格朗日定理的条件，由公式（3-3）得

$$\sin x_2-\sin x_1=\cos\xi\cdot(x_2-x_1),\ \xi \text{ 在 } x_1 \text{ 与 } x_2 \text{ 之间}.$$

所以　$|\sin x_2-\sin x_1|=|\cos\xi||x_2-x_1|\leqslant|x_2-x_1|$.　　证毕.

例 3.1.4　设 $0<a<b$，试证

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}.$$

证 设$f(x)=\arctan x$，则 $\arctan x$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理的条件，于是

$$\begin{aligned}\arctan b-\arctan a&=(\arctan x)'\big|_{x=\xi}(b-a)\\&=\frac{b-a}{1+\xi^2},\quad a<\xi<b,\end{aligned}$$

由于
$$\frac{b-a}{1+b^2}<\frac{b-a}{1+\xi^2}<\frac{b-a}{1+a^2},$$

因此
$$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}.$$
证毕.

利用拉格朗日定理证明不等式，要把握好两点：

(1) 选准满足拉格朗日定理条件的函数 $y=f(x)$；

(2) 选准要讨论的区间.

3. 利用推论 1 证明恒等式

例 3.1.5 试证恒等式

$$\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2},\quad x\in[-1,1]$$

证 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，则在区间 $(-1,1)$ 内，$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$，根据推论 1 知，在 $(-1,1)$ 内，$f(x)=\arcsin x+\arccos x\equiv C$，$C$ 是某个常数.

取 $x=0\in(-1,1)$，有 $\arcsin 0+\arccos 0=0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，因此在 $(-1,1)$ 内，$\arcsin x+\arccos x\equiv\dfrac{\pi}{2}$.

又因 $x=1$ 时，$\arcsin 1+\arccos 1=\dfrac{\pi}{2}+0=\dfrac{\pi}{2}$，

$$x=-1\text{ 时},\ \arcsin(-1)+\arccos(-1)=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2},$$

从而
$$\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2},\quad x\in[-1,1].$$
证毕.

对于柯西定理，下一节将看到它在计算未定式极限中的应用.

第二节　洛必达（L' Hospital）法则

如果当 $x\to x_0$（或其他过程）时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的极限同为零或同为∞，则称极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为"$\dfrac{0}{0}$型"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$型"未定式. 之所以称为未定式，是因为这些类型的极限可能存在，也可能不存在. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim_{x\to 0}x=0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

在第一章我们曾计算过简单的 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式的极限，本节将由柯西定理推出计算"$\dfrac{0}{0}$型"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$型"极限的一种简便方法，即所谓的洛必达法则.

一、$\dfrac{0}{0}$型未定式

定理 3.2.1（洛必达法则Ⅰ）　设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件：

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

2. 在点 x_0 的某个空心邻域内 $f(x)$，$g(x)$ 均可导，且 $g'(x)\neq 0$；

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可为有限数也可为∞）.

则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

事实上，由于定理的结论是要找两个函数之比与这两个函数的导数之比的联系．因此可考虑利用柯西定理．

假设 x 为题设邻域中的任意一点（图 3－7），现在需要验证 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在以 x_0 与 x 为端点的区间上是否满足柯西定理的条件．由定理 3.2.1 的条件知，$f(x)$ 与 $g(x)$ 都在以 x_0 与 x 为端点的区间内可导，在端点 x 处连续，现只差在端点 x_0 处的连续性了．根据条件（1）知，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$，我们可以定义 $f(x_0) = g(x_0) = 0$，这样 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 x_0 点连续．这时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在以 x_0 与 x 为端点的区间上满足柯西定理的条件，利用柯西定理可得

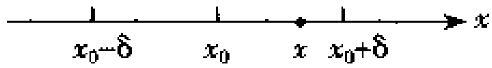

图 3－7

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$ ξ 在以 x_0，x 为端点的区间内，

由于 $x \to x_0$ 时有 $\xi \to x_0$，因此

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

对于$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式的极限，有与上面类似的求极限方法，即

定理 3.2.2（洛必达法则 II） 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件：

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$；
2. 在点 x_0 的某空心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$；
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$（$A$ 可为有限数也可为 ∞）．

则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明从略.

请注意，对于 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 的情形，洛必达法则Ⅰ、Ⅱ仍然成立.

例 3.2.1　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$.

解　这是$\dfrac{0}{0}$型，由洛必达法则Ⅰ，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{[\ln(1+2x)]'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{1}=2.$$

例 3.2.2　求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xe^x-e}{x-1}$.

解　这是$\dfrac{0}{0}$型，由洛必达法则Ⅰ，有

$$\lim_{x\to1}\frac{xe^x-e}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(xe^x-e)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{e^x+xe^x}{1}=2e.$$

在求极限的过程中，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍为$\dfrac{0}{0}$型，且仍满足洛必达法则Ⅰ的条件，则可再用一次洛必达法则Ⅰ，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

有时，也许需要连续几次使用洛必达法则.

例 3.2.3　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解　$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}.$$

例 3.2.4　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$$
$$=\frac{e^0+e^0}{\cos 0}=2.$$

例 3.2.5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解 这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型，由洛必达法则Ⅱ，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

例 3.2.6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty.$$

例 3.2.7 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$.

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}\text{（整理）}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3}{2\cos x\cdot(-\sin x)}\text{（化简）}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3.$$

例 3.2.8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}$.

这是$\dfrac{0}{0}$型. 被求极限的函数形式并不复杂，若直接利用洛必达法则去作，会发现导数之比的函数形式变得复杂，虽能求出结果，但过程很烦琐，大家不妨试作一下.

若在使用洛必达法则前，先对原来的函数形式作一点调整，把已经可以求出极限的因子先分出来，然后再按洛必达法则去求，则过程可以简单许多.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

注 3.2.1 （1）洛必达法则把求$\dfrac{0}{0}$型与$\dfrac{\infty}{\infty}$型的极限转化为求导数之比的极限，而导数之比的极限往往可以利用极限的运算法则等求出极限值来，由此可以看到导数在求极限中的应用.

（2）计算过程的每一步都要判断是否还是$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，这一点是马虎不得的，否则会出现错误结果. 例如，例 3.2.4 中的第三步，如果没有判断 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$是否为$\dfrac{0}{0}$型，而是继续求导数之比，那么会有

$$原式=\cdots=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{-\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-\cos x}=\frac{e^0+e^0}{-\cos 0}=-2.$$

显然是错误的.

（3）在求极限的过程中，要注意审视函数形式. 有时需要对函数形式进行化简（如例 2.3.7），有时需要将可求出极限的因子分出（如例 2.3.8）.

从以上例子的计算，可以看到，洛必达法则是计算未定式极限的有力工具．但需要说明的是，洛必达法则并不是万能的．它只说明当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 ∞）时，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 与之相等，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在（∞ 的情况除外），并不能断定 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在，此时洛必达法则已失效，需要用其他方法去讨论．

例 2.3.9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

当 $x\to\infty$ 时，该极限为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，此时，若分别对分子、分母求导得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x),$$

右式的极限不存在，但

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

三、其他五种类型未定式

以上所讲的 $\dfrac{0}{0}$ 型与 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式，是未定式的两种基本类型．未定式还有其他五种类型：

$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，0^0，∞^0 型.

其中 $0\cdot\infty$ 型，是指函数乘积 $f(x)\cdot g(x)$，当 $x\to x_0$（或其他过程）时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的极限分别为 0 和 ∞.

1^{∞} 型，是指幂指函数 $f(x)^{g(x)}$，当 $x\to x_0$（或其他过程）时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的极限分别是 1 和 ∞.

其他几种未定式类似定义.

以上五种类型的未定式，都可以通过一定的变换转化成 $\dfrac{0}{0}$ 型或

$\frac{\infty}{\infty}$型，再利用洛必达法则来求它们的极限.

例 3.2.10　求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$　($0\cdot\infty$ 型).

对于 $0\cdot\infty$ 型，可以把其中的一个因子放到分母中，转化成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型.

解　$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

例 3.2.11　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$　($\infty-\infty$ 型).

对于 $\infty-\infty$ 型，一般进行通分转化.

解　$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

对于其他三种幂指函数型 $f_{(x)}^{g(x)}$ 的未定式：1^∞，0^0，∞^0 型，一般先利用对数恒等式将 $f_{(x)}^{g(x)}$ 写为 $e^{g(x)\ln f(x)}$ 的形式，这时指数就成为 $0\cdot\infty$ 型.

例 3.2.12　求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$　(0^0 型).

解　$$\lim_{x\to 0^+} x^x=\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x(0\cdot\infty)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}=e^0=1.$$

例 3.2.13　求 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$　(1^∞ 型).

解　$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}=e^{-1}.$$

例 3.2.14 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ （∞^0 型）.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1.$

注 3.2.2 利用洛必达法则也可以求数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$，但必须在求解过程中把 n 改为连续变量 x.

例 3.2.15 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ （例 3.2.14）$= \cdots = 1.$

第三节 导数在研究函数上的应用

由于中值定理建立了函数与其导数之间的联系，因此可以利用导数来研究函数的性质. 这一节将介绍利用导数来判断函数的单调性、极值性，函数图形的凸性与拐点，并介绍函数作图的方法.

一、函数的单调性

本章开始，我们已从图象观察得到启示：利用导数的符号判断函数的单调性. 下面我们将以拉格朗日中值定理作为理论依据，证明这一具有几何直观的结论.

（一）函数单调性的导数判别法

定理 3.3.1（函数单调性判定定理） 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导，

1. 若在 (a, b) 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加（用↗表示）；

2. 若在 (a, b) 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少（用↘表示）.

证 在 (a, b) 内任取两点 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$. 由已知，

$f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续，在 (x_1, x_2) 内可导，根据拉格朗日定理得，

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\qquad x_1<\xi<x_2.$$

由条件 1 知，$f'(\xi)>0$，又 $x_2-x_1>0$，因此

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0.$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$，所以函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

同理可证 2. 证毕.

从以上证明过程易知，不论对于开区间 (a, b)，闭区间 $[a, b]$，半开半闭区间等，定理的结论都成立.

对定理 3.3.1 的条件还需作一点补充. 先看函数 $y=x^3$，在中学已用定义证明了它在 $(-\infty, +\infty)$ 内是递增的，但它的导数 $(x^3)'=3x^2\geqslant 0, x\in(-\infty, +\infty)$，而不仅仅是 $(x^3)'>0$，只不过使 $(x^3)'=0$ 的点是个别的，只有 $x=0$，我们称其为孤立点.

注 3.3.1 若在区间 (a, b) 内，$f'(x)\geqslant 0$（或 $f'(x)\leqslant 0$），但使 $f'(x)=0$ 成立的点仅是孤立点，则仍有 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加（或单调减少）.

一般地，一个函数在其定义区间的单调性是有变化的. 如图3－8，易见此函数在 $(a, x_1)\cup(x_2, b)$ 上单调减少，在 (x_1, x_2) 内单调增加. 使单调性改变的分界点为 x_1 与 x_2，此时，函数 $y=f(x)$ 在 x_1 和 x_2 点都连续，但在 x_1 点有 $f'(x_1)=0$，而在 x_2 点却不可导. 根据这些分析，可以得出讨论函数单调性的步骤.

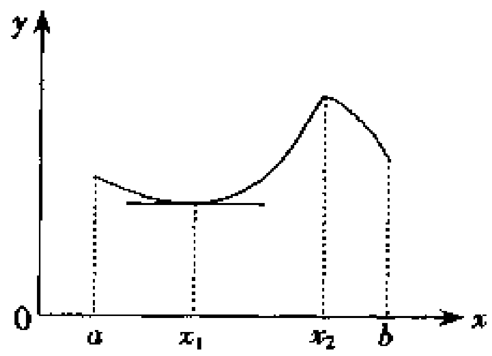

图 3－8

（二）讨论函数 $y=f(x)$ 单调性的步骤

1. 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域；

2. 求导数 $y'=f'(x)$，并求出使 $f'(x)=0$ 的点及使 $f'(x)$ 不存在的点（即不可导点）；

3. 以上述各点作为分界点，将定义域分成几个部分区间，列表讨论 $f'(x)$ 在各区间内的符号并确定 $f(x)$ 的单调性.

例 3.3.1 讨论函数 $f(x)=3x-x^3$ 的单调性.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

(2) $f'(x)=3-3x^2=3(1+x)(1-x)$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-1$，$x_2=1$，$f(x)$ 无不可导点；

(3) 以 $x_1=-1$，$x_2=1$ 为分界点划分定义域，列表（见表 3－1）

表 3－1

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ 内是递减的，在 $(-1, 1)$ 内是递增的.

例 3.3.2 讨论函数 $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$ 的单调性.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

(2) $f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$；

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=0$，$x_2=1$，$f(x)$ 无不可导点；

(3) 以 $x_1=0$，$x_2=1$ 为分界点划分定义域，列表（见表 3－2）.

表 3－2

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内递减，在 $(0, +\infty)$ 内递增.

例 3.3.3 讨论函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

(2) $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$,

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{2}{5}$, $x=0$ 为不可导点；

(3) 以 $x=0$ 及 $x=\frac{2}{5}$ 为分界点划分定义域，列表（见表 3-3）.

表 3-3

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)\cup\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$ 内递增，在 $\left(0, \frac{2}{5}\right)$ 内递减.

(三) 利用单调性证明不等式

利用导数判断函数单调性的方法，还可以用来证明不等式.

由于证明不等式 $f(x)>g(x)$ ($f(x)<g(x)$) 等价于证明不等式 $f(x)-g(x)>0$ ($f(x)-g(x)<0$)，因此我们只需介绍利用单调性证明不等式 $f(x)>0$ ($f(x)<0$) 的方法.

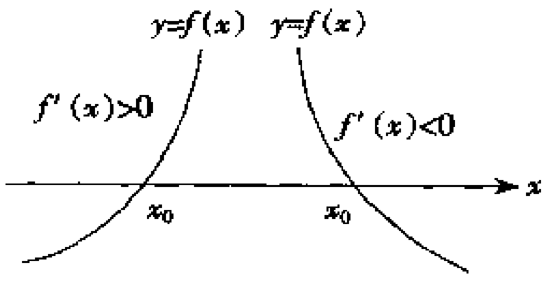

图 3-9

从几何直观入手，如图3-9，设函数 $f(x)$ 满足下列条件：

1. 在 x_0 点的某空心邻域内可导，且 $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$)；
2. 在 x_0 点连续，并有 $f(x_0)=0$.

那么，从图形易得$\begin{cases} 当 x > x_0 时，f(x) > 0 \quad (f(x) < 0); \\ 当 x < x_0 时，f(x) < 0 \quad (f(x) > 0). \end{cases}$

利用定理 3.3.1 易证上述结论，证明从略.

例 3.3.4 当 $x>0$ 时，证明 $\ln(1+x)<x$.

证 设 $f(x)=\ln(1+x)-x$，只需证 $x>0$ 时，$f(x)<0$.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{1+x}<0$，

又 $f(0)=0$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，因此 $f(x)<0$，即

$$\ln(1+x)<x \quad (x>0).$$

证毕

这一不等式也可以利用拉格朗日定理证明，请自行练习，并对这两种方法加以比较。

注 3.3.2 利用单调性证明不等式的方法非常直观，在证明过程中可借助于图示，不必死记硬背方法的结论. 但应注意 $f(x)$ 在 x_0 点的连续性. 从图 3－10 中可体会到这点的必要性.

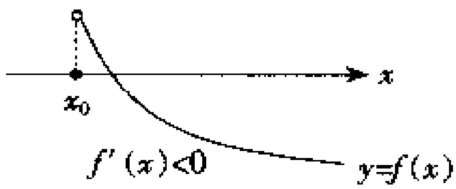

图 3－10

二、函数的极值

（一）极值的概念

若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. 从图 3－11 可见，曲线 $y=f(x)$ 在横坐标为 x_1，x_2，x_3，x_4 的相应点处的位置比较特殊. 就局部而言，横坐标为 x_1、x_3 的曲线上的点位置最高，而横坐标为 x_2、x_4 的曲线上的点位置最低. 但就 $[a, b]$ 的整体区间来说，曲线在 x_2 点处位置最低，在右端点 b 处位置最高. 这些位置特殊的点是以下要讨论的内容.

显然在图 3－11 中，函数值 $f(x_1)$、$f(x_3)$ 是局部范围的最大值，而 $f(x_2)$、$f(x_4)$ 是局部范围的最小值，我们分别称它们是函数 $y=f(x)$ 的极大值与极小值.

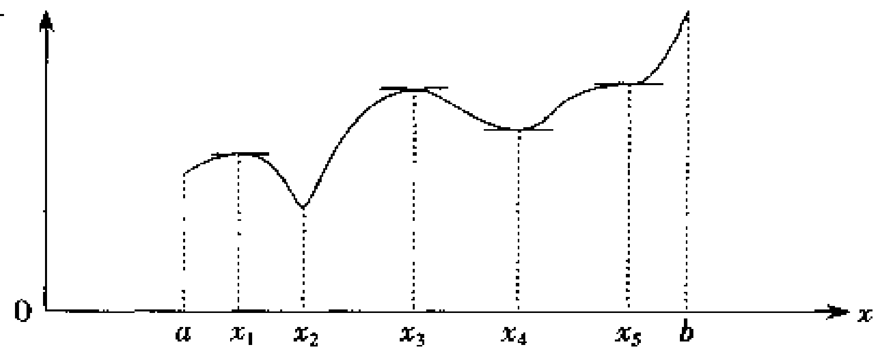

图 3-11

定义 3.3.1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 若对该邻域内的任意一点 $x(x \neq x_0)$, 均有 $f(x) < f(x_0)$ (或 $f(x) > f(x_0)$), 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的**极大值** (或**极小值**); 称 x_0 为 $f(x)$ 的**极大值点** (或**极小值点**); 函数的极大值与极小值统称为函数的**极值**; 极大值点和极小值点统称为**极值点**.

在图 3-11 中, 点 x_1 与 x_3 是 $f(x)$ 的极大值点, x_2 与 x_4 是 $f(x)$ 的极小值点.

注 3.3.3 (1) 根据定义, 函数的极值点是函数定义区间内的点, 不包括端点;

(2) 极值是局部概念, 而最值是整体概念;

(3) 一个函数的极大值不一定大于极小值. 如图 3-11 中, 极大值 $f(x_1)$ 小于极小值 $f(x_4)$.

(二) 极值的判别法

1. 极值的必要条件

从极值的定义可知, 极值点 x_0 应当是函数递增与递减的分界点. 如果函数 $y=f(x)$ 是可导的, 那么在 x_0 点的两侧, $f'(x)$ 的符号相反, 而 x_0 作为导数符号的转折点, 可以猜测 "$f(x)$ 在 x_0 点的导数为零, 即 $f'(x_0)=0$". 从图 3-11 中也可以验证这一猜测, 图中, 曲线在 x_1、x_3、x_4 点相应处的切线是水平的, 亦即 $f'(x_i)=0$, $i=1, 3, 4$.

当然从图 3－11 中还可以看到，$y=f(x)$ 的极值点也可以是不可导点．如曲线在 x_2 点的相应处是一个"尖"点，此时 $f'(x_2)$不存在．由以上的分析可以得到下面的定理．

定理 3.3.2（极值的必要条件） 若函数$f(x)$ 在 x_0 点取得极值，则或者 $f'(x_0)=0$，或者 $f'(x_0)$ 不存在．

证 如果$f(x)$ 在 x_0 处不可导，则定理的结论自然成立．

下设$f(x)$ 在 x_0 处可导，因为 x_0 为函数$f(x)$ 的极值点，不妨设 x_0 为$f(x)$ 的极大值点．由极大值定义，存在 x_0 的某邻域，在此邻域内，总有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leqslant 0,$$

于是

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\leqslant 0,\qquad f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0.$$

又$f(x)$ 在 x_0 处可导，所以 $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$，从而有 $f'(x_0)=0$.

当 x_0 为$f(x)$ 的极小值点时，可类似地证明． 证毕．

注 3.3.4 $f'(x_0)=0$ 表示$f(x)$ 在 x_0 点的变化率为零，这时称 x_0 为$f(x)$ 的**稳定点**（或**驻点**）．

2．极值的充分条件

（1）极值的第一充分条件

从极值的必要条件已经知道，函数的极值点只有两类：稳定点和不可导点．但反之，稳定点和不可导点是否一定是极值点？要回答这一问题，还是先从图象入手．

图 3－11 中的 x_5 点我们一直还未论及，从图中看出，曲线在相应点处有水平切线，即 $f'(x_5)=0$，但显然 x_5 点不是极值点．这就是说，**稳定点不一定是极值点**，这个结论的一个典型例子是函数 $y=x^3$ 的 $x=0$ 点（图 3－12）．

再看图 3－13，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 点有垂直于 x 轴的切线，因此 $x=0$ 是不可导点，但图中显示 $x=0$ 点也不是极值点．这就是说，**不可导点也不一定是极值点**．此结论的一个典型例子是函数

$y=\sqrt[3]{x}$的 $x=0$ 点.

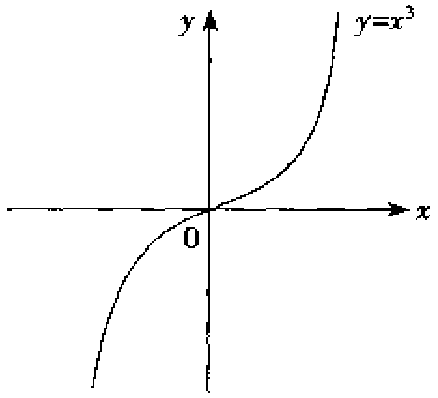

图 3－12

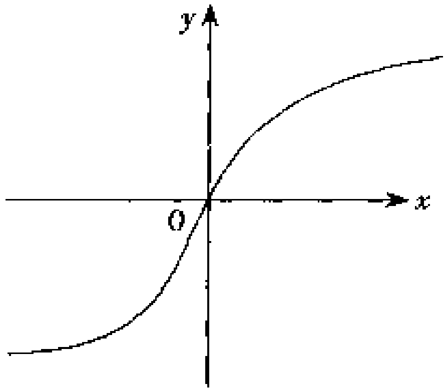

图 3－13

从以上讨论可知，稳定点和不可导点具备了是极值点或非极值点的两重性，我们将它们称为**极值的嫌疑点**. 那么嫌疑点具备什么条件，就可确定是极值点呢？前面已经提到，极值点应当是函数递增与递减的分界点，也就是在它的两侧，函数一阶导数 $f'(x)$ 的符号相反. 因此，如果函数 $f(x)$ 在嫌疑点的两侧，一阶导数 $f'(x)$ 变号，那么 x_0 就是 $f(x)$ 的极值点了.

定理 3.3.3（极值的第一充分条件）　设函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，在 x_0 点的某空心邻域内可导，x 为该空心邻域内的任意一点，则

（1）若 $\left\{\begin{array}{l} x<x_0 \text{ 时 } f'(x)>0 \\ x>x_0 \text{ 时 } f'(x)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值（图 3－14（a））.

（2）若 $\left\{\begin{array}{l} x<x_0 \text{ 时 } f'(x)<0 \\ x>x_0 \text{ 时 } f'(x)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值（图 3－14（b））.

（3）若在 x_0 点的两侧 $f'(x)$ 不变号，则 x_0 不是极值点.

证明从略.

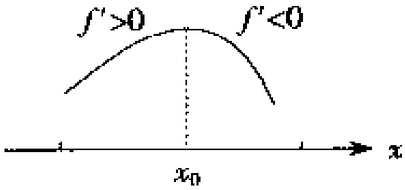

图 3－14（a）

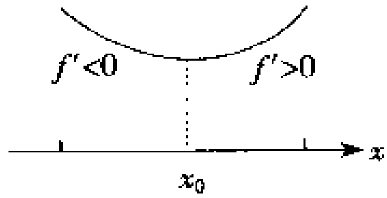

图 3－14（b）

注 3.3.5 该定理只要求函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，因此它包括了稳定点与不可导点这两类嫌疑点.

由于极值点的确定，需要判断该点两侧导数 $f'(x)$ 的符号，而 $f'(x)$ 的正负值又决定了函数的单调性，因此求函数的极值往往与判断函数的单调性一起进行，其求解步骤与求单调性的步骤类似。

例 3.3.5 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的单调区间与极值.

解 （1）函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$，

令 $f'(x)=0$ 得稳定点为 $x_1=-1$，$x_2=3$，无不可导点.

（3）以 $x_1=-1$，$x_2=3$ 为分界点划分定义域，列表（见表 3－4）.

表 3－4

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $y=10$	↘	极小值 $y=-22$	↗

因此，$f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$，$f(x)$ 的递减区间为 $(-1,3)$，$f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=10$，极小值为 $f(3)=-22$.

例 3.3.6 求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间与极值.

解 在例 3.3.3 中已讨论了该函数的单调区间，根据表 3－3

可得表 3 - 5.

表 3 - 5

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $y=0$	↘	极小值 $y=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	↗

因此，$f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$，$f(x)$ 的递减区间为 $\left(0, \frac{2}{5}\right)$，$f(x)$ 的极大值为 $f(0)=0$，极小值为 $f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

（2）极值的第二充分条件

假设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的稳定点，那么，从二阶导数的定义 $f''(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ 出发，再根据定理 3.3.3，可以得到判断 $f(x_0)$ 是极值的第二充分条件.

定理 3.3.4（极值的第二充分条件） 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的稳定点，即 $f'(x_0)=0$，且 $f''(x_0)$ 存在.

（1）若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

（2）若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值；

（3）若 $f''(x_0)=0$，则 $f(x_0)$ 可能是也可能不是极值.

证明从略.

对于（3），看两个简单例子：

$f(x)=x^4$：$f'(x)=4x^3$，$f''(x)=12x^3$，则 $f'(0)=0$，$f''(0)=0$，但我们已知 $x=0$ 是 $f(x)=x^4$ 的极小值点；

$f(x)=x^3$：$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$，则 $f'(0)=0$，$f''(0)=0$，

而我们已知 $x=0$ 不是 $f(x)=x^3$ 的极值点.

注 3.3.6 （1）当函数 $f(x)$ 的二阶导数易求，且题目不要求判断 $f(x)$ 的单调性时，使用该定理比较简便.

（2）第二充分条件仅适用于 $f(x)$ 的稳定点，且有 $f''(x)\neq 0$，对于不可导点及 $f''(x_0)=0$ 时，定理失效.

例 3.3.7 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+1$ 的极值.

解 $f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$，令 $f'(x)=0$ 得稳定点为 $x_1=0$，$x_2=2$；

$f''(x)=2x-2$，则

$f''(0)=-2<0$，因此 $f(0)=1$ 为 $f(x)$ 的极大值；

$f''(2)=2>0$，因此 $f(2)=-\dfrac{1}{3}$ 为 $f(x)$ 的极小值.

（三）最值的求法

在第一章的连续函数中已知，在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$，一定能取到最大值和最小值，以下介绍求最值的方法.

由于极值是函数 $f(x)$ 的局部最值，因此极值的嫌疑点也是最值的嫌疑点. 另外，从图 3－11 还可以看到，$f(x)$ 的最值也可能在端点取到，于是

函数 $f(x)$ 最值的嫌疑点为：稳定点、不可导点及端点.

由此可得求函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最值的下述步骤：

（1）求函数 $f(x)$ 的稳定点和不可导点；

（2）计算 $f(x)$ 在稳定点、不可导点及区间端点处的函数值；

（3）比较上述各函数值的大小，最大者为最大值，最小者为最小值.

例 3.3.8 求 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值.（此例为例 3.3.3 及例 3.3.6）

解 $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\dfrac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$，

令 $f'(x)=0$ 得稳定点为 $x=\frac{2}{5}$，$x=0$ 为不可导点.

$$f(-1)=-2,\ f(0)=0,\ f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}},\ f(1)=0.$$

比较上述各值得，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 $f(0)=f(1)=0$，最小值为 $f(-1)=-2$.

注 3.3.7　以下两种情况，可以使最值的计算更简单：

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为连续单调函数，则函数的最值在端点处取到（如图 3－15 所示的递增情况）；

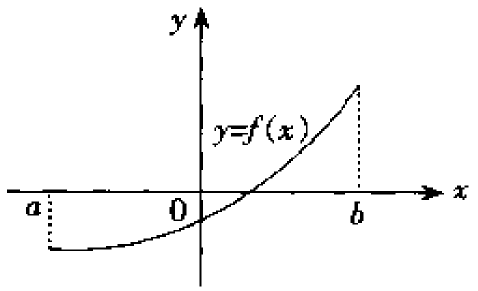

图 3－15

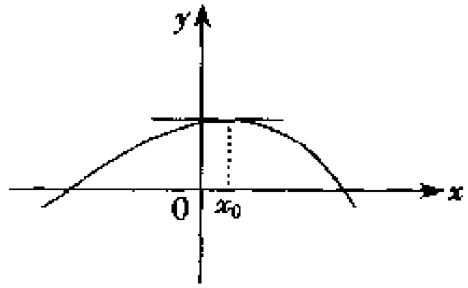

图 3－16

(2) 设连续函数在定义的区间内仅有惟一的极值点 x_0，若 $f(x_0)$ 为极大值，则 $f(x_0)$ 也是最大值，若 $f(x_0)$ 为极小值，则 $f(x_0)$ 也是最小值（如图 3－16，图 3－17 所示）.

在实际应用中经常用到第（2）点（见第四节三）.

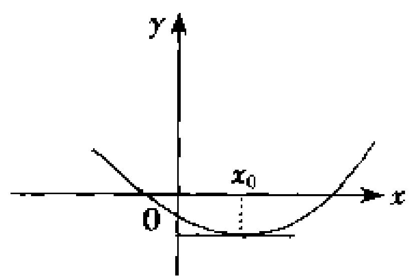

图 3－17

三、曲线的凸性与拐点

（一）曲线的凸性

我们已熟知抛物线 $y=ax^2$，当 $a>0$ 时开口向上，当 $a<0$ 时开口向下（图 3－18 (a)、(b)）

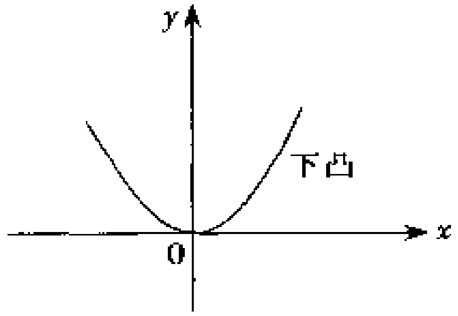

图 3－18（a）

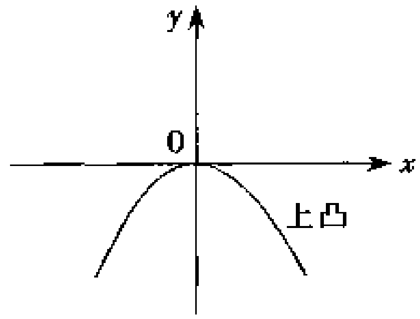

图 3－18（b）

开口向上或向下，说明了曲线弯曲的方向不同. 从直观上看，图（a）的抛物线向下凸，简称下凸；图（b）的抛物线向上凸，简称上凸. 再看立方抛物线 $y=x^3$（图 3－12），当 $x<0$ 时曲线上凸；$x>0$ 时曲线下凸，（0，0）点是曲线 $y=x^3$ 上，上凸与下凸的分界点.

曲线的上凸和下凸是否也和函数的导数有关呢？下面就来探讨这个问题.

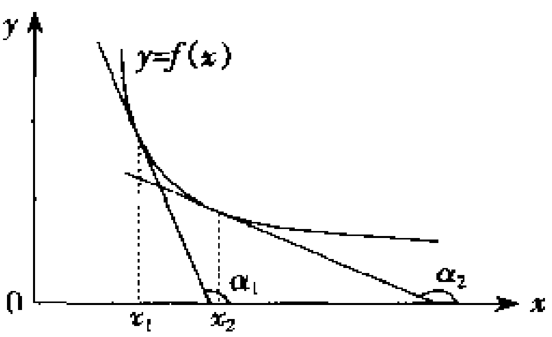

图 3－19

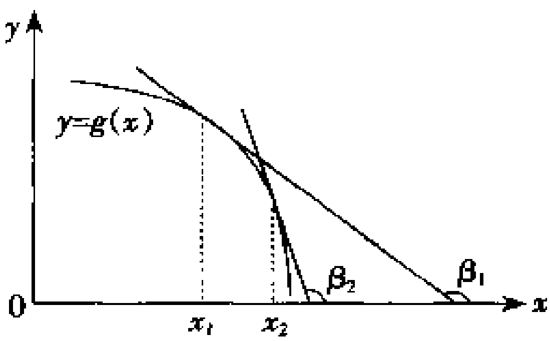

图 3－20

如图 3－19，图 3－20 所示的两条曲线（假定曲线上每点处的切线存在），左边的曲线下凸，曲线上每点处的切线总在曲线的下方；右边的曲线上凸，曲线上每点处的切线总在曲线的上方. 由此我们给出曲线凸性的如下定义：

1. 曲线凸性的定义

定义 3.3.2　设函数$f(x)$在区间(a, b)内可导，如果曲线$y=f(x)$上任意一点处切线都在曲线的上方，则称该曲线是**上凸**的（用∩表示），并称区间(a, b)为该曲线的上凸**区间**；如果曲线$y=f(x)$上任意一点处切线都在曲线的下方，则称该曲线是**下凸**的（用∪表示），并称区间(a, b)为该曲线的**下凸区间**．曲线的上凸和下凸统称为曲线的**凸性**；上凸区间和下凸区间统称为曲线的**凸性区间**．

曲线凸性的定义已预示了凸性与函数的导数之间一定存在密切的联系．

2. 曲线凸性的判别

在图 3－19 与图 3－20 的两个函数的定义域内任取两点$x_1<x_2$，观察图形看到：

对于曲线$y=f(x)$，由于$\alpha_1<\alpha_2$，因此，相应于x_1与x_2点的切线斜率$f'(x_1)=\tan\alpha_1<\tan\alpha_2=f'(x_2)$．此即当曲线的切线斜率递增时，曲线下凸，也就是说，

$$f'(x)\text{ 递增时，曲线下凸.}$$

对于曲线$y=g(x)$，由于$\beta_1>\beta_2$，因此，相应于x_1与x_2点的切线斜率$g'(x_1)=\tan\beta_1>\tan\beta_2=g'(x_2)$，此即当曲线的切线斜率递减时，曲线上凸，也就是说

$$g'(x)\text{ 递减时，曲线上凸.}$$

既然利用一阶导数的单调性能判断曲线的凸性，那么，如果函数$y=f(x)$的二阶导数存在，则曲线的凸性就可以用二阶导数的符号来判定．

定理 3.3.5（凸性的判定）　设函数$y=f(x)$在(a, b)内具有二阶导数．

(1) 若在(a, b)内$f''(x)<0$，则曲线$y=f(x)$在(a, b)内上凸；

(2) 若在(a, b)内$f''(x)>0$，则曲线$y=f(x)$在(a, b)内下凸．

证明从略.

有了曲线凸性的判断方法，我们再回到熟悉的抛物线 $y = ax^2$ $(a\neq 0)$上. 由于 $y' = 2ax$，$y'' = 2a$，因此

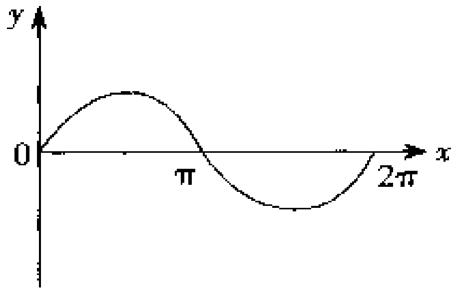

图 3－21

$a>0$ 时，抛物线下凸，即开口向上；

$a<0$ 时，抛物线上凸，即开口向下.

对于正弦曲线 $y = \sin x$，$x\in(0, 2\pi)$（图 3－21），由于 $y' = \cos x$，$y'' = -\sin x$，令 $y'' = -\sin x = 0$ 得 $x = \pi$. 易见

当 $0 < x < \pi$ 时，$y'' = -\sin x < 0$，因此正弦曲线上凸；

当 $\pi < x < 2\pi$ 时，$y'' = -\sin x > 0$，因此正弦曲线下凸. 点 $(\pi, 0)$ 是正弦曲线上，上凸与下凸的分界点，给这种点以一个较形象的名称——拐点.

（二）拐点

定义 3.3.3 在连续曲线上，上凸与下凸的分界点称为曲线的拐点.

注意 该定义的拐点是曲线上的点，因此只能说 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点，而不能说 x_0 点是拐点.

既然拐点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线上的上凸与下凸的分界点，根据定理 3.3.5 可知：

(1) 在 x_0 点的两侧，二阶导数的符号相反；

(2) x_0 作为二阶导数的变号点，$f(x)$ 在 x_0 点的二阶导数应当为零.

由 (2) 和 (1) 可分别得出判断拐点的必要条件与充分条件.

定理 3.3.6 **（拐点的必要条件）** 若 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 上的拐点，则或者 $f''(x_0) = 0$，或者 $f''(x_0)$ 不存在.

定理 3.3.7 **（拐点的充分条件）** 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点连

续，在 x_0 点的某空心邻域内存在二阶导数，若在 x_0 点的两侧，二阶导数的符号相反，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

证明从略.

求曲线的凸性区间与拐点的步骤，与求函数的单调区间与极值的步骤基本相同.

例 3.3.9　求曲线 $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2$ 的凸性区间及拐点.

解　(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，

(2) $f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$，$f''(x)=2x-2=2(x-1)$，令 $f''(x)=0$ 得 $x=1$，$f(x)$ 无二阶不可导点，

(3) 以 $x=1$ 为分界点划分定义域，列表（见表 3-6）.

表 3-6

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	拐点$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\cup$

因此，$f(x)$ 的上凸区间为 $(-\infty, 1)$，下凸区间为 $(1, +\infty)$，点$\left(1, \frac{4}{3}\right)$为拐点.

前面的讨论充分显示了导数在研究函数性质上的应用. 下面再通过一例，综合讨论函数的单调性、凸性、极值与拐点.

例 3.3.10　求函数 $f(x)=\frac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的单调区间、极值、凸性区间与拐点.

解　(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，

(2) $f'(x)=\frac{4x^2-4(x+1)\cdot 2x}{x^4}=-\frac{4(x+2)}{x^3}$，

$$f''(x)=-\frac{4x^3-4(x+2)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-2$，令 $f''(x)=0$ 得 $x=-3$，$f(x)$ 无一阶与二阶不可导点，

(3) 以 $x=-3$，$x=-2$，$x=0$ 为分界点划分定义域，列表(见表 3-7).

表 3-7

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$ $\cap$	拐点 $\left(-3,-2\frac{8}{9}\right)$	$\searrow$ $\cup$	极小值 -3	$\nearrow$ $\cup$	间断	$\searrow$ $\cup$

因此，$f(x)$ 的递增区间为 $(-2,0)$ 递减区间为 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$；上凸区间为 $(-\infty,-3)$，下凸区间为 $(-3,+\infty)$，极小值为 $f(-2)=-3$，拐点为 $\left(-3,-2\frac{8}{9}\right)$.

四、逻辑斯蒂曲线——由曲线讨论函数及导数的变化

前面已讨论了函数的一、二阶导数与函数图形变化性态的关系，从而认识了函数曲线的变化情况. 现在如果把问题反过来，给出一条曲线，我们将如何从曲线的变化情况，说明函数及导数的变化呢？逻辑斯蒂曲线正好能说明这一问题.

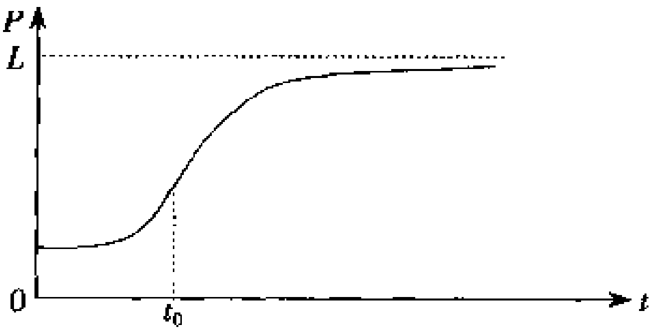

图 3-22

设在某一城市中，人口数量 P 与时间 t 的关系为 $P=f(t)$，人口 P 的增长通常遵从于图 3-22 中所示的逻辑斯蒂增长曲线.

我们的问题是，观察

此图形后，你认为人口的增长是怎样随时间变化的？

解　此曲线的变化情况为：

(1) $0<t<+\infty$ 时，曲线是上升的；

(2) $0<t<t_0$ 时，曲线下凸；

(3) $t_0<t<+\infty$ 时，曲线上凸；

(4) 点 $(t_0, f(t_0))$ 为曲线的拐点.

根据曲线的这些变化情况，再利用函数的单调性、凸性、极值、拐点与一、二阶导数的关系，可得人口增长规律的如下结论：

(1) $0<t<+\infty$ 时，曲线上升 $\Rightarrow$ 函数 $P=f(t)$ 为递增的 $\Rightarrow$ 随时间的迁移，人口数量 P 在逐渐增长；

(2) $0<t<t_0$ 时，曲线下凸 $\Rightarrow f''(t)>0 \Rightarrow [f'(t)]'>0 \Rightarrow$ 导数 $f'(t)$ 为递增函数 $\Rightarrow$ 人口是以逐渐增加的变化率在增长；

(3) $t_0<t<+\infty$ 时，曲线上凸 $\Rightarrow f''(t)<0 \Rightarrow [f'(t)]'<0 \Rightarrow$ 导数 $f'(t)$ 为递减函数 $\Rightarrow$ 人口数量虽在增长，但增长率在减小；

(4) 点 $(t_0, f(t_0))$ 为拐点 $\Rightarrow f''(t_0)=0 \Rightarrow [f'(t)]'\big|_{t=t_0}=0 \Rightarrow$ 导数 $f'(t)$ 在 t_0 点取得最大值 $\Rightarrow t=t_0$ 时，人口增长率达到最大值，所以在时刻 t_0，人口增长得最快.

图 3－22 中的水平虚线为曲线的渐近线 $(t\to+\infty)$，数值 L 代表当时间 t 趋于无穷时，人口数量 P 变化的极限值.

逻辑斯蒂曲线是一条应用极为广泛的曲线，在生物学、经济学研究中，常可见到.

*五、函数作图

中学曾利用“描点连线”法作过一些函数的图形，例如抛物线、双曲线等. 对于一些结构复杂的函数，其图形仅靠中学的“描点连线”，往往很难完成. 因为如果我们对曲线的整体性态没有总体的了解，所描出的点就难有代表性. 现在讨论了函数的一、二阶导数与函数图形变化的关系后，就可以比较准确地描绘函数的图象.

在具体介绍函数作图之前，先讨论曲线的渐近线问题．如果一条连续曲线存在渐近线，就可以知道曲线在无限延伸时的变化趋势．

（一）渐近线

定义 3.3.4 如果曲线上的一点沿着曲线趋于无穷远时，该点与某条直线的距离趋于 0，则称此直线为曲线的**渐近线**．

曲线的渐近线一般分三种：水平渐近线、垂直渐近线、斜渐近线．我们只讨论前两种．

1．水平渐近线

如果曲线 $y=f(x)$ 的定义域是无限区间，且有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b,$$

则称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**水平渐近线**（图 3－23，图 3－24）．

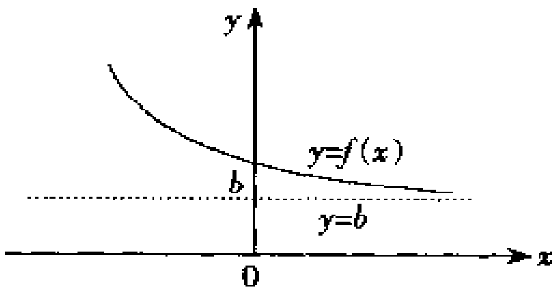

图 3－23

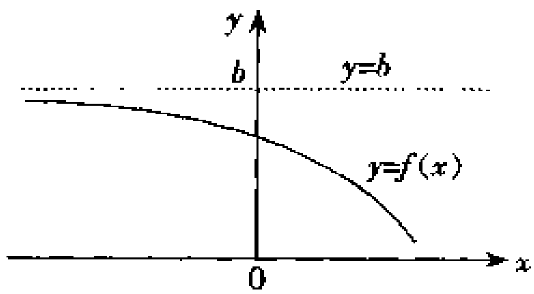

图 3－24

例如，对于曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$，因为 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$，因此，当 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 时，它有一条水平渐近线 $y=0$．

2．垂直渐近线

如果曲线 $y=f(x)$，有

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\infty,$$

则称直线 $x=a$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线（图 3－25）．

当曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线时，曲线是向上还是向下无限延伸，则取决于极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 是正无穷大量还是负无穷

大量，例如，对于曲线 $y=\frac{1}{x+1}$（图 3 - 26），因为 $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$，所以 $x=-1$ 是该曲线的垂直渐近线，且 $x\to-1^-$ 时，曲线向下无限延伸，$x\to-1^+$ 时，曲线向上无限延伸.

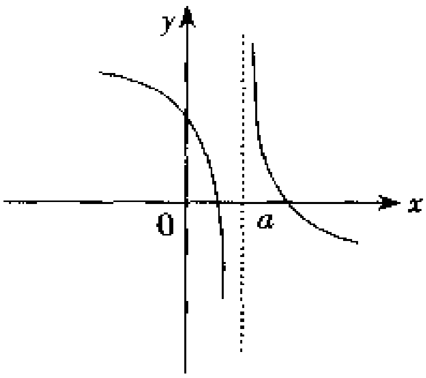

图 3 - 25

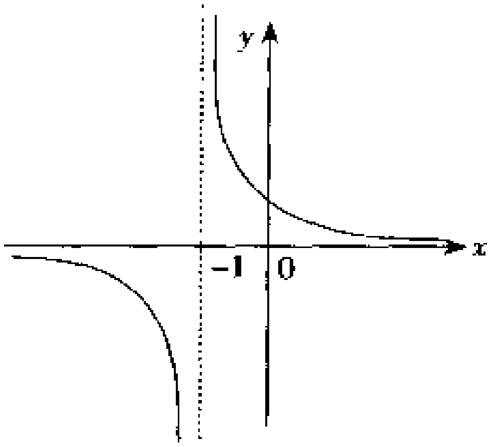

图 3 - 26

又因为 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+1}=0$，因此当 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 时，它有一条水平渐近线.

（二）函数作图

函数作图一般按以下步骤：

（1）确定函数的定义域、间断点、奇偶性、周期性；

（2）求 $f'(x)$，找出使 $f'(x)=0$ 的点和使 $f'(x)$ 不存在的点；
求 $f''(x)$，找出使 $f''(x)=0$ 的点和使 $f''(x)$ 不存在的点；

（3）用上述各点（包括间断点）将函数定义域划分为若干个部分区间，列表讨论在各部分区间上 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 的符号，确定函数的单调性、凸性、极值与拐点；

（4）确定渐近线；

（5）作出渐近线，定出各特殊点（极值点、拐点、与坐标轴交点，必要时再补充一些点），并描点连线.

例 3.3.11 作函数$f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+2$的图形.

在例 3.3.9 中，我们曾讨论了这个函数的凸性区间及拐点，现在按作图步骤，画出这条曲线.

解 (1) 函数$f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

(2) $f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$, $f''(x)=2x-2=2(x-1)$,

令$f'(x)=0$,得$x_1=0$, $x_2=2$，无一阶不可导点；

令$f''(x)=0$,得$x_3=1$，无二阶不可导点.

(3) 以$x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=1$为分界点划分定义域，列表（见表 3-8).

表 3-8

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-		-	0	+		+
$f(x)$	↗ ∩	极大值 2	↘ ∩	拐点 $\left(1, \frac{4}{3}\right)$	↘ ∪	极小值 $\frac{2}{3}$	↗ ∪

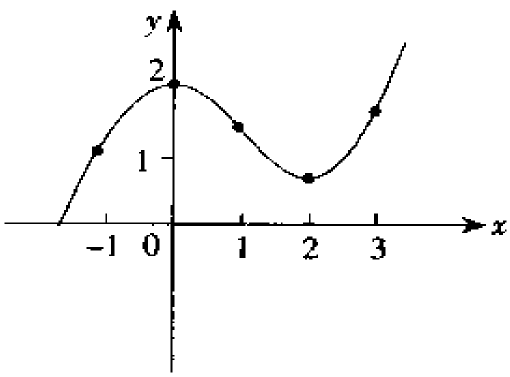

图 3-27

(4) 此曲线无渐近线.

(5) 描出点$(0, 2)$, $\left(1, \frac{4}{3}\right)$, $\left(2, \frac{2}{3}\right)$及$\left(-1, \frac{2}{3}\right)$, $(3, 2)$，并连线即得所求曲线（图 3-27).

例 3.3.12 作函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的图形.

解 (1) 函数$f(x)$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，且$f(x)$为偶函数，因此只需讨论$[0, +\infty)$上图形的情况.

(2) $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f''(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$;

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0(x\geqslant 0)$，无一阶不可导点；

令 $f''(x)=0$，得 $x_2=1(x\geqslant 0)$，无二阶不可导点；

(3) 以 $x_1=0$，$x_2=1$ 为分界点，列表（见表 3-9）.

表 3-9

x	0	(0, 1)	1	(1, +∞)
$f'(x)$	0	−		−
$f''(x)$		−	0	+
$f(x)$	极大值	↘ ∩	拐点	↘ ∪

极大值为 $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0.4$，拐点为 $\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\approx 0.24\right)$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$，所以 $y=0$ 为曲线的水平渐近线.

(5) 描出点 $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$，$\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$，画出渐近线，连线后得 y 轴右侧图形，再按对称性画出 y 轴左侧的图形（图 3-28）.

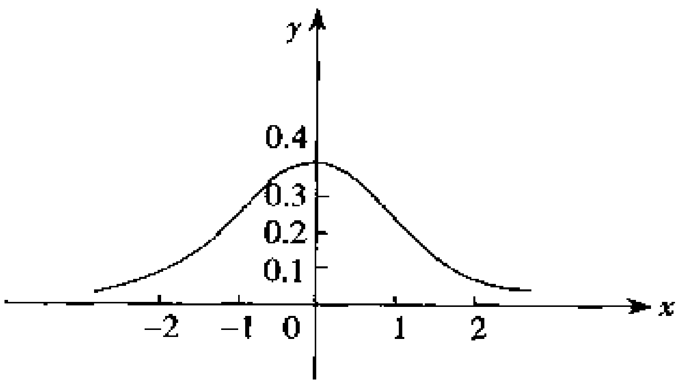

图 3-28

第四节 导数在经济分析中的应用

在经济研究中常用到两个重要概念：边际函数与弹性函数，这两个概念都与导数有密切联系．本节将首先介绍导数在经济决策中的两个重要应用——边际分析与弹性分析，然后利用求最值的方法解决实际中的最优化问题．

一、边际函数与边际分析

在生产与经营中的很多决策，是基于对成本和收入的"边际分析"而作出的．先看一个例子．

假设一个汽车制造厂的月生产量为 1 000 辆，在此基础上，如果厂方希望每月再多生产一辆汽车，那么他们首先要有这样的考虑：多生产一辆是否带来利润的增加？

利润的增加与否，显然是与多生产一辆车所产生的**附加成本**和**附加收入**的大小有关，若附加收入大于附加成本，则有利润的增加．这种附加成本和附加收入就称为**边际成本**和**边际收入**．

设制造汽车的总成本函数为 $C(Q)$，则汽车产量由 1 000 辆增加到 1 001 辆时的边际成本 $=C(1\,001)-C(1\,000)$，那么，由 1 000辆到 1 001 辆之间成本的平均变化率为

$$\frac{C(1\,001)-C(1\,000)}{1\,001-1\,000}=\frac{C(1\,001)-C(1\,000)}{1},$$

如果在 1 000 辆附近成本的变化率不是太快，则可将上式的平均变化率近似看作是成本函数 $C(Q)$ 在 $Q=1\,000$ 时的变化率，即

$$\begin{aligned}\frac{C(1\,001)-C(1\,000)}{1}&=C(1\,001)-C(1\,000)\\&=\text{边际成本}\approx C'(1\,000),\end{aligned}$$

因此，在经济学中，一般把边际成本定义为成本函数的导数．类似

地，把边际收入定义为收入函数的导数.

更一般地，在经济应用中，有

定义 3.4.1　称函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 为**边际函数**.

由微分的知识知，

$$f(x+1)-f(x)\approx f'(x)\cdot 1=f'(x),$$

所以**边际函数 $f'(x)$ 的意义为**：在点 x 处，当自变量 x 改变一个单位时，因变量 y 近似地改变 $f'(x)$ 个单位（实际中常将“近似”略去）.

例如上面的 $C'(1\ 000)$ 表示：在生产了 1 000 辆汽车后，如果再多产一辆，则成本将增加 $C'(1\ 000)$ 个单位.

例 3.4.2　设某厂生产汽车的固定成本为 1 000（万元），生产 x 辆汽车的可变成本为 $0.005x^2+5x$（万元），如果每辆车的售价为 16 万元，问该厂能否决策月产量从 1 000 辆增加到 1 001 辆？

解　根据开始的边际分析知，是否可增加月产量，关键在于能否增加利润，也就是要分析此时的边际收入与边际成本的关系.

根据已知，该厂生产 x 辆车的总成本函数与总收入函数分别为

$$C(x)=1\ 000+0.005x^2+5x,$$
$$R(x)=16x;$$

边际成本与边际收入分别为

$$C'(x)=0.01x+5,\ R'(x)=16.$$

当 $x=1\ 000$ 时，有 $C'(1\ 000)=15<R'(1\ 000)=16$（万元），也就是当月产量由 1 000 辆增加到 1 001 辆时，带来的附加收入高于附加成本，即利润增加了，因此可以采取增加的决策.

例 3.4.1　设生产某产品的总成本与总收入分别为 $C(Q)=300+1.1Q$，$R(Q)=5Q-0.003Q^2$，试求

（1）边际成本、边际收入和边际利润；

（2）当产量为 600 个及 700 个单位时的边际利润，并说明其经济意义.

解　（1）边际成本 $C'(Q)=(300+1.1Q)'=1.1$；

边际收入 $R'(Q)=(5Q-0.003Q^2)'=5-0.006Q$；

边际利润 $L'(Q) = R'(Q) - C'(Q) = 3.9 - 0.006Q$.

(2) 当月产量为 600 个单位时的边际利润为

$$L'(600) = 3.9 - 0.006 \times 600 = 0.3,$$

其经济意义为：当产量为 600 个单位时，再多生产一个单位的产品，利润将增加 0.3 个单位.

当月产量为 700 个单位时的边际利润为

$$L'(700) = 3.9 - 0.006 \times 700 = -0.3,$$

其经济意义为：当产量为 700 个单位时，再多生产一个单位的产品，利润将减少 0.3 个单位.

二、相对变化率——弹性函数与弹性分析

在生产与经营的决策中，除进行上述的边际分析以外，还需要进行“弹性分析”. 先看一个销售中的问题.

某家电公司，拟对库存的电视机实行降价销售. 一般地，商品的降价会促使需求量的增加，这时经营管理者要分析：如果每台电视的价格下降 1%，将刺激需求量增加百分之几？如果需求量增加的幅度大，并由此带来收入的增加，显然降价的决策是可行的.

上面提到的“价格下降 1%，需求量会增长百分之几”，实际上是描述一个经济变量的变化所引起的另一变量的变化程度，这就是所谓的“弹性分析”. 类似的问题，在生产实际中经常遇到. 例如，某一种生产要素的投入增长 1%，其产出会增长百分之几？一亩地化肥用量增加 1%，其亩产量会增加百分之几等.

在经济研究中，为了讨论一个经济变量变动百分之一时，另一个经济变量变动百分之几的问题，引入了以下的弹性概念.

(一) 弹性概念

弹性是一个物理学中的概念，它在 19 世纪首先被法国经济学家古诺应用于经济学中. 在经济分析中，借用弹性概念来描述一个经济变量变动百分之一时，另一个经济变量变动了百分之几. 为进

一步说明这个问题，继续分析前述电视机降价的例子.

引例 设前述家电公司的电视机的需求函数为 $Q=4\ 000-50P$（Q 的单位为台，P 的单位为百元）. 现欲将价格由 $P_0=45$ 降到 $P=40$，请回答以下两个问题：

（1）在 P 的变化区间（40，45）内，价格由 $P_0=45$ 开始每下降 1%，需求量 Q 平均增加百分之几？

（2）价格在 $P_0=45$ 处每下降 1%，需求量 Q 将增加百分之几？

分析如下：

1. 由需求函数 $Q=4\ 000-50P$ 知，当价格由 $P_0=45$ 下降到 $P=40$ 时，需求量由 $Q_0=4\ 000-50\times45=1\ 750$ 上升到 $Q=4\ 000-50\times40=2\ 000$. 这时，价格与需求的绝对改变量分别为 $\Delta P=-5$，$\Delta Q=250$. 那么

（1）当 P 由 $P_0=45$ 下降到 $P=40$，价格相对于原价 $P_0=45$ 下降的百分比为 $\frac{|\Delta P|}{P_0}=\frac{5}{45}\approx11\%$；

（2）当 Q 由 $Q_0=1\ 750$ 上升到 $Q=2\ 000$，需求量相对于原需求量 $Q_0=1\ 750$ 上升的百分比为 $\frac{\Delta Q}{Q_0}=\frac{250}{1\ 750}\approx14\%$.

于是，在 P 的变化区间（40，45）内，价格下降了 11%，而需求量上升了 14%. 那么，价格由 $P_0=45$ 开始每下降 1%，需求量将平均增加百分之"$\frac{14\%}{11\%}\approx1.3$"，即平均增加约 1.3%，其中的比值 $1.3=\frac{\Delta Q/Q_0}{|\Delta P|/P_0}$.

一般地，对于函数 $Q=Q(P)$，我们称 $\frac{\Delta Q}{Q_0}$ 为函数的相对改变量，$\frac{\Delta P}{P_0}$ 为自变量的相对改变量，它们的比值 $\frac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0}$ 称为函数 $Q=Q(P)$ 从 P_0 到 P 两点间的**平均相对变化率**.

2. 如果价格在 $P_0=45$ 时有幅度很小的降价，即 $|\Delta P|$ 非常小，

那么当$|\Delta P|\to 0$时，平均相对变化率的极限$\lim\limits_{|\Delta P|\to 0}\frac{\Delta Q/Q_0}{|\Delta P|/P_0}$即是(2)的答案. 如果设该极限值为$E_P$，则价格在$P_0=45$处每下降1%，需求量$Q$将增加$E_P\%$.

当不考虑ΔP的符号时，我们称$E_P=\lim\limits_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0}$为函数$Q=4\ 000-50P$在点$P_0$处的**相对变化率**.

把对函数$Q=4\ 000-50P$的讨论推广到一般函数$y=f(x)$，便可得如下定义：

定义 3.4.2 设函数$y=f(x)$在x_0点可导，函数的相对改变量$\frac{\Delta y}{y_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)}$与自变量的相对改变量$\frac{\Delta x}{x_0}$之比$\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$，称为函数$f(x)$从$x=x_0$到$x=x_0+\Delta x$**两点间的相对变化率**，或称**两点间的弹性**.

当$\Delta x\to 0$时，若极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$存在，则称此极限为函数$f(x)$在$x=x_0$点的**相对变化率**或**相对导数**，也称为在x_0点的**弹性**，记作$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$. 即

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x_0}{y_0}=f'(x_0)\frac{x_0}{f(x_0)}.$$

定义 3.4.3 若函数$y=f(x)$在区间(a,b)内的每一点x都有弹性$f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}$，则称$f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}$为$f(x)$的**弹性函数**，记作$\frac{Ey}{Ex}$. 即

$$\frac{Ey}{Ex}=f'(x)\frac{x}{f(x)}.$$

(二) 弹性的意义

由定义及引例可知，函数$y=f(x)$在x_0点的弹性$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$表示：

在点 x_0 处，当自变量 x 改变 1% 时，因变量 y 将改变 $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ %.

因此，函数 $f(x)$ 在 x_0 点的弹性反映了函数 $f(x)$ 随 x 变化的变化幅度的大小，也就是 $f(x)$ 相对于 x 变化的反应程度或敏感程度（灵敏度）. 如果 $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ 的绝对值越大，说明反应程度或灵敏度就越大.

例 3.4.3 求幂函数 $f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in R)$ 的弹性函数.

解 $\frac{Ey}{Ex}=f'(x)\frac{x}{f(x)}=\alpha x^{\alpha-1}\frac{x}{x^{\alpha}}=\alpha.$

这个结果说明，幂函数的弹性函数为常数，即在任意点处的弹性不变，所以称为不变弹性函数.

例 3.4.4 求函数 $f(x)=10x-0.01x^2$ 在 $x=600$ 处的弹性，并说明其意义.

解 $\frac{Ey}{Ex}=f'(x)\frac{x}{f(x)}=(10-0.02x)\frac{x}{10x-0.01x^2}=\frac{10-0.02x}{10-0.01x}.$

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=600}=\frac{10-0.02\times600}{10-0.01\times600}=-\frac{2}{4}=-0.5.$$

$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=600}=-0.5$ 说明，在 $x=600$ 处，当自变量 x 增加 1% 时，函数 y 将减少 0.5%.

注 3.4.1 （1）由定义及例子可知，函数 $y=f(x)$ 在一点处的弹性值可以为正也可以为负.

若弹性值为正，说明因变量与自变量同方向变动，若弹性值为负，说明因变量与自变量是反方向变动.

（2）函数的弹性反映了一个变量对另一个变量变化的反应灵敏度，它与量纲无关，即与各有关变量的计量单位无关. 因此，在经济分析中弹性有着广泛的应用.

（三）需求价格弹性

商品的供求规律一般是，涨价使需求量减少但供给量增加，降

价使需求量增加而供给量减少. 但是，价格变动究竟会引起供与求多大程度的变动? 现在就可以用弹性理论进行分析.

定义 3.4.4 设某商品的需求函数 $Q=Q(P)$ 可导，则称

$$\frac{EQ}{EP}=Q'(P)\frac{P}{Q(P)}$$

为该商品的**需求价格弹性**，简称**需求弹性**，记作 E_p.

由于需求函数一般为递减函数，即 $Q'(P)<0$，因此需求弹性 E_p 一般为负值.

例 3.4.5 设某商品的需求函数为 $Q=400-100P$，分别求 $P=1, 2, 3$ 时的需求价格弹性，并说明意义.

解 $E_p=Q'(P)\dfrac{P}{Q(P)}=-100\dfrac{P}{400-100P}=\dfrac{P}{P-4}$,

当 $P=1$ 时，$E_p=\dfrac{1}{1-4}=-\dfrac{1}{3}\approx-0.33$. 说明在 $P\approx1$ 时，若价格下降（上涨）1%时，需求量将增加（下降）0.33%.

当 $P=2$ 时，$E_p=\dfrac{2}{2-4}=-1$. 它说明，在 $P=2$ 时，若价格下降（上涨）1%时，需求量将增加（下降）1%.

当 $P=3$ 时，$E_p=\dfrac{3}{3-4}=-3$. 它说明，在 $P=3$ 时，若价格下降（上涨）1%时，需求量将增加（下降）3%.

（四）需求弹性与总收入的关系

通过对需求弹性的分析，可以掌握价格变动所引起的需求量的变化幅度. 上例中，在价格分别为 $P=1, 2, 3$ 时，需求弹性的值有以下三种情况：

$$-1<E_p<0,\ E_p=-1,\ E_p<-1.$$

E_p 的这些取值情况将会对收入产生什么影响，下面加以讨论.

设总收入函数为 $R(P)=P\cdot Q(P)$，当价格上涨时，总收入是增还是减，这只需讨论收入函数的单调性即可.

$$R'(P)=[P\cdot Q(P)]'=Q(P)+P\cdot Q'(P)$$

$$= Q(P)\left[1 + Q'(P)\frac{P}{Q(P)}\right] = Q(P)(1 + E_p).$$

(1) 当 $E_P < -1$ 时，$R'(P) < 0$，此时 $R(P)$ 是减函数，即价格上涨时总收入减少. 反之，价格下降时总收入增加. 这是因为虽然价格降低，但由于销售量增长幅度大，从而不仅能弥补降价损失，而且还能盈余.

(2) 当 $-1 < E_P < 0$ 时，$R'(P) > 0$，此时 $R(P)$ 是增函数，即价格上涨时总收入增加. 反之，价格下降时总收入减少. 这是因为降价后所引起的销售量增长幅度不大，它不足以抵消降价的损失，因此总收入减少.

(3) 当 $E_P = -1$ 时，$R'(P) = 0$，此时价格无论怎样变动，总收入都不变. 这是因为价格下降所减少的收入，恰好与销售量增长所增加的收入互相抵消.

在经济学中，将 $E_P < -1$ 称为**高弹性**，此时采取降价政策；$-1 < E_P < 0$ 称为**低弹性**，此时采取提价政策；$E_P = -1$ 称为**单位弹性**.

例 3.4.6　设某商品的需求函数为 $Q = e^{-\frac{P}{5}}$，求 $P = 6$ 时的需求弹性. 此时可以采取何种价格政策，为什么？

解　$E_P = Q'(P)\dfrac{P}{Q(P)} = -\dfrac{1}{5}e^{-\frac{P}{5}}\dfrac{P}{e^{-\frac{P}{5}}} = -\dfrac{P}{5}$.

所以 $P = 6$ 时，$E_P = -\dfrac{6}{5} = -1.2$.

此时可采取降价政策，因为 $P = 6$ 时，$E_P = -1.2$，说明当价格 $P = 6$ 个单位时，价格下降 1%，需求量将增加 1.2%，需求变动的幅度大于价格变动的幅度，从而使总收入增加.

例 3.4.7　引例中的家电公司，在 $P_0 = 45$ 时能否采取降价措施？

解　这时首先需要求 $Q = 4\,000 - 50P$ 在 $P_0 = 45$ 时的需求弹性.

$$E_P = Q'(P)\frac{P}{Q(P)} = -50\frac{P}{4\,000 - 50P},$$

所以 $$E_p\big|_{P=45}=-\frac{50\times45}{4\ 000-50\times45}\approx-1.3.$$

由于 $E_p\big|_{P=45}\approx-1.3<-1$，因此可以采取降价措施.

三、经济优化分析——经济学中的最值问题

在生产、经营、管理等大量经济活动中，总会遇到求最小成本、最大利润等最值问题. 经济学中的求最值问题构成了经济优化分析领域，其中，利用导数解决优化问题是一种常用的方法. 下面，通过几个例子来说明.

例 3.4.8 （最小平均成本与最大利润问题）

已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C=25\ 000+200x+\frac{1}{40}x^2$（元），问

（1）若使平均成本最小，应生产多少件产品？

（2）若产品以每件 500 元售出，要使利润最大，应生产多少件产品？

解 （1）由 $C(x)=25\ 000+200x+\frac{1}{40}x^2$ 得平均成本

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{25\ 000}{x}+200+\frac{1}{40}x.$$

由 $\overline{C}'(x)=-\frac{25\ 000}{x^2}+\frac{1}{40}=0$ 得 $x=\pm1\ 000$，由题意知应将 $x=-1\ 000$ 舍去.

又因 $\overline{C}''(x)=\frac{50\ 000}{x^3}$，而 $\overline{C}''(1\ 000)>0$，所以 $x=1\ 000$ 时，$\overline{C}(x)$ 取极小值，由于是惟一的极小值，因此也是最小值. 故生产 1 000 件产品可使平均成本最小.

（2）收入函数 $R(x)=500x$，

因此利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=500x-\left(25\ 000+200x+\frac{x^2}{40}\right)$

$$= -25\,000 + 300x - \frac{x^2}{40}.$$

由 $L'(x) = 300 - \frac{x}{20} = 0$ 得 $x = 6\,000$，又 $L''(x) = -\frac{1}{20} < 0$，所以 $x = 6\,000$ 时，$L(x)$取极大值，由于是惟一的极大值，因此也是最大值. 故要使利润最大，应生产 6 000 件产品.

例 3.4.9 （销售利润最大问题）

设某商品的需求函数是 $Q = 12\,000 - 80P$ （P 的单位为元）；商品的总成本函数 $C = 25\,000 + 50Q$；每单位商品需要纳税 2 元，试求使销售利润最大的商品单价和最大利润额.

解 该商品的销售收入函数

$$R(P) = (12\,000 - 80P)(P-2),$$

将 $Q = 12\,000 - 80P$ 代入 $C = 25\,000 + 50Q$，得总成本函数

$$\begin{aligned} C(P) &= 25\,000 + 50(12\,000 - 80P) \\ &= 625\,000 - 4\,000P, \end{aligned}$$

因此，销售利润函数

$$\begin{aligned} L(P) &= R(P) - C(P) \\ &= (12\,000 - 80P)(P-2) - (625\,000 - 4\,000P) \\ &= -80P^2 + 16\,160P - 649\,000. \end{aligned}$$

由 $L'(R) = -160P + 16\,160 = 0$ 得 $P = 101$，又

又 $L''(P) = -160 < 0$，所以 $P = 101$ 时，$L(x)$ 取极大值，由于是惟一的极大值，所以是最大值. 故当单价为 101 元时，可使销售利润最大. 最大利润额为

$$L(101) = -80 \times 101^2 + 16\,160 \times 101 - 649\,000 = 167\,080 \text{（元）}.$$

例 3.4.10 （最佳库存或最优批量问题）

在生产与销售管理中，有一个“最佳库存”的决策问题. 一般地，生产厂家或销售公司要维持正常的生产和销售，必须储备一定的产品或商品. 但库存量一定要适度，库存太多，会造成资金积压或货物过期；库存太少，又出现供不应求，失去时机等. 因此管理者必须确定物资的库存量，即何时补充库存，应该补充多少等.

看一个具体例子.

某厂生产的产品年销售量为100万件. 假设这些产品分成若干批生产，每批需生产准备费1 000元；并假设产品为均匀销售，即产品的平均库存量为批量的一半，且每件产品库存一年需库存费0.05元. 现欲使每年生产所需的生产准备费与库存费之和为最小，则每批的生产量是多少最为适宜（称作最佳批量）.

解 设每年的生产准备费与库存费之和为 C，批量为 x，则

$$C(x)=1\ 000\frac{1\ 000\ 000}{x}+0.05\times\frac{x}{2}=\frac{10^9}{x}+\frac{x}{40}.$$

由 $C'(x)=-\frac{10^9}{x^2}+\frac{1}{40}=0$ 得 $x=2\times10^5$,

又 $C''(x)=\frac{2\times10^9}{x^3}>0$，所以 $x=2\times10^5$ 时，$C(x)$ 取极小值，由于是惟一的极小值，所以是最小值. 故每批生产20万件最为适宜（即最佳批量为20万件）.

例 3.4.11 **（用料最省问题）**

一个能装 500cm^3 饮料的圆柱形铝罐，底半径为多少时，所用材料最少.

解 若要使用料最省，只要铝罐的表面积最小，铝罐的表面积是上下两个底面积与侧面积之和.

设罐高为 h，底半径为 r，则表面积为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh,$$

又由罐的体积 $V=\pi r^2h=500$ 得 $h=\frac{500}{\pi r^2}$，代入上式得

$$S=2\pi r^2+\frac{1\ 000}{r},$$

原题转化为求 r 为何值时 S 最小.

由 $S'=4\pi r-\frac{1\ 000}{r^2}=0$ 得 $r=\left(\frac{250}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\approx4.30$ (cm)

又 $S''=4\pi+\frac{2\ 000}{r^3}>0$，因此 $r\approx4.30$ 时，S 取极小值，亦即最小

值. 故底半径为4.30cm时，所用材料最省.

习 题 三

1. 验证下列函数在给定区间上满足罗尔定理的全部条件，并求出定理中的 ξ 值.

(1) $f(x)=2x^2-x-3$，$[-1, \frac{3}{2}]$，

(2) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$[-2, 2]$.

2. 试对下列函数在给定区间上写出拉格朗日公式，并求出定理中的 ξ 值.

(1) $f(x)=x^3$，$[0, 1]$，

(2) $f(x)=\ln x$，$[1, 2]$.

3. 不求函数 $f(x)=x(x-2)(x-4)$ 的导数，说明 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出各根所在的区间.

4. 利用拉格朗日定理证明下列不等式：

(1) $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$，

(2) 当 $x>1$ 时，$e^x>ex$，

(3) $b>a>0$ 时，$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$，

(4) 当 $x\neq0$ 时，$e^x>1+x$.

5. 利用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$，　　(2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$，

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$，　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$，

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\sin x}{x}$，　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$，

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\sin4x}$，　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$，

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}$, (10) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan x}{\ln\sin x}$,

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x}$, (12) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\ln x$,

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$, (14) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x$,

(15) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$, (16) $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x$,

(17) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$, (18) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

6. 讨论下列函数的单调性：

(1) $f(x)=x-e^x$, (2) $f(x)=x^3-6x^2+9x+16$,

(3) $f(x)=x^2-\ln x^2$, (4) $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$.

7. 利用函数的单调性证明不等式：

(1) 当 $x>1$ 时，$e^x>ex$,

(2) 当 $x>0$ 时，$x>\arctan x$,

(3) 当 $x>1$ 时，$3-\dfrac{1}{x}<2\sqrt{x}$.

8. 求下列函数的单调区间与极值：

(1) $f(x)=x^3-3x^2+7$, (2) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$,

(3) $f(x)=x-\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, (4) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

9. 利用二阶导数，求下列函数的极值：

(1) $f(x)=x^3-3x$, (2) $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$,

(3) $f(x)=(x-3)^2(x-2)$, (4) $f(x)=x^2e^{-x}$.

10. 求下列函数在指定区间上的最值：

(1) $f(x)=x^4-2x^2+5$, $[-1, 2]$,

(2) $f(x)=x^3-3x^2+5$, $[-2, 3]$,

(3) $f(x)=x+\sqrt{x}$, $[0, 4]$,

(4) $f(x)=e^{x^2-x}$, $[0, 2]$.

11. 求下列曲线的凸性区间及拐点：

（1）$f(x)=x^4-2x^3+1$，　　（2）$f(x)=x^3-3x^2-9x+9$.

12. 求下列函数的单调区间、极值、凸性区间及拐点：

（1）$f(x)=x^2-x^3$，　　（2）$f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

13. 生产 x 单位某产品的总成本为 $C(x)=5x+200$（元），总收益为 $R(x)=10x-0.01x^2$（元），求边际成本、边际收益、边际利润.

14. 某厂每月生产某产品的固定成本为 1 000 元，生产 x 单位产品的可变成本为 $0.01x^2+10x$（元）. 如果每单位产品的售价为 30 元，求产量为 800 个单位时的边际利润，并说明其经济意义.

15. 设某产品的需求函数为 $Q=100-5P$，求

（1）边际收入函数和 $Q=20$ 及 $Q=60$ 时的边际收入，说明其经济意义.

（2）价格 $P=10$ 时的边际需求，说明其经济意义.

16. 某商品的需求函数为 $Q=e^{-\frac{P}{4}}$，求需求弹性函数及 $P=3$，4，5 时的需求弹性.

17. 一种商品的需求函数为 $Q=400-100P$，求 $P=3$ 时的需求弹性，并说明其经济意义.

18. 经统计预测，电扇销售量的需求函数为 $Q=75-P^2$，求 $P=4$（单位：百元）时的需求弹性，此时可以采取何种价格政策？为什么？

19. 生产某汽车配件 x 件时的总成本为 $C(x)=0.5x^2+36x+9\,800$（元），当产量为多少时，平均成本最低？

20. 某厂生产的产品，固定成本为 200 元，每多生产一个单位的产品，成本增加 10 元. 设该产品的需求函数为 $Q=50-2P$，问 Q 为多少时利润最大？

21. 某企业生产的产品的总收入函数为 $R(x)=26x-2x^2-4x^3$，总成本函数为 $C(x)=8x+x^2$（x 的单位为万件，R 与 C 的单位为万元）. 求边际收入函数，边际成本函数以及企业获得最大利润时

的产量和最大利润.

22. 将长为 a 的一段铁丝截成两段，用一段围成正方形，另一段围成圆. 为使正方形与圆的面积之和最小，问两段的长各为多少?

第四章　不定积分

前三章已经讨论了一元函数的微分学，这一章和下一章将讨论一元函数积分学．本章讲述不定积分的概念、性质、基本积分法以及微分方程简介．

第一节　不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分

我们已经解决了求已知函数的导数或微分的问题，但是在实际问题中常常遇到与此相反的问题，例如

1．已知曲线的切线斜率 $k=F'(x)$，求曲线方程 $y=F(x)$；

2．已知某产品的边际成本 $C'(x)$，求总成本 $C(x)$等．

显然这些都是已知某函数的导数或微分，反过来求这个函数的问题．为此我们先引入原函数概念．

定义 4.1.1　设函数 $F(x)$和 $f(x)$在某区间 I 上有定义，如果在区间 I 上任一点 x 都有

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad dF(x)=f(x)dx,$$

则称 $F(x)$是 $f(x)$在该区间 I 上的一个**原函数**．

例如，在区间（$-\infty$，$+\infty$）内，因为（$\sin x$）$'=\cos x$，所以 $\cos x$ 是 $\sin x$ 在（$-\infty$，$+\infty$）内的一个原函数．又因为（$\sin x+1$）$'=\cos x$，（$\sin x+\sqrt{2}$）$'=\cos x$，所以 $\sin x+1$，$\sin x+\sqrt{2}$也都是 $\sin x$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内的原函数. 更进一步，对于任意常数 C，$(\sin x+C)'=\cos x$，所以 $\sin x+C$ 也是 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的原函数，这就是说，函数 $\sin x$ 的原函数有无穷多个. 我们自然会问，除了 $\sin x+C$ 外，$\cos x$ 还有其它原函数吗?

再如，$\dfrac{\sin x}{x}$虽然在 $(0, +\infty)$ 内有定义，但与上一个例子不同，我们并不能容易地找到它的一个原函数. 那么，它们有没有原函数呢?

上例给我们提出了如下两个问题:

问题一：是不是任何一个函数都有原函数? 若不是，那么什么样的函数有原函数?

问题二：若一个函数$f(x)$有一个原函数 $F(x)$，那么能不能用 $F(x)$表示出$f(x)$的全部原函数?

第一个问题我们将在第五章中给出一个圆满的解答："某区间 I 上的连续函数必有原函数".

第二个问题，有如下的定理.

定理 4.1.1 设函数 $F(x)$是$f(x)$在区间 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$ 是$f(x)$在区间 I 上的全部原函数，其中 C 为一任意常数.

证 首先，由于 $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$，所以 $F(x)+C$ 是$f(x)$在区间 I 上的原函数.

其次，设 $G(x)$是$f(x)$在区间 I 上的另一个原函数，则 $G'(x)=f(x)=F'(x)$，故$(G(x)-F(x))'=0$，所以由拉格朗日中值定理推论 1，存在常数 C 使 $G(x)-F(x)=C$，即 $G(x)=F(x)+C$.

因此，$F(x)+C$ 是$f(x)$在区间 I 上的全部原函数. 证毕

定义 4.1.2 函数$f(x)$在区间 I 上的全体原函数叫做$f(x)$在区间 I 上的**不定积分**，记作$\int f(x)\mathrm{d}x$，其中$\int$称为**积分号**，$f(x)$称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**.

如果 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则根据定义 4.1.2 及定理 4.1.1，有

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

其中 C 是任意常数，称为**积分常数**.

因此，要求函数 $f(x)$ 的不定积分，只需要求出它的一个原函数，再加上任意常数 C 即可

例 4.1.1 求 $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

解 因为 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$，所以 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数. 因此

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C.$$

二、不定积分的几何意义

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则称曲线 $y = F(x)$ 为 $f(x)$ 的一条**积分曲线**. 于是 $f(x)$ 的不定积分表示 $f(x)$ 的某一条积分曲线沿着纵轴方向任意地向上、向下平行移动所得到的所有积分曲线组成的**曲线簇**. 显然，若在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线，则这些切线是互相平行的（图 4－1）.

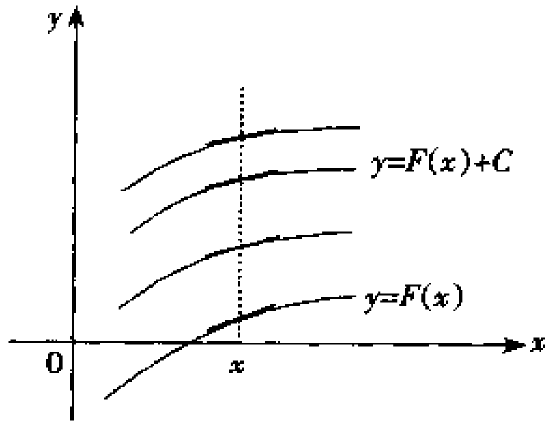

图 4－1

在第二章中已经学习了如何求一条曲线上某一点处的切线方程，有了不定积分后，还可解决如下问题.

例 4.1.2 求过点（1，2）且切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

解 设所求曲线方程为 $y = F(x)$，由题意知，$y' = F'(x) = 2x$，所以 $y = F(x)$ 为 $2x$ 的一个原函数，故而 $y = F(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C$，

又 $y=F(x)$ 通过点（1，2），即 $2=F(1)$，代入上式 $2=1^2+C$，得 $C=1$. 故所求曲线方程为 $y=x^2+1$.

三、不定积分的基本性质

由不定积分的定义可以直接推得如下基本性质：

性质 1 求不定积分与求导互为逆运算.

$$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]'=f(x)\qquad \left(\text{或 } \mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

$$\int \mathrm{d}F(x)=\int F'(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

上式说明：微分运算与求不定积分的运算（简称积分运算）是互逆的，即对 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 先进行一次积分运算，再进行一次微分运算仍为 $f(x)\,\mathrm{d}x$；对 $F(x)$ 先进行一次微分运算，再进行一次积分运算得 $F(x)+C$[与 $F(x)$ 只差一个常数 C].

性质 2 非零常数因子可提到积分号之前.

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x=a\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

其中 a 为非零常数.

性质 3 函数之和（或差）的不定积分等于函数不定积分之和（或差）

$$\int[f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

第二节 基本积分公式与直接积分法

一、基本积分公式

由于积分运算是微分运算的逆运算，因此把基本求导公式反过

来，就可以得到如下的基本积分公式：

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$（$k$ 为一常数）；

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$；

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$；

(4) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C\ (a>0,\ a\neq 1)$；

(5) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$；

(6) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

(7) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

(8) $\int \sec^{2}x\mathrm{d}x = \tan x + C$；

(9) $\int \csc^{2}x\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C(= -\arccos x + C)$；

(11) $\int \frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x = \arctan x + C(= -\operatorname{arccot} x + C)$.

上面的基本积分公式是进行积分运算的基础，必须牢记并熟练运用.

二、直接积分法

所谓直接积分法就是直接利用一些初等运算、积分基本公式与积分的性质来计算积分的方法.

例 4.2.1　求 $\int (3+\sqrt[3]{x})x\mathrm{d}x$.

解　$\int (3+\sqrt[3]{x})x\mathrm{d}x = \int (3x + x^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}x = 3\int x\mathrm{d}x + \int x^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x$

$$= \left(3 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} + C_1\right) + \left(\frac{1}{\frac{4}{3}+1} x^{\frac{4}{3}+1} + C_2\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2} x^2 + C_1\right) + \left(\frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C_2\right)$$

$$= \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C.$$

说明 上述解题过程中，在计算 $3\int x\mathrm{d}x$ 和 $\int x^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x$ 时分别得到一个任意常数 C_1 和 C_2，但 $C_1 + C_2$ 仍是一个任意常数，所以为了方便起见，以后只加一个任意常数即可.

例 4.2.2 求 $\int (3+x)(2-\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

解 $\int (3+x)(2-\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int (6 - 3x^{\frac{1}{2}} + 2x - x^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}x$

$$= \int 6\mathrm{d}x - 3\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + 2\int x\mathrm{d}x - \int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= 6x - 2x^{\frac{3}{2}} + x^2 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$$

例 4.2.3 求 $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \int 1\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = x - \arctan x + C.$$

例 4.2.4 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}x - \int \frac{\cos x}{2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C.$$

例 4.2.5 求 $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$

$$=\int\cos x\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C.$$

注 4.2.1 在积分运算中经常用到如下的三角公式，希望大家熟记.

(1) $\sin 2x=2\sin x\cos x$;　　(2) $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$;

(3) $\cos^2x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$;　　(4) $\sin^2x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$;

(5) $\sec^2x=1+\tan^2x$;　　(6) $\csc^2x=1+\cot^2x$.

第三节　换元积分法

直接积分法只能解决一些较简单的函数的积分问题，对于较复杂函数的积分问题需要用其它方法来解决，如下面的换元法等.

一、第一换元法（凑微分法）

先看一个简单的例子.

求 $\int e^{2x}\mathrm{d}x$.

在基本积分公式（5）里，有 $\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$，那么 $\int e^{2x}\mathrm{d}x$ 是否等于 $e^{2x}+C$？如果是，则应有 $(e^{2x}+C)'=e^{2x}$，但根据复合函数的求导法则，$(e^{2x}+C)'=2e^{2x}$，因此 $\int e^{2x}\mathrm{d}x\neq e^{2x}+C$. 问题出在哪里呢？我们先来比较公式（5）的左端 $\int e^x\mathrm{d}x$ 与所求积分 $\int e^{2x}\mathrm{d}x$ 的被积表达式的区别.

$\int e^x\mathrm{d}x$ 中的被积函数是 e^x，其指数 x 与 $\mathrm{d}x$ 中的 x 相同，而

$\int e^{2x}dx$ 中的被积函数是 e^{2x}，其指数 $2x$ 与 dx 中的 x 不相同，因此不能直接套用公式（5），为了利用公式（5），应当先把原积分写作 $\frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)$，然后进行计算，即

$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) \xlongequal{令 2x=u} \frac{1}{2}\int e^{u}du$$

$$= \frac{1}{2}e^{u} + C \xlongequal{回代 u=2x} \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

容易验证 $(\frac{1}{2}e^{2x}+C)'=e^{2x}$，所以 $\frac{1}{2}e^{2x}+C$ 确实是 e^{2x} 的原函数.

这种积分的基本思想是先凑微分式 $e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}d(2x)$，再作变量代换 $u=2x$，把要计算的积分化为基本积分公式中所具有的形式，求出原函数后再换回原来的变量，这种积分法通常称为**第一换元法或凑微分法**.

一般地，如果被积函数的形式为 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$（或可以转化为这种形式），且 $u=\varphi(x)$ 在某区间上可导，$f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，则可以在 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 的被积函数中，将 $\varphi'(x)$ 与 dx 凑成新的微分 $d\varphi(x)$，再作变量代换 $u=\varphi(x)$，使 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 变为 $\int f(u)du$，于是 $\int f(u)du = F(u)+C$，再回代 $u=\varphi(x)$ 得 $F[\varphi(x)]+C$.

即 $$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \xlongequal{令 \varphi(x)=u} \int f(u)du$$

$$= F(u) + C \xlongequal{回代 u=\varphi(x)} F[\varphi(x)] + C.$$

例 4.3.1 求 $\int \frac{1}{x+1}dx$.

解 $$\int \frac{1}{x+1}dx \xlongequal{凑微分} \int \frac{1}{x+1}d(x+1) \xlongequal{令 x+1=u} \int \frac{1}{u}du$$

$$=\ln|u|+C\xlongequal{\text{回代 } u=x+1}\ln|x+1|+C.$$

例 4.3.2　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(3x+7)^2}$.

解　$\int\frac{\mathrm{d}x}{(3x+7)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(3x+7)}{(3x+7)^2}\xlongequal{\text{令 } 3x+7=u}\frac{1}{3}\int\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$

$$=-\frac{1}{3u}+C\xlongequal{\text{回代 } u=3x+7}-\frac{1}{3(3x+7)}+C.$$

当运算熟练后，只须默记所选新变量 $u=\varphi(x)$，不必写出来.

例 4.3.3　求 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解　（将 $x\mathrm{d}x$ 凑微分）$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$.

例 4.3.4　求 $\int(x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$.

解　$\int(x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}\int(x+1)\mathrm{e}^{(x+1)^2}\mathrm{d}x$ [将 $(x+1)\mathrm{d}x$ 凑微分] $=\frac{\mathrm{e}}{2}\int\mathrm{e}^{(x+1)^2}\mathrm{d}(x+1)^2=\frac{\mathrm{e}}{2}\mathrm{e}^{(x+1)^2}+C$.

例 4.3.5　求 $\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　$\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}+C$.

例 4.3.6　求 $\int\frac{\ln^3x}{x}\mathrm{d}x$.

解　$\int\frac{\ln^3x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln^3x\,\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{4}\ln^4x+C$.

例 4.3.7　求 $\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解　$\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)$

$$=\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$$

例 4.3.8　求 $\int\tan x\mathrm{d}x$.

解 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

例 4.3.9 求 $\int \sin^3 x\cos^2 x dx.$

解 $\int \sin^3 x\cos^2 x dx = \int \sin^2 x\cos^2 x \cdot \sin x dx$

$$= -\int (1 - \cos^2 x)\cos^2 x d(\cos x)$$

$$= -\int (\cos^2 x - \cos^4 x) d\cos x$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

例 4.3.10 求 $\int \frac{\arctan^3 x}{1 + x^2}dx.$

解 $\int \frac{\arctan^3 x}{1 + x^2}dx = \int \arctan^3 x d(\arctan x) = \frac{1}{4}\arctan^4 x + C.$

例 4.3.11 求 $\int \sec x dx.$

解 $\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{1 - \sin^2 x}d\sin x$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x}\right)d\sin x$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1 - \sin x}d(1 - \sin x) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 + \sin x}d(1 + \sin x)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1 - \sin x| + \frac{1}{2}\ln|1 + \sin x| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right| + C.$$

由于 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} + C = \ln\sqrt{\frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x}} + C = \ln\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C.$

所以我们有

$$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

类似地有

$$\int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

二、第二换元法

在第一换元积分法中，用新积分变量 u 代换被积函数中的可微函数 $\varphi(x)$，从而使 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 化成可按直接积分法计算的形式 $\int f(u)\mathrm{d}u$. 我们也常会遇到与此相反的情形，$\int f(x)\mathrm{d}x$ 不易求出，这时引入新的积分变量 t，使 $x=\varphi(t)$（φ 单调可微），且 $\varphi'(t)\neq 0$，把原积分化成容易积分的形式，即 $\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{令 x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t \xlongequal{容易积分} F(t)+C \xlongequal{回代 t=\varphi^{-1}(x)} F[\varphi^{-1}(x)]+C.$

通常把这样的积分方法叫做**第二换元积分法**. 我们在利用第二换元法计算积分时，常为了消去被积函数中的根式而设定 $x=\varphi(t)$.

例 4.3.12 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

解 对此积分，不能用凑微分来求，为了去掉根式，可以令 $\sqrt{x}=t$，即 $x=t^2$（$t>0$），于是 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int \frac{1+t-1}{1+t}\mathrm{d}t = 2\left[\int \mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t}\right]$$

$$= 2[t-\ln|1+t|]+C \xlongequal{回代} 2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

一般地，(1) 若被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$，可令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$，消

去根式；（2）若被积函数含有 x 的不同根指数的根式，为了同时消去这些根式，可令 $\sqrt[m]{x}=t$，其中 m 是这些根指数的最小公倍数.

例 4.3.13 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

解 令 $\sqrt[6]{x}=t$（6 是被积函数 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$ 的根指数 2 和 3 的最小公倍数），即 $x=t^6$，则 $\sqrt{x}=t^3$，$\sqrt[3]{x}=t^2$，$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$. 于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}=6\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^2}=6\int\frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\left(\int\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)$$

$$=6(t-\arctan t)+C=6\sqrt[6]{x}-6\arctan\sqrt[6]{x}+C.$$

再看被积函数中根号里面是关于 x 的二次函数的积分.

例 4.3.14 求 $\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解 可利用三角公式 $1-\sin^2t=\cos^2t$ 来消去根式.

即令 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2t}=\cos t$，于是

$$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int\cos t\cos t\mathrm{d}t=\int\cos^2t\mathrm{d}t=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C.$$

由于 $x=\sin t$，则 $t=\arcsin x$，而 $\cos t=\sqrt{1-\sin^2t}=\sqrt{1-x^2}$（$-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，根号前取正号）. 于是

$$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

注 4.3.1 上例中，为使回代容易计算，通常根据换元公式 $x=\sin t$ 作一个以 t 为锐角的直角三角形（如图 4－2），其斜边为 1，t 的邻边为 $\sqrt{1-x^2}$，于是有 $\cos t=\sqrt{1-x^2}$

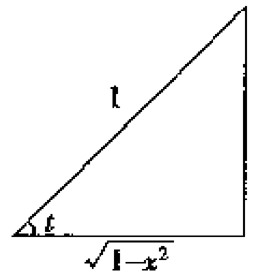

图 4－2

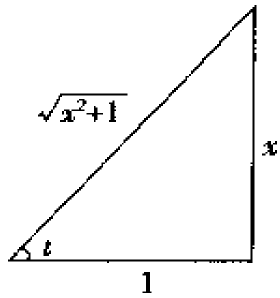

图 4－3

例 4.3.15　求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

解　令 $x=\tan t\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\sec^2 t dt$，$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\tan^2 t+1}=\sec t$，于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{\sec^2 t}{\sec t}dt=\int \sec t dt=\ln|\sec t+\tan t|+C.$$

为了把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数，可根据 $x=\tan t$，即 $\tan t=x$ 作一个以 t 为锐角的直角三角形（如图 4－3），从而得出 $\sec t=\sqrt{x^2+1}$，所以

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$$

例 4.3.16　求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$.

解　设　$x=3\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $dx=3\sec t\tan t dt$，$\sqrt{x^2-9}=3\tan t$，于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}=\int \frac{3\sec t\cdot\tan t}{3\tan t}dt=\int \sec t dt=$$

$\ln|\sec t+\tan t|+C$

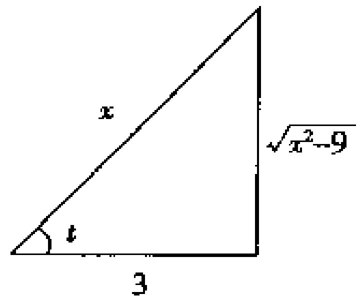

图 4－4

由 $\sec t=\frac{x}{3}$ 和图 4－4 得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-9}} = \ln\left|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right| + C$$

一般地，当被积函数含有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$ 或 $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 时，可作如下的三角代换：

（1）含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，令 $x = a\sin t\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$，$\mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$；

（2）含有 $\sqrt{x^2+a^2}$ 时，令 $x = a\tan t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2+a^2} = a\sec t$，$\mathrm{d}x = a\sec^2 t\mathrm{d}t$；

（3）含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，令 $x = a\sec t\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$，$\mathrm{d}x = a\sec t\tan t\mathrm{d}t$.

在 11 个基本积分公式的基础上，再补充 8 个常用公式，今后在积分计算中可直接使用.

（12）$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

（13）$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

（14）$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

（15）$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

（16）$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$；

（17）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$；

（18）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$；

(19) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

例 4.3.17　求 $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\mathrm{d}x$

解　$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 4}\mathrm{d}(x-1) \xlongequal{\text{利用公式(16)}} \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C.$

第四节　分部积分法

本节再介绍一种计算积分的重要方法——分部积分法，当遇到形如 $\int \ln x\mathrm{d}x$，$\int \arcsin x\mathrm{d}x$，$\int x^n \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$，$\int x^n \sin x\mathrm{d}x$ 等积分时，常用此法.

设 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 具有连续的导数，由两个函数乘积的微分公式

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v,$$

移项得

$$u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u,$$

对等式两边分别积分，便得到下述**分部积分公式**：

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

当积分 $\int u\mathrm{d}v$ 不好计算时，可利用上述分部积分公式将其转化为另一个积分 $\int v\mathrm{d}u$，或许这个积分较容易计算.

例 4.4.1　求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

分析　若用前面介绍的方法都不易计算，考虑用**分部积分**法.

首先将被积表达式凑成 $u\mathrm{d}v$ 的形式：

$$\underset{\langle u\rangle}{x\ln x}\,\underset{\langle 凑成\,dv\rangle}{\mathrm{d}x} = \ln x \cdot x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underset{\langle u\rangle}{\ln x}\,\underset{\langle dv\rangle}{\mathrm{d}x^2}$$

于是 $\int x\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}(x^2\ln x - \int x^2\mathrm{d}\ln x)$,

右端的积分我们可以计算.

解 $\int x\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}(x^2\ln x - \int x^2\mathrm{d}\ln x)$

$$= \frac{1}{2}(x^2\ln x - \int x\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

例 4.4.2 求 $\int \arctan x\mathrm{d}x$.

解 $\int \underset{\langle u\rangle}{\arctan x}\,\underset{\langle v\rangle}{\mathrm{d}x} = x\arctan x - \int x\mathrm{d}\arctan x$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

在该例的第三步中，还利用了第一换元法. 一般地，在计算积分时，常要多种方法结合使用.

例 4.4.3 求 $\int xe^x\mathrm{d}x$.

解 $\int \underset{\langle u\rangle}{x}\,\underset{\langle 凑\,dv\rangle}{\underbrace{e^x\mathrm{d}x}} = \int x\mathrm{d}e^x = xe^x - \int e^x\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$

例 4.4.4 求 $\int x\sin x\mathrm{d}x$.

解 $\int \underset{\langle u\rangle}{x}\,\underset{\langle 凑\,dv\rangle}{\underbrace{\sin x\mathrm{d}x}} = \int x\mathrm{d}(-\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

例 4.4.5 求 $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{令\sqrt{x}=t} \int e^t\mathrm{d}t^2 = 2\int te^t\mathrm{d}t$

$$= 2\int t\mathrm{d}e^t = 2te^t - 2\int e^t\mathrm{d}t = 2te^t - 2e^t + C$$

$$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

例 4.4.6　求 $\int e^x\sin x\mathrm{d}x$.

解　$\int e^x\sin x\mathrm{d}x = \int \sin x\mathrm{d}e^x = e^x\sin x - \int e^x\cos x\mathrm{d}x$

$$= e^x\sin x - \int \cos x\mathrm{d}e^x = e^x\sin x - (e^x\cos x - \int e^x\mathrm{d}\cos x)$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x\sin x\mathrm{d}x$$

把 $-\int e^x\sin x\mathrm{d}x$ 移到等式左边，两边同除以 2，得

$$\int e^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

第五节　三种有理真分式的积分

本节将介绍有理函数的积分法.

所谓有理函数，是指两个多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$. 根据代数学的知识可知，任何一个有理函数都可以分解成一个多项式与一个真分式（分子的次数比分母的次数低的分式）的和.

例如 $\frac{x^4+1}{x^2+1}$ 这是一个假分式，利用多项式的除法可得 $\frac{x^4+1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}$.

再如，$\frac{x^2+2}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-x+1}{x^2+x+1} = 1 + \frac{-x+1}{x^2+x+1}$

由于多项式部分的积分容易求出，因此对于有理函数的积分，只要会计算真分式的积分即可.

一、有理真分式

根据代数理论可知，任何一个真分式均可分解为若干个部分真分式之和（称为部分分式）. 所谓部分分式是指以下四种类型的分式：

(1) $\dfrac{A}{x-a}$；

(2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$， $n=2,\ 3,\ \cdots$；

(3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$， $p^2-4q<0$，$n=2,\ 3,\ \cdots$；

(4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$， $p^2-4q<0$，$n=2,\ 3,\ \cdots$.

下面我们通过一些实例介绍将一个真分式分解成部分分式代数和的方法（我们称之为**待定系数法**）

例 4.5.1 将$\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$分解为部分分式和.

解 设$\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}=\dfrac{2x-1}{(x-2)\ (x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$，其中 A，B 为待定系数.

上式两端去分母得

$$2x-1=A(x-3)+B(x-2),$$

或

$$2x-1=(A+B)x-(3A+2B).$$

比较上式两端同次幂的系数，得

$$\begin{cases}A+B=2,\\ -(3A+2B)=-1.\end{cases}$$

从而解得 $A=-3$，$B=5$.

因此，$\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}=\dfrac{-3}{x-2}+\dfrac{5}{x-3}$.

例 4.5.2 将$\dfrac{1}{x(x+1)^2}$分解为部分分式和.

解 设$\dfrac{1}{x(x+1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$，其中 A，B，C 为待定系数，上式两端去分母得

$$1=A(x+1)^2+Bx(1+x)+Cx,$$

或
$$1=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A.$$

比较上式两端同次幂的系数，得

$$\begin{cases}A+B=0,\\2A+B+C=0,\\A=1.\end{cases}$$

从而解得 $A=1$，$B=-1$，$C=-1$.

因此 $\dfrac{1}{x(x+1)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

例 4.5.3 将$\dfrac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}$分解为部分分式

解 设$\dfrac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$，其中 A，B，C 为待定常数. 上式两端去分母，得

$$x^2+2x-1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-1),$$

或
$$x^2+2x-1=(A+B)x^2+(-A-B+C)x+(A-C).$$

比较上式两端同次幂的系数，得

$$\begin{cases}A+B=1,\\-A-B+C=2,\\A-C=-1.\end{cases}$$

从而解得 $A=2$，$B=-1$，$C=3$.

因此 $\dfrac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{-x+3}{x^2-x+1}$.

二、三种有理真分式的积分

这里我们只讨论前三种形式的有理真分式的积分，而前两种类型积分很简单，下面主要讨论较为复杂的 $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ 类型的积分（其中 $p^2-4q<0$）.

从理论上讲，因为 $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(4q-p^2)$，且 $4q-p^2>0$，令 $x+\frac{p}{2}=t$，并记 $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$，$L=B-\frac{A}{2}p$，于是

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{At+L}{t^2+a^2}dt = A\int \frac{t}{t^2+a^2}dt + L\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$
$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{L}{a}\arctan\frac{t}{a} + C.$$

在具体计算中，一般按以下思路进行：

例 4.5.4 求 $\int \frac{x-3}{x^2-x+1}dx$

首先将分子凑出一项分母的导数“$2x-1$”，我们有

$$x-3=\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{5}{2},$$

再将被积函数分成两项

$$\frac{x-3}{x^2-x+1}=\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{5}{2}}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{5}{2}\frac{1}{x^2-x+1},$$

其中第一项很容易积分，对于第二项只需将分母配方后，再利用第三节中的公式（16）即可积分.

解 $\int \frac{x-3}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{5}{2}}{x^2-x+1}dx$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{5}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

以上介绍了求有理函数积分的方法，具体应用时，可按如下步骤进行：将假分式分解为多项式与真分式之和，再用待定系数法将真分式分解为部分分式之和，最后求多项式与部分分式的积分.

例 4.5.5 求 $\int \frac{x^4+2x^2-2x-2}{x^3+1}\mathrm{d}x$

解 因为 $x^4+2x^2-2x-2 = x(x^3+1)+2x^2-3x-2$,

所以 $\frac{x^4+2x^2-2x-2}{x^3+1} = x + \frac{2x^2-3x-2}{x^3+1}$,

设 $\frac{2x^2-3x-2}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$,

上式两端去分母得

$$2x^2-3x-2 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)$$

比较上式两端同次幂的系数，得

$$\begin{cases} A+B=2, \\ -A+B+C=-3, \\ A+C=-2. \end{cases}$$

解得 $A=1$, $B=1$, $C=-3$

即 $\frac{2x^2-3x-2}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{x-3}{x^2-x+1}$

所以 $\int \frac{x^4+2x^2-2x-2}{x^3+1}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x + \int \frac{x-3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{5}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

（其中，第三个积分直接利用例 4.5.4 的结果）

*第六节　常微分方程简介

作为微积分的一个应用，本节介绍常微分方程的基本概念及几种简单一阶常微分方程的解法，以便对常微分方程有初步的了解.

一、常微分方程的基本概念

在第一节讲不定积分的几何意义时，已经遇到过最简单的常微分方程问题. 如例 4.1.2 求通过点（1，2），斜率为 $2x$ 的曲线方程. 若设所求曲线的方程为 $y=y(x)$，依题意应有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x, \tag{4-1}$$

且

$$y(1)=2, \tag{4-2}$$

通过求不定积分，可得满足式（4－1）中的未知函数 $y=y(x)$ 的一般形式是

$$y=x^2+C \qquad (C\text{ 为任意常数}),$$

再将（4－2）代入上式，求出 $C=1$ 则

$$y=x^2+1.$$

就是所求过点（1，2）且斜率为 $2x$ 的曲线方程.

上面例子中的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$

就是一个常微分方程.

定义 4.6.1　含有自变量、一元未知函数以及未知函数的导数（或微分）的函数方程，叫做**常微分方程**.

例如

$$y'=2x+x^2 \tag{4-3}$$

$$xy\mathrm{d}x+(4+x^2)\mathrm{d}y=0 \tag{4-4}$$

$$y'' + y' = 0 \tag{4-5}$$

$$y'' = x^2 + 3 \tag{4-6}$$

等都是常微分方程.

常微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数（或微分）的阶数称作常微分方程的**阶**. 例如上面的（4－1）、（4－3）、（4－4）都是一阶常微分方程，而（4－5）、（4－6）都是二阶常微分方程.

微分方程的**解**是指代入微分方程后能使方程成为恒等式的函数. 如 $y = x^2 + 1$，$y = x^2 + C$ 都是方程$\frac{dy}{dx} = 2x$ 的解. 如果常微分方程的解中含有任意常数，且独立的任意常数的个数与常微分方程的阶数相同，这样的解叫做常微分方程的**通解**. 在通解中，给任意常数以确定的数而得到的解称为常微分方程的**特解**.

显然，$y = x^2 + C$（因含有一个任意常数 C）是$\frac{dy}{dx} = 2x$ 的通解，而 $y = x^2 + 1$ 是$\frac{dy}{dx} = 2x$ 的一个特解.

为从 n 阶常微分方程的通解中确定一个特解，需要附加几个条件. 我们通常把条件 $y(x_0) = y_0$，$y'(x_0) = y_1$，…，$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ 称为**初始条件**，其中 x_0，y_0，y_1，…，y_{n-1} 为常数. 把求常微分方程满足初始条件的特解问题叫做**初值问题**. 如条件（4－2）就是常微分方程（4－1）的初始条件.

二、几种特殊类型的一阶常微分方程及其解法

（一）可分离变量的一阶常微分方程

一般地，如一阶常微分方程能转化为

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx \tag{4-7}$$

的形式，则称该方程为**可分离变量的常微分方程**.

解法　将式（4－7）两端积分，得

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

设 $G(y)$ 和 $F(x)$ 分别为 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数，于是有

$$G(y) = F(x) + C,$$

这就是式（4－7）的通解.

例 4.6.1 求 $xy\mathrm{d}x + (x+1)\mathrm{d}y = 0$ 的通解

解 将方程变形为

$$(x+1)\mathrm{d}y = -xy\mathrm{d}x,$$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x,$$

$$\ln|y| = \ln|x+1| - x + C_1,$$

$$\ln\left|\frac{y}{x+1}\right| = -x + C_1$$

$$\left|\frac{y}{x+1}\right| = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-x}.$$

若记 $C = \pm\mathrm{e}^{C_1}$，则所求方程的通解为

$$y = C(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

例 4.6.2 求 $x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y = 0$ 满足 $y(1) = 2$ 的特解.

解 方程两边同时积分，得

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 = C_1 \qquad (C_1\text{ 为任意常数}),$$

或

$$x^3 + y^3 = C \qquad (C = 3C_1\text{ 也是任意常数}).$$

这就是所求常微分方程的通解.

将初始条件 $y(1) = 2$ 代入通解，得 $C = 9$，因此所求特解为 $x^3 + y^3 = 9$.

（二）齐次常微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4-8)$$

的常微分方程叫做齐次常微分方程.

例如$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$是一个齐次常微分方程.

由于$(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$可变形为$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$,

因此也是一个齐次常微分方程.

解法 令$\frac{y}{x}=u$,则$y=ux$,且$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,代入式(4-8)

得
$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u),$$

再分离变量,得

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

两边积分得 $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C_1.$

记 $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\Phi(u)$,则

$$\Phi(u)=\ln|x|+C_1,$$

令$C=\pm e^{-C_1}$,则$x=Ce^{\Phi(u)}$,最后将$\frac{y}{x}$替换u,就得齐次方程(4-8)的通解

$$x=Ce^{\Phi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

例 4.6.3 求$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$的通解.

解 原方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1},$$

它显然是齐次方程. 令$\frac{y}{x}=u$,则

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

将其代入原方程得

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1},$$

即
$$\left(1 - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x},$$

两端积分得

$$u - \ln|u| + C = \ln|x| \quad 或 \ln|xu| = u + C.$$

用$\frac{y}{x}$代换上式中的 u，则所给方程的通解为

$$\ln|y| = \frac{y}{x} + C, \qquad C 为任意常数.$$

例 4.6.4 求微分方程 $y' = \frac{y}{y-x}$ 满足初始条件 $y(0) = 1$ 的特解.

解 将原方程化为

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 1}$$

这是齐次常微分方程. 令 $u = \frac{y}{x}$，则

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u,$$

代入上式，原方程变为

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{u}{u-1},$$

即
$$\frac{u-1}{2u-u^2}du = \frac{dx}{x},$$

两边积分得

$$-\frac{1}{2}\ln|2u - u^2| = \ln|x| + C_1$$

即 $$(2u-u^2)x^2=C \qquad (其中\ C=\pm e^{-2C_1}).$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代人上式，得

$$\left(2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)x^2=C,$$

故通解为 $$2xy-y^2=C.$$

将 $y(0)=1$ 代人通解得 $C=-1$，所以满足初始条件的特解为 $y^2-2xy-1=0$.

习 题 四

1. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin\frac{1}{2}x+C$，求 $f(x)$.
2. $\arctan x$ 和 $2-\operatorname{arccot}x$ 是否为同一函数的原函数.
3. 求经过点（0，0），且其切线的斜率为 $2x$ 的曲线方程.
4. 在积分曲线 $y=\int 2x\mathrm{d}x$ 中，求过点$(1,1)$的曲线方程.
5. 用直接积分法求下列不定积分：

(1) $\int(1-2x^2)\mathrm{d}x$　　(2) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x$

(3) $\int(\frac{x+1}{x})^3\mathrm{d}x$　　(4) $\int\frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(5) $\int(x^5+5^x)\mathrm{d}x$　　(6) $\int 2^x e^x\mathrm{d}x$

(7) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$　　(8) $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(9) $\int\frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$　　(10) $\int\frac{1+2x}{x(1+x)}\mathrm{d}x$

(11) $\int 2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$　　(12) $\int\tan^2x\mathrm{d}x$

(13) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$

6. 用凑微分法求下列不定积分：

(1) $\int(3x-1)^7dx$

(2) $\int\frac{dx}{1+2x}$

(3) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

(4) $\int e^{x+1}dx$

(5) $\int e^{-x}dx$

(6) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx$

(7) $\int\frac{1}{2x^2}\cos\frac{1}{x}dx$

(8) $\int\frac{dx}{x\ln^2x}$

(9) $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$

(10) $\int\frac{e^x}{2+e^x}dx$

(11) $\int\sin2xdx$

(12) $\int e^x\cos e^xdx$

(13) $\int\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx$

(14) $\int\frac{1}{1-x^2}dx$

(15) $\int\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}dx$

(16) $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$

(17) $\int\sin^3xdx$

(18) $\int\cos^2x\sin^2xdx$

(19) $\int\frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

(20) $\int\frac{dx}{x\ln x}$

(21) $\int\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$

(22) $\int\frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$

(23) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

(24) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(25) $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$

(26) $\int(x^2+1)e^{x^3+3x}dx$

7. 用第二换元法计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{1}{5+\sqrt{x}}dx$

(2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt[3]{x})}$

(3) $\int\frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})}dx$

(4) $\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

(5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(6) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$

(7) $\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

8. 用分部积分法求下列积分：

(1) $\int \ln x dx$　　(2) $\int x\cos x dx$

(3) $\int xe^{2x}dx$　　(4) $\int \operatorname{arccot} x dx$

(5) $\int x\operatorname{arccot} x dx$　　(6) $\int x^2\cos x dx$

(7) $\int \arcsin x dx$　　(8) $\int (x+1)e^x dx$

(9) $\int (4x-1)\cos x dx$　　(10) $\int x\sin^2 x dx$

(11) $\int e^x \sin 2x dx$　　(12) $\int e^{-x}\cos x dx$

9. 求下列有理函数的不定积分：

(1) $\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}dx$　　(2) $\int \frac{3x+1}{(x-3)^2}dx$

(3) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$　　(4) $\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$

(5) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+2}dx$

10. 指出下列微分方程的阶：

(1) $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx}+1=0$

(2) $x(y')^3-2yy'+x^2=0$

(3) $(y''')^2+3y'+y+x=0$

11. 求下列微分方程的通解或在给定初始条件下的特解：

(1) $y^2dx+(x-1)dy=0$　　(2) $y'=\frac{xy+y}{x+xy}$

(3) $xy\mathrm{d}x+\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}y=0\quad y(0)=1$

(4) $y'+xe^y=0,\quad y(1)=0$

12. 求下列微分方程的通解或在给定初始条件下的特解：

(1) $y'=\frac{xy+y^2}{x^2}$；

(2) $(xy-x^2)\mathrm{d}y=y^2\mathrm{d}x$；

(3) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x=2xy\mathrm{d}y,\ y(1)=0$；

(4) $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y=2xy\mathrm{d}x,\ y(0)=1.$

第五章　定积分及其应用

本章介绍定积分的概念与基本性质，定积分与不定积分的关系，定积分的计算方法，定积分的应用，广义积分初步等内容.

第一节　定积分的概念与性质

一、引出定积分概念的两个实际例子

（一）实例1：曲边梯形的面积

所谓曲边梯形是指图 5－1 中由连续曲线 $y=f(x)$ （$f(x)\geqslant 0$），直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的图形.

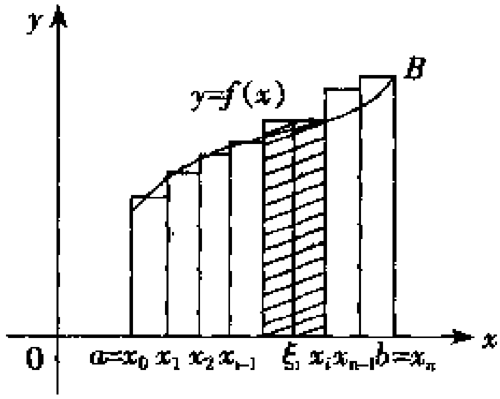

图 5－1

下面我们将利用极限思想来求这个曲边梯形的面积 S，即先求出面积的一系列近似值，然后通过取极限的方法，求出 S 的精确值.

分四个步骤进行.

（1）分割

用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 把区间分成 n 个小区间：$[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，$\cdots$，$[x_{n-1}, x_n]$.

这些小区间的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ （$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$），它们不一定相等. 过每个分点 x_i （$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$）作垂直于 x 轴的直线，把图 5 – 1 中的曲边梯形分成 n 个小曲边梯形. 设 ΔS_i 表示第 i 个小曲边梯形的面积，则有

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

（2）近似代替

在每个小区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ （$i = 1, 2, \cdots, n$）上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} < \xi_i < x_i)$，由于 $y = f(x)$ 是连续函数，只要分割足够细（即每个 Δx_i 充分地小，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$），$f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上就可以近似看作常数，用小矩形面积近似代替相应的窄小曲边梯形的面积，（即局部的“以直代曲”），即

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

（3）求和

将 n 个小矩形的面积加起来，就是图 5 – 1 中曲边梯形面积 S 的一个近似值，即

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

（4）取极限

当分点数无限增多，小区间中最大区间长度 $\|\Delta x\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\} \to 0$ 时，上面和式的极限就是所求曲边梯形的面积，即

$$S = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

（二）实例 2：已知产量的变化率，求总产量

设产量变化率 Q 是时间 t 的函数 $Q = Q(t)$，求在生产连续进行时，从时间 a 到时间 b 这一段时间 $[a,\ b]$ 上的总产量 q. 类似于实例 1，我们也用四个步骤来求 q.

（1）分割

用分点 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ 把区间分成 n 个小区间

$[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\cdots$, $[t_{n-1}, t_n]$. 这些小区间的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，它们不一定相等. 设 Δq_i 表示时间段 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的总产量，则有

$$q = \Delta q_1 + \Delta q_2 + \cdots + \Delta q_n.$$

(2) 近似代替

在每个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一时刻 τ_i，以时刻 τ_i 时的产量变化率 $Q(\tau_i)$ 乘以小区间的长度 Δt_i，作为在此小区间的实际产量的近似值，即 $\Delta q_i \approx Q(\tau_i)\Delta t_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$.

(3) 求和

将上面的 n 个 Δq_i 相加即得

$$q = \sum_{i=1}^{n} \Delta q_i \approx \sum_{i=1}^{n} Q(\tau_i)\Delta t_i.$$

(4) 取极限

当分点数 n 无限增多，小区间中最大长度 $\|\Delta t\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta t_i\}\to 0$ 时，上面和式的极限就是所求总产量 q，即

$$q = \lim_{\|\Delta t\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\tau_i)\Delta t_i.$$

上面两个实例尽管具体内容不同，但在解决问题的思路与方法上是相同的，即都用了"由近似到精确，由有限到无限"的极限思想和"分割取近似，求和取极限"的方法，求同一结构和式的极限. 在科学技术和经济分析中还有许多实际问题也可归结为这类极限，因此，有必要在抽象的形式下研究它，并由此引入以下的定积分的定义.

二、定积分的定义

定义 5.1.1 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的已知函数，用分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，其长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小

区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\ \Delta x_i$，并求其和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$（称为积分和）.

如果当 n 无限增大，而 Δx_i 中最大值 $\|\Delta x\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时，和式 S_n 的极限存在，且此极限值与小区间的划分与点 ξ_i 的选取无关，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上**可积**，并称此极限值为函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的**定积分**，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\ \mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，$[a,\ b]$ 称为**积分区间**，b、a 分别称为积分的**上限**与**下限**.

注 5.1.1 将定积分和上面的两个实例结合可得：

（1）当 $y=f(x)$ 是定义在 $[a,\ b]$ 上的连续函数且 $f(x)\geqslant 0$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是由曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$，及 x 轴所围成的曲边梯形的面积（即定积分的几何意义）.

（2）产品的总产量 q 是它的变化率 $Q(t)$ 在时间段 $[a,\ b]$ 上的定积分，即 $q=\int_a^b Q(t)\mathrm{d}t$.

下面对定积分的定义再作两点说明：

（1）如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上可积，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示一个数值，这个数值仅与被积函数 $f(x)$ 和积分区间 $[a,\ b]$ 有关，而与 $[a,\ b]$ 的划分方法、点 ξ_i 的取法以及积分变量的字母表示无关，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

（2）当被积函数在积分区间上无界时，总可以选取点 ξ_i，使 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 任意大，于是其极限不存在. 因此，无界函数是不可积的. 换言之，函数 $f(x)$ 有界是 $f(x)$ 可积的必要条件.

（3）不加证明地给出以下两个可积函数类：有限区间上的连续函数是可积的；有限区间上只有有限个间断点的有界函数是可积的.

（4）在定积分定义中，实际上假定了 $a<b$，如果 $b<a$，则规定 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. 这表明定积分的上限与下限互换时，定积分的值变号. 另外，当 $a=b$ 时，规定 $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

例 5.1.1　计算 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解　因 $y=x^2$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，故可积. 因此不论对区间 $[0,\ 1]$ 如何分割及点 ξ_i 如何选取，所得积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限值均应等于 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$. 因此，不妨取区间 $[0,\ 1]$ 的一种特殊分割和点 ξ_i 的特殊选取进行计算.

将区间 $[0,\ 1]$ n 等分，分点为

$$x_i=\frac{i}{n},\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

则每个小区间的长度 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，再取 $\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}\\ &=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\end{aligned}$$

所以 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$.

从例 5.1.1 看到，用定积分定义来计算定积分，即使被积函数很简单，其计算过程也是繁琐的. 如果被积函数稍复杂一些，那么

用定义计算积分往往是不可能的. 后面我们将介绍一种计算定积分的重要公式.

三、定积分的性质

假设下面涉及的函数均在 $[a, b]$ 上是可积的.

性质 1：$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a.$

性质 2：设 k 为常数，则有

$$\int_a^b [f(x) + kg(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 3：**（积分的可加性）** 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，$[a, b]$ 被点 c 分成两个小区间 $[a, c]$ 与 $[c, b]$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注：可以证明，不论 a，b，c 的大小关系如何，总有上式成立.

性质 4：若 $f(x) \geqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

利用性质 4 可以比较两个积分值的大小.

性质 5：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，则

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b - a).$$

以上 5 条性质的证明从略.

性质 6：（积分中值定理）设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b - a).$$

证 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取到最大值 M 与最小值 m，即

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad x \in [a, b].$$

由性质 5 得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

即
$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M,$$

根据闭区间上连续函数的介值定理得，在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

此即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$
证毕

积分中值定理的几何意义：当 $f(x) \geqslant 0$ 时，由 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上确定的曲边梯形面积 S（由定积分的几何意义可知 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$）等于高为 $f(\xi)$ 底为 $(b-a)$ 的矩形面积（图 5-2），而且 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 可以理解为**函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值**，它实质上是有限个数的平均值概念的推广.

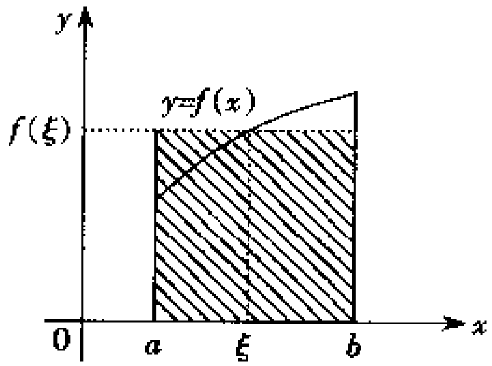

图 5-2

例 5.1.2　比较下列定积分的大小

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x$$

解　$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $\sqrt{x} \geqslant x$，因此由性质 4 知 $\int_0^1 x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x$.

第二节 微积分学基本公式——牛顿—莱布尼兹公式

前面已经指出，如果直接利用定积分定义，即积分和式的极限去计算积分往往是困难的. 因此，有必要寻求简便有效的求定积分的方法，这就是本节要讲的牛顿—莱布尼兹公式.

一、积分上限函数

设$f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积，则对任意的 $x\in[a, b]$，有惟一确定的积分值 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 与之对应（由性质 3，$f(x)$ 在 $[a, x]$ 上可积，因而 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 存在），这样，定积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的一个函数，称之为**积分上限函数**，记为 $\Phi(x)$，即

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a, b].$$

二、原函数存在定理

定理 5.2.1 设$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

证 给 x 以增量 Δx，则

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

于是 $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

$$=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

由积分中值定理知，在 x 和 $x+\Delta x$ 之间至少存在一点 ξ，使

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)[(x+\Delta x)-x]=f(\xi)\Delta x.$$

当 $\Delta x\neq 0$ 时，$\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi)$，令 $\Delta x\to 0$，则 $x+\Delta x\to x$，于是 $\xi\to x$. 由函数 $f(x)$ 的连续性可得

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$$ 证毕

例 5.2.1 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t=\sin x^2$.

例 5.2.2 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{(x^2)^2}(x^2)'=2x\mathrm{e}^{x^4}$.

定理 5.2.1 告诉我们，只要函数 $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 的原函数总是存在的，它的积分上限函数 $\Phi(x)$ 就是其中的一个. 于是有

定理 5.2.2（原函数存在定理） 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

定理 5.2.2 给第四章第一节中的第一个问题以圆满的答案.

应用上面重要结果，我们可以得到微积分学基本公式，即牛顿—莱布尼兹公式.

三、牛顿—莱布尼兹公式

定理 5.2.3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证 由定理 5.2.2 知 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，又因 $F(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，根据定理 4.1.1 知，$\Phi(x) = F(x) + C$，C 为任意常数. 即

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + C,$$

令 $x = a$，得 $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a) + C = 0$，所以 $C = -F(a)$，即

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a),$$

再在上式中令 $x = b$，得 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$，亦即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$ 证毕

上述公式称为牛顿—莱布尼兹（Newton - Leibniz）公式，通常把 $F(b) - F(a)$ 记为 $F(x)\big|_a^b$，这样牛顿—莱布尼兹公式又可写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

牛顿—莱布尼兹公式是微积分基本公式，它揭示了定积分与不定积分之间的联系，并且给定积分的计算提供了一个有效而简便的方法.

利用牛顿—莱布尼兹公式计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，只需按照以下两个步骤进行：

1. 求 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$；

2. 求 $F(x)$ 在 b，a 两点的函数值的差 $F(b)-F(a)$.

例 5.2.3 计算 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.

解 由于 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数，所以

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

在例 5.1.1 中我们曾用定积分的定义计算了 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$，显然，利用牛顿—莱布尼兹公式计算更简便有效.

例 5.2.4 计算 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \Big|_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1.$

例 5.2.5 计算 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$

解 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}\ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x \Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}.$

例 5.2.6 计算 $\int_0^{\pi} |\cos x| \mathrm{d}x$

解 由于被积函数 $|\cos x|$ 带绝对值符号，求原函数是不方便的. 因而首先去掉被积函数的绝对值符号，再利用定积分的可加性计算.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} |\cos x| \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) \mathrm{d}x \\
&= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) + \left[(-\sin\pi) - \left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

例 5.2.7 用洛必达法则求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x}$.

解 由于 $\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 处可导，因而在 $x=0$ 处也连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t = 0$，故由洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = \cos 0^2 = 1.$$

第三节 定积分的换元积分法与分部积分法

一、定积分的换元积分法

牛顿—莱布尼兹公式给出了计算定积分的很好的方法．由于计算中首先要求被积函数的原函数，因此，有时要用到求不定积分的换元法与分部积分法．例如，求 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$．

解 首先求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$．

令 $\sqrt{x}=t$，即 $x=t^2$，则 $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$，所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t} = 2t - 2\ln|1+t| + C$$

$$\xlongequal{\text{回代}} 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

再求定积分，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \left(2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})\right)\Big|_0^1 = 2 - 2\ln 2.$

在求原函数的过程中，需将变量替换 $\sqrt{x}=t$ 再回代，那么，能否舍掉回代的步骤，直接由以 t 为自变量的原函数的表达式 $2t-2\ln|1+t|$，去求它在某两个点的函数值之差呢？这就是下面要介绍的定积分的换元积分法定理．

定理 5.3.1 设$f(x)$在$[a, b]$上连续，设变换$x=\varphi(t)$，满足以下三个条件：

(1) $\varphi(t)$在$[\alpha, \beta]$上单调连续；

(2) $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

(3) $\varphi'(t)$在$[\alpha, \beta]$上连续.

则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

证 设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则由牛顿—莱布尼兹公式得
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{5-1}$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t)\\ &= F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta\\ &= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]\\ &= F(b) - F(a)\end{aligned} \tag{5-2}$$

由式（5-1）和式（5-2）可得
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$
证毕

这个定理解决了上面提出的问题，即可以直接由以t作变量的原函数的表达式去计算两点函数值的差，下面根据定理 5.3.1 再计算一遍$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

例 5.3.1 计算$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

解 令$\sqrt{x}=t$，即$x=t^2$ $(t\geqslant 0)$，则$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，当$x=0$时，$t=0$；当$x=1$时，$t=1$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} &= \int_0^1 \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\ &= 2[t-\ln(1+t)]\Big|_0^1 = 2(1-\ln 2).\end{aligned}$$

例 5.3.2 计算$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

解 令 $x=2\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则 $dx=2\cos t dt$

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=2$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

注 5.3.1 在利用定积分的换元积分法计算定积分时，务必注意“换元必换积分的上、下限”.

例 5.3.3 设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上连续，求证：

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}0, & \text{当} f(x) \text{为奇函数时},\\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{当} f(x) \text{为偶函数时}.\end{cases}$$

证
$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx \tag{5-3}$$

$$\int_{-a}^{0}f(x)dx\xlongequal{\text{令} x=-t}\int_a^0 f(-t)(-1)dt$$

$$=\int_0^a f(-t)dt$$

$$=\int_0^a f(-x)dx=\begin{cases}-\int_0^a f(x)dx, & \text{当} f(x) \text{为奇函数时},\\ \int_0^a f(x)dx, & \text{当} f(x) \text{为偶函数时}.\end{cases}$$

代入式 (5-3)，即得

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}0, & \text{当} f(x) \text{为奇函数时},\\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{当} f(x) \text{为偶函数时}.\end{cases}$$

本例的结果，在计算中可以直接运用.

例 5.3.4 证明 $\int_{-2}^{2}\frac{x^3}{1+\sin^4 x}\cos^3 x dx=0$

证 因为 $f(x)=\frac{x^3}{1+\sin^4 x}\cos^3 x$ 为奇函数，由例 5.3.3 即得

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^3}{1+\sin^4 x}\cos^3 x\mathrm{d}x=0.$$

二、定积分的分部积分法

设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续导数，则 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$，等式两边取 x 的由 a 到 b 的积分，便得到定积分的**分部积分公式**：$(uv)\Big|_a^b=\int_a^b u\mathrm{d}v+\int_a^b v\mathrm{d}u$，

即
$$\int_a^b u\mathrm{d}v=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u.$$

例 5.3.5 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x$

解
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}(-\cos x)'$$
$$=x(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

例 5.3.6 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x.$

解
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}e^x$$
$$=e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\mathrm{d}x$$
$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\mathrm{d}e^x$$
$$=e^{\frac{\pi}{2}}-e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(-\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x.$$

所以
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x=e^{\frac{\pi}{2}}+1,$$

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1).$$

例 5.3.7 计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

解 令$\sqrt{x} = t$，即 $x = t^2 (t \geqslant 0)$，则 $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. 当 $x = 0$ 时，$t = 0$；当 $x = 1$ 时，$t = 1$，所以

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_0^1 e^t \cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int_0^1 te^t \mathrm{d}t = 2\int_0^1 t\mathrm{d}e^t$$
$$= 2te^t \Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t \mathrm{d}t = 2e - 2e^t \Big|_0^1 = 2.$$

第四节 广 义 积 分

前面讨论定积分时，总是假定被积函数$f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上有界. 但是，在实际应用中常会遇到积分区间无限或被积函数无界的情形，因此需要推广定积分的概念，即本节要讨论的无穷限广义积分和瑕积分，二者统称为**广义积分**.

一、无穷限广义积分

定义 5.4.1 设$f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，取 $b > a$，若极限 $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数$f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的**无穷限积分**，记作$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. 即，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

这时称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在或收敛. 如果上述极限不存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不存在或发散. 类似地，可定义在区间 $[-\infty, b]$ 和 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷限积分如下：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$（$c$ 为任意常数），其中当 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛时，称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；若 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 中至少有一个发散，则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

例 5.4.1　计算 $\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解　$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \arctan x\Big|_{0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.$$

注 5.4.1　如图 5－3，由定积分的几何意义知，$\int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 是由 x 轴，y 轴，$x=b$，及曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$所围成的曲边梯形的面积，因此 $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$，x 轴及 y 轴所围成的位于第一象限的“无穷曲边梯形”的面积.

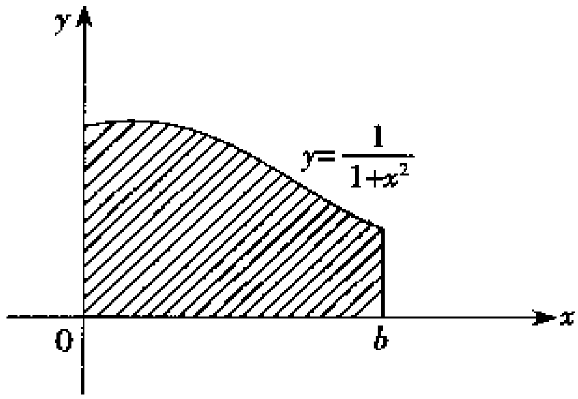

图 5－3

例 5.4.2　计算 $\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解　$$\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x\,\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_{0}^{b} + \int_{0}^{b} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-xe^{x}\Big|_0^b - e^{-x}\Big|_0^b\right)$$
$$= \lim_{b\to+\infty}(-be^{-b} - e^{-b} + 1) = 1.$$

例 5.4.3 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$的敛散性.

解 (1) 当 $\lambda = 1$ 时，有

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}} = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = +\infty;$$

(2) 当 $\lambda \neq 1$ 时，有

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Bigg|_1^b = \begin{cases}\dfrac{1}{\lambda-1}, & \lambda>1,\\ +\infty, & \lambda<1.\end{cases}$$

因此，当 $\lambda > 1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$收敛，而在 $\lambda \leqslant 1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ 发散.

*二、瑕积分

当函数$f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的某点邻近无界时，则称该点为$f(x)$ 的**瑕点**. 如 $x=1$ 就是 $f(x)=\frac{1}{x-1}$的一个瑕点. 为简单起见，以后总是假设$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上仅有一个瑕点.

定义 5.4.2 设 $x=a$ 为$f(x)$ 的瑕点，对任意小的正数 ε，若 $f(x)$ 在区间 $[a+\varepsilon, b]$ 上可积，且极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 存在，则称此极限值为$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**瑕积分**，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

此时也称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 不存在，则称

瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散．类似地，设 $x=b$ 为函数 $f(x)$ 的瑕点，则定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx.$$

设 $x=c$（$a<c<b$）为 $f(x)$ 的瑕点，则定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx.$$

若上式右端中，至少有一个发散，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散．

例 5.4.4 计算 $\int_0^1 \ln x\,dx$

解 $x=0$ 是瑕点，依定义得

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln x\,dx &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}(x\ln x-x)\Big|_\varepsilon^1\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}(-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon)=-1-\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon\ln\varepsilon,\end{aligned}$$

由洛必达法则

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon\ln\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}(-\varepsilon)=0,$$

因此

$$\int_0^1\ln x\,dx=-1.$$

例 5.4.5 判别 $\int_0^2\frac{dx}{x-1}$ 的敛散性．

解 $x=1$ 是瑕点，由于 $x=1\in(0,2)$，依定义，我们分别考虑下列两个瑕积分：

$$\int_0^1\frac{dx}{x-1}\quad 和\quad \int_1^2\frac{dx}{x-1}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{dx}{x-1}&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x-1}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln|x-1|\Big|_0^{1-\varepsilon}\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln\varepsilon=-\infty,\end{aligned}$$

所以瑕积分 $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ 发散.

例 5.4.6 讨论 $\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}dx$ 的敛散性.

解 (1) 当 $\lambda = 1$ 时，有

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\ln\varepsilon) = \infty.$$

(2) 当 $\lambda \neq 1$ 时，有

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\lambda}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Big|_\varepsilon^1$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda}, & \lambda < 1 \text{ 时}, \\ \infty, & \lambda > 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

因此当 $\lambda < 1$ 时，瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}dx$ 收敛；而当 $\lambda \geqslant 1$ 时，瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}dx$ 发散.

第五节 定积分的应用

本节讨论定积分在几何和经济学方面的应用.

平面图形的面积

定积分的几何意义表明，由连续曲线 $y=f(x)\,(f(x)\geqslant 0)$，$x$ 轴与直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形（见图 5－4）的面积为定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$.

如果在 $[a, b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$（见图 5－5）则由曲线 $y=f(x)$，

x 轴与直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx$$

或

$$S=\int_a^b \left|f(x)\right|dx.$$

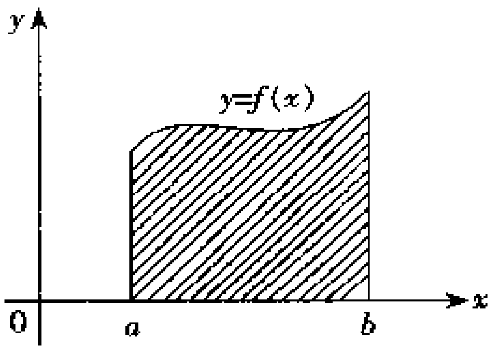

图 5－4

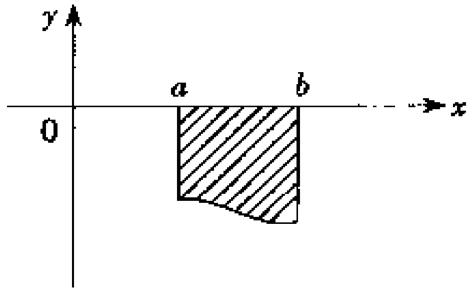

图 5－5

对于在 $[a,b]$ 上函数 $y=f(x)$ 有时取正值，有时取负值的情形（见图 5－6），则由曲线 $y=f(x)$，x 轴与直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积

$$\begin{aligned}S&=\int_a^b \left|f(x)\right|dx\\&=\int_a^{c_1} f(x)\,dx-\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\int_{c_2}^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

如果求由两条曲线所围图形的面积时，（如图 5－7、5－8）计算公式为 $S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$.

具体地，图 5－7 中图形的面积为

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx,$$

图 5－8 中图形的面积为

$$S=\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx+\int_c^b (g(x)-f(x))\,dx.$$

类似地，可计算图 5－9 至图 5－14 中阴影部分的面积.

图 5－9 中阴影部分的面积

$$S = \int_c^d \varphi(y)\,dy,$$

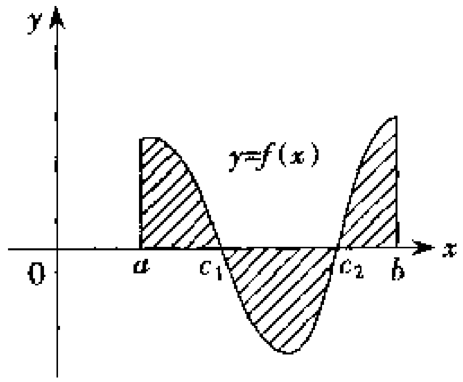

图 5－6

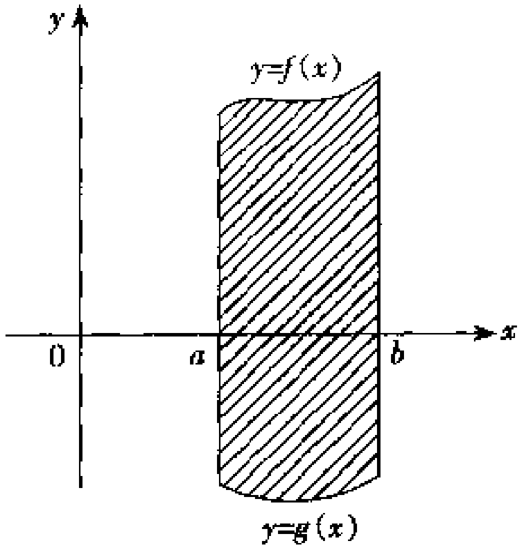

图 5－7

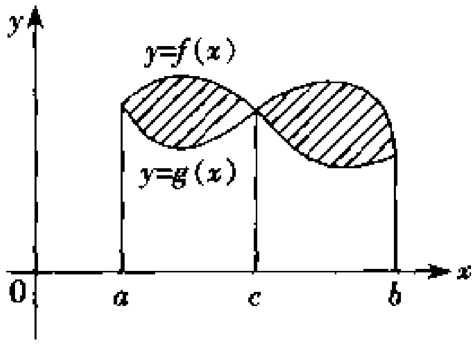

图 5－8

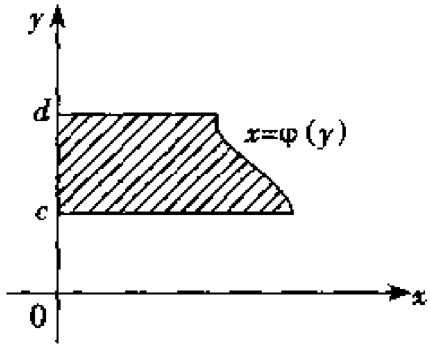

图 5－9

图 5－10 中阴影部分的面积

$$S = -\int_c^d \varphi(y)\,dy,$$

图 5－11 中阴影部分的面积

$$S = \int_c^d |\varphi(y)|\,dy$$

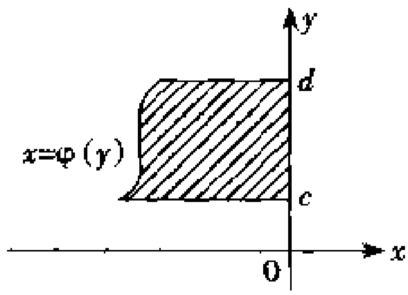

图 5－10

$$= \int_c^e \varphi(y)\,\mathrm{d}y - \int_e^d \varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

图 5 – 12 中阴影部分的面积

$$S = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y))\,\mathrm{d}y,$$

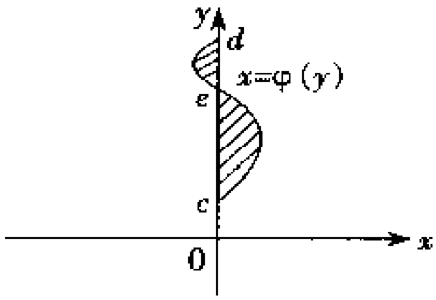

图 5 – 11

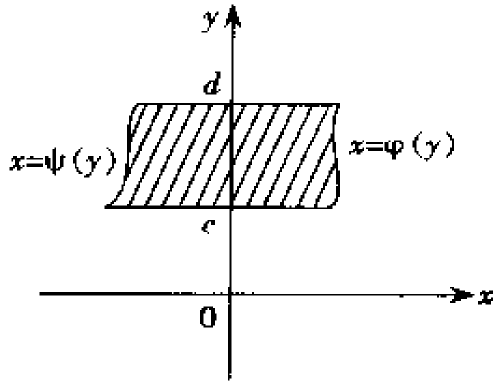

图 5 – 12

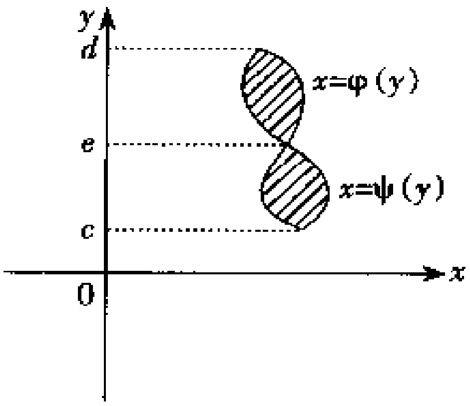

图 5 – 13

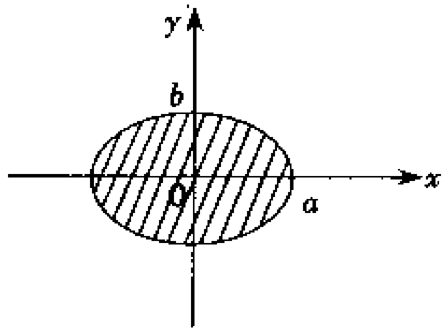

图 5 – 14

图 5 – 13 中阴影部分的面积

$$S = \int_c^e (\psi(y) - \varphi(y))\,\mathrm{d}y + \int_e^d (\varphi(y) - \psi(y))\,\mathrm{d}y.$$

例 5.5.1　求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的面积.

解　如图 5 – 14，由对称性知，椭圆面积是其第一象限面积的

4 倍，由于在第一象限 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，因此

$$S=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$

令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，所以

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}a^2$$

所以 $S=\frac{4b}{a}\times\frac{\pi}{4}a^2=\pi ab.$

在例 5.5.1 中；取 $a=b$，则可得圆面积 $S=\pi a^2$.

例 5.5.2 求由曲线 $y=\ln x$ 与直线 $x=\frac{1}{2}$，$x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

解 如图 5－15，所求面积为

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^2 |\ln x|\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^1(-\ln x)\mathrm{d}x+\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$$

$$=-\left(x\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\right)+\left(x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\mathrm{d}x\right)=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}.$$

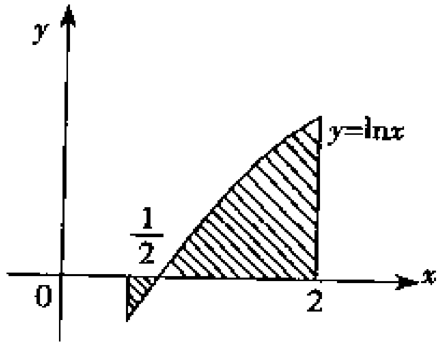

图 5－15

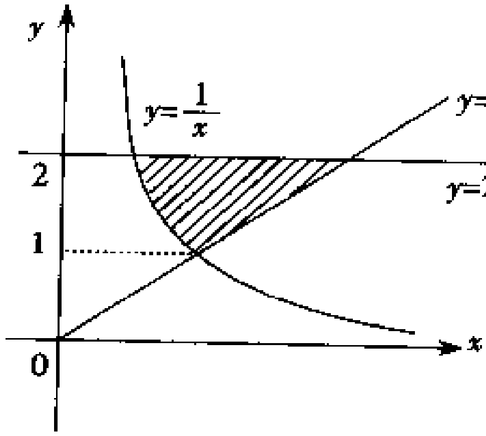

图 5－16

例 5.5.3　求由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$，$y=2$ 所围成的平面图形的面积（见图 5－16）.

解　$S=\int_1^2\left(y-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{2}-\ln|y|\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$

二、旋转体的体积

（一）平行截面面积函数为已知的立体体积

设有一立体位于垂直于 x 轴的平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间（$a<x<b$），若任意一个垂直于 x 轴的平面与此物体相交的截面面积是 x 的已知连续函数 $S(x)$.（见图 5－17），求此立体体积.

我们仍采用"分割、近似求和，取极限"的方法，推出该立体的体积计算公式.

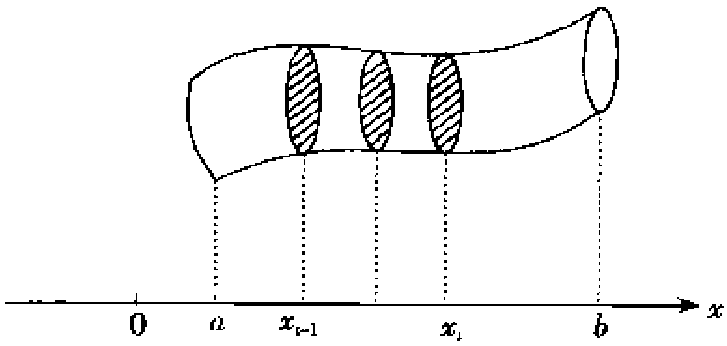

图 5－17

（1）分割

在 $[a, b]$ 内插入 $n-1$ 个不同的分点，设为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$，过每一个分点 x_i 分别作垂直于 x 轴的平面，这些平面把立体分成 n 个小薄柱体.

（2）近似求和

设第 i 个小薄柱体的体积为 V_i，取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则 V_i 近似于

以 $S(\xi_i)$ 为底，以 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$为高的柱体体积，即 $V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，这 n 个小薄柱体的体积之和近似于立体的体积 V，即$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$.

(3) 取极限

设 $\|\Delta x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$，根据定积分的定义，知

$$V = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 5.5.1 薄片的体积可近似地看作底面积为 $S(x)$ 而高度是 $\mathrm{d}x$ 的柱体的体积，即体积微元

$$\mathrm{d}v = S(x)\,\mathrm{d}x$$

对体积微元 $S(x)\,\mathrm{d}x$ 从 a 到 b 积分，就得到整个立体的体积

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

(二) 旋转体的体积

设连续函数$f(x) \geq 0$，由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周，得到一旋转体（图 5－18），我们来求它的体积. 显然，过 x 点的垂直于 x 轴的截面是半径为 $f(x)$ 的圆，截面面积为

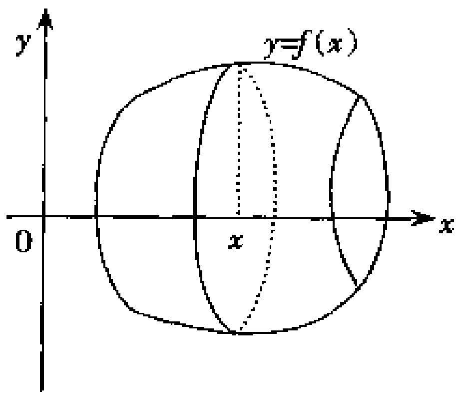

图 5－18

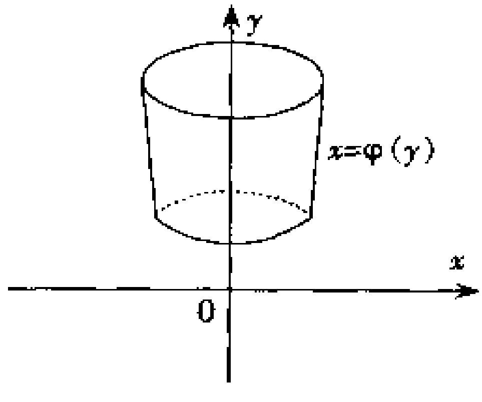

图 5－19

$$S(x)=\pi y^2=\pi f^2(x),$$

所以绕 x 轴旋转的旋转体体积为

$$V_x=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

同理，可得绕 y 轴旋转的旋转体（图 5－19）的体积为

$$V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\,\mathrm{d}y.$$

例 5.5.4　求由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 分别绕 x 轴与 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解　$V_x=\pi\int_{-a}^{a}y^2\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a y^2\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

同理可得

$$V_y=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

特别地，当 $a=b=R$ 时，可得球体体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

三、定积分在经济分析中的应用

在经济领域中，经常遇到已知经济总量（总成本、总收益、总产量等）函数 $f(x)$ 的变化率，即边际函数 $f'(x)$，求在 x 的变化区间 $[x_0, x]$ 上的经济总量函数的问题.

由 $\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(x_0)$ 得所求经济总量函数为

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

例 5.5.5（产品总量问题）　设某产品的总量对时间（单位：天）t 的变化率为：

$Q'(t)=80+20t-3t^2$，且 $Q(0)=0$，

求：(1) 总产量函数 $Q(t)$；

(2) 投产多少天后，能使平均日产量达到最大值？

解 (1) 注意到 $Q(0)=0$，则

$$Q(t)=\int_0^t Q'(x)\mathrm{d}x=\int_0^t(80+20x-3x^2)\mathrm{d}x$$
$$=80t+10t^2-t^3.$$

(2) 平均日产量函数为 $\overline{Q(t)}=\dfrac{Q(t)}{t}=80+10t-t^2$. 显然，$\overline{Q(t)}'=10-2t$，令 $\overline{Q}'(t)=0$，得 $t=5$，又 $\overline{Q}''(5)=-2<0$，因此，投产 5 天后能使平均日产量达到最大值.

例 5.5.6（总成本问题） 设某商品的需求函数为 $Q=4(19-p)$，其中 Q 为需求量（单位：件），p 为单价（单位：百元），又设生产此种商品的边际成本函数为 $C'(Q)=3+\dfrac{1}{2}Q$，且产品全部售出，试求：(1) 若 $Q=0$ 时，成本为 8（百元），求总成本函数.

(2) 产量为多少时，总利润最大？最大总利润为多少.

解 (1) 由于 $C(0)=8$，因此总成本函数为

$$C(Q)=C(0)+\int_0^Q C'(x)\mathrm{d}x$$
$$=8+\int_0^Q\left(3+\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$$
$$=8+3Q+\frac{1}{4}Q^2.$$

(2) 由 $Q=4(19-p)$ 得 $p=19-\dfrac{Q}{4}$，于是总收益函数 $R(Q)=p\cdot Q=19Q-\dfrac{Q^2}{4}$，总利润函数

$L(Q)=R(Q)-C(Q)=-8+16Q-\dfrac{1}{2}Q^2$，令 $L'(Q)=16-Q=0$ 得 $Q=16$，而 $L''(16)=-1<0$，因此 $Q=16$（件）时总利润最大，且最大利润为

$$L(16)=-8+16\times16-\frac{1}{2}\times16^2=120\ (百元).$$

习 题 五

1. 不计算积分，比较下列积分值的大小：

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$

(2) $\int_3^4 \ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_3^4 (\ln x)^3\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\mathrm{d}x$

(4) $\int_1^2 \sqrt{5-x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 \sqrt{x+1}\mathrm{d}x$

2. 利用估值定理证明不等式：

(1) $\frac{2}{5}<\int_1^2\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x<\frac{1}{2}$　　(2) $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}<\int_0^2 e^{x^2-x}\mathrm{d}x<2e^2$

3. 求下列函数的导数：

(1) $F(x)=\int_0^x t\cos^3 t\mathrm{d}t$　　(2) $F(x)=\int_x^3\sqrt{9-t^2}\mathrm{d}t$

(3) $F(x)=\int_0^{2x}\cos3t\mathrm{d}t$　　(4) $F(x)=\int_x^{x^2}te^t\mathrm{d}t$

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x^2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t$

5. 求函数 $f(x)=\int_0^x te^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的极值.

6. 利用牛顿—莱布尼兹公式计算下列积分：

(1) $\int_0^1 x^4\mathrm{d}x$　　(2) $\int_2^e\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x$

(5) $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$　　(6) $\int_4^9(\sqrt{x}+2)\mathrm{d}x$

(7) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(8) $\int_1^3|x-2|\mathrm{d}x$

(9) $\int_{-1}^1\sqrt{x^2}\mathrm{d}x$　　(10) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

(11) 设 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 0,\\ x^2-1 & x>0\end{cases}$　求 $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

7. 用换元法计算下列定积分:

(1) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x}}$　　(2) $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

(3) $\int_1^2\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^2|x-1|^5\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^1 x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$　　(6) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$

8. 用分部积分法求下列积分:

(1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arccos x\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$　　(4) $\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$　　(6) $\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x$

(7) $\int_0^4\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　(8) $\int_0^{\pi}x\cos^2 x\mathrm{d}x$

9. 判断下列广义积分的敛散性;若收敛,求其值:

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$;

(5) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(6) $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$.

10. 求下列各平面图形的面积：

(1)由 $y=1-x^2$ 和 $y=0$ 所围图形的面积.

(2)由 $y=x^2$ 和 $y=2-x^2$ 所围图形的面积.

(3)由 $y=x^2+1$ 和 $x+y=1$ 所围图形的面积.

(4)由 $y=x^2,4y=x^2$ 和 $y=1$ 所围图形的面积.

(5)由 $y=x^2,y=x$ 和 $y=2x$ 所围图形的面积.

11. 求下列旋转体体积：

(1)由 $y=\sqrt{x},x=1$ 和 $y=0$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所得立体.

(2)由 $y=\sin x,x=\frac{\pi}{2}$ 和 $y=0$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所得立体.

(3)由 $x+2y=2,y=0$ 和 $x=0$ 所围平面图形绕 y 轴旋转所得立体.

12. 已知某产品生产 Q 单位时的边际成本

$C'(Q)=2+0.4Q$，固定成本为 3 万元，若该产品的销售价 $p=10-\frac{Q}{5}$，且产品可以全部售出，试求：

(1) 总成本函数.

(2) 产量为多少时，总利润最大？最大利润为多少？

13. 已知某产品的边际收益函数为 $R'(Q)=10(10-Q)e^{-\frac{Q}{10}}$,其中 Q 为销售量,$R=R(Q)$ 为总收益，求该产品的总收益函数.

第六章　多元函数微积分

在前几章讨论的都是只有一个自变量的函数，即一元函数的微积分．但实际问题中往往要涉及多方面的因素，一个变量的变化可能依赖于多个其他变量的变化，这时就需引入多元函数的概念．本章在一元函数微积分的基础上，着重讨论二元函数的微积分，它是一元函数微积分的推广和发展．二者有许多类似之处，也有许多本质上的差别．

第一节　空间解析几何简介

为帮助读者直观地理解二元函数微积分中的有关概念，本节先简单介绍空间解析几何的一些基本知识．

一、空间直角坐标系

为了确定平面上任意点的位置，需要建立平面直角坐标系．同样，为了确定空间中任意点的位置，需要引进空间直角坐标系．

在空间任意选取一点 O，过点 O 引三条互相垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，并按右手规则（如图 6－1），规定 Ox、Oy，Oz 的正方向，即沿 Ox 轴到 Oy 轴方向握住 Oz 轴，此时拇指指向 Oz 轴的正方向．再规定一个长度单位．这时就建立了一个**空间直角坐标系**．其中，点 O 称为**坐标原点**，Ox，Oy，Oz 称为**坐标轴**，并分别称为 x 轴，y 轴，z 轴．

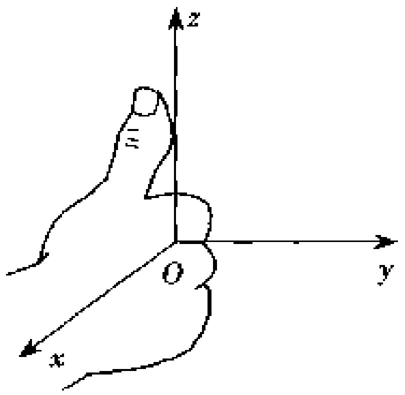

图 6 - 1

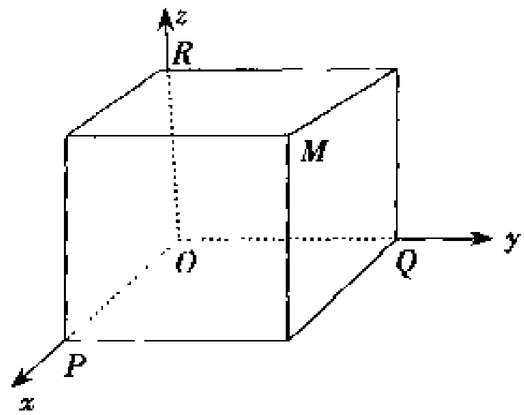

图 6 - 2

每两条坐标轴确定一个平面，称为**坐标平面**，分别称为 xy，yz，zx 平面. 三个坐标平面将空间分为 8 个部分，称为 8 个**卦限**. 把含有 x 轴正向，y 轴正向，z 轴正向的那个卦限称为**第一卦限**.

设 M 为空间的任意一点，过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的平面，这三个平面分别与三个坐标轴交于 P、Q，R 三点（如图 6－2）. 设 $OP=x_0$，$OQ=y_0$，$OR=z_0$，则点 M 惟一确定了一个三元有序数组 (x_0, y_0, z_0)；反之，对任意一个三元有序数组 (x_0, y_0, z_0)，在 x，y，z 三个轴上分别取点 P、Q，R，使 $OP=x_0$，$OQ=y_0$，$OR=z_0$，然后过 P，Q，R 三点分别作垂直于 x，y，z 轴的平面，这三个平面相交于一点 M，则由一个三元有序数组 (x_0, y_0, z_0) 又惟一地确定了空间的一个点 M.

于是，空间任意一点 M 与一个三元有序数组 (x_0, y_0, z_0) 建立了一一对应关系. 称这个三元有序数组为点 M 的**坐标**，记为 $M(x_0, y_0, z_0)$.

下面给出一些特殊点的坐标：

坐标原点的坐标为 $(0, 0, 0)$；x 轴上点的坐标为 $(x, 0, 0)$；y 轴上点的坐标为 $(0, y, 0)$；z 轴上点的坐标为 $(0, 0, z)$；xy 平面上点的坐标为 $(x, y, 0)$；yz 平面上点的坐标为 $(0, y, z)$；zx 平面上点的坐标为 $(x, 0, z)$.

二、空间任意两点间的距离

可以证明，空间任意两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离公式为：

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，空间任意一点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点之间的距离公式为：

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

如果点 M_1，M_2 均位于 xy 平面上，即 $z_1=z_2=0$，则得到我们已知的 xy 平面上任意两点之间的距离公式

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

例 6.1.1 求在 z 轴上与点 $M(1, 2, -1)$ 和点 $N(-1, 3, -2)$ 等距离的点 P.

解 因为所求的点 P 在 z 轴上，所以该点的坐标为 $P(0, 0, z)$，依题意，有

$$|PM| = |PN|.$$

即

$$\sqrt{(0-1)^2+(0-2)^2+(z+1)^2} = \sqrt{(0+1)^2+(0-3)^2+(z+2)^2}.$$

两边去根号，解得 $z=-4$.

所以，所求的点为 $P(0, 0, -4)$.

三、空间曲面与方程

与平面解析几何中建立曲线与方程的对应关系一样，可以建立空间曲面与包含三个变量的方程 $F(x, y, z)=0$ 的对应关系.

定义 6.1.1 如果曲面 S 上任意一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z)=0$，而不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x, y, z)=0$，那么方程 $F(x, y, z)=0$ 称为**曲面 S 的方程**，而曲面 S 称为方

程 $F(x, y, z)=0$ 的图形（如图 6-3）.

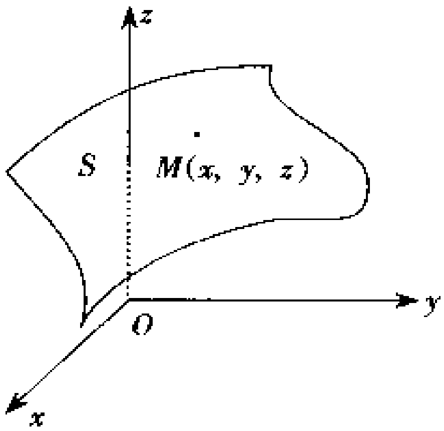

图 6-3

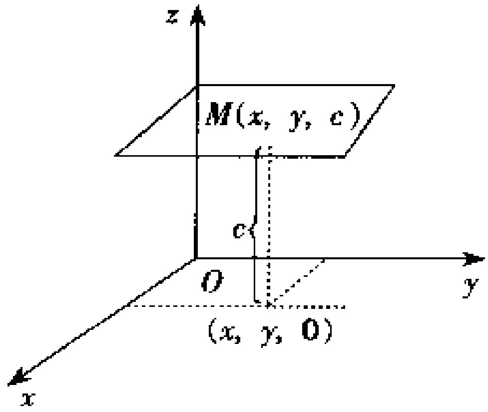

图 6-4

以下只介绍平面和几种常见的曲面及其方程.

（一）平面

平面是空间中最简单且最重要的曲面.

例 6.1.2　作 $z=c$（c 是常数）的图形.

解　方程 $z=c$ 中不含 x, y, 这说明 x, y 取任何值时，总有 $z=c$，其图形为距离 xOy 平面 $|c|$ 个单位，且平行于 xOy 平面的平面. 此平面可由 xOy 平面向上（$c>0$）或向下（$c<0$），平行移动 $|c|$ 个单位面得到（如图 6-4）.

例 6.1.3　求到两定点 $M_1(1,\ -1,\ 1)$ 与 $M_2(2,\ 1,\ -1)$ 等距离的点 $M(x,\ y,\ z)$ 的轨迹方程.

解　由于 $|M_1M|=|M_2M|$，所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}$$
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2},$$

化简得点 M 的轨迹方程为

$$2x+4y-4z-3=0.$$

从立体几何中知，所求轨迹应为线段 M_1M_2 的中垂面，此平面

的方程为上面的三元一次方程.

前面两个例子所讨论的方程都是三元一次方程，所考察的图形都是平面. 可以证明平面的一般方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

其中，A，B，C，D 均为常数，且 A，B，C 不全为零.

（二）柱面

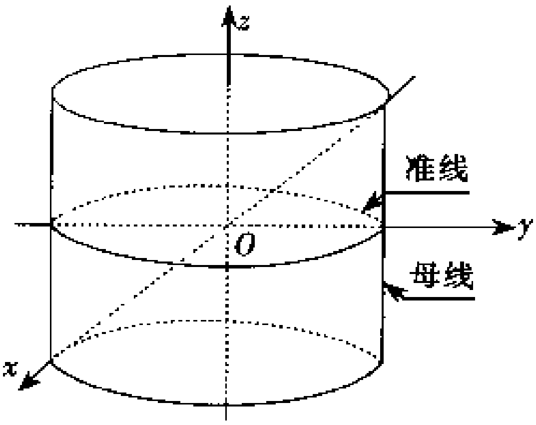

图 6－5

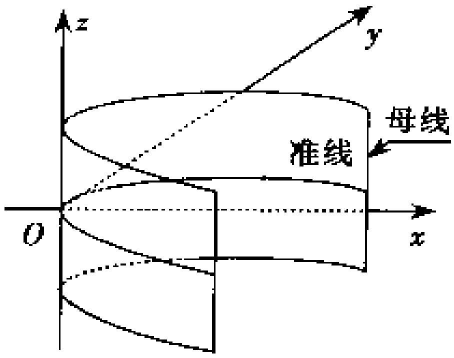

图 6－6

直线 L 沿给定曲线 C 平行移动所形成的曲面，称为**柱面**. 动直线 L 称为柱面的**母线**，定曲线 C 称为柱面的**准线**.

例 6.1.4 作方程 $x^2+y^2=R^2$ 的图形.

解 由于方程中不含 z，这说明只需 x 与 y 满足方程 $x^2+y^2=R^2$，而 z 可取任意值. 由于 $x^2+y^3=R^2$ 表示 xOy 平面上以原点为圆心，以 R 为半径的圆. 由此，在空间中这个方程所表示的曲面是由平行于 z 轴的直线沿 xOy 平面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 平行移动面形成的圆柱面.

其中，xOy 平面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 称为此圆柱面的准线，过准线且平行于 z 轴的直线称为此圆柱面的母线（如图 6－5）.

例 6.1.5 方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴，准线是 xOy 平面上抛物线 $y^2=2x$ 的抛物柱面（如图 6－6）.

（三）球面

例 6.1.6 求球心为点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 R 的球面方程.

解 设球面上任意一点为 $M(x, y, z)$，依题意，有 $|MM_0| = R$，所以

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

这就是半径为 R，球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的球面方程，它是一个三元二次方程（如图 6－7）.

（四）旋转抛物面

例 6.1.7 函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是一个**旋转抛物面**（如图6－8）.

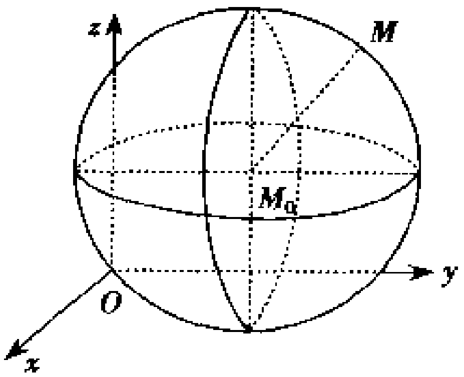

图 6－7

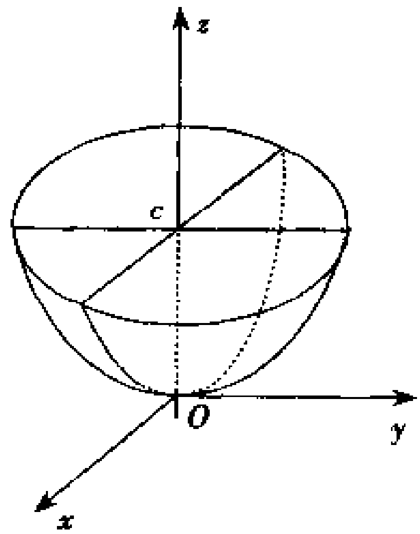

图 6－8

（五）双曲抛物面

例 6.1.8 函数 $z=y^2-x^2$ 的图形表示**双曲抛物面**，也称**马鞍**

面（如图 6 - 9）.

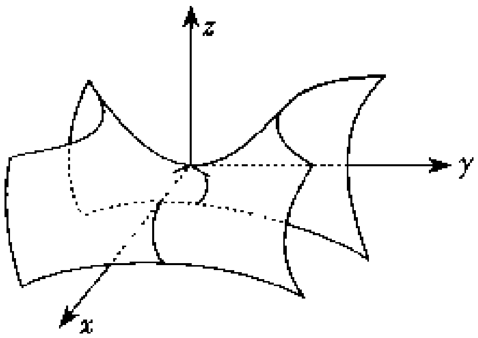

图 6 - 9

四、平面区域的概念

（一）平面区域

在 xOy 平面上，平面区域是指整个 xOy 平面或在 xOy 平面上由一条或几条曲线围成的部分，围成区域的曲线称为该区域的**边界**，包括边界在内的平面区域称为**闭区域**；不包括边界在内的区域称为**开区域**；包括部分边界在内的区域称为**半开区域**．如果区域延伸到无限远处，则称这个区域为**无界区域**．否则，称为**有界区域**．

有界区域总可以包含在一个以原点为圆心的相当大的圆域内．

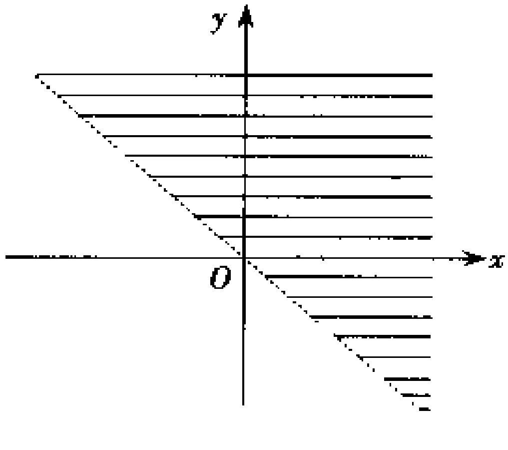

图 6 - 10

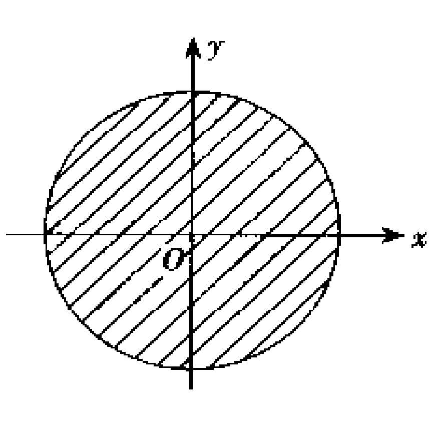

图 6 - 11

例如，由不等式 $x+y>0$ 确定的区域是一个无界区域（如图 6-10）；由不等式 $x^2+y^2\leqslant 1$ 确定的区域是一个有界闭区域（如图 6-11）.

（二）邻域

设 $P_0(x_0, y_0)$ 为 xOy 平面上一定点，δ 为正数. 以 P_0 为圆心，δ 为半径的开圆域

$$D_\delta(P_0)=\{(x, y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

称为点 P_0 的 **δ-邻域**（如图 6-12）.

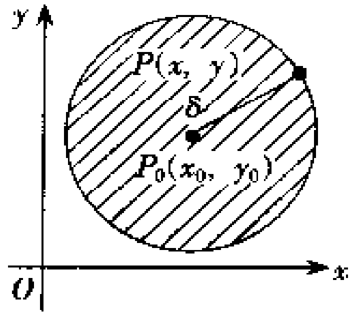

图 6-12

第二节　多元函数

有了前一节的准备知识，从这一节开始讨论多元函数的微积分. 由于多元函数微积分是由一元函数微积分发展起来的，所以，在叙述过程中与一元函数微积分相同之处则往往平行地移植过来，同时也要注意它们的不同点.

一、二元函数与多元函数的概念

在实际问题中，一个量的变化，往往涉及多种因素，因此产生了一个变量与多个变量之间的相互依赖关系. 例如，底面半径为 r，高为 h 的圆柱体体积为 $V=\pi r^2h$，$r, h>0$. 因此体积 V 的大小依赖于半径 r 与高 h.

为了更好地研究这种依赖关系，下面引入二元函数的定义.

定义 6.2.1　设 D 为一个非空的二元有序数组的集合，f 为一对应规则，若对于每一个有序数组 $(x, y)\in D$，都有惟一确定的实数 z 与之对应，则称对应规则 f 为定义在集合 D 上的一个**二元函数**. 通常记为

$$z=f(x, y), \quad (x, y)\in D.$$

其中，x 和 y 称为**自变量**，z 称为**因变量**，集合 D 称为函数 $z=f(x, y)$ 的**定义域**，记为 D_f. 对于 $(x_0, y_0)\in D$ 所对应的值，记为

$$z_0=f(x_0, y_0) \quad 或 \quad z\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f(x_0, y_0),$$

称为当 $(x, y)=(x_0, y_0)$ 时，函数 $z=f(x, y)$ 的**函数值**. 全体函数值所成的集合

$$\{z\,|\,z=f(x, y), (x, y)\in D\}$$

称为函数的**值域**，记为 Z 或 Z_f.

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x, y, z)$ 以及三元以上的函数. 二元及二元以上的函数统称为**多元函数**.

二元函数的定义域一般来说是一个平面区域.

例 6.2.1 函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的定义域为所有适合于 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 的点 (x, y) 的集合，即圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上及其内部的全体点（如图 6－13）.

例 6.2.2 函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ 的定义域是所有适合 $xy>0$ 的点的集合，即不包括坐标轴的第Ⅰ，第Ⅲ象限的所有的点（如图 6－14）.

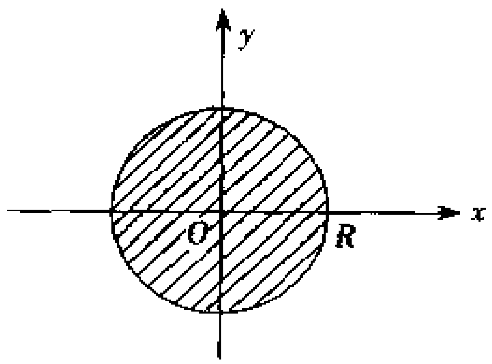

图 6－13

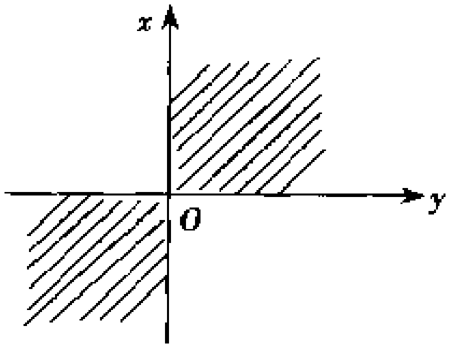

图 6－14

二、二元函数的极限与连续

二元函数的极限与连续与一元函数十分类似.

定义 6.2.2 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的附近有定义（点 P_0 可除外），A 是一个常数. 如果点 $P(x, y)$ 沿任意路径趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时；相应地 $f(x, y)$ 无限趋近于常数 A，我们就说当 (x, y) 趋于 (x_0, y_0) 时. 函数 $f(x, y)$ 以 A 为极限（或称 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时，$f(x, y)$ 以 A 为极限)，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A.$$

例如，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1-x-y)=1.$

注 6.2.1 如果设 $|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho$ 则这里所说当点 $P(x, y)$ 沿任意路径趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，$f(x, y)$ 无限趋近于常数 A 是指：只要 $\rho\to 0$ $(\rho\neq 0)$，就有 $|f(x, y)-A|\to 0$. 所以上述极限又可记为

$$\lim_{\rho\to 0} f(x, y)=A.$$

定义 6.2.3 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)$，则称二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) **连续**，否则称点 (x_0, y_0) 是函数 $z=f(x, y)$ 的**间断点**.

如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称函数 $f(x, y)$ **在区域 D 内连续**.

与一元函数类似，二元连续函数有如下性质：

1. 二元连续函数的和，差，积，商（分母不为零）仍为连续函数.

2. 有界闭区域上的二元连续函数 $f(x, y)$，一定能取得最大值和最小值.

第三节 偏导数与全微分

一、偏导数

在前面一元函数部分，由函数关于自变量的变化率问题引进了导数的概念. 现在我们考虑二元函数的变化率. 因为函数 $z=f(x, y)$ 中有两个独立的变量 x，y，它们可取互不依赖的改变量 Δx，Δy，这时函数值的改变量

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

与 Δx，Δy 都有关. 为了讨论 Δz 的变化情况，我们把问题简化：假定两个自变量中只有一个改变，而另一个保持不变. 如果我们把这种情况研究清楚了，则当 x，y 都改变时，z 的变化规律也就容易掌握了.

定义 6.3.1 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义. 如果固定 y_0 后，一元函数 $f(x, y_0)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于自**变量 x 的偏导数**，记为 $f'_x(x_0, y_0)$ 或记为 $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$，$z'_x\Big|_{(x_0, y_0)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)}$.

类似地，可定义函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于自变量 y 的偏导数. 即若极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处**关于自变量 y 的偏导数**，记为 $f'_y(x_0, y_0)$，或记为 $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$，$z'_y\Big|_{(x_0,y_0)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 的偏导数 $f'_x(x, y)$ 存在，那么这个偏导数就是 x，y 的函数，这时把它称为函数 $z=f(x, y)$ **关于自变量 x 的偏导函数**，记为

$$f'_x(x, y) \quad 或 \quad \frac{\partial f}{\partial x},\ z'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x}.$$

类似地，可定义函数 $z=f(x, y)$ **关于自变量 y 的偏导函数**. 记为

$$f'_y(x, y) \quad 或 \quad \frac{\partial f}{\partial y},\ z'_y,\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

由偏导数的定义可知，函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x（或对 y）的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$（或 $f'_y(x_0, y_0)$）就是偏导函数 $f'_x(x, y)$（或 $f'_y(x,y)$）在点 (x_0, y_0) 处的函数值. 在不引起混淆的情况下，我们把偏导函数简称偏导数.

由偏导数的定义可知，求二元函数对某个自变量的偏导数，只需将另一个自变量看成常数，用一元函数求导法即可.

例 6.3.1　设 $f(x, y)=xy+x^2+y^3$.

求 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$ 及 $f'_x(0, 1)$，$f'_x(1, 0)$，$f'_y(0, 2)$，$f'_y(2, 0)$.

解　求 $f'_x(x, y)$ 时，把 y 看作常数，用一元函数求导法得

$$f'_x(x, y)=y+2x,$$

于是 $f'_x(0, 1)=1$，$f'_x(1, 0)=2$.

求 $f'_y(x, y)$ 时，把 x 看作常数，用一元函数求导法得

$$f'_y(x, y)=x+3y^2,$$

于是 $f'_y(0, 2)=12$，$f'_y(2, 0)=2$.

例 6.3.2　设 $f(x, y)=e^{xy^2}$. 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解　求 $f'_x(x, y)$ 时，把 y 看作常数，这时 e^{xy^2} 是关于 x 的复合函数，按一元函数的链式求导法则得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(\mathrm{e}^{xy^2})}{\partial x}=\mathrm{e}^{xy^2}\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}=y^2\mathrm{e}^{xy^2}.$$

类似地，可得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(\mathrm{e}^{xy^2})}{\partial y}=\mathrm{e}^{xy^2}\frac{\partial(xy^2)}{\partial y}=2xy\mathrm{e}^{xy^2}.$$

二、高阶偏导数

一般地，二元函数 $z=f(x, y)$ 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$仍为自变量 x，y 的二元函数. 因此有一个继续求偏导数的问题. 如果这两个偏导数关于 x，y 的偏导数还存在，则称它们为二元函数 $z=f(x, y)$ 的**二阶偏导数**. 按照对两个自变量的求导次序不同，二元函数有下列四个二阶偏导数，它们分别为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x, y)=z''_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x, y)=z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x, y)=z''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x, y)=z''_{yy}.$$

其中 z''_{xx}和 z''_{yy}称为函数 $z=f(x, y)$ 对 x 和对 y 的**二阶偏导数**，z''_{xy}和 z''_{yx}称为函数 $z=f(x, y)$ 对 x 和对 y 的**二阶混合偏导数**.

类似地，可以定义更高阶的偏导数. 一般来说，$z=f(x, y)$ 的 $n-1$ 阶偏导数的偏导数，称为 $z=f(x, y)$ 的 **n 阶偏导数**.

例 6.3.3 求 $z=x^4+y^4-4x^2y^3$ 的各二阶偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^3$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^3$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-24xy^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-12x^2y^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-24x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-24xy^2.$$

例 6.3.4　求 $z=x^2ye^y$ 的各二阶偏导数.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=2xye^y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2ye^y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(1+y)e^y.$

$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2(1+y)e^y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2(2+y)e^y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2x(1+y)e^y.$

上面两例中都有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，即这些函数关于 x，y 求偏导数的次序可以交换.

可以证明：在二阶混合偏导数是 x，y 的连续函数时，这两个混合偏导数相等.

三、全微分

对于一元函数 $y=f(x)$，我们已经知道，当 $f(x)$ 为可导函数时，有

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\approx dy=f'(x)dx.$$

对于二元函数 $z=f(x,\ y)$，当自变量 x，y 分别有改变量 Δx，Δy 时，函数的改变量为 $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$. 那么，$\Delta z$（称为全改变量）将如何作近似计算？为此，我们引入二元函数全微分的概念.

（一）引例

我们先考虑矩形面积随边长变化而变化的情况. 设矩形的边长分别为 x 和 y，其面积为 s. 显然，s 是 x，y 的二元函数

$$s=xy.$$

如果边长 x，y 分别取得改变量 Δx，Δy，则面积 s 相应地有一个改变量

$$\begin{aligned}\Delta s &= (x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy\\ &= y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

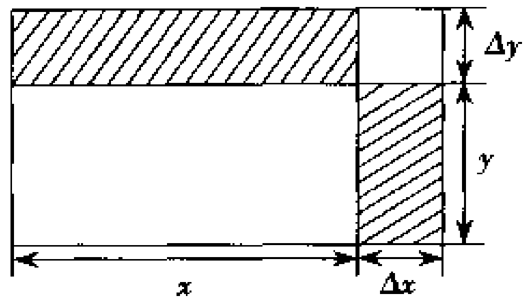

图 6－15

上式由两部分构成：

第一部分：$y\Delta x + x\Delta y$ 是 Δx、Δy 的线性函数，称为 Δs 的线性主部，如图 6－15 中，阴影部分两个小长方形面积的和；

第二部分：$\Delta x\Delta y$ 是当 $\Delta x \to 0$，$\Delta y \to 0$ 时，比 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 较高阶的无穷小量．若以 $y\Delta x + x\Delta y$ 近似地表示 Δs，而将 $\Delta x\Delta y$ 略去，则其差 $\Delta s-(y\Delta x + x\Delta y)$ 是一个比 ρ 较高阶的无穷小量．此时，称面积的改变量 Δs 的线性主部 $y\Delta x + x\Delta y$ 为面积 $s=xy$ 的全微分．

（二）全微分的定义

考虑用自变量的线性函数 $A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ 来近似代替函数的全增量问题，可给出如下定义．

定义 6.3.2 对于自变量 x，y 在点 $(x_0,\ y_0)$ 处的改变量 Δx，Δy，如果函数 $z=f(x,\ y)$ 相应的改变量

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)$$

可以表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中，A 和 B 是与 Δx，Δy 无关的 x，y 的函数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，

$o(\rho)$ 为当 $\rho\to0$ 时比 ρ 高阶的无穷小量，则称 Δz 的线性主部 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,\ y)$ 在点（x_0，y_0）处的**全微分**，记为 dz，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y,$$

并称函数 $z=f(x,\ y)$ 在点（x_0，y_0）处**可微**.

（三）可微、偏导数与连续的关系

如何确定表达式 $dz=A\Delta x+B\Delta y$ 中的 A，B，以及二元函数的全微分、偏导数与连续性之间的关系，我们有以下三个基本定理.

定理 6.3.1 若函数 $z=f(x,\ y)$ 在点（x_0，y_0）处可微，则该函数在点（x_0，y_0）处的偏导数存在，且有

$$A=f'_x(x_0,\ y_0),\ B=f'_y(x_0,\ y_0)$$

于是，$dz=f'_x(x_0,\ y_0)\ \Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y$.

证 由函数 $z=f(x,\ y)$ 在点（x_0，y_0）处可微，有

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\ (\rho\to0),$$

显然，当 y 保持不变时，$\Delta y=0$，上式变为

$$\Delta z=A\Delta x+o(|\Delta x|).$$

两边同时除以 Δx 得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}.$$

当 $\Delta x\to0$ 时，有

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}=0,$$

所以

$$f'_x(x_0,\ y_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=A.$$

同理可证，$f'_y(x_0,\ y_0)=B$. 证毕

如果设 $z=f(x,\ y)=x$，则 $dz=dx=\Delta x$，同理有 $dy=\Delta y$.

于是

$$dz=f'_x(x_0,\ y_0)dx+f'_y(x_0,\ y_0)dy.$$

若函数在任意点 $(x,\ y)$ 处可微，则有

$$dz = f'_x(x,\ y)dx + f'_y(x,\ y)dy.$$

定理 6.3.2 若函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 处可微，则该函数在点 $(x_0,\ y_0)$ 处连续.

证明略.

定理 6.3.3 若函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 的某邻域内偏导数存在且连续，则该函数在点 $(x_0,\ y_0)$ 处可微.

证明略.

由上述三个定理可知，二元函数的可微、偏导数存在与连续之间，有如下关系：

$$\text{偏导数存在且连续} \longrightarrow \text{可微} \begin{array}{l} \nearrow \text{偏导数存在} \\ \searrow \text{连续} \end{array}$$

但反之不一定成立.

求全微分时，先求函数的偏导数，然后代人微分公式 $dz = f'_x(x,\ y)dx + f'_y(x,\ y)dy$ 即可.

例 6.3.5 求 $z=x^2+y^2$ 的全微分.

解 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$，有

$$dz = 2x dx + 2y dy.$$

例 6.3.6 求函数 $z=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 的全微分.

解 由

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'_x = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left[\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'_y = \frac{1}{2\sqrt{xy}},$$

则全微分

$$dz = -\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}dx + \frac{1}{2\sqrt{xy}}dy.$$

例 6.3.7 求 $z=e^{xy}$ 的全微分，及 $x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.01$，$\Delta y=0.02$ 时的全微分的值.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$，则全微分

$$dz=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy.$$

把 $x=1$，$y=1$，$dx=\Delta x=0.01$，$dy=\Delta y=0.02$ 代入上式得

$$dz=0.03e.$$

由二元函数的全微分的定义可知，若函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 可微，则函数的全增量可表示为

$$\Delta z\approx dz=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\ \Delta y,$$

或

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

用这两个公式可以计算二元函数的近似值.

例 6.3.8 计算 $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$ 的近似值.

解 设 $z=f(x,\ y)=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)$. 令 $x_0=1$，$\Delta x=0.03$，$y_0=1$，$\Delta y=-0.02$. 于是

$$f(x_0,\ y_0)=f(1,\ 1)=\ln(\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1)=0.$$

又

$$f'_x(x,\ y)=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)\sqrt[3]{x^2}},$$

$$f'_y(x,\ y)=\frac{1}{4(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)\sqrt[4]{y^3}},$$

于是

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_x(1,1)=\frac{1}{3},$$

$$f'_y(x_0,y_0)=f'_y(1,1)=\frac{1}{4}.$$

所以

$$\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)\approx\frac{1}{3}\times0.03+\frac{1}{4}\times(-0.02)=0.005.$$

例 6.3.9 已知边长 $x=6$ 米，$y=8$ 米的矩形，求当 x 边增加 5 厘米，y 边减少 10 厘米时，此矩形的对角线变化的近似值.

解 设此矩形的对角线长为 z，则

$$z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

由题意可知，其对角线变化的近似值为

$$\Delta z\approx \mathrm{d}z=f_x'(x_0,\ y_0)\Delta x+f_y'(x_0,\ y_0)\Delta y,$$

$$=\frac{x_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}\Delta x+\frac{y_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}\Delta y$$

取 $x_0=6$，$\Delta x=0.05$，$y_0=8$，$\Delta y=-0.1$，代入上式，得

$$\Delta z\approx \mathrm{d}z=\frac{6}{10}\times 0.05+\frac{8}{10}\times(-0.1)=-0.05.$$

由此可知，此时对角线变化的近似值为 -0.05 米，即此时对角线减少约 5 厘米.

第四节 复合函数微分法及隐函数微分法

一、复合函数微分法

与一元复合函数求导类似，二元复合函数微分法也有相应的"链式求导法". 但是由于复合的情况比较复杂，因而链式法则的形式也多种多样. 这里只介绍几种基本的形式.

设 $z=f(u,v)$ 是自变量 u 和 v 的二元函数，而 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 是自变量 x，y 的二元函数，则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 是 x，y 的**复合函数**. $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 称为**中间变量**. 对于这种类型的复合函数的偏导数，有下面的定理.

定理 6.4.1 若函数 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 在点 $(x,\ y)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$ 都存在，且在对应于 (x,y) 的点 (u,v) 处，

函数 $z=f(u,v)$ 可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 对 x 及 y 的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\tag{4-1}$$

为便于大家记忆公式（4－1），画出以下图示

$$z\begin{cases}u-x\\v-x,\end{cases}\qquad z\begin{cases}u-y\\v-y.\end{cases}$$

由此变量 z，u，v，x，y 间的关系便一目了然，式（4－1）也就容易记忆了. 例如求 z 对 x 的偏导数时，就看从 z 到 x 有几条线，只要沿每条线如同一元函数那样求复合函数的导数（注意这里应是偏导数），再相加就得到式（4－1），这就是二元函数的复合函数微分法的链式求导法则.

例 6.4.1　求 $z=(x^2+y^2)^{xy}$ 的偏导数.

解　引进中间变量 $u=x^2+y^2$，$v=xy$，则 $z=u^v$，z 是 x，y 的复合函数. 而

$$\frac{\partial z}{\partial u}=vu^{v-1},\ \frac{\partial z}{\partial v}=u^v\ln u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x.$$

代入公式（4－1），得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=vu^{v-1}2x+u^v\ln u\cdot y=u^v(2xvu^{-1}+y\ln u)\\&=(x^2+y^2)^{xy}\left[\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+y\ln(x^2+y^2)\right],\\\frac{\partial z}{\partial y}&=vu^{v-1}2y+u^v\ln u\cdot x\\&=(x^2+y^2)^{xy}\left[\frac{2xy^2}{x^2+y^2}+x\ln(x^2+y^2)\right].\end{aligned}$$

例 6.4.2　设 $z=e^u\sin v$，而 $u=xy$，$v=x+y$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由于

$$\frac{\partial z}{\partial u}=e^{u}\sin v,\quad \frac{\partial z}{\partial v}=e^{u}\cos v,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x,\ \frac{\partial v}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{u}\sin v\cdot y+e^{u}\cos v\cdot 1=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{u}\sin v\cdot x+e^{u}\cos v\cdot 1=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].$$

特别地，如果 $z=f(u,\ v)$，而 $u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$，则 z 就是 x 的一元函数 $z=f[\varphi(x),\ \psi(x)]$. 这时 z 对 x 的导数称为**全导数**，即

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{4-2}$$

如果 $z=f(x,\ y)$，而 $y=\psi(x)$，则函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的全导数为

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{4-3}$$

例 6.4.3 设 $z=u^2v^3$，而 $u=\sin x$，$v=\cos x$. 求 $\frac{dz}{dx}$.

解 将

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2uv^3,\ \frac{\partial z}{\partial v}=3u^2v^2,\ \frac{du}{dx}=\cos x,\ \frac{dv}{dx}=-\sin x$$

代入（4－2）式中，得

$$\frac{dz}{dx}=2uv^3\cos x+3u^2v^2(-\sin x)=2\sin x\cos^4 x-3\sin^3 x\cos^2 x.$$

例 6.4.4 设 $z=\arctan(xy)$，$y=e^x$，求 $\frac{dz}{dx}$.

解 将

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{1+x^2y^2},\ \frac{dy}{dx}=e^x$$

代人（4－3）式中，得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}\mathrm{e}^x=\frac{y+x\mathrm{e}^x}{1+x^2y^2}=\frac{\mathrm{e}^x(1+x)}{1+x^2\mathrm{e}^{2x}}.$$

例 6.4.5　设 $z=uv+\sin t$，$u=\mathrm{e}^t$，$v=\cos t$，求$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}$.

解　将函数 $z=uv+\sin t$ 关于自变量 u，v，t 分别求偏导数，得到

$$\frac{\partial z}{\partial u}=v,\ \frac{\partial z}{\partial v}=u,\ \frac{\partial z}{\partial t}=\cos t.$$

再将 $u=\mathrm{e}^t$，$v=\cos t$ 关于 t 求导，得

$$\frac{du}{dt}=\mathrm{e}^t,\ \frac{dv}{dt}=-\sin t,$$

利用链式求导法，得

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}\\&=v\mathrm{e}^t+u(-\sin t)+\cos t=\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)+\cos t.\end{aligned}$$

因此

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}=2.$$

综上，可将二元复合函数的微分法归结为以下几条原则：

（1）应首先分清自变量与中间变量，找出它们之间的关系；

（2）求二元函数对某个自变量的偏导数时，应经过一切有关的中间变量，最后归结到自变量；

（3）一般地，有几个中间变量，求导公式右端就应含有几项；有几次复合，每一项就有几个因子相乘.

二、隐函数微分法

在第二章的隐函数求导法中，研究了直接由方程 $F(x,y)=0$ 求 $y=f(x)$ 对 x 的导数的方法. 现在，利用二元复合函数的微分法，可得到如下隐函数求导公式：

设方程 $F(x,y)=0$ 确定隐函数 $y=f(x)$，且函数 $F(x,y)=0$ 存在连续的偏导数 $F'_x(x,\ y)$ 与 $F'_y(x,\ y)$，则当 $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{4-4}$$

证 把 $y=f(x)$ 代入方程 $F(x,y)=0$ 中，可得到恒等式

$$F(x,\ f(x))=0.$$

等式两端同时对 x 求导数，并利用公式（4-3）可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

于是，当 $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

证毕

例 6.4.6 求由方程 $\sin y+xe^y=xy^2$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数.

解 原方程变为：

$$\sin y+xe^y-xy^2=0.$$

设 $F(x,\ y)=\sin y+xe^y-xy^2$，由

$$\frac{\partial F}{\partial x}=e^y-y^2,\ \frac{\partial F}{\partial y}=\cos y+xe^y-2xy.$$

则根据公式（4-4），可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{e^y-y^2}{\cos y+xe^y-2xy}=\frac{y^2-e^y}{\cos y+xe^y-2xy}.$$

类似地，对于由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的二元隐函数 $z=f(x,\ y)$，若函数 $F(x,\ y,\ z)$ 存在连续的一阶偏导数，且 $\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$，则由

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0 .$$

有

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

得到偏导数公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'} . \tag{4-5}$$

例 6.4.7 计算由方程 $e^z-z^2-x^2-y^2=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x, y)$ 的偏导数.

解 设 $F(x, y, z)=e^z-z^2-x^2-y^2$，由

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=-2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=e^z-2z .$$

则根据公式（4－5），可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{e^z-2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{e^z-2z} .$$

第五节 极值与最值

在第三章中就一元函数的极值与最值问题进行了讨论. 但这对实际中的问题是远远不够的. 如某工厂生产的产品有多种，那么这些产品的产量各为多少时，可以使利润最大. 要解决这样一些问题就需要有多元函数极值与最值的知识. 这里我们仅讨论二元函数的极值与最值的求法，这些方法可以推广到更多变量的情形.

一、二元函数的极值

（一）极值的定义

定义 6.5.1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定

义，如果对该邻域内一切异于 (x_0, y_0) 的点 (x, y)，恒有不等式

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \quad (\text{或} f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0))$$

成立，则称函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得**极大值**（或**极小值**）$f(x_0, y_0)$，并称点 (x_0, y_0) 为函数 $f(x, y)$ 的**极大值点**（或**极小值点**）. 函数 $z=f(x, y)$ 的极大值与极小值统称为**极值**，极大值点与极小值点统称为**极值点**.

与一元函数极值相类似，二元函数极值也是一个局部性的概念.

例如，函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(0, 0)$ 处有极小值. 因为对任何 $(x, y) \neq (0, 0)$，恒有

$$f(x, y)=x^2+y^2>0=f(0, 0)$$

成立；

函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处有极大值，因为对任何 $(x, y) \neq (0, 0)$，恒有

$$f(x, y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}<|R|=f(0, 0)$$

成立；

而函数 $z=y^2-x^2+1$ 在点 $(0, 0)$ 处无极值. 因为在点 $(0, 0)$ 处的任一邻域内，当 $y=0$，$x \neq 0$ 时，有 $f(x, 0)=-x^2+1<1=f(0, 0)$，而当 $x=0$，$y \neq 0$ 时，有 $f(0, y)=y^2+1>1=f(0, 0)$，因此，$f(0, 0)$ 不是极值.

（二）极值存在的必要条件

对于一元函数 $y=f(x)$，已经知道，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值，则 $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在. 对于二元函数也有类似的情况.

定理 6.5.1 （**极值存在的必要条件**）如果函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有极值，且在极值点处的两个一阶偏导数存在，则必有

$$f'_x(x_0, y_0)=0, f'_y(x_0, y_0)=0 .$$

证明略.

使函数的两个一阶偏导数同时为零的点称为二元函数的**稳定点**(**或驻点**).

由定理6.5.1可知，极值点可能在稳定点处取得，但稳定点未必一定是极值点. 比如，点 (0, 0) 为函数 $z=y^2-x^2+1$ 的稳定点，但本节已验证它不是极值点. 此外，一阶偏导数不存在的点也可能是极值点. 比如，函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，它的图形为上半圆锥，(如图 6－16). 显然，点 (0, 0) 是极小值点，但该点是尖点，一阶偏导数不存在，所以一阶偏导数不存在的点也可能是极值点. 因此，与一元函数类似，二元函数 $z=f(x, y)$ 的极值点的嫌疑点为稳定点和一阶偏导数不存在的点.

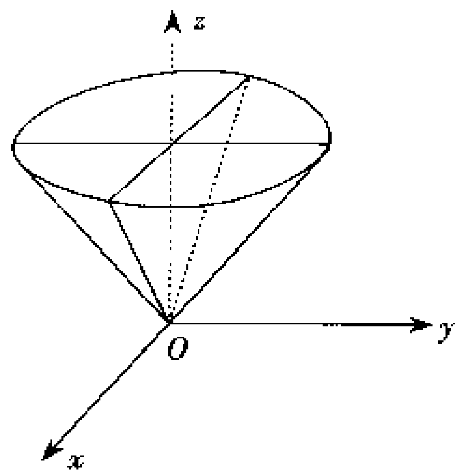

图 6－16

(三) 极值存在的充分条件

对于一个稳定点，要判别它是否是极值点，可根据如下的极值存在的充分性定理.

定理 6.5.2　(极值存在的充分条件) 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续，并有连续的一阶及二阶偏导数，且

$$f'_x(x_0, y_0)=0, f'_y(x_0, y_0)=0.$$

记 $A=f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0, y_0)$. 则

(1) 当 $B^2-AC<0$ 且 $A>0$ 时，函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极小值；当 $B^2-AC<0$ 且 $A<0$ 时，函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极大值.

(2) 当 $B^2-AC>0$ 时，函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处不取极值.

(3) 当 $B^2-AC=0$ 时，函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是否取极值，需另法判别.

证明略.

例 6.5.1 求函数 $f(x, y)=y^3-x^2+6x-12y+5$ 的极值.

解 $f'_x(x, y)=-2x+6, f'_y(x, y)=3y^2-12$. 令

$$\begin{cases} f'_x(x, y)=0, \\ f'_y(x, y)=0, \end{cases}$$

即有

$$\begin{cases} -2x+6=0, \\ 3y^2-12=0, \end{cases}$$

其解为 $x=3$ 时，$y=\pm 2$. 于是得稳定点 (3, 2) 和 (3, -2).

由

$A=f''_{xx}(x, y)=-2, B=f''_{xy}(x, y)=0, C=f''_{yy}(x, y)=6y$,

得 $B^2-AC=12y$.

则在稳定点 (3, 2) 处，有 $B^2-AC=2\times 12=24>0$，所以稳定点 (3, 2) 不是极值点.

在稳定点 (3, -2) 处，有 $B^2-AC=2\times(-12)=-24<0$，且 $A=-2<0$，所以稳定点 (3, -2) 为极大值点. 函数 $f(x, y)$ 在点 (3, -2) 处有极大值 $f(3, -2)=30$.

二、二元函数的最值及其应用

定义 6.5.2 设函数 $z=f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的二元连续函数，点 $(x_0, y_0)\in D$，如果对于 $\forall (x, y)\in D$，不等式

$$f(x_0, y_0)\leqslant f(x, y) \quad (\text{或} f(x_0, y_0)\geqslant f(x, y))$$

恒成立，则称 $f(x_0, y_0)$ 为函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上的**最小值**（或**最大值**），(x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 在区域 D 上的**最小值点**（或**最大值点**）.

最小值和最大值统称为**最值**，最大值点与最小值点统称为**最值点**.

对于定义在有界闭区域 D 上的二元连续函数，只要求出函数在区域 D 内的全部极值点，并算出其函数值；求出函数在区域边界上的最大值与最小值，再将函数的极值与函数在区域 D 的边界上的最值相比较，其中最大的就是函数在闭区域 D 上的最大值，最小的就是函数在区域 D 上的最小值.

在求解实际问题的最值时，如果从问题的实际意义知道 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内一定取得最值，且只有一个稳定点，则该稳定点就是所求函数的最值点.

例 6.5.2　用料最省问题　要用铁皮做一个体积为 5 立方米有盖长方体水箱，怎样选取长、宽与高的尺寸，才能使用料最省？

解　要使用料最省，只需有盖长方体水箱的表面积最小. 设水箱的长、宽与高各为 x 米，y 米，z 米，则水箱的表面积为

$$S=2(xy+yz+zx).$$

又根据已知，$xyz=5$. 因此 $z=\dfrac{5}{xy}$，代入上式，有

$$S=2\left(xy+\frac{5}{x}+\frac{5}{y}\right).$$

这是关于 x，y 的二元函数，其定义域为：

$$D=\{(x, y)\mid x>0, y>0\}.$$

由

$$\frac{\partial S}{\partial x}=2\left(y-\frac{5}{x^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=2\left(x-\frac{5}{y^2}\right)=0,$$

解得 $x=y=\sqrt[3]{5}$，此时 $z=\sqrt[3]{5}$.

根据题意，水箱所用铁皮面积一定存在最小值，又在区域 D 内只有一个稳定点 $(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5})$，所以 $(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5})$ 是使 S 取得最小值的点. 于是，当长、宽与高均为 $\sqrt[3]{5}$ 米时，用料最省.

即当体积一定时，正方体的水箱用料最省.

例 6.5.3　最大利润问题　某工厂生产甲，乙两种产品，其出

售价格分别为 10 万元与 9 万元，若生产 x 单位的甲产品与生产 y 单位的乙产品所需要的总费用为

$$300+5x+2y+0.01(2x^2+2xy+3y^2)\ (\text{单位：万元})$$

求甲，乙两种产品的产量各为多少时，才能获得最大利润？最大利润是多少？

解 设 $L(x, y)$ 表示甲产品与乙产品分别生产 x 与 y 单位时所得的总利润.

根据题意，有

$$\begin{aligned} L(x, y) &= (10x+9y)-[300+5x+2y+0.01(2x^2+2xy+3y^2)] \\ &= 5x+7y-0.01(2x^2+2xy+3y^2)-300 \end{aligned}$$

由

$$L'_x(x, y)=5-0.01(4x+2y)=0$$
$$L'_y(x, y)=7-0.01(2x+6y)=0$$

得稳定点 (80, 90).

由问题的实际意义可知，当甲产品生产 80 单位，乙产品生产 90 单位时，所获得的利润最大，最大利润为

$$L(80, 90)=215\ (\text{万元}).$$

*三、条件极值与拉格朗日乘数法

在前面讨论的求二元函数 $f(x, y)$ 的极值问题中，两个自变量 x 与 y 在其定义域内可以任意取值，不受其他条件限制，这种极值问题称为**无条件极值**. 但实际问题往往要求自变量 x 与 y 还要满足一定的附加条件 $g(x, y)=0$，称 $g(x, y)=0$ 为**约束条件或约束方程**，这类附有约束条件的极值问题称为**条件极值**.

条件极值问题的约束条件分为等式约束条件和不等式约束条件两类，下面仅讨论等式约束条件下的条件极值问题.

在求解等式约束条件下的条件极值问题时，如果能从约束条件 $g(x, y)=0$ 中解出 y 或 x，将它代入函数 $f(x, y)$ 中去，条件极值就可以转化为无条件极值来求解. 如例 6.5.2. 但是，从约束条件

方程中解出某些变量有时运算比较麻烦，有时无法得到明显的解析表达式，从而条件极值无法转化为无条件极值. 此时，可利用下面介绍的**拉格朗日乘数法**. 它的基本思想是，设法将条件极值问题转化为无条件极值问题，其求解步骤如下：

（1）构造辅助函数

$$F=F(x,\ y,\ \lambda)=f(x,\ y)+\lambda g(x,\ y),$$

称为**拉格朗日函数**. 其中，λ 为待定常数，称为**拉格朗日乘数**. 将原条件极值问题转化为三元函数 $F(x,\ y,\ \lambda)$ 的无条件极值问题.

（2）由无条件极值问题的极值存在必要条件，有

$$\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda g'_x=0,\\ F'_y=f'_y+\lambda g'_y=0,\\ F'_\lambda=g(x,\ y)=0,\end{cases}$$

联立方程组，从中消去 λ 或解出 λ 后，求出可能的极值点 $(x,\ y)$.

（3）由问题的实际意义来判定求出的点 $(x,\ y)$ 是否为极值点.

特别地，当某个实际问题确有极值，又只有一个可能的极值点，那么这一点就是要找的极值点（最值点），不需另加判定.

例 6.5.4 用拉格朗日乘数法解例 6.5.2 中的体积一定的长方体水箱表面积的最小值问题.

解 根据题意，本题是求在约束条件 $5-xyz=0$ 的限制下，函数

$$S=2(xy+yz+zx)$$

的最小值问题. 因此，设拉格朗日函数为

$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda)=2(xy+yz+zx)+\lambda(5-xyz)$$

由

$$\begin{cases}F'_x=2(y+z)-\lambda yz=0,\\ F'_y=2(x+z)-\lambda xz=0,\\ F'_z=2(y+x)-\lambda xy=0,\\ F'_\lambda=5-xyz=0,\end{cases}$$

消去 λ，解得 $x=y=\sqrt[3]{5}$.

因为只有一个稳定点 $(\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{5})$，由实际问题可知，它必有最小值. 所以该稳定点也是最小值点. 于是，当水箱的长、宽、高都等于$\sqrt[3]{5}$的正方体时，所用材料最省.

例 6.5.5 设某工厂生产 A 和 B 两种产品，产量分别为 x 和 y（单位：千件），利润函数为

$$L(x,y)=6x-x^2+16y-4y^2-2 \text{（单位：万元）}$$

已知生产这两种产品时，每千件产品均需消耗某种原料 2 000 公斤，现有该原料 12 000 公斤，问两种产品各生产多少千件时，总利润最大？最大总利润为多少？

解 依题设有约束条件

$$2\,000x+2\,000y=12\,000$$

即 $x+y=6$. 因此，问题是在 $x+y=6$ 的条件下求利润函数 $L(x,y)$ 的最大值. 为此，设拉格朗日函数为

$$F(x,y,\lambda)=6x-x^2+16y-4y^2-2+\lambda(x+y-6).$$

令

$$\begin{cases}F'_x=6-2x+\lambda=0\\F'_y=16-8y+\lambda=0\\F'_\lambda=x+y-6=0\end{cases}$$

消去 λ 后，得等价方程组

$$\begin{cases}-x+4y=5\\x+y=6\end{cases}$$

由此解得 $x_0=3.8$（千件），$y_0=2.2$（千件）. 最大总利润为

$$\begin{aligned}L(3.8,2.2)&=6\times3.8-3.8^2+16\times2.2-2.2^2-2\\&=36.72 \text{（万元）}.\end{aligned}$$

第六节 二重积分

前面已讲过定积分，它的被积函数是一元函数，积分范围是 x

轴上的一个区间. 当被积函数是二元函数，而积分范围是平面区域的积分问题，就是所谓的二重积分. 本章将介绍二重积分的概念，性质以及计算方法.

一、引例

曲顶柱体的体积

设函数 $z=f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，且 $z=f(x, y)\geqslant 0$，$(x, y)\in D$. 以曲面 $z=f(x, y)$ 为顶，以 xy 平面上的区域 D 为底，侧面为通过 D 的边界，并且与 z 轴平行的柱面所围成的立体，称为**曲顶柱体**（如图 6－17）. 怎样计算上述曲顶柱体的体积呢？

我们知道，平顶柱体其高是不变的，它的体积可以用公式

$$体积=高\times底面积$$

来计算. 对于曲顶柱体，当点在区域 D 上变动时，高度是个变量，因此，它的体积不能直接用上式来计算. 我们用与求曲边梯形面积类似的方法（即分割，近似与求和，取极限的方法）来求曲顶柱体的体积.

（1）分割

用曲线把区域 D 任意分割成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n,$$

并以 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域的面积（$i=1, 2, \cdots, n$）（如图 6－18）.

以每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 为底，作一个小曲顶柱体，于是给定曲顶柱体被分成 n 个小曲顶柱体. 以 ΔV_i 表示以 $\Delta\sigma_i$ 为底的第 i 个小曲顶柱体的体积，V 表示以区域 D 为底的曲顶柱体的体积，则有

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i.$$

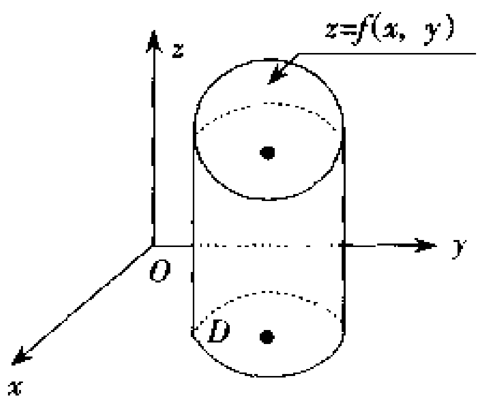

图 6－17

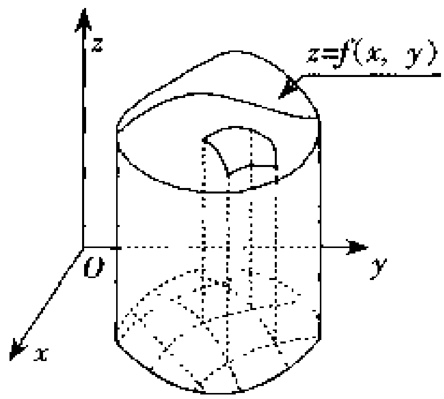

图 6－18

(2) 近似与求和

在每个小区域 $\Delta\sigma_i$，$i=1, 2, \cdots, n$ 内，任取一点 (x_i, y_i)，把以 $f(x_i, y_i)$ 为高，$\Delta\sigma_i$ 为底的平顶柱体的体积 $f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ 作为 ΔV_i 的近似值，即

$$\Delta V_i \approx f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i, \ i=1, 2, \cdots, n.$$

将所有小曲顶柱体体积的近似值相加，得到整个曲顶柱体体积 V 的近似值 V_n，即

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i .$$

(3) 取极限

我们将 $\Delta\sigma_i$ 内任意两点间距离 $\mathrm{d}_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的最大值称为该区域的直径，记

$$\mathrm{d}=\max\{\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \cdots, \mathrm{d}_n\}.$$

当区域 D 的分割愈来愈细密，即 d 充分小时，V_n 将充分地接近 V.

如果当 $\mathrm{d}\to 0$ 时，V_n 的极限存在，则将这个极限值定义为给定曲顶柱体的体积 V. 即

$$V = \lim_{\substack{\mathrm{d}\to 0\\(n\to\infty)}} V_n = \lim_{\substack{\mathrm{d}\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i .$$

这样，求曲顶柱体体积的问题，就转化为求上述和式的极限问题. 实际中的许多问题都要用到这类和式的极限，因此有必要对其

加以专门研究，为此引入二重积分的概念.

二、二重积分的概念与性质

（一）二重积分的概念

定义 6.6.1　设 $f(x, y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的二元函数，将 D 任意分割成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，并以 $\Delta\sigma_i$ 和 d_i 分别表示第 i 个小区域的面积和直径，$d = \max\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$. 在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (x_i, y_i) 作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$（称它为 $f(x, y)$ 在 D 上的一个积分和）. 如果当 $d\to 0$ 时，这个和式的极限存在，即极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

存在，且此极限与区域 D 的分割方法以及点 (x_i, y_i) 的取法无关，则称该极限为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的**二重积分**. 记为 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

其中 $f(x, y)$ 称为**被积函数**，x, y 称为**积分变量**，$\mathrm{d}\sigma$ 称为**面积元素**，D 称为**积分区域**，并称函数 $f(x, y)$ 在区域 D **上可积**.

与定积分类似，可以证明若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积，则 $f(x, y)$ 在 D 上有界；若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

如前所述，当 $f(x, y)\geqslant 0$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 在几何上表示以区域 D 为底，曲面 $z=f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

(二) 二重积分的性质

二重积分与定积分具有类似的性质. 若设二元函数 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积, 则二重积分的性质可简述如下:

性质 1 被积函数的常数因子可以提到积分号的外面, 即

$$\iint_D k \cdot f(x, y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma\text{, }(k\text{ 为常数}).$$

性质 2 函数的代数和的积分等于各个函数的积分的代数和, 即

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 3 如果积分区域 D 被一条连续曲线分为 D_1 和 D_2 两个区域, 且 D_1 和 D_2 除分界线外无公共点, 则有

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

这个性质说明**二重积分对于积分区域具有可加性**, 此性质可推广到将 D 任意划分为有限个区域的情况.

性质 4 如果在区域 D 上有 $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ 恒成立, 则有

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

特别地, 由于

$$-|f(x, y)| \leqslant f(x, y) \leqslant |f(x, y)|,$$

则有

$$\left|\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\mathrm{d}\sigma;$$

如果在区域 D 上, $f(x, y) \leqslant 0$ (或 $\geqslant 0$) 恒成立, 则有

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \leqslant 0\ (\text{或} \geqslant 0).$$

性质 5 如果在区域 D 上, $f(x, y) = 1$, σ 为区域 D 的面积, 则有

$$\iint_D \mathrm{d}\sigma = \sigma .$$

这个性质说明：高为 1 的曲顶柱体的体积在数值上等于该柱体的底面积.

性质 6 设 M，m 为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 为 D 的面积，则有对于二重积分估值的不等式.

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma .$$

证 因为，M，m 为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，则在 D 上必存在一点 (x_1, y_1) 使得 $f(x_1, y_1)$ 等于最大值 M，又存在一点 (x_2, y_2) 使得 $f(x_2, y_2)$ 等于最小值 m. 于是，对任意的 $(x, y) \in D$，有

$$m = f(x_2, y_2) \leqslant f(x, y) \leqslant f(x_1, y_1) = M.$$

由性质 4，可得

$$m\iint_D \mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant M\iint_D \mathrm{d}\sigma .$$

再由性质 5 得

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma .$$

性质 7 **（二重积分的中值定理）** 如果函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) 使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma .$$

证明略.

性质 7 的几何意义是： 当函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续时，则以 D 为底，以曲面 $f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积，等于该区域上以某一点 (ξ, η) 的函数值 $f(\xi, \eta)$ 为高的平顶柱体的体积.

三、直角坐标系下二重积分的计算

与定积分类似，直接按定义计算二重积分是很困难的，甚至是不可能的. 下面将给出计算二重积分的常用方法——化二重积分为两次定积分或累次积分. 我们仅讨论直角坐标系下二重积分的计算.

设函数 $f(x, y)$ 为区域 D 上的连续函数（不妨假设 $f(x, y) \geq 0$），区域 D 如图 6－19 所示，即

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

称为 x－型区域.

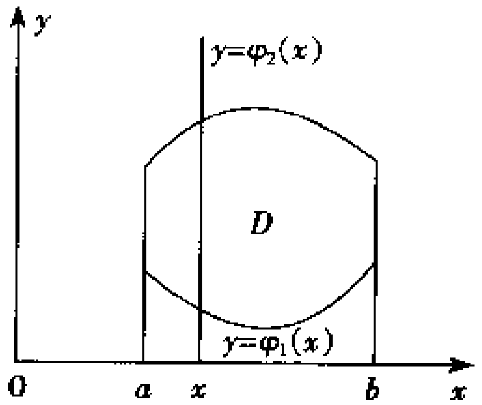

图 6－19 (1)

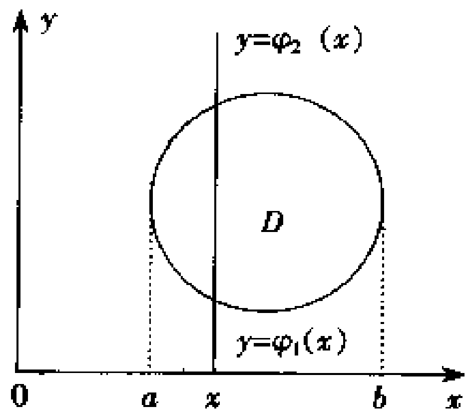

图 6－19 (2)

由二重积分的几何意义可知，当 $f(x, y) \geq 0$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 表示以 D 为底，曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积 V，当 D 为 x－型区域时，可如下计算：

用平行于 yz 坐标平面的平面 $x = x_0$ 去截曲顶柱面，得一截面，它是一个以区间 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底，以曲线 $z = f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形（如图 6－20 的阴影部分）. 根据定积分的几何意义可知，此曲边梯形的面积为

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)}f(x_0,y)\,\mathrm{d}y.$$

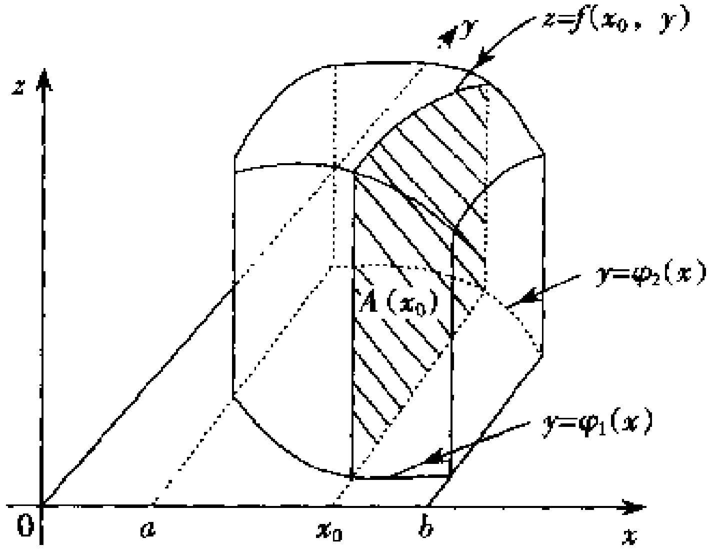

图 6－20

一般地，用过区间 $[a, b]$ 上任意一点 x 且平行于 yz 平面的平面去截曲顶柱体所得的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

其中 y 是积分变量，x 在积分过程中看作常数.

由上述分析可知，上述曲顶柱体可看成平行截面面积 $A(x)$ 为已知的立体，由定积分应用可知，所求曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

由此即得二重积分的如下计算公式：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \qquad (6-1)$$

其中积分区域 D 为 x－型区域. 上式也可写成

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y. \qquad (6-2)$$

上式右端积分称为累次积分. 由此将计算二重积分的问题化为

先对 y 后对 x 的连续两次求定积分的问题.

注意 先对 y 求定积分时，y 是积分变量，x 看作常量，积分上下限是 x 的函数；积分结果将是 x 的函数；在对 x 求定积分时，x 是积分变量，积分上下限均为常数.

类似地，若积分区域为如图 6－21 所示的平面区域，则称为 y－型区域，即

$$D=\{(x,y)\mid\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),\ c\leqslant y\leqslant d\}.$$

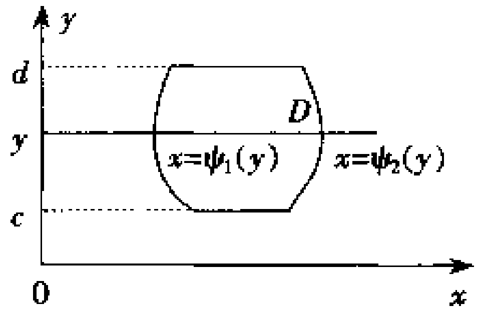

图 6－21 (1)

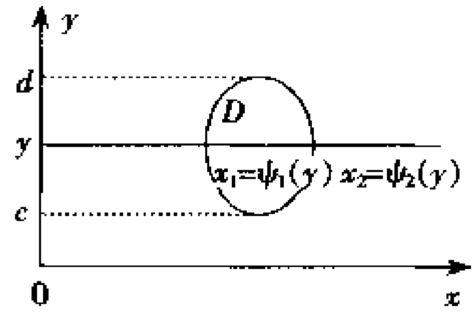

图 6－21 (2)

当积分区域 D 为 y－型区域时，可采用先对 x，后对 y 的积分次序，将二重积分化为累次积分：

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}\sigma &= \int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\ &= \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{6-3}$$

公式 (6－2) 和 (6－3) 是在 $f(x,\ y)\geqslant 0$ 的条件下得到的，可以证明，对一般的可积函数 $f(x,\ y)$，这两个公式仍然成立. 因此，实际使用公式 (6－2) 和 (6－3) 时，可不受 $f(x,\ y)\geqslant 0$ 的限制.

特别地，如区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$，是一矩形区域，则公式 (6－2) 和 (6－3) 化为

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,\ y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x. \qquad (6-4)$$

或记为

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (6-5)$$

可以看出化二重积分为累次积分的关键是确定积分限，对于 x - 型区域，可按如下的步骤来确定积分限：

1）如图 6 - 19，先把区域 D 投影到 x 轴上，可得变量 x 的变化区间为 $[a, b]$，即 $a \leqslant x \leqslant b$；

2）在 (a, b) 内任取一点 x，作 x 轴的垂线，并将该垂线自 a 到 b 平行移动，若该垂线始终与区域 D 的边界交于两点，且上交点与下交点的纵坐标分别为 $y = \varphi_1(x)$ 与 $y = \varphi_2(x)$，则变量 y 的变化范围为 $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$.

于是该 x - 型区域可表示为

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

二重积分可化为累次积分：

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

对于 y - 型区域可类似确定，即

1）如图 6 - 21，先把区域 D 投影到 y 轴上，可得变量 y 的变化区间为 $[c, d]$，即 $c \leqslant y \leqslant d$；

2）在 (c, d) 内任取一点 y，作 y 轴的垂线，并将该垂线自 c 到 d 平行移动，若该垂线始终与区域 D 的边界交于两点，且左交点与右交点的纵坐标分别为 $x = \psi_1(y)$ 与 $x = \psi_2(y)$，则变量 x 的变化范围为 $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$.

于是该 y - 型区域可表示为

$$D = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d, \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$$

二重积分可化为累次积分：

$$\iint_D f(x,\ y)\,dxdy = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx.$$

注 6.6.1 如果 D 不是标准区域，则应先将 D 分成若干个无公共内点的小区域，而每个小区域都是标准区域，然后利用二重积分对区域的可加性进行计算（如图 6－22）.

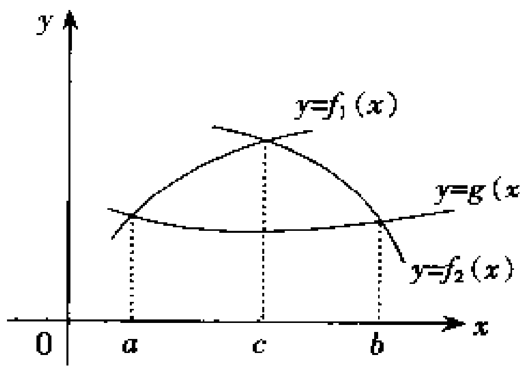

图 6－22 (1)

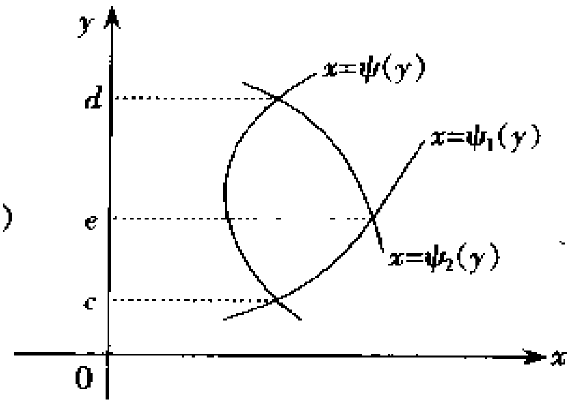

图 6－22 (2)

例 6.6.1 计算二重积分 $\iint\limits_D\left(1-\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)d\sigma$，其中 D 是由直线 $x=-2, x=2, y=-1, y=1$ 围成的矩形.

解 画出区域如图 6－23，则 $D=\{(x,\ y)\mid -2\leqslant x\leqslant 2,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$. 因为 D 是矩形区域，利用公式（6－4），有

$$\begin{aligned}
&\iint_D\left(1-\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)d\sigma\\
&=\int_{-2}^{2}dx\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)dy\\
&=\int_{-2}^{2}\left[\left(1-\frac{x}{4}\right)y-\frac{y^2}{6}\right]_{-1}^{1}dx\\
&=2\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)dx=8.
\end{aligned}$$

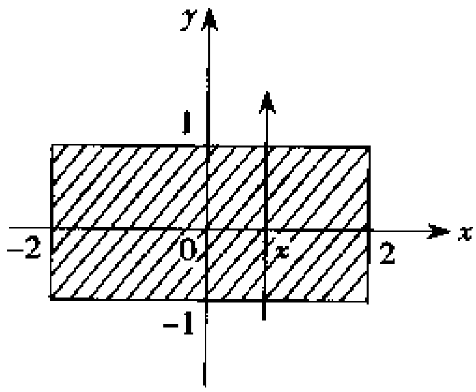

图 6－23

例 6.6.2　计算二重积分 $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 是由 $x=0$，$y=0$ 与 $x^2+y^2=1$ 所围成的第一象限的图形.

解　画出区域 D，如图 6－24．其 x－型区域为：

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}\}.$$

因此

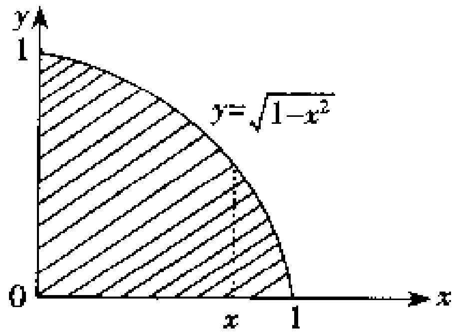

图 6－24

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}x^2y\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x^2)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{15}.\end{aligned}$$

例 6.6.3　计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 是由抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x-2$ 所围成的平面区域.

解　画出区域 D，如图 6－25．联立方程组

$$\begin{cases}y^2=x\\ y=x-2\end{cases}$$

得交点坐标为 $(1,\ -1)$，$(4,\ 2)$.

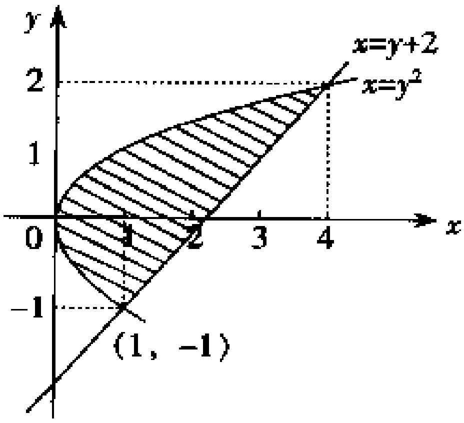

图 6－25

若先对 y 后对 x 积分，则需将区域 D 分成两部分，计算比较麻烦，而先对 x，后对 y 积分，计算较简单.

D 的 y－型区域为：

$$D=\{(x,y)\mid -1\leqslant y\leqslant 2,\ y^2\leqslant x\leqslant y+2\}.$$

所以有

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(y^3+4y^2+4y-y^5)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}y^4+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{1}{6}y^6\right]_{-1}^{2} = 5\frac{5}{8}.$$

例 6.6.4 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x$，$y=1$，$x=0$ 所围成的平面区域.

解 画出区域 D，如图 6－26. 先对 x 后对 y 积分. D 的 y－型区域为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant y\}.$$

利用公式（6－3），有

$$\iint_D e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y e^{y^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1(e^{y^2}x)\Big|_0^y\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^{y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}(e-1).$$

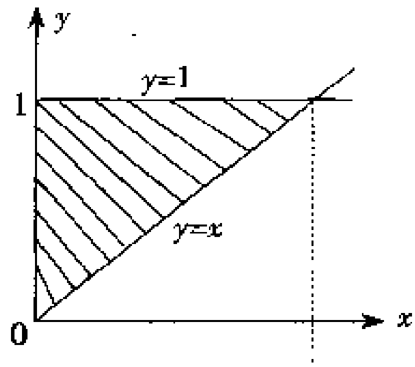

图 6－26

在此题中，由于 $\int e^{y^2}\mathrm{d}y$ 不能用第四章讨论的积分方法求出原函数，因此我们选择了先对 x，后对 y 的积分次序. 可见选择好积分次序是重要的.

例 6.6.5 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 按两种次序化为累次积分，其中积分区域 D 由 $y=x^2$，$x=1$ 和 $y=0$ 所围成.

解 画出区域 D，如图 6－27. 当把 D 看成 x－型标准区域时，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy;$$

当把 D 看成 y – 型标准区域时，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dx.$$

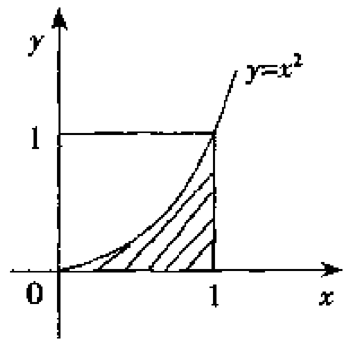

图 6 – 27

例 6.6.6　交换下列积分的次序：

$$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{y+1} f(x,y)\,dx.$$

解　由于积分区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,\ \sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant y+1\}$，若将 D 看作 x – 型标准区域，则应有 $D=D_1+D_2$（如图 6 – 28）．且

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ \sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 1\},$$

$$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,\ x-1\leqslant y\leqslant 1\}.$$

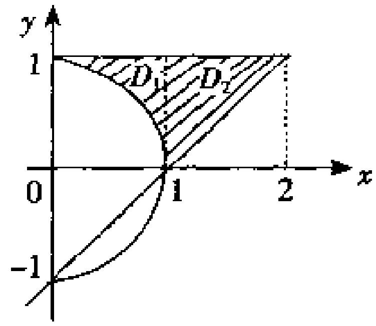

图 6 – 28

因此

$$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{1-x^2}}^{y+1} f(x,y)\,dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_{x-1}^1 f(x,y)\,dy.$$

例 6.6.7　应用二重积分，求在 xy 平面上，由抛物线 $y=x^2$ 与 $y=4x-x^2$ 所围成的区域面积.

解　画出区域 D，如图 6 – 29．联立方程组

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=4x-x^2 \end{cases}$$

得交点坐标为 $(0,0)$，$(2,4)$.

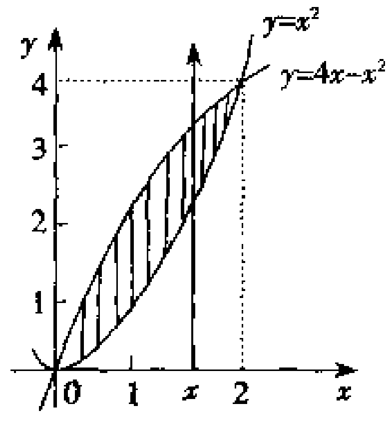

图 6 – 29

由图 6 – 29 可见，其 x – 型标准区域为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ x^2\leqslant y\leqslant 4x-x^2\}.$$

由二重积分性质 5 知，所求积分区域面积为

$$\sigma=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{4x-x^2}\mathrm{d}y=\int_0^2[y]_{x^2}^{4x-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2(4x-2x^2)\mathrm{d}x=\left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}.$$

因此，区域 D 的面积等于$\frac{8}{3}$平方单位.

例 6.6.8 计算由曲面 $z=1+x+y$，$z=0$，$x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 所围成的立体的体积 V.

解 画出积分区域 D，如图 6－30. 由图可见，其 x－型标准区域为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}.$$

根据二重积分的几何意义，有

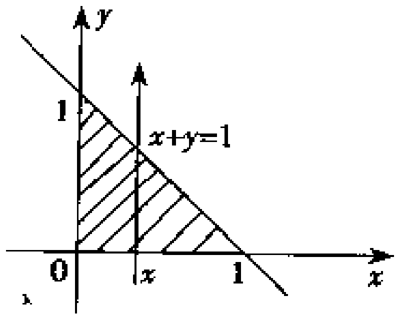

图 6－30

$$V=\iint\limits_D(1+x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1+x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[y+xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[\frac{3}{2}-x-\frac{x^2}{2}\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{3}{2}x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_0^1=\frac{5}{6}.$$

习 题 六

1. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\dfrac{x^2y^2+3}{x^2-y^2}$； (2) $z=\sqrt{x\cdot\sin y}$；

(3) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$； (4) $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$；

(5) $z=\ln[(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)]$；

(6) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

2. 设 $f(x+y,\ x-y)=x^2-y^2$，求 $f(x,\ y)$.

3. 求下列函数在给定点处的偏导数：

(1) $z=x^3+y^3-3xy$，求 $z_x'(1,\ 2)$，$z_y'(1,\ 2)$.

(2) $z=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$，求 $z_x'(1,\ 1)$，$z_y'(1,\ 1)$.

(3) $z=e^{x^2+y^2}$，求 $z_x'(0,\ 1)$，$z_y'(1,\ 0)$.

4. 求下列函数的一阶偏导数：

(1) $z=e^{xy}$；　(2) $z=xy+\dfrac{x}{y}$；

(3) $z=\arctan\dfrac{x}{y}$；　(4) $z=\ln\sin(x-2y)$；

(5) $z=x^3y^3-y^3x$；　(6) $z=\sqrt{xy}$；

(7) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$；　(8) $z=\ln(x+\ln y)$；

(9) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(10) $z=x\ln\dfrac{y}{x}$.

5. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x\ln(x+y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2) $z=\sin^2(ax+by)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6. 求下列函数的全微分：

(1) $z=e^{x^2+y^2}$；　(2) $z=x^2+xy^2+\sin y$；

(3) $z=\arctan(xy)$；　(4) $z=\ln(xy)$.

7. 求下列函数在给定条件下的全微分之值：

(1) $z=\ln(x^2+y^2)$；$x=2$，$\Delta x=0.1$；$y=1$，$\Delta y=-0.1$.

(2) $x=x^2y^3$；$x=2$，$\Delta x=0.02$；$y=-1$，$\Delta y=-0.01$.

8. 计算下列各题的近似值：

(1) $1.02^{4.05}$；　(2) $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$.

9. 求下列复合函数的导数：

(1) $z=u^2\ln v$，$u=\dfrac{y}{x}$，$v=x^2+y^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(2) $z=e^{uv}$, $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan\dfrac{y}{x}$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(3) $z=\dfrac{y}{x}$, $y=e^t$, $x=1-e^{2t}$, 求$\dfrac{dz}{dt}$.

(4) $z=\arctan\dfrac{x}{y}$, $y=\sqrt{1-x^2}$, 求$\dfrac{dz}{dx}$.

(5) $z=e^{u-2v}$, $u=\sin x$, $v=x^3$, 求$\dfrac{dz}{dx}$.

(6) $z=\dfrac{x^2-y}{x+y}$, $y=2x-3$, 求$\dfrac{dz}{dx}$.

10. 求由下列方程所确定的隐函数的导数:

(1) $xy+x+y=1$, 求$\dfrac{dy}{dx}$.

(2) $yz=\arctan(xz)$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(3) $xyz=e^z$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(4) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11. 求下列函数的极值:

(1) $z=x^4+y^4$;

(2) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$;

(3) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

12. 欲建一座长方体厂房，其体积为 96 000 立方米. 已知除前墙和屋顶以外各墙的单位面积造价相等. 而前墙和屋顶每单位面积的造价分别是其他墙造价的 3 倍和 1.5 倍，问前墙的长度和高度为多少时，厂房的造价最低（地面造价不计）.

13. 某工厂生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 p_1 和 p_2，销售量分别为 q_1 和 q_2，需求函数分别为

$$q_1=24-0.2p_1,\ q_2=10-0.05p_2$$

总成本函数为 $C=35+40(q_1+q_2)$. 试问：厂家应如何确定两个市场的售价，才能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？

14. 为了销售某种产品，需要作两种方式的广告，当两种广告费各为 x_1 和 x_2 时，销售总收入函数是

$$y=\frac{50x_1}{5+x_1}+\frac{25x_2}{10+x_2}.$$

现在准备花 25 万元作广告，问应该怎样分配两种方式的广告费，才能使销售的总利润达到最大？最大是多少？

15. 用集合表示在 xy 平面上由曲线 $y=x^2$ 与 $y=4x-x^2$ 所围成的平面闭区域，并作图.

16. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D xe^{xy}\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(2) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\frac{p}{2}(p>0)$ 围成的区域.

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a$ $(a>0)$ 所围成的区域.

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=2x, y=x, x=2$ 所围成的区域.

(5) $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=\frac{\pi}{2}, x=0, y=x$ 所围成的区域.

17. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 按两种次序化为累次积分，积分区域 D 给定如下：

(1) D 由直线 $x+y=1$，$x-y=1$ 和 $x=0$ 所围成.

(2) D 由曲线 $y=x^2$ 和 $y=2-x^2$ 所围成.

(3) D 由椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 所围成.

18. 交换下列积分的次序：

(1) $\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2+y}}^{0}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{-y}}^{0}f(x,y)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$;

(3) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$;

(4) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$.

19. 利用二重积分求由下列曲线所围成的平面图形的面积:

(1) $y = x^2$, $y = x + 1$;

(2) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$ 在第一象限的部分;

(3) $y^2 = 2x$, $y = x$.

20. 利用二重积分求由下列曲面所围成的立体的体积:

(1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

(2) $x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

第七章 无穷级数

在微积分理论产生之前，无穷级数就有了广泛的应用. 17 世纪前后，随着生产和天体力学等自然科学的发展，无穷级数理论又有了进一步的发展. 严格的极限概念产生之后，无穷级数有了坚实的理论基础，并日趋完善，成为表示函数、研究函数性质以及进行数值计算的一个有力工具. 从而，无穷级数在微积分学中占有越来越重要的地位.

本章主要介绍无穷级数的一些基本概念和基础理论. 首先给出常数项级数的概念及其基本性质，继而重点研究常数项级数的敛散性判别法，在此基础上，进一步探讨函数项级数的有关内容.

第一节 常数项级数的概念和基本性质

一、常数项级数的概念

在解决实际问题时，常常会遇到无穷个数相加的问题. 例如，由第一章的内容，可以计算出：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)=\frac{1}{3}$$

当 $n\to\infty$ 时，上式是无穷多个无穷小量之和的极限，但其极限值不再是无穷小量. 可见，从有限到无限，无穷小量的和的问题已发生了本质的变化. 有必要对无穷个数相加的问题作深入的研究. 现在

我们给出无穷级数的一些基本概念.

定义 7.1.1 如果给定数列 $\{u_n\}$，则称

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

为**常数项无穷级数简称级数**，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{7-1}$$

其中 u_n 称为级数的**第 n 项**，又称**通项或一般项**；称级数（7－1）的前 n 项之和 $u_1+u_2+\cdots+u_n$ 为该级数的**部分和**，记为 S_n，即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \tag{7-2}$$

由（7－2）知

$S_1=u_1$，$S_2=u_1+u_2$，$S_3=u_1+u_2+u_3$，…

可见，当 n 依次取 1，2，3，…时，级数（7－1）的部分和（7－2）也构成了一个数列 $\{S_n\}$，称之为（7－1）的**部分和数列**.

利用级数的部分和数列以及极限思想，可以给出级数的敛散性定义，即无穷多个数相加是否有和的问题.

定义 7.1.2 对于给定的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果其部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，并称此极限值 S 为该级数的**和**，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=S.$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 没有极限，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散**，此时它没有和.

注 7.1.1 （1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S，则称 $R_n=S-S_n=$

$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$为该级数的**余项或第 n 次余项**. 显然$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$，而且余项的绝对值$|R_n|$就是用 S_n 代替 S 的绝对误差.

（2）在第四节中将会看到常数项级数是研究函数项级数的基础，而当函数项级数的自变量取确定的数值时，它便是常数项级数了.

例 7.1.1 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 的和.

解 因为$\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{5n-4}-\dfrac{1}{5n+1}\right)$，

所以

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5k-4}-\frac{1}{5k+1}\right)\\&=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}.$$

例 7.1.2 求证**调和级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

证 对函数$f(x)=\ln x$，在区间$[n,n+1]$上应用拉格朗日中值定理得

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$$

则有

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots$$

$$+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，从而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散. 证毕

例 7.1.3 讨论几何级数（又称等比级数）

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}(a\neq0,q\neq0)$的敛散性.

解 （1）当$|q|\neq1$时，该级数的部分和为

$$S_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

当$|q|<1$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-q},$$

所以，当$|q|<1$时，几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$收敛，且其和为$\frac{a}{1-q}$；

当$|q|>1$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，所以，当$|q|>1$时，几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$发散.

（2）当$|q|=1$时，若$q=1$，则$S_n=na\to\infty$（$n\to\infty$时），所以级数发散；若$q=-1$，则$S_n=a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a$，当$n$为偶数时，$S_n=0$，当$n$为奇数时，$S_n=a$，此时，数列$\{S_n\}$的极限不存在，即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$发散.

综上所述，当$|q|<1$时，几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$收敛；当$|q|\geqslant1$时，几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$发散.

几何级数是一个常见的重要级数，以后我们将会看到，利用几何级数的敛散性并结合级数的性质，可以推出很多其他级数的敛散性，所以，对本例的结论应该记住.

应当指出，利用定义 7.1.2 讨论给定级数的敛散性，需要将级

数的部分和数列 $\{S_n\}$ 的通项整理成为一个易于求极限的形式. 然而，在许多情况下，这一点往往难以做到. 为此，我们将进一步研究级数的性质，以便找到更为方便有效的判定级数敛散性的方法.

二、常数项级数的基本性质

性质 1 设 A 为非零常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Au_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散，而且同时收敛时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} Au_n = A\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{7-3}$$

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Au_n$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和分别记为 S'_n 与 S_n，则有

$$S'_n = Au_1 + Au_2 + \cdots + Au_n = A\ (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = AS_n.$$

于是，由数列极限的性质可知

$\lim\limits_{n\to\infty} S'_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 同时存在或同时不存在，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Au_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散，且当两级数同时收敛时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = A\lim\limits_{n\to\infty} S_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} Au_n = A\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证毕.

性质 2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{7-4}$$

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别记为 S_n，S'_n 与 S''_n，则

$$
\begin{aligned}
S_n &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\
&= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\
&= S_n' \pm S_n''.
\end{aligned}
$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，则它们的部分和数列均有极限，设为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = S'$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = S''$，则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n' \pm S_n'') = S' \pm S'',$$

即有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$ 证毕.

注 7.1.2 （1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 未必发散.

如：级数 $1+1+\cdots+1+\cdots$ 与 $(-1)+(-1)+\cdots+(-1)+\cdots$ 均发散，然而将其对应项相加后，所得级数是收敛的，而且收敛于零.

（2）若在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 中，一个收敛，一个发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散.

性质 3 在级数的前面加上或去掉有限项，不影响级数的敛散性（但在收敛的情况下，级数的和一般要改变）.

证明略.

性质 4 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对其各项间任意加括号后所得的级数仍收敛，且其和不变.

证明略.

注 7.1.3 性质 4 又可叙述为：若加括号后的级数发散，则原级数必定发散. 但要注意的是：如果加括号后级数收敛，则原级数

未必收敛. 如，级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于零，但去掉括号后，所得级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$$

却是发散的.

性质 5（级数收敛的必要条件）　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

证　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和为 S_n，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，因而数列 $\{S_n\}$ 的极限存在，设为

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S.$$

又由

$$u_n=S_n-S_{n-1},$$

显然，

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$$

证毕.

注 7.1.4　性质 5 还可以叙述为：若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散. 这一性质告诉我们，当考察一个级数是否收敛时，应当首先考察当 $n\to\infty$ 时，这个级数的一般项 u_n 是否趋向于零，若 u_n 不趋向于零，那么立即可以断言，这个级数是发散的. 但要注意，一般项 u_n 趋于零的级数不一定收敛.

例 7.1.4　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n+1}$ 的敛散性.

解　由于 $u_n=\dfrac{n}{2n+1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\neq 0$，所以由性质 5 知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n+1}$ 发散.

例 7.1.5　判定下列级数是否收敛？若收敛，试求其和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+3^{n-1}\right)$.

解　(1) 由于几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$ 均收敛，由性质 2

知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\right)$必收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{5}{2}.$$

(2) 由于几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n-1}$发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+3^{n-1}\right)$发散.

第二节　正项级数及其收敛准则

定义 7.2.1　若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

满足条件 $u_n\geqslant 0$ ($n=1, 2, \cdots$)，则称该级数为**正项级数**.

由于级数的敛散性判定问题，常常归结为正项级数的敛散性判别问题，故本节主要讨论正项级数的敛散性及几个常用的判别法.

定理 7.2.1　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

证　由于 $u_n\geqslant 0$，因而 $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}\geqslant S_n$，$n\in N$，可见$\{S_n\}$单调增加，若部分和数列$\{S_n\}$有上界，则由于单调有界数列必有极限，故$\{S_n\}$有极限，即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 反之，若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛且和为 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则$\{S_n\}$必有上界.　　证毕.

利用上述充要条件，即可建立几个检验正项级数敛散性的判别法.

定理 7.2.2（比较判别法）　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为正项级

数，而且 $u_n \leqslant v_n$ （$n=1, 2, \cdots$）.

（1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

（2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别记为 S_n 与 S'_n，则由于 $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ （$n=1, 2, \cdots$），有

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n = S'_n, \quad n=1, 2, \cdots.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，由定理 7.2.1 知 $\{S'_n\}$ 有上界，从而 $\{S_n\}$ 也有上界，于是，再由定理 7.2.1 知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则又由定理 7.2.1 知，$\{S_n\}$ 无上界，从而 $\{S'_n\}$ 也无上界，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散. 证毕.

推论 1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，且存在常数 $C>0$ 和自然数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$u_n \leqslant C v_n.$$

则 （1）当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

由性质 1、性质 3 及定理 7.2.2 易证此推论是正确的.

例 7.2.1 **讨论 p 级数（也称广义调和级数）** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ （p 为常数）的敛散性.

解 分两种情形讨论：

（1）当 $p \leqslant 1$ 时，有 $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^p}$，$n=1, 2, 3, \cdots$. 因调和级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故由比较判别法可知，此时 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散.

（2）当 $p>1$ 时，由于

$$0<\frac{1}{m^p}=\int_{m-1}^{m}\frac{1}{m^p}\mathrm{d}x<\int_{m-1}^{m}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x, m=1,2,\cdots,$$

故 p 级数的部分和

$$S_n=1+\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m^p}<1+\sum_{m=2}^{n}\int_{m-1}^{m}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<\frac{p}{p-1},$$

于是由定理 7.2.1 知，当 $p>1$ 时，p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛.

综上所述，我们得出结论：

p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，发散.

在使用比较判别法时，几何级数和 p 级数经常用来作为对比级数，因而，牢记其敛散性情况是十分必要的．同时应注意 p 级数的几种表现形式，如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Cn^p}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+C)^p}$（其中 C 为非零常数）的敛散性与例 7.2.1 相同.

例 7.2.2 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})$ 的敛散性.

解 将级数的一般项有理化，并作两次放大得

$$\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}=\frac{2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{n^3+1}}<\frac{2}{\sqrt{n^3}},\ n=2,\ 3\cdots.$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^3}}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$收敛$\left(p=\frac{3}{2}>1\right)$，所以原级数收敛.

例 7.2.3 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$的敛散性.

解 因为$\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{(n+1)}$，$n=1, 2, \cdots$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$仅相差一项，由性质 3 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，又由比较判别

法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 也发散.

推论 2（比较判别法的极限形式） 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为正项级数，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A.$$

则

(1) 若 $0<A<+\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 若 $A=0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(3) 若 $A=+\infty$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

证 (1) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$，且 $0<A<+\infty$，故对于给定的 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，必存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$\frac{A}{2}<\frac{u_n}{v_n}<\frac{3}{2}A,$$

于是，当 $n>N$ 时，有 $\frac{A}{2}v_n<u_n<\frac{3}{2}Av_n$.

故而，由推论 1 知，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散.

类似地，可以证明 (2) 和 (3). 证毕.

例 7.2.4 判别以下级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^3+1}}$.

解 (1) 因为

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=1,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$为收敛的 p 级数，由推论 2 知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$收敛.

（2）因为

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n-1}{\sqrt{n^3+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \sqrt{n}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}=1,$$

又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$为发散的 p 级数，由推论 2 知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^3+1}}$ 发散.

使用比较判别法，关键是选择一个敛散性已知的对比级数，但有时这种对比级数不易找到. 以下要介绍的比值判别法和根值判别法，是以比较判别法为基础，与某一几何级数相比较得出的. 这两种判别法只需从级数本身出发进行判别，因此使用起来会更方便些.

定理 7.2.3（比值判别法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，而且

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=r.$$

则（1）当 $r<1$ 时，级数收敛；

（2）当 $r>1$（包括 $r=+\infty$）时，级数发散；

（3）当 $r=1$ 时，级数可能收敛也可能发散.

比值判别法也称为**达朗贝尔（D'Alembert）判别法**.

证 因为 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=r$，则对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N. 使当 $n \geqslant N$ 时，恒有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-r\right|<\varepsilon.$$

（1）当 $r<1$ 时，对给定的 $\varepsilon=\frac{1-r}{2}>0$，存在正整数 N，使当

$n \geqslant N$时，有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - r\right| < \frac{1-r}{2},$$

于是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r + \frac{1-r}{2} = \frac{1+r}{2} = q < 1,$$

即

$$u_{N+1} < u_N q,$$

$$u_{N+2} < u_{N+1} q < u_N q^2.$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_{N+m} < u_{N+m-1} q < \cdots < u_N q^m, \ m = 1, 2, \cdots.$$

又因为几何级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_N q^m$ $(0 < q < 1)$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{N+m}$的各项均小于收敛的几何级数的各项，由比较判别法知，级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{N+m}$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

（2）当 $r > 1$ 时，对给定的 $\varepsilon = \dfrac{r-1}{2} > 0$，存在正整数 N，使 $n \geqslant N$时，有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - r\right| < \varepsilon,$$

即有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > r - \varepsilon = \frac{r+1}{2} = q > 1,$$

于是

$$u_{N+1} > u_N q,$$

$$u_{N+2} > u_{N+1} q > u_N q^2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_{N+m} > u_{N+m-1} q > \cdots > u_N q^m, \ m = 1, 2, \cdots.$$

又因为几何级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_N q^m$ $(q > 1)$ 发散，而级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{N+m}$的各项均

大于上述发散的几何级数的各项，所以级数 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{N+m}$发散，因而 $\sum_{m=1}^{\infty} u_n$ 发散.

（3） 当 $r=1$ 时，级数可能收敛，也可能发散.

例如，P 级数 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$，总有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^P}}{\frac{1}{n^P}} = 1.$$

但是，当 $P>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$收敛；而当 $P\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$发散.

证毕.

例 7.2.5 判别级数 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}>1,$$

所以，由定理 7.2.3 知，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$发散.

例 7.2.6 证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 对于任何正值 x 都是收敛的.

证 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

所以，由定理 7.2.3 知，对任何 $x>0$，所给级数都收敛.

证毕.

例 7.2.7　判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}\sin\frac{\pi}{3^n}$的敛散性.

解　因为

$$\frac{n^n}{n!}\sin\frac{\pi}{3^n}\leqslant\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{\pi}{3^n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}\frac{\pi}{3^n}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}\cdot\pi}{(n+1)!\cdot 3^{n+1}}}{\dfrac{n^n\cdot\pi}{n!\cdot 3^n}}=\frac{e}{3}<1.$$

所以，由定理 7.2.3 知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{\pi}{3n}$收敛，再由定理 7.2.2 知，原级数收敛.

定理 7.2.4（根值判别法）　对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r.$$

则(1) 当 $r<1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $r>1$（包括 $r=+\infty$）时，级数发散；

(3) 当 $r=1$ 时，可能收敛，也可能发散.

证明略.

例 7.2.8　用根值判别法确定以下级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$；　　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{na}{n+1}\right)^n$，$(a>0)$.

解　(1) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=e^{-1}<1.$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$收敛.

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{na}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1}=a,\ a>0.$$

所以，当 $0<a<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{na}{n+1}\right)^n$ 收敛；

当 $a>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{na}{n+1}\right)^n$ 发散；

当 $a=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$，

此时根值判别法失效，需要使用其他方法判定级数的敛散性. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0,$$

所以，由性质 5 知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ 发散.

注 7.2.1 由于比值判别法与根值判别法实质上是与几何级数进行比较，因此它适用于一般项收敛于零的速度较快的级数. 如果级数的项收敛于零的速度较慢，还可选择比几何级数收敛更慢的正项级数相比较，从而得到其他一些判别法，从略.

以上我们介绍了几种判定正项级数敛散性的常用方法. 实际应用时，可根据正项级数一般项的形式，具体问题具体分析. 一般情况下，可按如下顺序选择判别方法：检查一般项是否收敛于零；应用比值或根值判别法，比较判别法；正项级数的部分和数列是否有界的方法.

第三节 任意项级数

我们称对 u_n 的取值不加任何限制的常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**任意项级数**. 任意项级数敛散性的讨论，要比正项级数复杂. 判别任意项级数的敛散性时，首先考虑的是将其转化为判别正项级数敛散性的问题. 但是对某些特殊的任意项级数，我们还是能建立具体的判别法.

一、交错级数

定义 7.3.1 若 $u_n>0$，则形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$

的级数，称为**交错级数**.

关于交错级数，有如下判别法：

定理 7.3.1（莱布尼兹判别法） 设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：

（1）$u_n\geqslant u_{n+1}$，$n=1, 2, \cdots$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

证 记交错级数的前 $2n$ 项之和为 S_{2n}，并写成

$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n}).$$

由条件（1）知，所有括号内的差都是非负的，因此，$\{S_{2n}\}$ 是单调增加的数列.

另外，S_{2n} 又可以写成

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n},$$

其中每个括号内的差也是非负的，因此 $\{S_n\}$ 是有界数列，即 $S_{2n}\leqslant u_1$，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 存在，设为

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S.$$

又由条件（2）知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=S.$$

由此可见，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，从而交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，而且由 $S_{2n}\leqslant u_1$，可知，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = S \leqslant u_1.$$ 证毕.

例 7.3.1 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

解 (1) 因为该级数满足条件:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \quad n=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛.

(2) 由于直接验证数列$\left\{u_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$是否单调有一定困难，故转而考虑函数

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}, x\geqslant 1.$$

因为当 $x\geqslant 1$ 时, $f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}\leqslant 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减, 从而数列$\left\{u_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$单调递减，即原级数满足:

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1}\geqslant\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+1}, \quad n=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}=0,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 收敛.

二、任意项级数

以下我们考虑对一般项 u_n 的取值不加任何限制的任意项级数

的有关问题，为此，我们首先给出定义：

定义 7.3.2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**绝对收敛**；如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**条件收敛**.

例如，由例 7.1.2 及例 7.3.1 知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 条件收敛. 而对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$，由于各项加绝对值以后构成的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛.

定理 7.3.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛.

证 设 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$，则显然有 $0\leqslant v_n\leqslant|u_n|$.

又由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2v_n$ 收敛，由级数的性质和 $u_n=2v_n-|u_n|$ 可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证毕.

定理 7.3.3 若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=r.$$

则 (1) 当 $r<1$ 时，级数绝对收敛；

(2) 当 $r>1$（包括 $r=+\infty$）时，级数发散；

(3) 当 $r=1$ 时，级数可能收敛，也可能发散.

根据定理 7.2.3 很容易证明定理 7.3.3，故证明过程略去.

以上定理使得许多任意项级数敛散性的判定问题转化为正项级数敛散性的判定. 但是值得注意的是, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 不一定发散, 例如, 由例 7.3.1 知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛, 其绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

应该指出, 如果是使用比值判别法或根值判别法得出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散.

这是因为用比值或根值判别法推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 是基于一般项 $|u_n|$ 不趋于零 (见定理 7.2.3 的证明过程), 从而 u_n 也不趋向于零, 由此推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 7.3.2 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n$ 的敛散性.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^{n+1}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot|x| = |x|,$$

所以当 $|x| < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right|$ 收敛, 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 绝对收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right|$ 发散, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \infty$, 故由级数收敛的必要条件知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 发散.

另外, 当 $x = 1$ 时, 由例 7.1.2 及例 7.3.1 知, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛；当 $x=-1$ 时，由性质 1 和调和级数发散知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ 发散.

总之，当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 绝对收敛；当 $x=1$ 时，级数条件收敛；当 $|x|>1$ 或 $x=-1$ 时，级数发散.

例 7.3.3 判定下列级数是否收敛？并对收敛的级数，确定其收敛类型.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{10^n}$.

解 (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是一个交错级数，由于

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}=u_{n+1},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}=0,$$

所以，由莱布尼兹判别法知，该级数收敛，又由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n}$ 发散，所以由比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散，因而，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ 条件收敛.

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}<1,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 绝对收敛.

(3)因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=+\infty,$$

所以，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n!}{10^n}\right|$ 发散，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{10^n}$ 发散.

综上所述，判别任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性时，如果 $\lim\limits_{n\to 0}u_n=0$（否则，可判定级数发散），则应首先考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的敛散性（可以利用正项级数的各种判别方法），若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，且此结论是按比值或根值判别法作出的，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但不是按比值或根值判别法作出的，则应直接考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性，特别当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为交错级数时，可考虑使用莱布尼兹判别法.

第四节　幂　级　数

前面研究了常数项级数，本节将讨论函数项级数及其一类特殊情形：幂级数的敛散性和它的基本性质.

一、函数项级数

定义 7.4.1　设 $\{u_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$ 为定义在某实数集合 I 上的函数序列，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在 I 上的函数项无穷级数，简称**函数项级数**，其中 $u_n(x)$ 为级数的**通项**.

函数项级数与常数项级数有密切的联系，当变量 x 取常数 $x_0 \in I$ 时，函数项级数变为常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots.$$

如果对某点 $x_0 \in I$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 处收敛，x_0 为该函数项级数的**收敛点**；如果常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，则称函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 处**发散**，x_0 为该函数项级数的**发散点**. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 所有收敛点组成的集合，称为该函数项级数的**收敛域**；所有发散点组成的集合，称为该函数项级数的**发散域**.

对于收敛域中的每一个 x，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 都有惟一确定的和（记为 $S(x)$）与之对应，因而，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在收敛域上的一个函数，即当 x 属于收敛域时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),$$

称 $S(x)$ 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**. 显然，这个和函数的定义域就是该函数项级数的收敛域.

类似于常数项级数，我们称

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和. 于是，当 x 属于该函数项级数

的收敛域时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x).$$

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ 是区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的一个函数项级数. 由几何级数的敛散性知，当 $|x|<1$ 时，该级数收敛于和 $\frac{1}{1-x}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-x},\quad -1<x<1,$$

而当 $|x|\geqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ 发散，因此，该函数项级数的收敛域为 $(-1,\ 1)$.

下面我们讨论一类特殊的函数项级数——**幂级数**.

二、幂级数

定义 7.4.2 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \tag{7-5}$$

的函数项级数，称为关于 $(x-x_0)$ 的**幂级数**，其中常数 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 为幂级数的**系数**，x_0 为某个定值.

当 $x_0=0$ 时，幂级数变为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{7-6}$$

称为关于 x 的**幂级数**.

在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 中作代换 $y=x-x_0$，即可得到形如式 (7-6) 的幂级数. 为此，我们着重讨论式 (7-6) 型的幂级数.

定理 7.4.1 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 处收敛，则

在满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切点 x 处绝对收敛；如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=x_1$ 处发散，则在满足 $|x|>|x_1|$ 的一切点 x 处发散.

证明略.

定理 7.4.1 又称为**阿贝尔（Abel）定理**，它揭示了幂级数收敛域的特定结构.

由定理 7.4.1 知，若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0$ 处收敛，则对于开区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内的任何 x，幂级数皆收敛；若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=x_0$ 处发散，则对于闭区间 $[-|x_0|, |x_0|]$ 外的任何 x，幂级数皆发散，因而，发散点不可能在原点与收敛点之间.

综上所述，关于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛与发散，不外乎有如下三种情形：

（1）幂级数仅在点 $x=0$ 处收敛；

（2）幂级数在整个数轴上收敛；

（3）存在正数 R，对于开区间 $(-R, R)$ 内的任何 x，幂级数绝对收敛；对于闭区间 $[-R, R]$ 外的任何 x，幂级数发散；而在区间端点 $x=\pm R$ 处，幂级数可能收敛，也可能发散.

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛，则规定 $R=0$；若其在整个数轴上收敛，则规定 $R=+\infty$.

现在，求幂级数的收敛域问题就归结为确定 R 的问题了，称这样的 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的**收敛半径**.

定理 7.4.2 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho.$$

则有

(1) 若 $0<\rho<+\infty$，则 $R=\dfrac{1}{\rho}$；

(2) 若 $\rho=0$，则 $R=+\infty$；

(3) 若 $\rho=+\infty$，则 $R=0$.

证 (1) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=\rho|x|,$$

由 $0<\rho<+\infty$ 和比值判别法知，当 $\rho|x|<1$，即 $|x|<\dfrac{1}{\rho}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛；当 $\rho|x|>1$，即 $|x|>\dfrac{1}{\rho}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散. 由此可见，其收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

易证 (2)、(3) 的情况.

证毕.

例 7.4.1 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛半径和收敛区间.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}\cdot(n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n}{2^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{2},$$

所以，收敛半径 $R=2$.

对于端点 $x=-2$，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{1}{n}$，是发散的；对于端点 $x=2$，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，是条件收敛的. 所以，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛区间 I 为 $(-2,2]$.

例 7.4.2 求下列级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$;　　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\ x^n$.

解　(1) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=0,$$

所以 $R=+\infty$，从而其收敛域为 $I=(-\infty,\ +\infty)$.

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty,$$

所以 $R=0$，从而级数仅在 $x=0$ 处收敛.

三、幂级数的基本性质

下面我们不加证明地给出在函数的幂级数展开中，要用到的幂级数的加、减运算法则以及其和函数的分析性质.

性质 1　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $R_1>0$ 和 $R_2>0$，则对 $R\leqslant\min\{R_1,\ R_2\}$，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$ 在 $(-R,\ R)$ 内收敛，且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

性质 2　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$ 的收敛半径为 $R>0$，则

(1) $S(x)$在 $(-R,\ R)$ 内连续；

(2) **(逐项求导)**　对于区间 $(-R,\ R)$ 内的任何 x，都有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=S'(x);$$

(3) **(逐项积分)**　对于区间 $(-R,\ R)$ 内的任何 x，都有

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=\int_0^x S(t)\mathrm{d}t.$$

利用上述性质以及已知级数的和函数，通过逐项求导或逐项积分可得到其他级数的和函数.

例 7.4.3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 在收敛域 $(-1, 1)$ 上的和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和.

解 设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1$,

对上式两端从 0 到 x 积分得

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

对上式两端求导得

$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

由于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = S\left(\frac{1}{2}\right) = 4,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 2.$

第五节 函数的幂级数展开

我们已经知道，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 在其收敛区间内分别表示某个函数. 本节则讨论与此相反的问题：给定一个函数，能否在某区间内将其表示成幂级数，以及怎样表示成幂级数？将函数表示成幂级数称为函数的幂级数展开，而相应的幂级数称为

函数的幂级数展开式. 如果函数能用幂级数表示，那么，我们就可以对许多问题作进一步的研究.

一、泰勒级数

我们首先分析：若函数$f(x)$在点$x=a$的某邻域内能展成关于$(x-a)$的幂级数，则展开式的系数与函数$f(x)$的关系如何?

定理 7.5.1 设函数$f(x)$在点$x=a$的某邻域内有任意阶导数，且$f(x)$在$x=a$处的幂级数展开式为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n,$$

则

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

证 由于

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots.$$

所以由性质 2 知

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}+\cdots,$$

$$f''(x)=2!\ a_2+3\cdot 2a_3(x-a)+\cdots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!\ a_n+(n+1)n\cdots 2a_{n+1}(x-a)+\cdots.$$

令$x=a$得

$$f(a)=a_0,\ f'(a)=a_1,\ f''(a)=2!\ a_2,\ \cdots,\ f^{(n)}(a)=n!\ a_n,\ \cdots.$$

即有

$$a_0=f(a),\ a_1=f'(a),\ a_2=\frac{1}{2!}f''(a),\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a),\ \cdots.$$

证毕.

由于函数$f(x)$在$x=a$处的幂级数展开式的系数由$f(x)$在$x=a$处的函数值和各阶导数值所确定，所以$f(x)$在点$x=a$处的幂级数展开式是惟一的.

于是，我们引入以下定义：

定义 7.5.1 设函数$f(x)$在$x=a$处有任意阶导数，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\cdots,\quad(7-7)$$

为函数$f(x)$在点$x=a$处的**泰勒（Taylor）级数**，特别地，当$a=0$时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots,\quad(7-8)$$

称为函数$f(x)$的**麦克劳林（Maclaurin）级数**.

由定理 7.5.1 和定义 7.5.1 知，若函数$f(x)$在点$x=a$处能展成幂级数，则其幂级数展开式必为泰勒级数；特别地，若函数$f(x)$在$x=0$处能展成幂级数，则其幂级数展开式必为麦克劳林级数.

二、泰勒公式

定理 7.5.1 是假设$f(x)$在点$x=a$的某邻域内有任意阶导数，而且能展成幂级数即泰勒级数的前提下，给出了求幂级数展开式的方法. 反之，如果函数$f(x)$在点$x=a$的某邻域内有任意阶导数，那么我们形式上写出的泰勒级数，是否收敛于$f(x)$呢？即在什么条件下，函数$f(x)$能展成泰勒级数？为回答这一问题，先给出以下的泰勒公式.

定理 7.5.2 设函数$f(x)$在点$x=a$的某邻域内有直至$n+1$阶的导数，则对该邻域内的任意x有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+R_n(x), \qquad (7-9)$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1},\ \xi \text{ 在 } a \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$

证明略.

公式（7－9）称为函数$f(x)$按（$x-a$）的幂展开到n阶的泰勒公式或$f(x)$在$x=a$处的n阶泰勒公式，简称为**n阶泰勒公式**.该式表明，函数$f(x)$的值可近似地表示为

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

而近似表示的误差为$R_n(x)$.

当$n=0$时，泰勒公式变为拉格朗日中值公式

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a).$$

所以，泰勒公式是拉格朗日公式的推广，其余项$R_n(x)$又称为**拉格朗日型余项**.

$a=0$时的泰勒公式，称为**麦克劳林公式**：

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}f''(0)\cdot x^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\cdot x^n+R_n(x), \qquad (7-10)$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot x^{n+1},\ \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间},$$

或表示为

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\cdot x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

根据定理7.5.2，可以得到函数$f(x)$能否展成泰勒级数的充要条件.

定理7.5.3 设函数$f(x)$在点$x=a$的某邻域内有任意阶导数，则函数$f(x)$能展成泰勒级数的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，其中

$R_n(x)$为泰勒公式中的余项.

证明从略.

三、函数的幂级数展开

下面通过例题，具体介绍将一些初等函数展成为幂级数的两种方法.

（一）直接展开法

直接利用泰勒公式或麦克劳林公式，将函数$f(x)$展为幂级数的方法，称为**直接展开法**.

利用直接展开法将函数$f(x)$展为x的幂级数的一般步骤为：

（1）求出$f(x)$在$x=0$处的各阶导数值，若$f(x)$在$x=0$处的某阶导数不存在，则$f(x)$不能展成为x的幂级数；

（2）写出幂级数形式（7-8），并求出收敛区间；

（3）写出麦克劳林公式中的余项$R_n(x)$；

（4）考虑在收敛区间内余项$R_n(x)$是否满足$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 若满足，则幂级数在收敛区间内等于$f(x)$，反之，则不成立.

例 7.5.1 将函数$f(x)=e^x$展成x的幂级数.

解 因为$f^{(n)}(x)=e^x$，所以$f^{(n)}(0)=1$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

由例 7.4.2 知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$，从而对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，其一般项$u_{n+1}$满足：

$$\lim_{n\to\infty}|u_{n+1}|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

再由麦克劳林公式得

$$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad 0<\theta<1.$$

于是，对 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=0.$$

所以，由定理 7.5.3 知，$f(x)=e^x$ 可展为 x 的幂级数，即

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 7.5.2 求函数 $f(x)=\sin x$ 的麦克劳林级数.

解 因为 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$，　$n=0,1,2,\cdots$.

所以对 $k=0,1,2,\cdots$，

$$f^{(2k)}(0)=0,$$
$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k.$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)!}{(2k+3)!}|x|^2=0,$$

所以该级数的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$，即对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均有

$$\lim_{k\to\infty}|u_{k+1}|=\lim_{k\to\infty}\frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}=0.$$

再由麦克劳林公式得余项为

$$R_k(x)=\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\sin\left[\theta x+\frac{(2k+3)\pi}{2}\right],\qquad 0<\theta<1.$$

于是，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty}|R_k(x)|=0$. 即 $\lim\limits_{k\to\infty}R_k(x)=0$. 故由定理 7.5.3 知，$f(x)=\sin x$ 可展为麦克劳林级数，即

$$\begin{aligned}\sin x&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots,\end{aligned}$$

$-\infty < x < +\infty$.

(二) 间接展开法

利用幂级数的性质和某些已知函数的幂级数展开式求另一些函数的幂级数展开式的方法，称为**间接展开法**. 下面举例说明：

例 7.5.3 将函数 $f(x)=\cos x$ 展成 x 的幂级数.

解 因为

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\qquad -\infty < x < +\infty.$$

由性质 2 得

$$\begin{aligned}\cos x=(\sin x)'&=\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]'\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\\&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots,\end{aligned}$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

类似地，可以得到几个常见的初等函数的幂级数展开式. 现将几个重要函数的幂级数展开式总结如下：

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,$$

$$-\infty < x < +\infty;$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,$$

$$-\infty < x < +\infty;$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots,$$

$$-1 < x \leqslant 1;$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad -1 < x < 1,\ \alpha\text{ 为实数};$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

四、幂级数在数值计算中的应用举例

级数的应用非常广泛，可用于进行数值计算、积分计算、微分方程求解和表示非初等函数等许多方面. 这里仅介绍几个在数值计算方面的简单例子.

例 7.5.4　计算 e 的近似值.

解　由例 7.5.1 知

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

取 $n = 7$ 时，e 的近似值为

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{7!} \approx 2.718\ 26.$$

例 7.5.5　计算 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值（精确到 0.01）.

解　这个被积函数的原函数不能用初等函数表示，为此，可将被积函数展开成幂级数后再积分.

由例 7.5.1 可知

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \cdots, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

所以，

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}dx &= \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \cdots\right)dx, \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \times 2!} - \frac{x^7}{7 \times 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} + \cdots\right]\Bigg|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \times 2!} - \frac{1}{7 \times 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!} + \cdots.\end{aligned}$$

若取前 4 项之和作为 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值，则误差

$$|R_4| \leqslant \frac{1}{9\times 4!} = \frac{1}{216}.$$

于是

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\times 2!} - \frac{1}{7\times 3!} \approx 0.74.$$

习 题 七

1. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = \frac{2n}{n+1}$，求 u_1，u_2，u_n.

2. 利用级数敛散性定义和性质判断以下级数的敛散性，若收敛，求其和.

(1) $0.01 + \sqrt{0.01} + \sqrt[3]{0.01} + \cdots + \sqrt[n]{0.01} + \cdots$;

(2) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$.

3. 利用无穷级数的性质，以及几何级数与调和级数的敛散性，判别以下级数的敛散性.

(1) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{5} + \cdots + \cos\frac{\pi}{n} + \cdots$;

(2) $1 + \frac{1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{6n-1}{7n-1}$;　　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-1}$;

(6) $\frac{1}{3}\ln 3 + \frac{1}{3^2}\ln^2 3 + \cdots + \frac{1}{3^n}\cdot\ln^n 3 + \cdots$.

4. 利用比较判别法（或其极限形式）判别以下级数的敛散性.

(1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{n^2+1} + \cdots$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan\dfrac{\pi}{4n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+n}{1+n^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n\ (n+1)}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+a^n}\ (a>0)$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n^3-1}}$;　　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\sin n)^2}{4^n}$;　　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$.

5. 利用比值判别法判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n\cdot n!}{n^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdots\ (2n-1)}{2\cdot 5\cdots\ (3n-1)}$;

(7) $\dfrac{3}{1\cdot 2}+\dfrac{3^n}{2\cdot 2^2}+\cdots+\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$;　　(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{2^n}$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n+1}\cdot\tan\dfrac{\pi}{4n^2}$.

6. 利用根值判别法判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\dfrac{2}{n}\right)^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{n^n}$.

7. 判断以下级数是绝对收敛，条件收敛，还是发散?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}2^n\sin\dfrac{n\pi}{5}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} 2n^2$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$;

(9) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n}$;

(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)}}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2+(-1)^n}{n^{\frac{5}{4}}}$;　　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$.

8. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也绝对收敛.

9. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 也收敛.

10. 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)+2^n}{n(n+1)\cdot 2^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{7^n-5^n}$.

11. 求下列级数的收敛域.

(1) $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}+\cdots$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{\sqrt{n}} x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} (x-2)^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$;　　(6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$;　　(8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}(x-1)^n$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}$;　　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$;

12. 求下列级数的收敛域，以及它们在收敛域内的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)$.

13. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 在其收敛区间 $(-1,1)$ 的和函数，并求常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和.

*14. 将下列函数展成 x 的幂级数，并求收敛域：

(1) $f(x)=\sin^2x$;　　(2) $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$;

(3) $f(x)=x^3e^{-x}$;　　(4) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

(5) $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$;　　(6) $f(x)=\ln(4-3x-x^2)$;

(7) $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$;　　(8) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

(9) $f(x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)$;　　(10) $f(x)=\sin(x+a)$;

(11) $f(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$;　　(12) $f(x)=3^x$.

15. 求下列函数在指定点的幂级数展开式，并求其收敛域：

(1) $f(x)=e^x$, $x_0=1$;　　(2) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=2$;

(3) $f(x)=\ln x$, $x_0=3$;　　(4) $f(x)=\sin x$, $x_0=a$;

(5) $f(x)=\frac{1}{4-x}$，$x_0=2$；　　(6) $f(x)=\cos x$，$x_0=\frac{\pi}{4}$.

16. 设 $(a_{n+1}/a_n)\leqslant(b_{n+1}/b_n)$，$(a_n, b_n>0, n=1, 2, \cdots)$，试证：

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；

(2) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

17. 利用函数$\frac{1}{1-x}$的展开式逐项微分来求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$的和.

18. 将$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$展为 x 的幂级数，并证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

附录一

微积分学发展简况

一门科学的发展史，就是人类对这门科学的认识过程，从以下介绍的微积分的发展简况可以看到，该门学科的发展，如同社会的进展一样，是在漫长曲折的历史发展过程中，历经各代数学家的艰苦探索才得以创建与完善的.

一般地，人们将数学发展的历史分为以下几个时期：数学萌芽时期（从远古到公元前5世纪），初等数学时期（从公元前5世纪到公元17世纪），变量数学时期（17世纪中叶到19世纪20年代），近代数学时期（19世纪20年代到20世纪40年代），现代数学时期（20世纪40年代以来）. 微积分的理论基本是在17世纪到19世纪逐步发展与完善的. 以下我们从微积分的创建、发展与分析基础的奠定这三个阶段介绍它的发展简况.

一、微积分的创建

微积分的思想和方法，虽然是在17世纪“由牛顿和莱布尼兹大体上完成的”（恩格斯语），但它的形成过程，却要追溯到古代. 现在在大学里学习“微积分”，其顺序通常是先微分后积分，但在历史上，积分的概念却早于微分的概念而产生.

积分思想的产生起因于计算面积、体积和弧长. 早在公元前5世纪的古希腊年代，德谟克利特创原子法，把物体看作由大量微小部分叠合而成，从而求得锥体体积是等底等高柱体的1/3. 微积分的先驱者阿基米德（公元前287—前212）继承和发展了德谟克利

特的原子法，将其用于各种面积的计算，得到球面积、弓形面积和某些旋转曲面的面积．他还利用穷竭法求曲边形面积和曲面体体积，他的计算已接近于现在积分的计算．这种方法是将要计算的平面图形或几何体，分成很多窄的平行的条或薄的平行的层．阿基米德的研究工作达到了古代微积分思想的顶峰，对微积分的形成和发展有着十分重大的影响．在我国古代的数学发展中，早已存在微积分思想和方法的萌芽，主要表现在求面积和体积上．我国早在两千多年前，就已经能算出弓形、圆形、圆柱、圆台等几何形状的面积和体积．公元3世纪，我国魏晋时期的数学家刘徽（263年前后），为了计算圆面积和推算圆周率，创立了“割圆术”．他先把圆周分成6等份得到圆内接正六边形，“割”一次使边数倍增，得正十二边形，再割一次，得圆内接正二十四边形，照此不断割下去，则圆内接正多边形的面积就非常近似于圆的面积．他的这种“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆周合体而无所失矣”的思想，已蕴含了一种朴素的极限思想．这种计算方法与现在定积分的近似计算方法有着十分相似之处．积分的思想虽然出现很早，但积分的理论，在阿基米德的值得注意的成就之后，在一个相当长的时期，没有多大进展．大约到1450年，阿基米德的著作才通过一份手抄本的译本传到西欧，一直到17世纪初，才见到阿基米德的概念的进一步发展．

微分思想的产生在积分学之后．微分学起源于作曲线的切线问题和求函数的极大值、极小值．大约从15世纪初开始的文艺复兴时期起，社会生产和自然科学进入了迅速大规模发展阶段，它们向数学提出了许多新的要求和研究课题．其中一个问题是，求运动物体在任一点的运动方向或求曲线在任一点的切线，第一个关于切线的新观点源于伽利略的动力学，它把切线定义为合速度方向的直线．根据这一观点，笛卡儿、托里拆利等人先后解决了一些曲线的切线问题．由于把切线定义为合速度方向的直线，是一种把纯几何同力学联系的思想，因此有其局限性，即对于不是由运动所产生的曲线，这种方法就不适用了．对于这些问题，费马、笛卡儿等都作

了一些有意义的研究工作. 法国数学家笛卡儿（1596～1650）在1638年写给朋友哈地的信中，把切线作为割线的两个端点重合时的情况加以对待. 另外要指出的是，在求极值的问题上，法国数学家费马（1601～1665）于1629年所做的工作被认为是微分方法的第一个真正值得注意的先驱工作. 他当时提出的求极值的方法等价于：令 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$，即令 $f(x)$ 的导数等于零. 当然，费马当时还不知道，$f(x)$ 的导数为零仅是取极值的必要条件，而非充分条件. 以上谈到的求切线及求极值的方法，可以认为是微分计算的先导. 在数学的发展史上，笛卡儿和费马被看作是创立解析几何的最有功绩的数学家，而笛卡儿是解析几何的主要创立者. 解析几何借助于坐标，将形和数统一起来，特别是由于变数的引进，把几何和代数密切地联系起来，这是数学史上一项划时代的变革，是数学的一个转折点，特别是为微积分的创立准备了重要工具. 正如恩格斯所说："数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了".

17世纪前半叶至中叶，有许多学者致力于微积分的研究. 英国数学家沃里斯（1616～1703），是一位在许多领域中多产而又博学的学者. 他在分析方面的著作为他的伟大的同时代人牛顿开辟了道路. 1655年在他发表的求积方法的主要著作《无穷的算术》一书中，他把由卡瓦列利开创并由费马发展的不可分法系统化且加以推广，并从一些特殊情况推出了许多值得注意的结果. 例如，将 $\int_0^1 x^m\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m+1}$（$m$ 是正整数）推广为 m 为分数和负数（$m\neq -1$）. 他还引进了我们现在用的无穷大符号 ∞. 在其著作中，不仅使无限的概念以解析的形式出现在数学中，开辟了用级数表示函数的道路，而且把算术从有限推向无限，真正地跨入了微积分的领域. 在诸多研究微积分的学者中，特别值得一提的是牛顿的老师巴罗（1630～1677），他是最早赏识牛顿才能的人. 巴罗1644年进剑桥大学三一学院，1648年取得学士学位，后来成为母校的教授和副

校长. 1664 年，他成为剑桥的卢卡斯讲座教授的第一人. 1669 年，巴罗坦然宣称牛顿的学识已超过自己，当年 10 月他以高尚的精神将“卢卡斯教授”的职位让给牛顿，自己转向神学研究. “巴罗让贤”已经成为数学史上的佳话，当时牛顿仅 26 岁. 巴罗在其最重要的数学著作《光学和几何学讲义》中，给出了通过微分三角形来求切线的方法. 从微积分的观点来看，微分三角形即是由自变量增量 Δx 与函数增量 Δy 为直角边所组成的直角三角形，由于比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 可用来决定变化率及导数，因此，把握了微分三角形就等于把握了微分概念和方法的实质.

总之，由于近代天文学、近代力学的发展，也由于近代数学本身的发展，在 16、17 世纪众多学者的不断探索之下，对于瞬时速度、切线以及各类求积问题都有了特殊的计算方法，取得了富有成效的成果. 由速度、切线、极值问题导致微分的概念，由求积问题导致积分概念. 但微分与积分在当时还是比较朦胧的概念，而且是独立发展的. 对于切线与求积的互逆关系这一重要问题没有深入探讨. 尽管巴罗在其几何讲义中已明确发现了求切线和求积问题的互逆关系，并把切线的逆问题化为求面积问题，但没有把求面积化为求切线问题，因而其创造性的意义被掩盖了. 这样，在 16 世纪末、17 世纪的前 2/3 的时间里，微积分还未形成一套较完整的理论和普遍适用的方法.

系统地、大规模地应用微积分方法是 17 世纪最后 30 多年的事. 伟大的英国数学家、物理学家牛顿（1643～1727）和德国哲学家、数学家莱布尼兹（1646～1716），在总结前面大量研究成果的基础上，将已有的特殊计算技巧统一为一般算法，明确地提出了微分法和积分法，并将微分和积分这两个貌似不相干的问题联系起来，建立了两者之间的桥梁——“牛顿—莱布尼兹”公式，因此称牛顿和莱布尼兹为微积分学的奠基者.

牛顿于 18 岁进入剑桥大学三一学院，在校受教于巴罗，并开始了对数学的研究工作. 他是从物理学观点来研究数学的. 据牛顿

自述，他于1665～1666年，发现并创造了流数法，流数法反映了这一理论的力学背景. 1669年，牛顿把流数法的要点告诉了巴罗. 他的《流数法》一书写于1671年，直到1736年才发表. 在这部著作中，牛顿把一条曲线看作是由一个点的连续运动而形成的，点的横坐标和纵坐标是变动的量，变动的量被称为流，用x，y，z等表示，流的变化速度称为流数，用$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$表示，$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$的流数记作$\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$. 牛顿还引进称之为流的矩的概念，它指的是流在无穷小的时间间隔o中增加的无穷小量. 在《流数法》一书中，牛顿主要考虑了两类问题：(1) 已知流量的关系，求它们的流数之比，即已知函数$y=f(x)$，求$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$，这等价于微分. (2) 已知一个含有流数的方程，求流量之间的关系，这是(1)的逆问题，等价于积分或解微分方程. 另外，在该书中牛顿还给出了隐函数微分法、换元积分法以及流数法的各种应用，例如求曲线的切线、函数的最大值和最小值、曲线的拐点、凹凸性以及许多求积问题和曲线的求长. 在科学史上牛顿被称为是最伟大的科学家，他对物理问题的洞察力和他用数学方法处理物理问题的能力，都是空前卓越的. 莱布尼兹曾说："在从世界开始到牛顿生活的年代的全部数学中，牛顿的工作超过一半."对于世人的赞誉，牛顿却表现得异常谦虚，在尊重他的前辈的成果方面，他曾作过这样的解释：如果我比别人看得远些，那只是由于我站在巨人的肩上.

莱布尼兹是17世纪伟大的全才，几乎同时与牛顿各自独立地创立了微积分. 莱布尼兹是从几何角度来研究微积分的. 他在对微分三角形进行深入研究时认识到，求曲线的切线依赖于纵坐标之差与横坐标之差的比值（当差值变成无限小时）；求曲边图形的面积则依赖于在横坐标的无限小区间上的纵坐标之和或无限薄矩形之和. 莱布尼兹开始认识到了求和与求差运算是可逆的，这一认识是创立微积分的关键. 在这一认识的基础上，莱布尼兹于1673年到1676年之间发明他的微积分，直到1684年，才发表了他的关于微积分的第一篇论文. 这篇仅6页的论文中，包括了变量的微分概

念，变量的和、差、积、商及幂的微分公式．文中已含有现代的微分符号和基本微分法则．例如，导数被记作 $dx:dy$（横坐标与纵坐标的字母与现在相反），求两个函数乘积的微分法则：$dax = adx$，$dxv = xdv + vdx$．而两个函数乘积的 n 阶导数的微分法则，现在还称作莱布尼兹法则．1686 年，他发表了第一篇积分学论文．他得到的特殊积分法有：变量替换法，分部积分法，以及利用部分分式求有理式的积分方法等．这样，莱布尼兹通过研究几何问题，建立了与流数法实质一样的微积分．莱布尼兹对数学形式有超人的直觉，他是历史上最伟大的符号学者之一．他所创设的微积分符号，比牛顿的符号更灵活，更能反映微积分的本质．他所引用的积分号 $\int$（拉丁字母 Summa 的第一字母）出现在他 1675 年 10 月 29 日的手稿上，它是字母 S 的拉长．

二、微积分的发展

微积分的创立，使许多初等数学束手无策的问题迎刃而解．这是因为初等数学是用静止的方法来研究问题，而微积分却是用运动和变化的观点来探究事物变化和发展的过程．自牛顿和莱布尼兹创立微积分后，在 17 世纪末以及 18 世纪，微积分得到迅猛发展．当时的数学家从物理学、力学、天文学等问题的研究中，发现并创立了许多数学的新分支．如级数论、函数论、微分方程、积分方程、变分法、泛函分析等．这些分支包括微积分在内，总称为数学分析．

18 世纪对数学作出贡献的数学家有很多，例如著名的瑞士伯努利家族、泰勒、马克劳林、欧拉、克莱罗、拉格朗日、达朗贝尔、拉普拉斯、勒让德等等．

雅科布·伯努利（1654 ~ 1705）与约翰·伯努利（1667 ~ 1748）兄弟，属于最早认识到微积分的惊人力量并把他应用于各类问题的数学家．他们把莱布尼兹零碎而又梗概性的文章认真加

具，使莱布尼兹的思想得到迅速的传播．雅科布·伯努利的数学成果主要有：统计学和概率论的伯努利分布和伯努利定理，微分方程中的伯努利方程，数论中很有影响的伯努利数和伯努利多项式等．约翰·伯努利是一位在数学上更为多产的数学家，他的著作内容广泛，包括有与反射和折射有联系的光学问题，用级数求曲线的长和区域面积，解析三角学等．另外，现在微积分中求$\frac{0}{0}$型极限的洛必达法则，其实是约翰·伯努利首先提出的，但由他的学生，法国数学家洛必达（1661～1704）编入了自己的重要著作《无穷小分析》，并称作洛必达法则．该书于1696年出版，书中由一组定义和公理出发，对变量、无穷小量、切线、微分等概念做了系统阐述，是世界上第一本系统的微积分教科书．洛必达也是欧洲大陆早期微积分领域的先驱，在他与雅科布·伯努利、莱布尼兹和牛顿的长期通信中萌发了许多科学理论的新思想，导致微积分学说的创立与发展．

英国数学家泰勒（1685～1731）和马克劳林（1698～1746）由于研究弦振动理论和天文学，得到级数展开理论．1715年泰勒发表他的展开式定理（没有考虑到收敛性）：$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots$.

瑞士数学家欧拉（1707～1783）和法国数学家克莱罗（1713～1765）研究曲线曲面的力学问题、光学问题、大地测量和地图绘制产生了微分几何．克莱罗是最早研究二重曲率曲线的人之一，他讨论了曲面和空间曲线的解析理论，给出空间曲线弧长的表达式和某些曲面面积的求积公式．他利用微分方程的级数理论，及时估算出1759年哈雷彗星的近地点日期，并于1758年做出了预报．欧拉是历史上最伟大的数学家之一，他引人了空间曲线的参数方程，给出了空间曲线曲率半径的解析表达式．1766年他出版了《关于曲面上曲线的研究》，建立了曲面理论．这篇著作是微分几何发展史上的一个里程碑．欧拉在创建数学理论的同时，还应用这些数学工

具去解决大量天文、物理、力学等方面的实际问题.

法国数学家拉格朗日（1736～1813）、欧拉和伯努利兄弟研究力学和天体运行建立了变分法和常微分方程. 拉格朗日曾成功地运用微分方程理论和近似解法，研究了一个复杂的六体问题（木星的四个卫星的运动问题），1773 年他在天体力学的讨论中引入了三重积分的概念，并利用球坐标来进行计算.

在数学上，有人把 17 世纪叫做天才时期，把 18 世纪叫做发明时期. 如上所述，18 世纪的数学家在物理学、天文学等实际问题的推动下，利用微积分及其新的分支，解决了科学与技术中的许多问题. 这样，微积分在 17 世纪中叶创建以后，18 世纪得到迅速发展，达到了空前灿烂的程度.

三、微积分基础的奠定

微积分的理论基础是极限理论，立论基础是实数域. 但是 17、18 世纪的数学家们，关心的是数学对物理学、天文学的价值，忙于利用微积分去解决科学和技术中的许多实际问题. 但是在解决问题过程的具体运算中，有时是凭直觉，盲目地处理分析过程，并没有注意到当时还没有严密的数学理论作指导，也无暇顾及所依据的理论是否可靠，基础是否扎实，因此研究越是深入，谬误也越是增多. 例如，由于当时没有严格的极限理论，因而连续性和导数的概念也不可能严密. 那时几乎所有的数学家都相信，而且许多教科书都“证明”，连续函数一定是可微的. 柯西还曾错误的断言，多变量函数若分别对每个变量连续，则对所有变量都连续. 但其后，有些数学家，如黎曼（1826～1866）、魏尔斯特拉斯（1815～1897）却给出了处处连续但处处不可微的函数的例子. 连续性与可微性之间有如此大的差异，引起了数学界的震惊，也使人们认识到，仅依赖直观与几何思考是不可靠的，要想对问题的研究有新的、更深刻的结果，必须重新整理微积分的基础.

在微积分的严格化上最早做工作的第一流数学家是拉格朗日，

他的著作对以后的数学研究有深刻的影响．而首先提出彻底改变分析基础不能令人满意的状况的是达朗贝尔（1717～1783），他于1754年十分准确地发现，需要有极限的理论．但是，在1821年以前，此理论未得到完善的发展．

19世纪，分析的理论工作在不断加深的基础上继续加强，这首先归功于德国伟大的数学家高斯（1777～1855），他将数学从直观概念中解脱出来，并为数学的严谨化奠定了新的高标准．1812年他在处理超几何级数时，最先对无穷级数收敛性作了第一次系统的研究．1821年分析的理论研究工作向前跨出一大步．柯西看出了微积分学基础的核心问题是极限．他在其著作《分析教程》中，对极限做了如下定义："当一个变量逐次所取的值无限趋近一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小就多小，这个定值就叫做所有其他值的极限．" 这个定义使极限观念摆脱了与几何和运动直观的任何牵连，使一个模糊不清的动态观念，变成为一个严密叙述的静态观念．在此基础上，柯西又重新定义了连续性、可微性和用极限概念表示定积分的定义．柯西关于极限的定义在极限概念的严格化中处于重要地位，但是这一定义是以语言叙述的方式给出，其含义不甚确切，因此其严密性还是不够的．1856年，德国数学家魏尔斯特拉斯又将极限定义作了精确的叙述，建立了极限理论中的ε—δ方法．

柯西、魏尔斯特拉斯等人给微积分的理论基础——极限论提供了严密性，这为微积分的进一步发展奠定了稳固的基础．但是，对于微积分的立论基础——实数域，还没有给出一个严格的定义．那时，极限运算是建立在实数系的简单直觉观念上，实数系或多或少被认为是当然的．由于对实数系的结构缺乏清晰的理解，从而使许多问题的证明无法进行．例如，柯西不能证明他自己关于序列收敛准则的充分性．而德国数学家戴德金（1831～1916）在开设微积分课程时，为了证明单调增加有界数列存在极限，不得不借助于几何直观．基于这种情况，魏尔斯特拉斯提出一个设想：实数系本身应该严格化，然后微积分的所有概念应该由此数系导出．

19 世纪末叶，魏尔斯特拉斯、戴德金以及德国数学家康托(1845～1918) 等建立了完整的实数理论. 由于实数理论的建立，使得微积分学的研究有了一个完备的数域，使数学分析得以建立在精确和坚实的基础上，从而结束了三百多年来不断出现谬误的局面，推动了数学的进一步发展.

附录二

习题参考答案

习　题　一

1. (1) $|x|\leqslant 2$　(2) $x\neq\pm 1$　(3) $(-\infty,\ +\infty)$

   (4) $x>1$　(5) $x\neq 0$　(6) $-1\leqslant x\leqslant 3$

2. $f(-1)=6$, $f(0)=2$, $f(2)=0$, $f(x+\Delta x)=(\Delta x)^2+(2x-3)\Delta x+x^2-3x+2$.

3. (1) 不是，因为定义域不同.

   (2) 不是，因为定义域不同.

   (3) 不是，因为对应法则不同.

   (4) 是，因为定义域、对应法则相同.

4. (1) $x(x+1)$　(2) x^2-2,　$|x|\geqslant 2$

5. (1) $x\geqslant -1$

   (2) $f(0)=1$, $f(1)=\sqrt{2}$, $f(2)=0$, $f(4)=3$

6. $y=\begin{cases}4+2x, & x<\dfrac{1}{2}\\ 6-2x, & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$

7. (1) $y=u^{10}$, $u=2+5x$

   (2) $y=e^u$, $u=\sin v$, $v=2x$

   (3) $y=u^2$, $u=\tan v$, $v=1+e^x$

   (4) $y=\ln u$, $u=\cos v$, $v=x^2$

   (5) $y=\arcsin u$, $u=x^2+1$

   (6) $y=\sqrt{u}$, $u=\ln v$, $v=\ln w$, $w=\ln x$

8. $C(x)=2\ 000+15x$, $R(x)=20x$

9. $R(x)=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 700\\ 117x+9\,100, & 700<x\leqslant 1\,000\end{cases}$

$L(x)=R(x)-C(x)=\begin{cases}125x-200, & 0\leqslant x\leqslant 700\\ 112x+8\,900, & 700<x\leqslant 1\,000\end{cases}$

10. $P_0=5$

11. $Q=500(90-P)$

12. (1) 400 公斤　(2) $\frac{400}{3}$公斤　(3) $45\frac{1}{3}$元

13. (1) 0　(2) 0　(3) $\frac{\pi}{2}$　(4) $-\frac{\pi}{2}$

14. (1) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$,　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$,　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在,

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-1$,　$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=1$

(2) 略

15. (1) -1　(2) $\frac{1}{4}$　(3) $\frac{3}{2}$　(4) ∞

(5) $\frac{1}{2}$　(6) $2x$　(7) $\frac{1}{4}$　(8) $\frac{1}{2}$

(9) $\frac{4}{3}$　(10) 1　(11) $-\frac{4}{3}$　(12) 2^{15}

(13) $\frac{1}{2}$　(14) 1　(15) $\frac{1}{2}$　(16) 0

16. (1) $\frac{2}{3}$　(2) $\frac{1}{2}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) 2

(5) 2　(6) $\frac{1}{2}$　(7) e^{-4}　(8) e^3

(9) e^2　(10) e^{-2}　(11) $e^{-\frac{1}{2}}$　(12) e^{-1}

(13) e^2　(14) 1

17. (1) $1-\cos^2x=o(x)\ (x\to 0)$　(2) $k=2$

18. (1) -2, 1　(2) 0　(3) 0　(4) 1

19. (1) 连续　(2) 不连续

20. (1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续

　　(2) 在 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 内连续

21. (1) $f(0)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$　　(2) $f(0)=6$

22. $k=1+e$

习　题　二

1. (1) $2x$　　(2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. (1) $-f'(x_0)$　　(2) $\frac{1}{2}f'(x_0)$

　　(3) $3f'(x_0)$　　(4) $2f'(x_0)$

3. (1) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$　　(2) $\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$

　　(3) $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}+e^x-\frac{1}{x^2}$　　(4) $2x\sin x+x^2\cos x$

　　(5) $x^2e^x(3\ln x+x\ln x+1)$　　(6) $a^x\ln a\cdot\arctan x+\frac{a^x}{1+x^2}$

　　(7) $\tan x+x\sec^2x+\frac{1}{x\ln a}$　　(8) $-\frac{1}{x^2}\arcsin x+\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

　　(9) $\cos x$　　(10) $-\frac{2}{(1+x)^2}$

　　(11) $\frac{-1}{1+\sin x}$　　(12) $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$

　　(13) $f'(1)=3$　　(14) $f'(0)=1$

4. $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)$

5. $(2, 16)$ 和 $(-2, -16)$

6. (1) $40x(2x^2+5)^9$　　(2) $\frac{3}{3x-2}$

　　(3) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$　　(4) $e^{\sin x}\cos x$

(5) $(e^x+1)\sec^2(e^x+x)$　(6) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(7) $2x\cos x^2$　(8) $3\sin 2(3x+1)$

(9) $\dfrac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$　(10) $\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

(11) $4x(x^2+1)e^{(x^2+1)^2}$　(12) $\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}}$

(13) $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}}$　(14) $-\dfrac{2x}{(x-1)^3}$

7. (1) $\dfrac{2}{3(1-y^2)}$　(2) $\dfrac{y}{e^y-x}$

(3) $\dfrac{y\ln y}{y-x}$　(4) $\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$

(5) $\dfrac{e^y}{1-xe^y}$　(6) $\dfrac{\cos x-ye^{xy}}{xe^{xy}}$

8. (1) $(x^3+1)\ln x\cdot e^{2x}\left(\dfrac{3x^2}{x^3+1}+\dfrac{1}{x\ln x}+2\right)$

(2) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2-x}{(x+1)(x-3)}}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

(3) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x+3}\right)$

(4) $2x^{2x}(1+\ln x)$　(5) $x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$

(6) $(x+2)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln(x+2)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}\right)$

9. (1) $-\dfrac{1}{(1+x)^2}$　(2) $2xe^{x^2}(3+2x^2)$

(3) $e^{\sin x}(\cos^2x-\sin x)$　(4) $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

(5) $\sec x(\tan^2x+\sec^2x)$　(6) $\dfrac{1}{\cos x-1}$

10. (1) $a^x(\ln a)^n$　　(2) $(-1)^n e^{-x}$

(3) $e^x(x+n)$

(4) $m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$

(5) $(-1)^n n!\ (1+x)^{-(n+1)}$　　(6) $(-1)^n\cdot\dfrac{1}{x^{n-1}}$

11. (1) $-\tan(\sin^2 x)\sin 2x$　　(2) $\dfrac{e^{\sqrt{\ln(2x-1)}}}{(2x-1)\sqrt{\ln(2x-1)}}$

(3) $f'(e^x+1)\cdot e^x$　　(4) $e^{f(x)}\cdot f'(x)$

(5) $f'(e^x+x^e)(e^x+ex^{e-1})$　(6) $2xf(x)[f(x)+xf'(x)]$

12. (1) $f'(1)=2$　　(2) 不可导

13. $f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x<1\\ 3, & x\geqslant 1\end{cases}$

14. (1) $-2x\sin x^2 dx$　　(2) $\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

(3) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx$　　(4) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$

(5) $2xe^{2x}(1+x)dx$　　(6) $\dfrac{e^y}{1-xe^y}dx$

15. 1.0067

习　题　三

1. (1) $\xi=\dfrac{1}{4}$　　(2) $\xi=0$

2. (1) $1^3-0^3=3\xi^2(1-0)$, $\xi\in(0,1)$; $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\ln 2-\ln 1=\dfrac{1}{\xi}(2-1)$, $\xi\in(1,2)$; $\xi=\dfrac{1}{\ln 2}$

3. 有两个实根，分别在区间 (0, 2)、(2, 4) 内

4. 略

5. (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 2

(5) 1 (6) 2 (7) $-\frac{1}{2}$ (8) $\frac{1}{2}$

(9) 1 (10) 1 (11) 0 (12) 0

(13) 1 (14) 0 (15) $\frac{1}{2}$ (16) 1

(17) $\frac{1}{2}$ (18) 1

6. (1) 递增区间$(-\infty, 0)$，递减区间$(0, +\infty)$.

(2) 递增区间$(-\infty, 1)\cup(3, +\infty)$，递减区间$(1, 3)$.

(3) 递增区间$(-1, 0)\cup(1, +\infty)$，递减区间$(-\infty, -1)\cup(0, 1)$.

(4) 递增区间$(-2, 0)$，递减区间$(-\infty, -2)\cup(0, +\infty)$.

7. 略

8. (1) 递增区间$(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$，递减区间$(0, 2)$；极大值$f(0)=7$，极小值$f(2)=3$.

(2) 递增区间$(-\infty, \frac{1}{5})\cup(1, +\infty)$，递减区间$(\frac{1}{5}, 1)$；

极大值$f(\frac{1}{5})=\frac{3\ 456}{3\ 125}$，极小值$f(1)=0$.

(3) 递增区间$(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$，递减区间$(0, 1)$；

极大值$f(0)=0$，极小值$f(1)=-\frac{1}{2}$.

(4) 递增区间$(-1, 1)$，递减区间$(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$；极大值$f(1)=1$，极小值$f(-1)=-1$.

9. (1) 极大值$f(-1)=2$，极小值$f(1)=-2$

(2) 极大值$f(1)=1$，极小值$f(3)=-3$

(3) 极大值$f(\frac{7}{3})=\frac{4}{27}$，极小值$f(3)=0$

(4) 极大值 $f(2)=4e^{-2}$，极小值 $f(0)=0$

10. (1) 最大值 $f(2)=13$，最小值 $f(\pm 1)=4$

(2) 最大值 $f(0)=f(3)=5$，最小值 $f(-2)=-15$

(3) 最大值 $f(4)=6$，最小值 $f(0)=0$

(4) 最大值 $f(2)=e^2$，最小值 $f(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{4}}$

11. (1) 上凸区间 $(0, 1)$，下凸区间 $(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$，拐点 $(0, 1)$.

(2) 上凸区间 $(-\infty, 1)$，下凸区间 $(1, +\infty)$，拐点 $(1, -2)$.

12. (1)

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
$f(x)$	$\searrow$ $\cup$	极小 0	$\nearrow$ $\cup$	拐点 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$	$\nearrow$ $\cap$	极大 $\frac{4}{27}$	$\searrow$ $\cap$

(2)

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$ $\cap$	极大 -4	$\searrow$ $\cap$	间断	$\searrow$ $\cup$	极小 0	$\nearrow$ $\cup$

13. $C'(x)=5$，$R'(x)=10-0.02x$，$L'(x)=5-0.02x$.

14. $L'(800)=4$. 当产量为 800 个单位时，若再多生产一个单位产品，则利润将增加 4 元.

15. (1) $R'(Q)=-\frac{2}{5}Q+20$，$R'(20)=12$，$R'(60)=-4$.

(2) $Q'(10)=-5$.

经济意义略.

16. $E_p=-\frac{P}{4}$，$E_p\Big|_{P=3}=-\frac{3}{4}$，$E_p\big|_{P=4}=-1$，$E_p\Big|_{P=5}=-\frac{5}{4}$.

17. $E_p\big|_{P=3}=-3$. 在 $P=3$ 时，当价格下降 1%，需求量将增加 3%.

18. $E_p\big|_{P=4}\approx -0.54$. 此时可采取提价政策.
因为 $P=4$ 时，价格上涨 1%，需求量下降 0.54%，需求变动的幅度小于价格变动的幅度.

19. 140（件）.

20. 15 个单位.

21. $R'(x)=26-4x-12x^2$，$C'(x)=8+2x$，
$x=1$（万件）时利润最大，最大利润为 11（万元）.

22. 圆的一段长为$\frac{\pi a}{4+\pi}$，正方形的一段长为$\frac{4a}{4+\pi}$.

习 题 四

1. $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$　　2. 是　　3. $y=x^2$　　4. $y=x^2$

5. (1) $x-\frac{2}{3}x^3+C$　　(2) $\frac{1}{2}x^2+2x+\ln|x|+C$

(3) $x-\frac{3}{x}-\frac{1}{2x^2}+3\ln|x|+C$　(4) $-2x^{-\frac{1}{2}}+C$

(5) $\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{\ln 5}5^x+C$　　(6) $\frac{2^x e^x}{\ln(2e)}+C$

(7) $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C$　　(8) $x-\arctan x+C$

(9) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$　　(10) $\ln|x^2+x|+C$

(11) $x+\sin x+C$　　(12) $\tan x-x+C$

(13) $\sin x-\cos x+C$

6. (1) $\frac{1}{24}(3x-1)^8+C$　　(2) $\frac{1}{2}\ln|1+2x|+C$

(3) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$　　(4) $e^{x+1}+C$

(5) $-e^{-x}+C$　　(6) $2e^{\sqrt{x}}+C$

(7) $-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}+C$ (8) $-\frac{1}{\ln x}+C$

(9) $\ln|1+\ln x|+C$ (10) $\ln(e^x+2)+C$

(11) $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$ (12) $\sin e^x+C$

(13) $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+C$ (14) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$

(15) $\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\sqrt{2}x+C$ (16) $\arctan(x+3)+C$

(17) $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$ (18) $\frac{1}{32}(4x-\sin 4x)+C$

(19) $\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+C$ (20) $\ln|\ln x|+C$

(21) $-\frac{1}{x-\sin x}+C$ (22) $\frac{1}{2}\ln|x^2+2\sin x|+C$

(23) $\arcsin e^x+C$ (24) $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$

(25) $-\sin\frac{1}{x}+C$ (26) $\frac{1}{3}e^{x^3+3x}+C$

7. (1) $2\sqrt{x}-10\ln(\sqrt{x}+5)+C$

(2) $6(\sqrt[6]{x}-\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[6]{x})+C$

(3) $2\ln(x+\sqrt{x})+C$

(4) $\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+C$

(5) $\frac{1}{2}(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2})+C$

(6) $\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C$

(7) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$

8. (1) $x\ln x - x + C$

(2) $x\sin x + \cos x + C$

(3) $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

(4) $x\operatorname{arccot}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

(5) $\frac{1}{2}(x^2\operatorname{arccot}x + \operatorname{arccot}x + x) + C$

(6) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

(7) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

(8) $xe^x + C$

(9) $4x\sin x + 4\cos x - \sin x + C$

(10) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$

(11) $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + C$

(12) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C$

9. (1) $-6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C$

(2) $3\ln|x-3| - \frac{10}{x-3} + C$

(3) $3\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$

(4) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C$

(5) $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + 2\arctan(x-1) + C$

10. (1) 3　　(2) 1　　(3) 3

11. (1) $(\ln|x-1| + C)$　$y = 1$

(2) $ye^y = Cxe^x$

(3) $y = e^{1-\sqrt{1+x^2}}$

(4) $y = \ln 2 - \ln(x^2+1)$

12. (1) $y=-\dfrac{x}{\ln|x|+C}$

(2) $y=(\ln y+C)x$

(3) $y^2=x^2-x$

(4) $y^5-5x^2y^3=1$

习 题 五

1. (1) $>$ (2) $<$ (3) $<$ (4) $>$

2. 略.

3. (1) $x\cos^3 x$ (2) $-\sqrt{9-x^2}$

(3) $2\cos 6x$ (4) $2x^2e^{x^2}-xe^x$

4. (1) 0 (2) $\dfrac{1}{2}$

5. 极小值 $f(0)=0$.

6. (1) $\dfrac{1}{5}$ (2) $1-\ln 2$ (3) $1-\dfrac{1}{e}$ (4) 0

(5) $\dfrac{3}{2}+\ln 2$ (6) $22\dfrac{2}{3}$ (7) $\dfrac{2}{3}\pi$ (8) 1

(9) 1 (10) -1 (11) $-2\dfrac{1}{6}$

7. (1) $2-4\ln 3+4\ln 2$ (2) π

(3) $2-\dfrac{\pi}{2}$ (4) $\dfrac{1}{3}$

(5) $\dfrac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$ (6) $1+\ln 2-\ln(e+1)$

8. (1) 1 (2) $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}+\dfrac{1}{2}$ (3) $\ln 2-2+\dfrac{\pi}{2}$

(4) 1 (5) $\dfrac{1}{2}(1-e^{2\pi})$ (6) π

(7) $2+2e^2$ (8) $\dfrac{1}{4}\pi^2$

9. (1) 收敛，1　　(2) 收敛，1　　(3) 收敛，1

(4) 收敛，2　　(5) 收敛，$\frac{\pi}{2}$　　(6) 发散

10. (1) $\frac{4}{3}$　　(2) $\frac{8}{3}$　　(3) $\frac{1}{6}$

(4) $\frac{4}{3}$　　(5) $\frac{7}{6}$

11. (1) $\frac{1}{2}\pi$　　(2) $\frac{\pi^2}{4}$　　(3) $\frac{4}{3}\pi$

12. (1) $3+2Q+0.2Q^2$

(2) $Q=10$ 个单位时利润最大，最大利润为 37 万元.

13. $100Qe^{-\frac{Q}{10}}$.

习 题 六

1. (1) $D=\{(x, y)\mid x+y\neq 0,\ x-y\neq 0\}$

(2) $D=\{(x, y)\mid x\geqslant 0,\ 2n\pi\leqslant y\leqslant (2n+1)\pi\}\cup\{(x, y)\mid x\leqslant 0,\ (2n+1)\pi\leqslant y\leqslant (2n+2)\pi\}$，$n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

(3) $D=\{(x, y)\mid -y^2\leqslant x\leqslant y^2,\ y\neq 0\}$

(4) $D=\left\{(x, y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$

(5) $D=\{(x, y)\mid 4<x^2+y^2<16\}$

(6) $D=\{(x, y)\mid x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant x^2\}$

2. $f(x, y)=xy$

3. (1) $z'_x(1, 2)=-3$，$z'_y(1, 2)=9$

(2) $z'_x(1, 1)=1$，$z'_y(1, 1)=-1$

(3) $z'_x(0, 1)=z'_y(1, 0)=0$

4. (1) $z'_x=ye^{xy}$，$z'_y=xe^{xy}$

(2) $z'_x=y+\frac{1}{y}$，$z'_y=x-\frac{x}{y^2}$

(3) $z'_x=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$

(4) $z'_x=\cot(x-2y)$, $z'_y=-2\cot(x-2y)$

(5) $z'_x=3x^2y^3-y^3$, $z'_y=3x^3y^2-3xy^2$

(6) $z'_x=\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$, $z'_y=\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$

(7) $z'_x=e^x(\sin y+\cos y+x\sin y)$, $z'_y=e^x(-\sin y+x\cos y)$

(8) $z'_x=\dfrac{1}{x+\ln y}$, $z'_y=\dfrac{1}{y(x+\ln y)}$

(9) $z'_x=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $z'_y=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

(10) $z'_x=\ln\dfrac{y}{x}-1$, $z'_y=\dfrac{x}{y}$

5. (1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{x+2y}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{x}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{y}{(x+y)^2}$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos2(ax+by)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos2(ax+by)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ab\cos2(ax+by)$

6. (1) $dz=2z(xdx+ydy)$

(2) $dz=(2x+y^2)dx+(2xy+\cos y)dy$

(3) $dz=\dfrac{1}{1+x^2y^2}(ydx+xdy)$

(4) $dz=\dfrac{1}{x}dx+\dfrac{1}{y}dy$

7. (1) 0.04 (2) −0.2

8. (1) 1.08 (2) 2.95

9. (1) $z'_x=\dfrac{2y^2}{x^3}\left[\dfrac{x^2}{x^2+y^2}-\ln(x^2+y^2)\right]$

$z'_y=\dfrac{2y}{x^2}\left[\dfrac{y^2}{x^2+y^2}+\ln(x^2+y^2)\right]$

(2) $z'_x=\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}e^{uv}$　　$z'_y=\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}e^{uv}$

(3) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{e^t(1+e^{2t})}{(1-e^{2t})^2}$　　(4) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(5) $\dfrac{dz}{dx}=e^{\sin x-2x^3}(\cos x-6x^2)$　　(6) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x^2-2x-1}{3(x-1)^2}$

10. (1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y+1}{x+1}$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{y(1+x^2z^2)-x}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1+x^2z^2}{y(1+x^2z^2)-x}$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x(z-1)}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y(z-1)}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{z}{xy(z-1)^3}$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x+z}$　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z^2}{y(x+z)}$　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{xz^2}{y(x+z)^3}$

11. (1) 极小值 $z(0,\ 0)=0$.

(2) 极大值 $z(-2,\ -1)=28$，极小值 $z(2,\ 1)=-28$.

(3) 极小值 $z(\dfrac{1}{2},\ -1)=-\dfrac{1}{2}$.

12. 前墙的长为 40 米，高为 30 米时，其表面积最小，厂房造价最低.

13. $p_1=80$，$p_2=120$，最大利润为 $L=605$.

14. 当 $x_1=15$（万元），$x_2=10$（万元）时，总利润最大，最大为 25 万元.

15. $D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,\ x^2\leqslant y\leqslant 4x-x^2\}$

16. (1) $e-2$　　(2) $\dfrac{p^5}{21}$　　(3) $14a^4$

(4) $10\dfrac{2}{3}$　　(5) 1

17. (1)

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy$$
$$= \int_{-1}^0 dy\int_0^{y+1} f(x,y)\,dx + \int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)\,dx$$

(2)

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,dy$$
$$= \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$$

(3)

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^2 dx\int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$$
$$= \int_{-3}^3 dy\int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx$$

18. (1) $\int_{-1}^0 dx\int_{x^2-2}^{-x^2} f(x,y)\,dy$　　(2) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$

(3) $\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$

(4) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{2-x} f(x,y)\,dy$

19. (1) $\dfrac{9}{2}$　　(2) $\sqrt{2}-1$　　(3) $\dfrac{2}{3}$

20. (1) $\dfrac{1}{6}abc$　　(2) 3π

习　题　七

1. $u_1=1$,　$u_2=\dfrac{1}{3}$,　$u_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$

2. (1) 发散　(2) 收敛于 1　(3) 发散　(4) 发散

3. (1) 发散　(2) 收敛　(3) 发散　(4) 发散
(5) 发散　(6) 收敛

4. (1) 收敛 (2) 收敛 (3) 发散 (4) 发散
(5) 发散 (6) 发散 (7) 收敛
(8) 当 $a>1$ 时，收敛；当 $0<a\leqslant 1$ 时，发散
(9) 收敛 (10) 收敛 (11) 收敛 (12) 收敛

5. (1) 收敛 (2) 发散 (3) 收敛 (4) 收敛
(5) 收敛 (6) 收敛 (7) 发散 (8) 收敛
(9) 发散 (10) 发散

6. (1) 收敛 (2) 收敛 (3) 发散 (4) 收敛

7. (1) 条件收敛 (2) 绝对收敛 (3) 绝对收敛
(4) 绝对收敛 (5) 发散 (6) 条件收敛
(7) 发散 (8) 绝对收敛 (9) 绝对收敛
(10) 发散 (11) 绝对收敛 (12) 发散

8. 提示：注意 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$

9. 提示：注意 $\left|\dfrac{u_n}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(u_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$

10. (1) 发散 (2) 发散 (3) 收敛 (4) 收敛

11. (1) $(-\infty, +\infty)$ (2) $\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right]$
(3) $x=0$ (4) $[1, 3]$
(5) $(-1, 1]$ (6) $\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$
(7) $\left[-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right]$ (8) $(-\infty, +\infty)$
(9) $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ (10) $(0, +\infty)$

12. (1) $[-1, 1)$, $-\ln(1-x)$
(2) $(-1, 1)$ $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$
(3) $(-1, 1)$, $\dfrac{1}{(1-x)^2}$
(4) $(-1, 1)$, $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(5) $(-2, 2)$，$\frac{3}{2-x}$ (6) $[-1, 1]$，x

13. $\frac{2x}{(1-x)^3}$，8

14. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$，$(-\infty, +\infty)$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{n+2}$，$(-1, 1)$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+3}$，$(-\infty, +\infty)$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$，$(-\infty, +\infty)$

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ (2n+1)} x^{2n+1}$ $(-\infty, +\infty)$

(6) $2\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 4^n}{4^n \cdot n} x^n$，$[-1, 1)$

(7) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) x^n$，$(-1, 1)$

(8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot x^{2n+2}$，$(-1, 1)$

(9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1}$，$(-1, 1]$

(10) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(a + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{n!} x^n$，$(-\infty, +\infty)$

(11) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)\ x^n$，$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(12) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n}{n!} x^n$，$(-\infty, +\infty)$

15. (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}\ (x-1)^n$，$(-\infty, +\infty)$

(2) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}\ (x-2)^n$，$(0, 4)$

(3) $\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n}\cdot n}(x-3)^{n}$, $(0, 6]$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)\frac{1}{n!}(x-a)^{n}$, $(-\infty, +\infty)$

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot(x-2)^{n}$, $(0, 4)$

(6) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right]$,

$(-\infty, +\infty)$

16. 提示：$\frac{a_n}{b_n}\leqslant\frac{a_1}{b_1}$

17. 4

18. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!\cdot n}$

参考书目

[1] 李静芬、刘蒲凰：《经济数学基础》（微积分），西南财经大学出版社 1994 版.

[2] 张金清：《微积分》，高等教育出版社 2002 版.

[3] 刘玉琏、傅沛仁：《数学分析讲义》，高等教育出版社 1981 版.