

所以放大率的正常值为

$$M = \frac{\Delta y_e}{\Delta y_m} = 290 \text{ 倍}$$

(3) 以上对放大率的要求应由镜头焦距的选取和镜头位置的适当安排来实现, 根据显微镜视角放大率公式, 本题中的光学筒长应取

$$\Delta = \frac{f_e f_o}{s_0} M \approx 111 \text{ mm}$$

4. 用一架照相机在离地面200km的高空拍摄地面上的物体, 如果要求它能分辨地面上相距1m的两点, 照相机的镜头至少要多大? 设镜头的几何象差已很好地消除, 感光波长为4000 Å。

解 按题意, 要求能分辨的最小角间隔为

$$\Delta\theta_m = \frac{1}{200 \times 10^3} = 0.5 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

该照相机的镜头即为孔径光阑, 其最小分辨角公式为

$$\Delta\theta_m = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

据此, 以 $\lambda = 0.4 \mu\text{m}$ 代入, 算得相机镜头孔径

$$D = 1.22 \frac{\lambda}{\Delta\theta_m} = 9.76 \text{ cm}$$

5. 已知地月距离约为 $3.8 \times 10^5 \text{ km}$, 用口径为1m的天文望远镜能分辨月球表面两点的最小距离是多少?

解 根据望远镜的最小分辨角公式

$$\Delta\theta_m = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

取 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$, 算得

$$\Delta\theta_m = 6.71 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

因此月球表面上能被该望远镜分辨的最小距离为

$$\Delta y_m = l \Delta\theta_m = (3.8 \times 10^5) \times (6.71 \times 10^{-7})$$

$$\approx 255 \times 10^3 \text{ km} = 255 \text{ m}$$

6. 已知日地距离约为 $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ，要求分辨太阳表面相距 20 km 的两点，望远镜的口径至少需要多大？

解 按题意，要求能分辨的最小角间隔为

$$\Delta\theta_m = \frac{20}{1.5 \times 10^8} \approx 1.33 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

取光波长 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ ，根据望远镜的最小分辨角公式

$$\Delta\theta_m = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

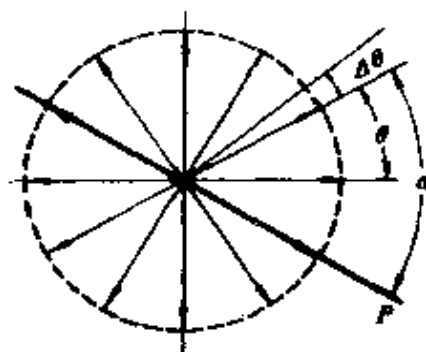
算得该望远镜的口径

$$D = 1.22 \frac{\lambda}{\Delta\theta_m} \approx 5.0 \text{ m}$$

§ 9 光的横波性与五种偏振态

• 1. 试证明自然光通过偏振片后的强度为总强度之半。

证 自然光是大量的有各种取向的彼此无关的线偏振光的集合，且角分布具有轴对称性（如图）。在此，引入“线偏振数密度”一量来描述大量线偏振集合的角分布。设在角范围 $\theta - \theta + \Delta\theta$ 之内，包含线偏振的数目为 ΔN ，则



题 1 图

$$\Delta N = \rho(\theta) \Delta\theta$$

式中 $\rho(\theta)$ 为线偏振密度——单位角度内所包含的线偏振数。显然，对于具有轴对称性的自然光来说， $\rho(\theta)$ 与 θ 无关，保持为一个常数。由于自然光中的各线偏振光之间无固定位相关联，故其总强度 I_0 等于各线偏振光强度 i 的直接相加，即

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \sum \Delta I_0 = \sum (i \Delta N) = \sum (i \rho \Delta \theta) \\
 &= i \rho \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= 2\pi \rho i
 \end{aligned}$$

透过偏振器 P 的光强应按马吕斯定律先投影再求和，即在 $\alpha - \alpha + \Delta\alpha$ 范围内的线偏振光透过 P 的光强为

$$\Delta I = i \Delta N \cos^2 \alpha = i \rho \cos^2 \alpha \Delta \alpha$$

透过 P 的光强

$$\begin{aligned}
 I &= \sum \Delta I = i \rho \sum \cos^2 \alpha \Delta \alpha \\
 &= i \rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \\
 &= \pi i \rho
 \end{aligned}$$

由此可见，若用线偏振数密度 ρ 和个别线偏振光强度 i 两个量，来表示自然光总强度 I_0 和任意方向的强度 $I(\theta)$ 的话，它们分别为

$$\begin{aligned}
 I_0 &= 2\pi i \rho \\
 I(\theta) &= \pi i \rho
 \end{aligned}$$

显然

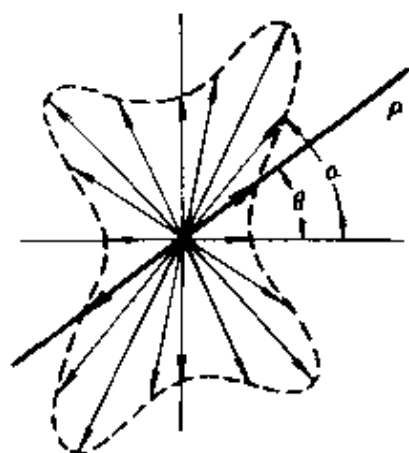
$$I(\theta) = \frac{1}{2} I_0$$

*2. 试论证：对于任意角分布的部分偏振光，经偏振片后一周之内只有两个光强极大方位和两个光强极小方位，而且极大与极小的方位角彼此相隔 $\pi/2$ 角度。

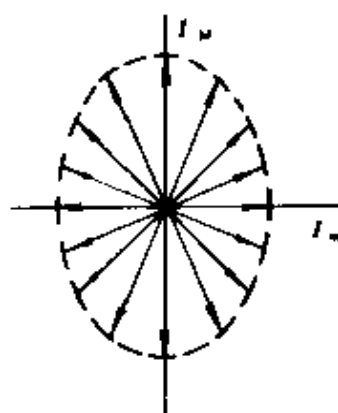
证 如图 (a)，图 (b) 所示，部分偏振光是大量的有各种取向的彼此无关的线偏振光的集合，且角分布不具有轴对称性。设其数密度分布函数 $\rho(\alpha)$ ，个别线偏振光的强度 $i(\alpha)$ 任意 [图 (a)]，则部分偏振光的总强度为

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \sum \Delta I = \sum i(\alpha) \Delta N = \sum i(\alpha) \rho(\alpha) \Delta \alpha \\
 &= \int_0^{2\pi} i(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha
 \end{aligned}$$

经偏振片以后的强度



题 2 图 (a)



题 2 图 (b)

$$I(\theta) = \sum i(\alpha) \Delta N \cos^2(\alpha - \theta)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} i(\alpha) \rho(\alpha) \cos^2(\alpha - \theta) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} i(\alpha) \rho(\alpha) [1 + \cos(2\alpha - 2\theta)] d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} i(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} i(\alpha) \rho(\alpha) \cos(2\alpha - 2\theta) d\alpha \end{aligned}$$

其中第一项

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} i(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} I_0 \end{aligned}$$

第二项求积，利用解析函数的中值定理将其转化为

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} i(\alpha) \rho(\alpha) \cos(2\alpha - 2\theta) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} i(\alpha_0) 2\pi \rho(\alpha_0) \cos(2\alpha_0 - 2\theta) \end{aligned}$$

上式中 $0 < \alpha_0 < 2\pi$ ，所以

$$I(\theta) = \frac{1}{2} I_0 + \pi i(\alpha_0) \rho(\alpha_0) \cos(2\alpha_0 - 2\theta)$$

函数极值是明显的，当 $\theta_1 = \alpha_0$ ， $\theta_2 = \alpha_0 + \pi$ 时，得极大光强

$$I_M = \frac{1}{2} I_0 + \pi i(\alpha_0) \rho(\alpha_0)$$

当 $\theta_3 = \alpha_0 + \pi/2$ ， $\theta_4 = \alpha_0 + 3\pi/2$ 时，得极小光强

$$I_m = \frac{1}{2} I_0 - \pi i(\alpha_0) \rho(\alpha_0)$$

以上四个方位角依次相隔 $\pi/2$ 。当然， α_0 的具体取值决定于角分布函数 $\rho(\alpha)$ 和 $i(\alpha)$ 的具体形式

更有意思的是，若用极大光强 I_M 和极小光强 I_m 改写总强度 I_0 和经偏振片后的光强 $I(\theta)$ ，有

$$I_0 = I_M + I_m$$

$$I(\theta) = I_m + (I_M - I_m) \cos^2(\alpha_0 - \theta)$$

由 $I(\theta)$ 表达式可以看出，任何一种部分偏振光都可以被看为一种自然光和一个线偏振光的组合，自然光的等效强度为 $2I_m$ ，线偏振光的强度为 $(I_M - I_m)$ 。

• 3. 任意一个线偏振可以分解为两个正交方向振动的合成，这两个正交振动之间是有固定位相差的。对于自然光也可以分解为两个正交方向振动的合成，而这两个正交振动之间是没有固定位相差的，这是为什么？

证 虽然就个别线偏振光而言，其两个正交分量之间是有固定位相关系的，但大量的彼此无固定位相关系的线偏振光，分别在两个正交方向的叠加结果为

$$A_x(t) = \sum_n a_{x,n}(t)$$

$$A_y(t) = \sum_n a_{y,n}(t)$$

这两个正交振动 $A_x(t)$ ， $A_y(t)$ 之间是不会有固定位相关系的。

反之，若两者之间有固定位相关系，则由垂直振动的合成知识知道，合成振动必然是椭圆偏振光（或线偏振光，或圆偏振光）。没有利用任何实际的偏振元件，仅单纯地采用数学上的分解合成的手段，是不可能改造自然光的偏振态。于是，我们采用了上述反证法，简单地证明了自然光的两个正交分量之间是无固定位相差的。在以后讨论偏振光干涉问题时，还可以对此命题给出另一方式的证明。

4. 自然光投射到互相重叠的两个偏振片上，如果透射光的强度为（1）透射光束最大强度的 $1/3$ ，（2）入射光束强度的 $1/3$ ，则这两个偏振片的透振方向之间夹角是多大？假定偏振片是理想的，即它把自然光的强度严格减小一半。

解 （1）设自然光（即入射光）的总强度为 I_0 ，通过第一个偏振片 P_1 的强度为 $I_0/2$ ，当透振方向 $P_2 \parallel P_1$ 时，最后通过 P_2 的强度为 $I_0/2$ ，此为最大透光强度

$$I_M = \frac{1}{2} I_0$$

当 P_1, P_2 透振方向夹角为 θ 时（如图），则

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 \cos^2 \theta = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta \\ &= I_M \cos^2 \theta \end{aligned}$$

据题意 $I_2/I_M = 1/3$ ，算出

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \theta \approx 54^\circ 45'$$

（2）据题意 $I_2/I_0 = 1/3$ ，算出

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \theta \approx 35^\circ 15'$$



题4图

5. 一束自然光入射到一偏振片组上，这组由四块组成，每片的透振方向相对于前面一片沿顺时针方向转过 30° 角。试问入射光中有多大一部分透过了这组偏振片？

解 设入射自然光总强度为 I_0 ，通过四块偏振片的光强依次为 I_1, I_2, I_3, I_4 ，根据马吕斯定律得

$$I_4 = I_3 \cos^2 \theta = I_2 \cos^4 \theta = I_1 \cos^6 \theta = \frac{1}{2} I_0 \cos^6 \theta,$$

算出比值为

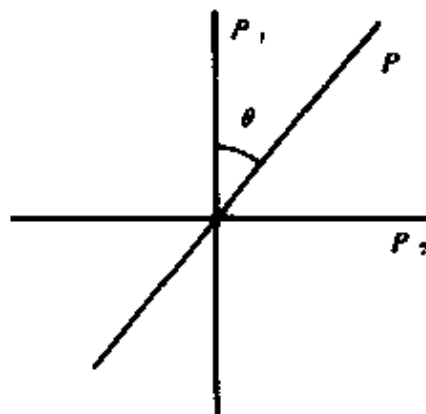
$$\begin{aligned} \frac{I_4}{I_0} &= \frac{1}{2} \cos^6 \theta = \frac{1}{2} \cos^6 30^\circ = \frac{27}{128} \\ &\approx 21\% \end{aligned}$$

6. 将一偏振片沿 45° 角插入一对正交偏振器之间，自然光经过它们，强度减为原来的百分之几？

解 设偏振片 P_1, P_2 正交，则最终通过 P_2 的光强为

$$I_2 = 0 \quad (\text{消光})$$

若在 P_1, P_2 之间插入另一块偏振片 P ，与 P_1 夹角为 θ （如图），则最终通过 P_2 的光强为



题 6 图

$$I_2' = I \sin^2 \theta = I_1 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{1}{8} I_0 (\sin 2\theta)^2$$

式中 I_0 为入射光强， I_1, I 分别为通过 P_1, P 后的光强。当 $\theta = 45^\circ$ 时，比值

$$\frac{I_2'}{I_0} = \frac{1}{8} = 12.5\%$$

§ 10 光在电介质表面的反射和折射 菲涅耳公式

1. 计算从空气到水面的布儒斯特角（水的折射率 $n = 4/3$ ）。

解 光从一介质（折射率为 n_1 ）到另一介质（折射率为 n_2 ）时的布儒斯特角公式为

$$\operatorname{tg} i_b = \frac{n_2}{n_1}$$

据此算出从空气到水的布儒斯特角为

$$i_b = \operatorname{tg}^{-1} \frac{4}{3} \approx 53^\circ 8'$$

2. 一束光由水射到玻璃上，当入射角为 50.82° 时反射光全偏振，求玻璃的折射率（已知水的折射率为 $4/3$ ）。

解 根据布儒斯特角公式得

$$n_2 = n_1 \operatorname{tg} i_b \approx 1.636$$

3. 计算（1）由空气到玻璃（ $n = 1.560$ ）的全偏振角；
（2）由此玻璃到空气的全偏振角；
（3）在全偏振时由空气到此玻璃的折射光的偏振度；
（4）在全偏振时由此玻璃到空气的折射光的偏振度；
（5）自然光从空气以布儒斯特角入射到平行平面玻璃板以后，最终透射光的偏振度。

解 （1）由空气到此玻璃的全偏振角为

$$\begin{aligned} i_{1b} &= \operatorname{tg}^{-1} n = \operatorname{tg}^{-1} 1.560 \\ &= 57.34^\circ = 57^\circ 20' \end{aligned}$$

（2）由此玻璃到空气的全偏振角为

$$\begin{aligned} i_{2b} &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{n} = \operatorname{ctg}^{-1} n = 90^\circ - i_{1b} \\ &= 32^\circ 40' \end{aligned}$$

由此可见，光束射到空气中的平行平面玻璃板上，当上表面反射发生全偏振时，则折射光在下表面的反射也将发生全偏振，每一界面反射的全部都是 s 分量。这正是玻片堆起偏器的理论根据之一。

（3）首先导出计算折射光偏振度的一般公式。由空气到玻

璃时，折射光的 p 分量强度为极大， s 分量的强度为极小，所以折射光的偏振度为

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \frac{I_{2p} - I_{2s}}{I_{2p} + I_{2s}} = \frac{I_{1p}T_p - I_{1s}T_s}{I_{1p}T_p + I_{1s}T_s} \\
 &= \frac{I_{1p} \frac{n_2}{n_1} |t_p|^2 - I_{1s} \frac{n_2}{n_1} |t_s|^2}{I_{1p} \frac{n_2}{n_1} |t_p|^2 + I_{1s} \frac{n_2}{n_1} |t_s|^2} \\
 &= \frac{I_{1p} |t_p|^2 - I_{1s} |t_s|^2}{I_{1p} |t_p|^2 + I_{1s} |t_s|^2}
 \end{aligned}$$

式中 n_1 为空气的折射率， n_2 为玻璃的折射率。自然光的 p 分量和 s 分量的强度相等，即 $I_{1p} = I_{1s}$ ，故

$$P = \frac{|t_p|^2 - |t_s|^2}{|t_p|^2 + |t_s|^2}$$

上式即为求折射光偏振度的公式，条件是自然光入射。因此，只要根据菲涅耳公式求出振幅透射率 t_p ， t_s ，就可得到折射光的偏振度。

以布儒斯特角入射时，由菲涅耳公式得

$$\begin{aligned}
 t_p &= \frac{2n_1 \cos i_{1b}}{n_2 \cos i_{1b} + n_1 \cos (90^\circ - i_{1b})} \\
 &= \frac{n_1}{n_2} \\
 t_s &= \frac{2n_1 \cos i_{1b}}{n_1 \cos i_{1b} + n_2 \cos (90^\circ - i_{1b})} \\
 &= \frac{2n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}
 \end{aligned}$$

当然, $t_p = n_1/n_2$ 的结果也可根据能流守恒关系得到。因为以布儒斯特角入射时 p 分量 100% 透过, 故

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_p &= \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} |t_p|^2 = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_{th}} |t_p|^2 \\ &= \frac{n_2}{n_1} [\sin i_{th} + t_p]^2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 |t_p|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

因此得

$$t_p = \frac{n_1}{n_2}$$

于是, 改写以上公式, 得到以布儒斯特角入射时折射光偏振度的计算公式为

$$P = \frac{(n_1^2 - n_2^2)^2}{(n_1^2 + n_2^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2}$$

以 $n_1 = 1$ 、 $n_2 = 1.560$ 代入上式得

$$P = 9.5\%$$

(4) 从上面折射光的偏振度的计算公式中看到, 它对 n_1 与 n_2 是对称的, 满足互易关系。当光线逆向, 从玻璃到空气以布儒斯特角入射, 折射光的偏振度不变, 即

$$P' = P = 9.5\%$$

(5) 当入射光的 p 、 s 分量强度相等时, 无论是从空气到玻璃, 还是从玻璃到空气, 均有折射光的 p 分量强度极大, s 分量强度极小。因此, 以自然光入射到平行平面玻璃板上时, 最终透射光的偏振度公式仍为

$$P = \frac{|t_p|^2 - |t_s|^2}{|t_p|^2 + |t_s|^2}$$

但式中的 t_p , t_s 应由单次透射率的乘积来代替, 即

$$t_p = t_{1p} t'_{1p}$$

$$t_s = t_{1s} t'_{1s}$$

式中 t_1 , t'_1 分别为平行平板上下表面的振幅透射率。若是 N 块这样的平行平板叠放在一起 (玻片堆), 则

$$t_p = (t_{1p} t'_{1p})^N$$

$$t_s = (t_{1s} t'_{1s})^N$$

当以布儒斯特角入射时, 由本题 (3), (4) 讨论知道

$$t_{1p} = \frac{n_1}{n_2}, \quad t'_{1p} = \frac{n_2}{n_1}, \quad t_p = 1$$

$$t_{1s} = \frac{2n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}, \quad t'_{1s} = \frac{2n_2^2}{n_2^2 + n_1^2}, \quad t_s = \left(\frac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2$$

此时透射光的偏振度简化为

$$P = \frac{1 - \left(\frac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^4}{1 + \left(\frac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^4}$$

若为玻片堆 (N 块), 则经历 $2N$ 次折射, 最终透射光偏振度为

$$P_N = \frac{1 - \left(\frac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^{4N}}{1 + \left(\frac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^{4N}}$$

结合本题, 取 $n_1 = 1$, $n_2 = 1.560$, $N = 1$, 算出

$$P \approx 18.9\%$$

从 P_N 表达式中看出, 由于 $2n_1 n_2 / (n_1^2 + n_2^2) < 1$, 当 N 越大, 则 P_N 值越高。

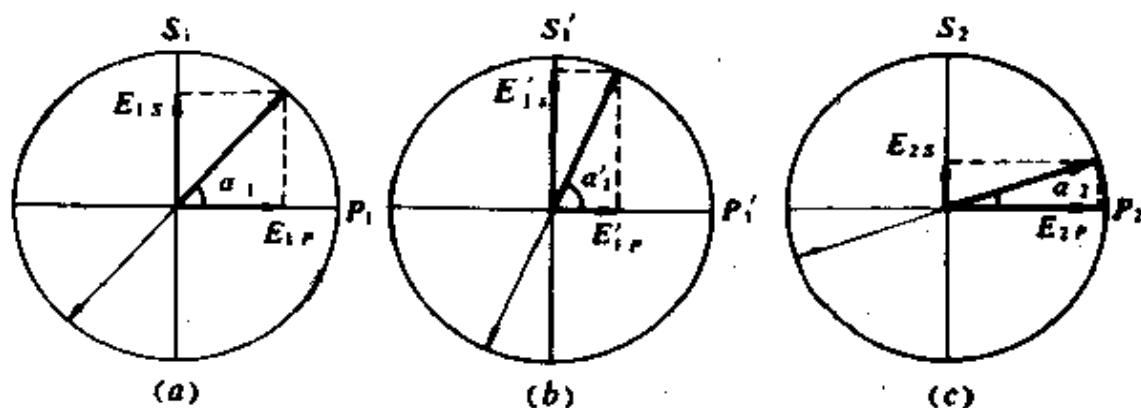
4. 求自然光透过八块 $n = 1.560$ 的平行玻璃板组成的玻片堆后的偏振度 (忽略玻璃对光的吸收)。

解 由上题的 P_N 公式, 令 $N = 8$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1.560$, 得此玻片堆获得的透射光的偏振度为

$$P_8 = \frac{1 - \left(\frac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^{32}}{1 + \left(\frac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^{32}} \approx 91\%$$

5. 线偏振光的偏振面和入射面间的夹角称为振动的方位角。设入射线偏振光的方位角为 α , 入射角为 i , 求反射光和折射光的方位角 α_1' 和 α_2 (已知两介质的折射率为 n_1 和 n_2)。

解 如图 (a), 图 (b), 图 (c) 所示, 由于 p 分量和 s 分量的振幅反射率 (或振幅透射率) 是不同的, 这将导致反射线偏振或折射线偏振的方位角 α_1' , α_2 与入射线偏振的方位角 α_1 一般也不相等。



(a) 入射线偏振; (b) 反射线偏振; (c) 折射线偏振

题 5 图

根据菲涅耳公式导出 α_1 与 α_1' , α_2 的关系为

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1' &= \frac{E_{1s}'}{E_{1p}'} = \frac{r_s E_{1s}}{r_p E_{1p}} = \frac{r_s}{r_p} \operatorname{tg} \alpha_1 \\ &= \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)} \frac{\operatorname{tg}(i_2 + i_1)}{\operatorname{tg}(i_1 - i_2)} \operatorname{tg} \alpha_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\cos(i_2 - i_1)}{\cos(i_2 + i_1)} \operatorname{tg} \alpha_1 \\
\operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{E_{2s}}{E_{2p}} = \frac{t_s E_{1s}}{t_p E_{1p}} = \frac{t_s}{t_p} \operatorname{tg} \alpha_1 \\
&= \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \frac{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}{2n_1 \cos i_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \\
&= \frac{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \operatorname{tg} \alpha_1
\end{aligned}$$

本题已知 $i_1 = i$, $\alpha_1 = \alpha$ 。由折射定律 $\sin i_2 = n_1 \sin i / n_2$, $\cos i_2 = \sqrt{1 - (n_1 \sin i / n_2)^2}$ 。分别代入以上二式得

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha'_1 &= \frac{\cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2}{\sin i_1 \sin i_2 - \cos i_1 \cos i_2} \operatorname{tg} \alpha_1 \\
&= \frac{\frac{n_1}{n_2} \sin^2 i + \cos i \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin i)^2}}{\frac{n_1}{n_2} \sin^2 i - \cos i \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin i)^2}} \operatorname{tg} \alpha \\
\operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{n_2 \cos i + n_1 \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin i)^2}}{n_1 \cos i + n_2 \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin i)^2}} \operatorname{tg} \alpha
\end{aligned}$$

6. 线偏振光以布儒斯特角从空气入射到玻璃 ($n = 1.560$) 的表面上, 其振动的方位角为 20° , 求反射光和折射光的方位角。

解 因布儒斯特角入射, 反射光显然为 s 光, 即反射光的方位角为

$$\alpha'_1 = 90^\circ$$

在上题结果中, 取 $i_1 = i_b$, $\operatorname{tg} i_b = \frac{n_2}{n_1}$, 进一步简化折射线偏振方位

角公式

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{n_2 \cos i_h + n_1 \sin i_h}{n_1 \cos i_h + n_2 \sin i_h} \operatorname{tg} \alpha_1 \\ &= \frac{n_2 + n_1 \operatorname{tg} i_h}{n_1 + n_2 \operatorname{tg} i_h} \operatorname{tg} \alpha_1 \\ &= \frac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \operatorname{tg} \alpha_1\end{aligned}$$

以 $n_1 = 1$, $n_2 = 1.560$, $\alpha_1 = 20^\circ$ 代入算得

$$\alpha_2 \approx 18^\circ 18'$$

• 7. 设入射光、反射光、折射光的总能流分别为 W_1 , W'_1 , W_2 , 则总能流反射率 \mathcal{R} 和总能流透射率 \mathcal{T} 定义为

$$\mathcal{R} = \frac{W'_1}{W_1}, \quad \mathcal{T} = \frac{W_2}{W_1}$$

(1) 当入射光为线偏振光, 方位角 (见习题 5) 为 α 时, 证明

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_p \cos^2 \alpha + \mathcal{R}_s \sin^2 \alpha$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_p \cos^2 \alpha + \mathcal{T}_s \sin^2 \alpha$$

(2) 证明

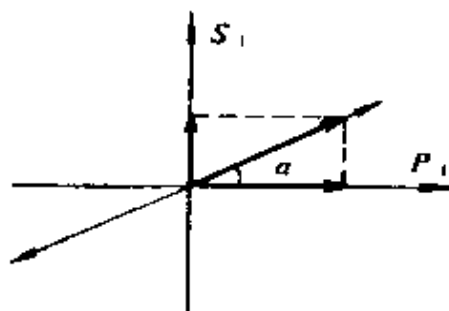
$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$$

(3) 设入射光是自然光, 求 \mathcal{R} , \mathcal{T} 与 \mathcal{R}_p , \mathcal{R}_s , \mathcal{T}_p , \mathcal{T}_s 的关系;

(4) 设入射光是圆偏振光, 求 \mathcal{R} , \mathcal{T} 与 \mathcal{R}_p , \mathcal{R}_s , \mathcal{T}_p , \mathcal{T}_s 的关系。

解 (1) 总能流反射率为

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{W'_1}{W_1} = \frac{W'_{1p} + W'_{1s}}{W_1} \\ &= \frac{\mathcal{R}_p W_{1p} + \mathcal{R}_s W_{1s}}{W_1}\end{aligned}$$



题 7 图

如图, 根据马吕斯定律

$$I_{1p} = I_1 \cos^2 \alpha, \quad W_{1p} = W_1 \cos^2 \alpha$$

$$I_{1s} = I_1 \sin^2 \alpha, \quad W_{1s} = W_1 \sin^2 \alpha$$

因此

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}_p W_{1p} + \mathcal{R}_s W_{1s}}{W_1}$$

$$= \mathcal{R}_p \cos^2 \alpha + \mathcal{R}_s \sin^2 \alpha$$

同理, 总能流透射率为

$$\mathcal{T} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_{2p} + W_{2s}}{W_1} = \frac{\mathcal{T}_p W_{1p} + \mathcal{T}_s W_{1s}}{W_1}$$

$$= \frac{\mathcal{T}_p W_1 \cos^2 \alpha + \mathcal{T}_s W_1 \sin^2 \alpha}{W_1}$$

$$= \mathcal{T}_p \cos^2 \alpha + \mathcal{T}_s \sin^2 \alpha$$

(2) 根据能量守恒, 入射光的总能流等于反射光和折射光的能流之和, 即

$$W_1' + W_2 = W_1$$

故

$$\frac{W_1'}{W_1} + \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_1}{W_1} = 1$$

即 $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$

对任何偏振态的入射光, 上式均成立。

(3) 自然光入射时, p 、 s 分量的入射能流相等, 且等于入射总能流的一半, 即

$$W_{1p} = W_{1s} = \frac{1}{2} W_1$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \frac{W_1'}{W_1} = \frac{W_{1p}' + W_{1s}'}{W_1} = \frac{W_{1p}'}{W_1} + \frac{W_{1s}'}{W_1} \\
&= \frac{W_{1p}'}{2W_{1o}} + \frac{W_{1s}'}{2W_{1i}} \\
&= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_p + \mathcal{R}_s) \\
\mathcal{T} &= \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_{2p} + W_{2s}}{W_1} = \frac{W_{2p}}{2W_{1p}} + \frac{W_{2s}}{2W_{1s}} \\
&= \frac{1}{2} (\mathcal{T}_p + \mathcal{T}_s)
\end{aligned}$$

(4) 圆偏振光入射时也有

$$W_{1p} = W_{1s} = \frac{1}{2} W_1$$

与自然光入射时同理有

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_p + \mathcal{R}_s) \\
\mathcal{T} &= \frac{1}{2} (\mathcal{T}_p + \mathcal{T}_s)
\end{aligned}$$

本题在于确定各种偏振态入射情况下, \mathcal{R} 与 $\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_s, \mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}_p, \mathcal{T}_s$ 的关系。虽然从菲涅耳公式中可以得到 $\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_s, \mathcal{T}_p, \mathcal{T}_s$ 的公式, 而实际中有时还关心总的能流反射率和总的能流透射率, 因此本题得到的一些结论是有意义的。

8. 光从空气到玻璃 ($n = 1.50$) 以布儒斯特角入射, 试计算:

(1) 能流反射率 \mathcal{R}_p 和 \mathcal{R}_s 值;

(2) 能流透射率 \mathcal{T}_p 和 \mathcal{T}_s 值。

解 (1) 以布儒斯特角入射时, 反射光无 p 成分, 即

$$\mathcal{R}_p = 0$$

而 s 成分的能流反射率为

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_s = r^2 &= \left[\frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)} \right]^2 \\
&= \sin^2(90^\circ - 2i_b)
\end{aligned}$$

当玻璃折射率 $n = 1.50$ 时, 算出

$$i_b = \operatorname{tg}^{-1} 1.50 \approx 56^\circ 19'$$

$$\mathcal{R}_s \approx 15\%$$

(2) 根据能流守恒直接求出

$$\mathcal{T}_p = 1 - \mathcal{R}_p = 1$$

$$\mathcal{T}_s = 1 - \mathcal{R}_s \approx 85\%$$

9. 线偏振光从空气到玻璃 ($n = 1.5$) 以 45° 角入射, 方位角为 60° , 试计算

(1) 总能流反射率 \mathcal{R} 和总能流透射率 \mathcal{T} ;

(2) 改为自然光入射, \mathcal{R} 和 \mathcal{T} 为多少?

解 (1) 已知入射角 $i_1 = 45^\circ$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$, 则折射角为

$$i_2 = \sin^{-1} \left(\frac{n_1 \sin i_1}{n_2} \right) \approx 28^\circ 7'$$

据此, 由菲涅耳公式先求出能流反射率和能流透射率 \mathcal{R}_p , \mathcal{R}_s , \mathcal{T}_p , \mathcal{T}_s , 即

$$\mathcal{R}_p = r_p^2 = \left[\frac{\operatorname{tg}(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}(i_1 + i_2)} \right]^2 \approx 0.9\%$$

$$\mathcal{R}_s = r_s^2 = \left[\frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)} \right]^2 \approx 9\%$$

$$\mathcal{T}_p = 1 - \mathcal{R}_p \approx 99\%$$

$$\mathcal{T}_s = 1 - \mathcal{R}_s \approx 91\%$$

再根据题 7 结果, 令 $\alpha = 60^\circ$, 得总能流反射率和透射率为

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_p \cos^2 \alpha + \mathcal{R}_s \sin^2 \alpha \approx 7\%$$

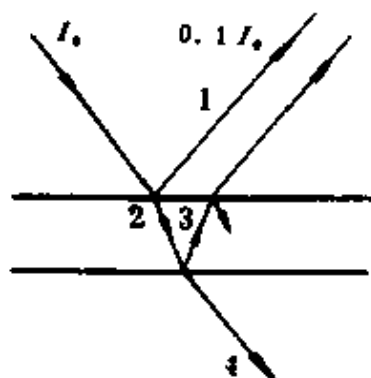
$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_p \cos^2 \alpha + \mathcal{T}_s \sin^2 \alpha \approx 93\%$$

(2) 如果自然光入射, 则由题 7 所得公式, 算出

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} (\mathcal{R}_p + \mathcal{R}_s) \approx 5\%$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} (\mathcal{T}_p + \mathcal{T}_s) \approx 95\%$$

10. 已知自然光入射于某平行平面玻璃板上, 反射光的强度为入射光的 0.10 倍 (见附图)。取入射能流为一个单位, 求图中标出的光线 2, 3, 4 的能流 (略去玻璃对光的吸收)。



题10图

解 设入射能流为 W_0 , 则光束 1, 2, 3, 4 能流关系式分别为

$$W_1 = \mathcal{R}W_0$$

$$W_2 = \mathcal{T}W_0 = (1 - \mathcal{R})W_0$$

$$W_3 = \mathcal{R}'W_2 = \mathcal{R}'\mathcal{T}W_0 = \mathcal{R}'(1 - \mathcal{R})W_0$$

$$W_4 = \mathcal{T}'W_2 = \mathcal{T}'\mathcal{T}W_0 = (1 - \mathcal{R}')(1 - \mathcal{R})W_0$$

在平行平板情况下, $r' = -r$, $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ 。按题意 $\mathcal{R} = 0.1$, 算出

$$W_1 = 10\%W_0$$

$$W_2 = 90\%W_0$$

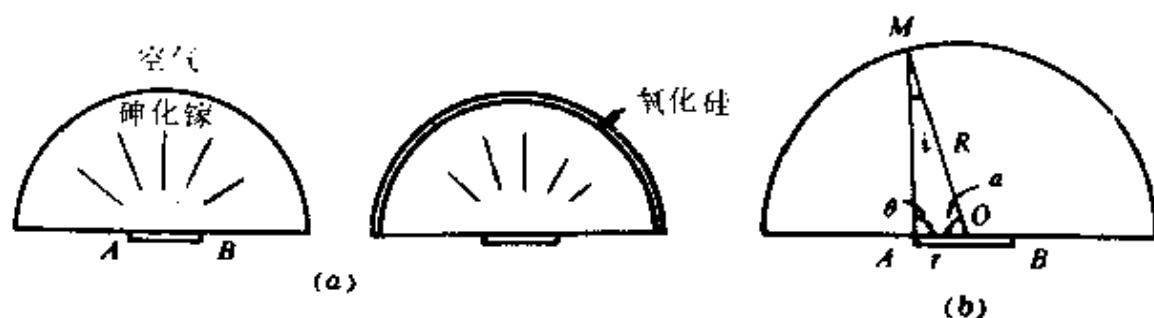
$$W_3 = 9\%W_0$$

$$W_4 = 81\%W_0$$

如果要求算出光束 2, 3, 4 的光强比值 (与入射光强相比), 则必须给定玻璃板的折射率, 并由 $\mathcal{R} = 0.1$ 算出相应的入射角和折射角, 方能求得结果, 计算是繁杂的。在此情况下, 也许图解法更为简单, 即比较精确地绘制 $\mathcal{R}_p, \mathcal{R}_s$ 曲线, 在图上找出 $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_p + \mathcal{R}_s)/2 = 0.1$ 的入射角, 按折射定律算出折射角, 再往下计算就简单了。

• 11. 附图 (a) 所示为一支半导体砷化镓发光管, 管芯 AB 为发光区, 其直径 $d \approx 3 \text{ mm}$ 。为了避免全反射, 发光管上部

研磨成半球形，以使内部发的光能够以最大的透射率向外输送。如果要使发光区边缘两点 A 和 B 发的光不致全反射，半球的半径至少应取多少？已知砷化镓的折射率（对发射的 $0.9\mu\text{m}$ 波长）为 3.4。



题11图

解 如图(b)，对发光区边缘点 A （或 B ）有可能在球面上发生全反射。为避免全反射，在动点 M 变动过程中，使入射角 i 的最大值不超过临界角。在 $\triangle AMO$ 中以 θ 为变量，应用三角正弦定理

$$\frac{\sin i}{\sin \theta} = \frac{r}{R}$$

得

$$\sin i = \frac{r}{R} \sin \theta = \frac{d}{2R} \sin \theta$$

当 $\theta = \pi/2$ 时，入射角最大，其正弦值为

$$\sin i_m = \frac{d}{2R}$$

令 $\sin i_m < \sin i_c = n_2/n_1 = 1/3.4$ ，求出

$$R > 1.7d \approx 5.1\text{mm}$$

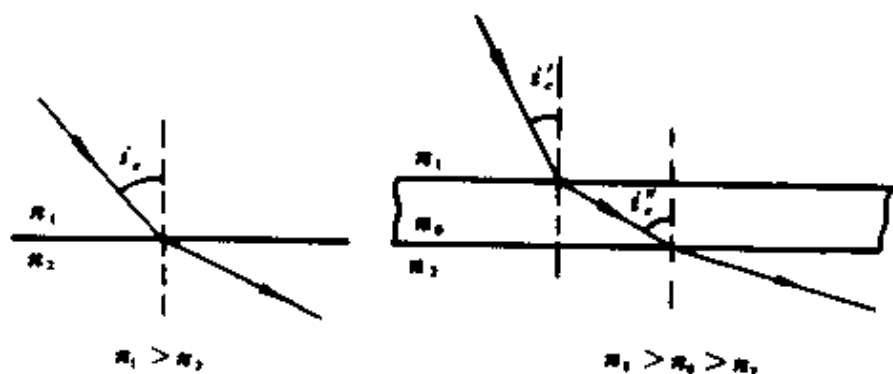
12. 接上题，为了减少光在砷化镓-空气界面的反射，工艺上常在砷化镓表面镀一层氧化硅薄膜，氧化硅的折射率为 1.7。现在单纯从几何光学角度提出一个问题，加膜后入射角为多大才不致于在空气表面发生全反射？试与不加膜时相比（设膜很薄，

可按平面板计算)。

解 如图, 单界面的临界角 i_c 满足

$$\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$$

单膜的临界角 i'_c , i''_c 满足



题12图

$$\sin i''_c = \frac{n_2}{n_0}$$

$$n_1 \sin i'_c = n_0 \sin i''_c$$

得

$$\sin i'_c = \frac{n_2}{n_1}$$

可见 $i'_c = i_c$

即加单膜不改变发生全反射的(入射)临界角。本题的情况也是如此。

13. 从光密介质到光疏介质, 当 $\sin i_1 > (n_2/n_1)$ 时发生全反射, 作为一种处理方法, 我们仍可在形式上维持折射定律 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, 这时 $\sin i_2 > 1$, 可认为 i_2 是个虚折射角, 它的余弦也为虚数:

$$\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}$$

试利用菲涅耳公式证明此时 $|r_p| = 1$, $|r_s| = 1$ 。

证 只要注意到以下形式的复数

$$\widetilde{z} = \frac{a - ib}{a + ib} \quad (i \text{ 为虚数单位})$$

其模为 1, 即

$$|\widetilde{z}| = \frac{|a - ib|}{|a + ib|} = 1$$

便可证明本题。在菲涅耳公式的 r_p , r_s 表达式中, 将 $\cos i_2$ 改写为题中已提出的虚数形式, 就可以看出 r_p, r_s 都是两个共轭复数的比值, 其模为 1。

*14. 推导全反射时的相移公式。

解 当 $n_1 > n_2$, 且 $\sin i_1 > (n_2/n_1)$ 时, 发生全反射, 此时按折射定律在形式上出现

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 > 1$$

的费解, 在菲涅耳公式中直接涉及的 $\cos i_2$ 形式上写成虚数, 即

$$\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}$$

式中 i 为虚数单位。令

$$n_2 \cos i_2 = a_1, \quad n_1 \cos i_2 = ib_1$$

$$n_1 \cos i_1 = a_2, \quad n_2 \cos i_2 = ib_2$$

则复振幅反射率为

$$r_p = \frac{\widetilde{E}_{1p}'}{\widetilde{E}_{1p}} = \frac{A_{1p}'}{A_{1p}} e^{i\delta_p} = \frac{a_1 - ib_1}{a_1 + ib_1}$$

$$r_s = \frac{\widetilde{E}_{1s}'}{\widetilde{E}_{1s}} = \frac{\widetilde{A}_{1s}'}{A_{1s}} e^{i\delta_s} = \frac{a_2 - ib_2}{a_2 + ib_2}$$

由此得到反射光 p, s 振动与入射光 p, s 振动经界面产生的位相差为

$$\delta_p = -2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_1}{a_1} = -2 \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{n_1}{n_2} \frac{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1} \right]$$

$$\delta_s = -2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_2}{a_2} = -2 \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{n_2}{n_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1} \right]$$

此时, $\delta_p, \delta_s \neq 0, \pi$ 。如果线偏振光入射, 则反射光中的 p 振动与 s 振动之间的位相差 $\delta_{ps} \neq 0, \pi$, 合成结果为椭圆偏振光。不过, 在判断椭圆光是右旋还是左旋时, 应注意到我们当初位相正负号的约定——实际位相落后算正号, 故实际位相差应当为

$$\varphi_{1p}' - \varphi_{1p} = -\delta_p, \quad \varphi_{1s}' - \varphi_{1s} = -\delta_s$$

即上述 δ_p, δ_s 公式中的负号可以除去。

15. (1) 计算 $n_1 = 1.51, n_2 = 1.0$, 入射角为 $54^\circ 37'$ 时全反射光的相移 δ_p 和 δ_s ;

(2) 如果入射光是线偏振的, 全反射光中 p 振动和 s 振动的位相差为多少? 说明两者合成为椭圆偏振光。

解 (1) 以 $n_1 = 1.51, n_2 = 1.0, i_1 = 54^\circ 37'$ 代入上题 δ_p, δ_s 公式, 算出

$$\delta_p \approx -123^\circ 48', \quad \varphi_{1p}' - \varphi_{1p} \approx 123^\circ 48'$$

$$\delta_s \approx -78^\circ 48', \quad \varphi_{1s}' - \varphi_{1s} \approx 78^\circ 48'$$

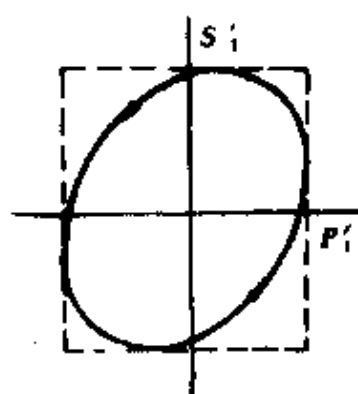
(2) 考察全反射光中, s 振动与 p 振动的实际位相差。设入射光为线偏振光, 且 $\varphi_{1s} - \varphi_{1p} = 0$, 则

$$\begin{aligned} \varphi_{1s}' - \varphi_{1p}' &= (\varphi_{1s}' - \varphi_{1s}) - (\varphi_{1p}' - \varphi_{1p}) \\ &= -45^\circ \end{aligned}$$

两个振动合成结果为左旋的椭圆偏振光，如图所示。

16. 若在上题中用的光源是氦氖激光，求消逝波的穿透深度。

解 当光从光密媒质射入光疏媒质，入射角超过临界角时，在光疏媒质中将存在沿纵深方向急剧衰减的消逝波，其穿透深度为



题15图

$$d = \frac{1}{k\sqrt{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2}} \\ \approx \frac{2}{9} \lambda$$

取氦氖激光波长 $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ，算出

$$d \approx 1406 \text{ \AA}$$

第三章 干涉装置 空间相干性 和时间相干性

§ 1 分波前干涉装置 光场的空间相干性

• 1. 设菲涅耳双面镜的夹角为 $20'$, 缝光源离双面镜交线的距离为 10cm , 接收屏幕与光源经双面镜所成的两个虚象连线平行, 幕与双镜交线的距离为 210cm , 光波长 6000\AA , 问:

(1) 干涉条纹的间距为多少?

(2) 在幕上最多能看到几根条纹?

(3) 如果光源到双镜交线的距离增大一倍, 干涉条纹有什么变化?

(4) 如果光源与双镜交线的距离保持不变, 而在横向有所移动, 干涉条纹有什么变化?

(5) 如果要在幕上产生有一定反衬度的干涉条纹, 允许缝光源的最大宽度为多少?

解 (1) 实际上各种分波前干涉装置都可以杨氏双孔实验为原型, 它们是严格的或近似的双象系统, 其干涉条纹的间距均可以套用公式

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$$

式中 d 为双象的距离, D 为双象中垂线方向至屏幕的距离。在菲涅耳双面镜装置 (如图) 中,

$$\Delta x' = \Delta x' \approx \frac{1}{2} \Delta x$$

即条纹间距密集了一倍。而交叠区的宽度 Δl 没有变化，故可见条纹数的最大值增加一倍，即

$$\Delta N' \approx 2 \Delta N \approx 44$$

(4) 若点光源横向移动 δs ，则虚象点 S_1' , S_2' 随之在半径为 B 的圆弧上移动 $\delta s_1'$, $\delta s_2'$ ，且

$$\delta s_1' = \delta s_2' = \delta s$$

从而保持 S_1' , S_2' 的间距 d 不变，因此条纹间距 Δx 保持不变。但是，双象中垂线与屏幕的交点位置（零级）随之移动——以 M 为中心转了一个角度

$$\beta \approx \frac{\delta s}{B}$$

反映在屏幕上零级位移为

$$\delta x = C\beta = \frac{C}{B} \delta s$$

换句话说，此时幕上的条纹总体发生一个平移。这一点为下一个问题——扩展光源对干涉场反衬度的影响作了概念上的准备。

(5) 设扩展光源为 b ，即其边缘两点间隔 $\delta s = b$ ，若这两套条纹错开的距离（即零级平移量） δx 正好与 Δx 相等，则幕上反衬度降为 0。据此

$$\delta x = \frac{C}{B} b$$

$$\Delta x = \frac{B+C}{2\alpha B} \lambda$$

令

$$\delta x = \Delta x$$

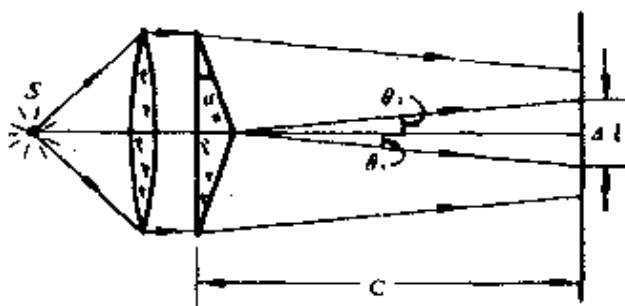
得光源的极限宽度

$$b_1 \approx \frac{\lambda}{2\alpha} \approx 0.05 \text{ mm}$$

从以上讨论中可以看到，菲涅耳双面镜的夹角 α 越小，则条纹的间距越大，允许扩展缝光源的宽度越宽，这两点对实际观察是有利的。但是，此时光束的交叠区变小，产生的干涉条纹的数目很少。

* 2. 一点源置于薄透镜的焦点，薄透镜后放一个双棱镜（见附图），设双棱镜的顶角为 $3'30''$ ，折射率为 1.5，屏幕与棱镜相距 5.0m，光波长为 5000\AA 。求幕上条纹的间距和能出现的条纹数目。

解 (1) 点光源置于薄透镜的焦点时，经透镜成为一束平行光正入射于棱镜，经双棱镜偏转，成为两束平行光对称地斜入射于屏幕。设棱镜顶角 α 很小，利用折射定律，并作小角近似，则斜入射的平行光的倾角（见附图）为



题 2 图

$$\theta_1 = \theta_2 \approx (n - 1) \alpha$$

根据第二章关于两束平行光干涉条纹的间距公式

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

得幕上条纹间距为

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} \approx 0.49\text{mm}$$

(2) 相干范围（交叠区域）的孔径角为

$$\Delta\theta = 2\theta_1 = 2(n-1)\alpha \approx 0.001 \text{ rad}$$

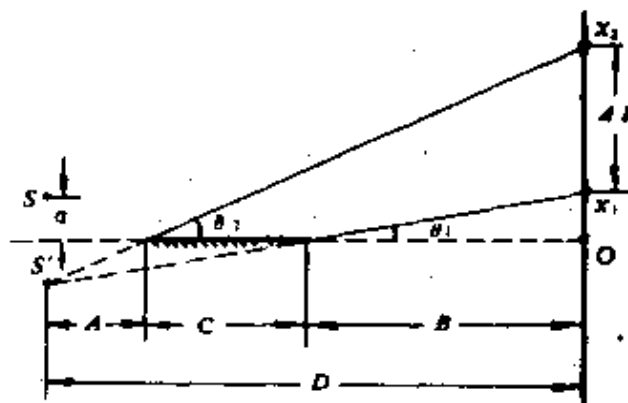
交叠区域的线度为

$$\Delta l = C \Delta\theta \approx 5 \text{ mm}$$

幕上产生的条纹数目为

$$\Delta N = \frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{C}{\lambda} [2(n-1)\alpha]^2 \approx 10 \text{ (条)}$$

• 3. 如图, 设洛埃镜的镜长 $C = 5.0 \text{ cm}$, 幕与镜边缘的距离 $B = 3.0 \text{ m}$, 缝光源与镜边缘的距离 $A = 2.0 \text{ cm}$, 离镜面高度 $a = 0.5 \text{ mm}$, 光波长为 5893 \AA 。求幕上条纹的间距和能出现的干涉条纹数目。



题 3 图

解 洛埃镜为双象干涉装置, 双象间隔

$$d = 2a$$

按条纹间距公式

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{D\lambda}{d} = \frac{A+B+C}{2a} \lambda \\ &\approx \frac{B}{2a} \lambda \\ &\approx 1.8 \text{ mm} \end{aligned}$$

交叠区域的线度

$$\begin{aligned} \Delta l &= \overline{x_1 x_2} = \overline{Ox_2} - \overline{Ox_1} \\ &= (C+B) \operatorname{tg} \theta_2 - B \operatorname{tg} \theta_1 \end{aligned}$$

而且

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{a}{A}, \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{a}{A+C}$$

考虑到 $B \gg A, C$, 得

$$\Delta l = \frac{aBC}{A(A+C)} \approx 54\text{mm}$$

幕上产生的条纹数目为

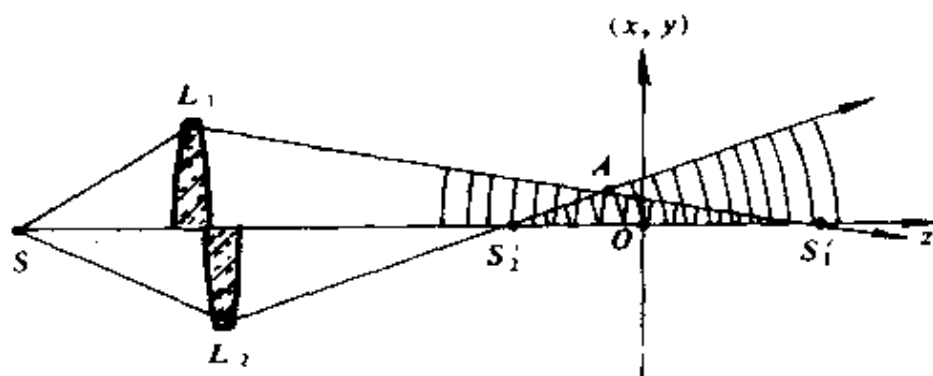
$$\Delta N = \frac{\Delta l}{\Delta x} \approx 30 \text{ (条)}$$

* 4. 附图所示为梅斯林 (Maslin) 干涉装置, 将透镜对剖后再沿光轴方向将两半 L_1 , L_2 错开一定距离。光点 S 位于光轴上, S_1' , S_2' 是它的象。

(1) 在图上标出相干光束的交叠区;

(2) 在交叠区中放一屏幕垂直于光轴, 幕上干涉条纹的形状是怎样的?

(3) 设透镜焦距为 30cm , S 与 L_1 的距离为 60cm , L_1 与 L_2 的距离为 8.0cm , 光波长为 5000\AA 。两个象的中点距离透镜 L_2 有多远? 在此放一屏幕, 其上接收到的亮纹间距为多少?



题 4 图

解 (1) 由点源 S 发出的发散球面波经 L_1 后转化为以 S_1' 为中心的会聚球面波。经 L_2 后转化为以 S_2' 为中心的会聚球面波。在 S_1' 和 S_2' 之右又分别成为两束发散球面波。以 S_2' 为中心的发散球面波和以 S_1' 为中心的会聚球面波发生交叠, 如图所示, $\Delta S_1'AS_2'$ 为相干交叠区。

(2) 在交叠区内会聚球面波和发散球面波产生干涉。设屏

幕所在平面为 xy 平面，离 S_1' 的距离为 d_1 ，离 S_2' 的距离为 d_2 。
则在 xy 平面上，会聚球面波的复振幅分布为

$$\tilde{U}_1(x, y) = A_1 \exp i \left[-k \left(d_1 + \frac{x^2 + y^2}{2d_1} \right) - \varphi_{10} \right]$$

发散球面波的复振幅分布为

$$\tilde{U}_2(x, y) = A_2 \exp i \left[k \left(d_2 + \frac{x^2 + y^2}{2d_2} \right) - \varphi_{20} \right]$$

式中 φ_{10} 和 φ_{20} 分别为两列波在中心 S_1' 和 S_2' 处的初位相。

两列波的位相差为

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= \varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y) \\ &= k \left(d_2 + \frac{x^2 + y^2}{2d_2} \right) - \varphi_{20} + k \left(d_1 + \frac{x^2 + y^2}{2d_1} \right) + \varphi_{10} \\ &= k \left(\frac{x^2 + y^2}{2d_1} + \frac{x^2 + y^2}{2d_2} \right) + k(d_2 + d_1) - (\varphi_{20} - \varphi_{10}) \\ &= k \left(\frac{x^2 + y^2}{2d_1} + \frac{x^2 + y^2}{2d_2} \right) + \varphi_0 \\ &= k \left(\frac{x^2 + y^2}{2d_1} + \frac{x^2 + y^2}{2d_2} \right) \end{aligned}$$

式中 φ_0 为两列波在坐标原点 O 处的位相差，因为两列波从点源 S 到原点 O 的光程都为 $L(SO)$ ，故 $\varphi_0 = 0$ 。

决定条纹形状的是等强度轨迹方程

$$\delta(x, y) = \text{常数}$$

即

$$k \left(\frac{x^2 + y^2}{2d_1} + \frac{x^2 + y^2}{2d_2} \right) = \text{常数}$$

也即

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

式中 ρ^2 为常数。上式是以原点为中心的圆的标准方程。由于图
中所示交叠区只限于 $x \geq 0$ ，所以条纹形状是一系列以原点为中
心的同心半圆。

(3) 由薄透镜物象的高斯公式 $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$ ，得 S_1' 离 L_1 的
距离为

$$s_1' = \frac{fs_1}{s_1 - f} = \frac{30 \times 60}{60 - 30} = 60 \text{ cm}$$

S_1' 离 L_2 的距离为

$$s_2' = \frac{fs_2}{s_2 - f} = \frac{30 \times 68}{68 - 30} = 53.7 \text{ cm}$$

所以两个象的中点离 L_2 的距离为

$$\frac{s}{2} = \frac{53.7 + (60 - 8)}{2} = 52.85 \text{ cm}$$

象距计算结果表明，本题 S_1' 、 S_2' 的实际位置与图中所示不符。

应当 S_1' 离 S 较近， S_2' 离 S 较远，相应的交叠区应限于 $x \leq 0$ 。但
这并不影响条纹的形状，以及亮纹半径的计算。

当屏幕放在两个象的中点时，则

$$d_1 = d_2 = d = 0.85 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= k \left(\frac{x^2 + y^2}{2d_1} + \frac{x^2 + y^2}{2d_2} \right) \\ &= k \frac{x^2 + y^2}{d} \\ &= \frac{k}{d} \rho^2 \end{aligned}$$

第 n 级亮纹满足 $\delta(x, y) = 2n\pi$, 即

$$\frac{k}{d} \rho_n^2 = 2n\pi$$

化简得

$$\rho_n = \sqrt{nd\lambda} = \sqrt{n} \rho_1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\rho_1 = \sqrt{d\lambda}$$

这就是亮纹的半径公式, 式中 ρ_1 为中心向外第一个亮纹的半径。此公式与菲涅耳波带片的半波带半径公式形成一致。本题

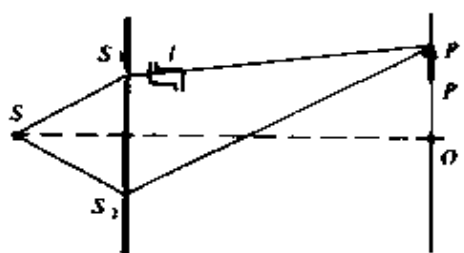
$$\rho_1 \approx 0.065 \text{ mm}$$

亮纹间距

$$\Delta\rho = \rho_{n+1} - \rho_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \rho_1$$

亮纹半径与 \sqrt{n} 成正比, 亮纹间距不等。

* 5. 附图所示为一种利用干涉现象测定气体折射率的原理性结构, 在 S_1 后面放置一长度为 l 的透明容器, 当待测气体注入容器而将空气排出的过程中幕上的干涉条纹就会移动。由移过条纹的根数即可推知气体的折射率。



题 5 图

(1) 设待测气体的折射率大于空气的折射率, 干涉条纹如何移动?

(2) 设 $l = 2.0 \text{ cm}$, 条纹移过 20 根, 光波长 5893 \AA , 空气折射率为 1.000276, 求待测气体 (氯气) 的折射率。

解 (1) 判断条纹移动趋向的方法是考察特定级别 (确定光程差) 的条纹, 看它在新的条件下出现在什么方位。显然, 当待测气体的折射率大于空气折射率时, 有充气情况下, 光程差 $\Delta L = L(S_2P) - L(S_1lP)$ 变小, 则原来光程差为小一些之处 P'

(如图)的条纹现在移向 P 处,即条纹向上移动。

(2) 凡光程差 $\Delta L(P)$ 改变一个波长 λ ,则 P 处强度变化一次,也即条纹移过一条。据此,写出光程差改变量 $\delta(\Delta L)$ 与条纹移动数 N 之关系为

$$\delta(\Delta L) = N\lambda$$

本题光程差的改变是由一路 $L(S_1, P)$ 光程改变引起的,即

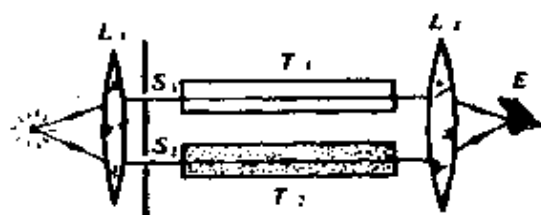
$$\begin{aligned}\delta(\Delta L) &= \delta L(S_1, P) \\ &= (n - n_0) l \\ &= \Delta n l\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta n &= \frac{N\lambda}{l} \\ n &= n_0 + \Delta n = n_0 + \frac{N\lambda}{l} \\ &\approx 1.000276 + 0.0005893 \\ &\approx 1.0008653\end{aligned}$$

* 6. 瑞利干涉仪的结构

和使用原理如下(参见附图),以钠光灯作为光源置于透镜 L_1 的前焦点,在透镜 L_2 的后焦面上观测干涉条纹的变动,在两个透镜之间安置一对完全相同的玻璃管 T_1 和 T_2 。实验开始时, T_2 管



题6图

充以空气, T_1 管抽成真空,此时开始观察干涉条纹。然后逐渐使空气进入 T_1 管,直到它与 T_2 管的气压相同为止。记下这一过程中条纹移动的数目。设光波长为 5893\AA ,管长 20cm ,条纹移动98根,求空气的折射率。

解 设空气折射率为 n ,真空折射率为 n_0 ,则实验过程中两管光程差的变化等于 T_1 管中光程的变化

$$\delta(\Delta L) = \Delta n l = N \lambda$$

所以

$$n = n_0 + \Delta n = 1 + \frac{N \lambda}{l} \\ \approx 1.000289$$

• 7. 用钠光灯作杨氏双缝干涉实验, 光源宽度被限制为 2 mm, 带双缝的屏离缝光源 2.5 m。为了在幕上获得可见的干涉条纹, 双缝间隔不能大于多少?

解 根据光场空间相干性反比关系

$$b \Delta \theta_1 \approx \lambda$$

在光源宽度 b 给定的情况下, 干涉孔径角 (即双缝对光源所张的角间隔) $\Delta \theta$ 必须满足

$$\Delta \theta < \Delta \theta_1 \approx \frac{\lambda}{b}$$

即双缝间隔

$$d = R \Delta \theta < R \Delta \theta_1 = \frac{R \lambda}{b} \\ \approx 0.74 \text{ mm}$$

才能在幕上产生有一定反衬度的可观测的条纹。

• 8. 一个直径为 1 cm 的发光面元, 如果用干涉孔径角量度的话, 其空间相干范围是多少弧度? 如果用相干面积量度, 问 1 m 远的相干面积为多大? 10 m 远的相干面积为多大?

解 设光波长为 $0.55 \mu\text{m}$, 若空间相干范围用孔径角 $\Delta \theta$ 量度的话, 则

$$\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{b} = \frac{0.55}{1 \times 10^{-4}} \\ \approx 0.55 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 11''$$

在 $R = 1 \text{ m}$ 远的相干面积为

$$\Delta S_1 \approx \frac{\pi}{4} (R \Delta \theta)^2 \approx 0.0024 \text{ mm}^2$$

在 $R = 10\text{ m}$ 远的相干面积为

$$\Delta S_2 \approx 0.24\text{ mm}^2$$

§ 2 薄膜干涉 (一) —— 等厚条纹

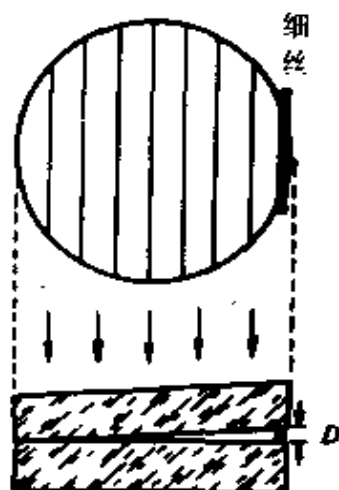
1. 把直径为 D 的细丝夹在两块平玻璃砖的一边形成尖劈形空气层 (附图下方), 在钠黄光 ($\lambda = 5893\text{ Å}$) 的垂直照射下形成如附图上方所示的干涉条纹, 试问 D 为多少?

解 薄膜表面等厚条纹的一条重要性质是, 不论条纹形状如何, 相邻两条纹所在位置的厚度差为半个波长。因此, 相隔 N 个条纹两处的厚度差为

$$\Delta h = N \frac{\lambda}{2}$$

据此, 本题细丝直径

$$D = 8 \times \frac{\lambda}{2} \approx 2.36\text{ }\mu\text{ m}$$



题 1 图

* 2. 块规是机加工里用的一种长度标准, 它是一钢质长方体, 它的两个端面经过磨平抛光, 达到相互平行。附图中 G_1 , G_2 是同规号的两个块规, G_1 的长度是标准的, G_2 是要校准的。校准方法如下: 把 G_1 和 G_2 放在钢质平台面上, 使面 and 面严密接触, G_1 , G_2 上面用一块透明平板 T 压住。如果 G_1 和 G_2 的高度 (即长度) 不等, 微有差别, 则在 T 和 G_1 , G_2 之间分别形成尖劈形空气层, 它们在单色光照射下各产生等厚干涉条纹。

(1) 设入射光的波长是 5893 Å , G_1 和 G_2 相隔 5 cm (即图

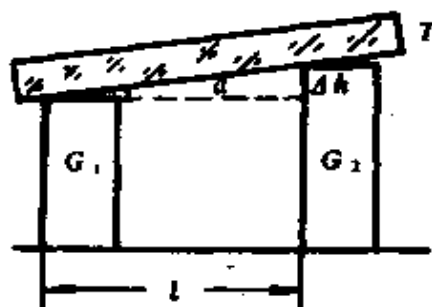
中的 l), T 和 G_1, G_2 间干涉条纹的间距都是 0.5mm , 试求 G_2 和 G_1 的高度之差。怎样判断它们谁长谁短?

(2) 如果 T 和 G_1 间干涉条纹的间距是 0.5mm , 而 T 和 G_2 间的是 0.3mm , 则说明什么问题?

解 (1) 如图, 先由条纹间距算出空气层劈角 α , 再由两块规距离 l 算出高度差

$$\Delta h \approx \alpha l = \frac{\lambda}{2 \Delta x} l$$

$$\approx 29.47 \mu\text{m}$$



题 2 图

当然, 要判断哪块高, 就不是图上画的那么显而易见了, 仅靠静态条纹的性质也是无法作出判断

的。为此, 轻压盖板 T 的中部, 两处条纹疏密变化正好相反。条纹变密的一端块规长, 条纹变疏的一端块规短。

(2) 这说明 G_2 上下两表面有不平行度, 致使其上表面并不严格平行 G_1 的上表面, 造成两边空气层劈角不等, 劈角差 (用以量度不平行度) 为

$$\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \left(\frac{1}{\Delta x_2} - \frac{1}{\Delta x_1} \right) \frac{\lambda}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{0.3\text{mm}} - \frac{1}{0.5\text{mm}} \right) \frac{\lambda}{2}$$

$$\approx 3.93 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 1.35'$$

3. 附图所示为一种干涉膨胀计。 G 为标准的石英环, C 为待测的柱形样品。由于它的膨胀系数与石英环的不同, 当温度改变时, 柱体 C 的上表面与石英平板 Π 之间楔形空气层的厚度就会改变。现已知样品与石英环的高度约为 1cm , 当温度升高 100°C 时, 视场中的干涉条纹移过 20 根, 求样品的线膨胀系数。设光波长为 5893\AA , 石英的线膨胀系数为 $0.35 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ 。

解 按题意, 说明样品上方空气层的厚度改变了

$$\Delta h = \pm N \frac{\lambda}{2}$$

式中 N 为条纹移过的根数。空气层厚度的改变是由于标准石英环与样品的线膨胀系数不等引起的。

设石英和样品的线膨胀系数分别为 a_1, a_2 , 则线膨胀系数之差

$$\begin{aligned} \Delta a &= a_2 - a_1 = \frac{l_2(T) - l_0}{l_0 T} - \frac{l_1(T) - l_0}{l_0 T} \\ &= \frac{l_2(T) - l_1(T)}{l_0 T} \end{aligned}$$

式中

$$l_2(T) - l_1(T) = \Delta h$$

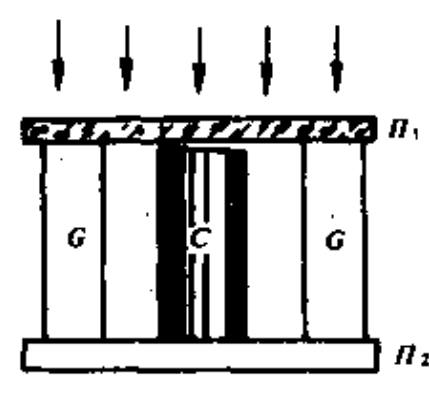
故得

$$\Delta a = \pm \frac{N \lambda}{2 l_0 T} \approx \pm 5.89 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

以上分析并未确认空气层的厚度是变厚了还是变薄了, 因而并未确认线膨胀系数谁大谁小, 这只能由条纹移动的趋向来确定。如果条纹移动方向朝交棱, 说明空气层变厚, 样品线膨胀小于石英环。总之, 样品的线膨胀系数有两个可能的取值, 即

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + \Delta a, \\ &\approx 6.24 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} \quad \text{或} \quad -5.54 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

• 4. 附图 (a) 所示为一种测 pn 结结深 x_j 的方法。在 n 型半导体的基质硅片表面经杂质扩散而形成 p 型半导体区。 p 区



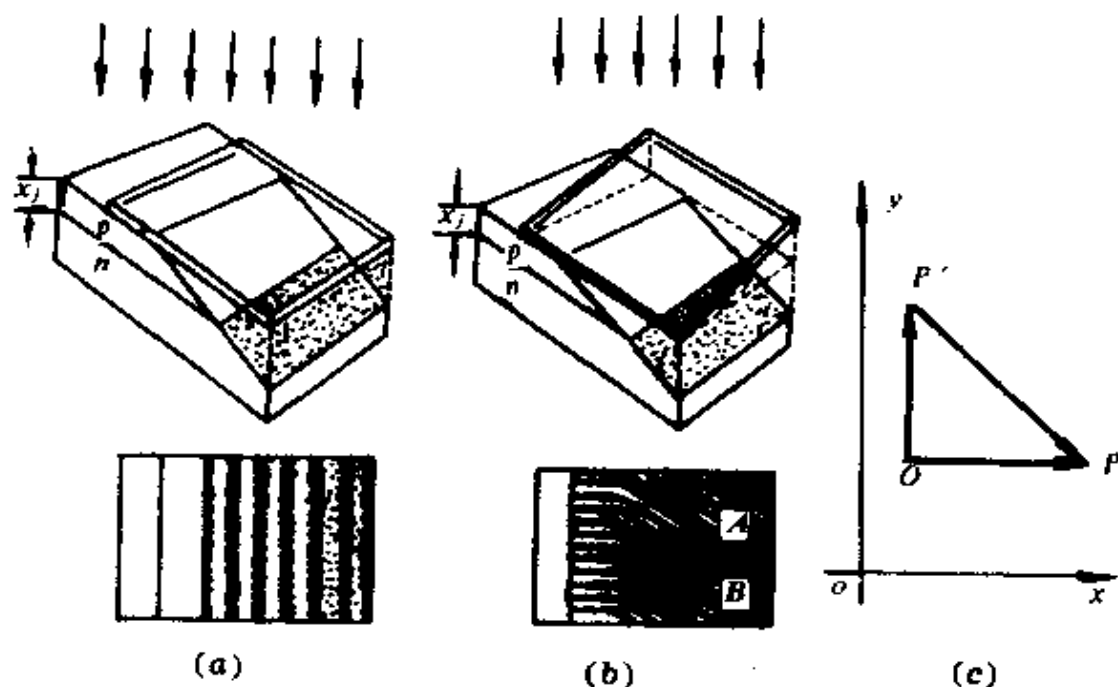
题 3 图

与 n 区的交界面叫 pn 结， pn 结距表面的深度（即 p 区厚度） x_j 叫结深。在半导体工艺上需要测定结深，测量的方法是先通过磨角、染色，使 p 区和 n 区的分界线清楚地显示出来，然后盖上半反射膜，在它与硅片之间形成尖劈形空气薄膜。用单色光垂直照射时，可以观察到空气薄膜的等厚干涉条纹。数出 p 区空气薄膜的条纹数目 Δk 即可求出结深

$$x_j = \Delta k \frac{\lambda}{2}$$

由于光在金属或半导体表面反射时位相变化比较复杂，用本方法测量结深 x_j 没有考虑此位相突变，因此测量结果不太精确。更精确的测量方法见附图（b），半反射膜不是象在图（a）中那样紧贴在 p 区上表面，而是一端稍微往上翘一点，观察到的干涉条纹如图（b）下方所示。试说明

（1）干涉条纹为什么会是这样的？



题 4 图

(2) 若用 $\lambda = 5500\text{\AA}$ 的单色光照明, 测得 AB 间的距离为 1.1mm , 斜干涉条纹的间隔为 0.20mm , 结深 x_j 为多少?

(3) 此法比图 (a) 所示的方法精确在哪里?

解 (1) 薄膜表面等厚条纹形状与空气膜等厚线轨迹一致。 p 区上表面的盖片只沿一个方向翘起, 交棱沿 x 方向, 等厚线平行 x 轴。 p 区斜面交棱沿 y 轴, 而上方盖片交棱沿 x 轴, 合成结果此区域的尖劈交棱就是斜的了。或者作如下更细致的分析, 在斜面中间任取一点 O 为参考点 [图 (c)], 如果仅有斜面下倾, 则沿 x 方向, $h(p) > h(O)$, 如果仅有盖片在另一正交方向翘起, 则沿 y 方向, $h(P') = h(O)$, 而两者同时起作用时, 使 $h(P') = h(p)$, 即等厚线轨迹理应为斜线。

(2) 用读数显微镜进行测量时, 先选定左侧一组条纹 (平行 x 轴) 中的一条为基准, 以其几何延长线的交点 A 为起点, 沿 y 轴测长至该条纹实际走向的交点 B , 所得数据如题。等厚点的位移 (从 A 移至 B) 正是斜面结深引起的。所以结深为

$$x_j = \Delta k \frac{\lambda}{2}$$

$$= \frac{AB}{\Delta y} \frac{\lambda}{2} = \frac{1.1 \times 10^3}{0.20 \times 10^3} \times \frac{0.55}{2}$$

$$\approx 1.51 \mu\text{m}$$

(3) 这种方法避开了精确判断盖片与 p 区上表面交棱的困难。如果采用第一种方法, 让盖片与 p 区上表面密接, 则由于位相变化的复杂性, 其右侧交棱处的干涉强度不一定是极大 (亮纹) 或极小 (暗纹), 换句话说, 人们很难在干涉场中精确定交棱位置, 因而条纹数目就难以精确, 其误差与干涉测厚精度是可比的, 这就大大降低了测量精度。而这种改进型的方法, 从根本上避开了上述困难。即使要知道交棱的位置也不难, 它正是整套干涉条纹拐点的连线。

5. 测得牛顿圈从中间数第五环和第十五环的半径分别为0.70mm和1.7mm, 求透镜的曲率半径。设光波长为0.63μm。

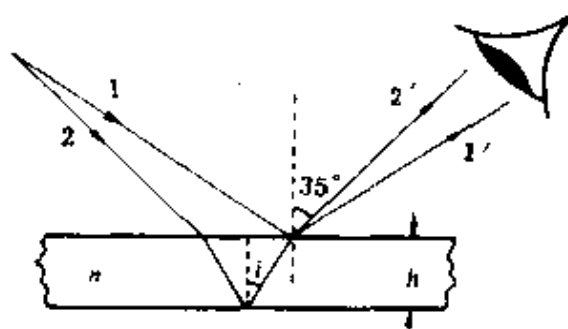
解: 考虑到牛顿环的中心点不一定密接, 可靠的测量方法应当如本题所述, 这时干涉环的半径与透镜曲率半径的关系应当修改为

$$R = \frac{r_{k+m}^2 + r_k^2}{m\lambda}$$

重要的是两圈干涉环的相隔几条m数, 而不是绝对级别k数。取 $r_{k+m} = 1.7\text{mm}$, $r_k = 0.70\text{mm}$, $m = 15 - 5 = 10$, $\lambda = 0.63\mu\text{m}$, 算得透镜的曲率半径为

$$R = 381 \text{ mm}$$

6. 肥皂膜的反射光呈现绿色, 这时膜的法线和视线的夹角约为35°, 试估算膜的最小厚度。设肥皂水的折射率为1.33, 绿光波长为5000Å。



题6图

解 考虑到目前存在半波损, 出现亮场的表观光程差应满足 (参见附图)

$$2nh\cos i = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

令 $k = 0$, 得肥皂膜的最小厚度为

$$h_0 = \frac{\lambda}{4n\cos i} = \frac{\lambda}{4n\sqrt{1 - \sin^2 i}} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 35^\circ}}$$

$$= \frac{5000}{4\sqrt{1.33^2 - \sin^2 35^\circ}} \approx 1042\text{\AA}$$

7. 在玻璃表面上涂一层折射率为1.30的透明薄膜，设玻璃的折射率为1.5。

(1) 对于波长为 5500\AA 的入射光来说，膜厚应为多少才能使反射光干涉相消？这时光强反射率为多少？与不加膜时相比，光强反射率降了多少？

(2) 对波长为 4000\AA 的紫光和 7000\AA 的红光来说，(1)

问所得的厚度在两束反射相干光之间产生多大的位相差？（不考虑色散。）

解 (1) 如图，因这时膜层为低膜，即 $n_1 < n_2 < n_3$ ，反射两光束之间无半波损，有效光程差等于表观光程差。为达反射光干涉相消，应使光程差为

$$\Delta L = 2n_2 h = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

若取 $k = 0$ ，则膜厚

$$h = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{5500}{4 \times 1.30} \approx 1058 \text{\AA}$$

此时反射光振幅（双光束干涉近似）为

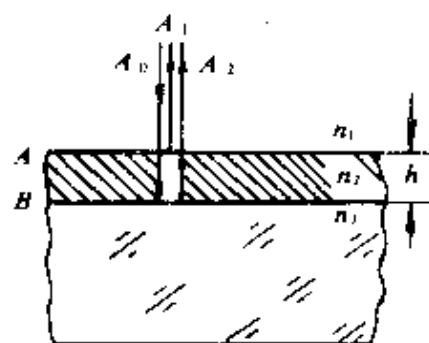
$$A = A_1 + A_2$$

式中

$$A_1 = r_A A_0 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} A_0$$

$$= \frac{1.3 - 1.0}{1.3 + 1.0} A_0$$

$$\approx 13\% A_0$$



题7图

$$A_2 = A_0 [r_A + r_B (1 - r_A^2)] A_0$$

$$= \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} (1 - r_A^2) A_0$$

$$= \frac{1.5 - 1.3}{1.5 + 1.3} (1 - 0.13^2) A_0 = 0.07 \times 0.98 A_0 \\ \approx 6.9\% A_0$$

所以膜层反射光强

$$I = (A_1 - A_2)^2 = [r_A - r_B (1 - r_A^2)]^2 I_0 \\ \approx 0.37\% I_0$$

反射率

$$R' = \frac{I}{I_0} \approx 0.37\%$$

此时接近完全消反射。若无薄膜，空气玻璃单界面反射率为

$$R = \left(\frac{n_3 - n_1}{n_3 + n_1} \right)^2 = 4\%$$

由于自然光正入射时光强总反射率

$$R = R_p = R_s$$

所以上面求得的即为总的光强反射率。可见有了薄膜以后，反射率下降了

$$\Delta R = R - R' \approx 3.6\%$$

(2) 以上厚度只对原来考虑的特定波长 5500\AA 满足反射相消（反射两光束位相差 π ），对别的波长就不是这样了。例如对 $\lambda_1 = 4000\text{\AA}$ 的紫光，反射两光束的位相差

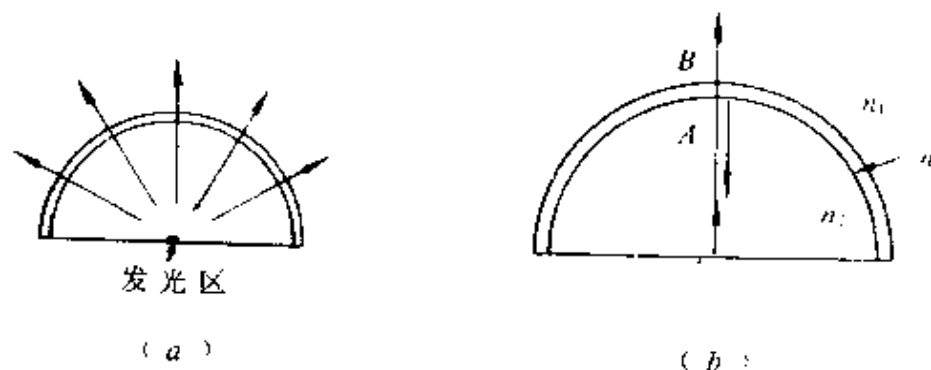
$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} - 2n_2 h = \frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{\lambda}{2} \\ = \frac{\lambda}{\lambda_1} - \pi = \frac{5500}{4000} \pi \\ = 1.375 \pi \quad (\text{rad})$$

对 $\lambda_2 = 7000 \text{ \AA}$ 的红光, 反射两光束的位相差

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \frac{\lambda}{\lambda_2} \pi = \frac{5500}{7000} \pi \\ &\approx 0.7857 \pi (\text{rad})\end{aligned}$$

* 8. 砷化镓发光管制成半球形, 以增加位于球心的发光区对外输出功率, 减少反射损耗。已知砷化镓发射光波长为 9300 \AA , 折射率为 3.4。为了进一步提高输出光功率, 常在球形表面涂敷一层增透膜 [见附图 (a)]。

- (1) 不加增透膜时, 球面光强反射率有多大?
- (2) 增透膜的折射率和厚度应取多大?
- (3) 如果用氟化镁 (折射率为 1.38) 能否增透? 光强反射率有多大?
- (4) 如果用硫化锌 (折射率为 2.58) 能否增透? 光强反射率还有多大?



题 8 图

解 (1) 如图 (b), 不加增透膜时, 单界面 $n_2 \rightarrow n_1$ 的光强反射率

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 = \left(\frac{3.4 - 1.0}{3.4 + 1.0} \right)^2 \approx 29.8\%$$

(2) 如欲完全消反射, 膜层折射率和光学厚度必须同时满足以下两个条件, 即

$$\begin{cases} n = \sqrt{n_1 n_2} \\ nh = (2k + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

取 $n_1 = 1.0$, $n_2 = 3.4$, $\lambda = 9300 \text{ \AA}$, $k = 0$, 算出

$$n \approx 1.84, h \approx 1264 \text{ \AA} \approx 0.13 \mu\text{m}$$

(3) 如果只要求增透, 即使不是完全消反射, 也应使膜层光学厚度 $nh = (2k + 1) \lambda / 4$, 而且应是低膜, 即 $n_1 < n < n_2$ 。因此, 选用折射率 $n = 1.38$ 的氟化镁作膜层, 是可以增透的。以双光束干涉近似计算反射光强 I , 设入射光振幅为 A_0 , 则经界面 A 一次反射光振幅为 $A_1 = A_0 r_A$, 经界面 B 再反射回来的透射光振幅为 $A_2 = A_0 t_A r_B t'_A$, 在正入射情况下

$$r_A = \frac{n_2 - n}{n_2 + n} = \frac{3.4 - 1.38}{3.4 + 1.38} \approx 42.3\%$$

$$r_B = \frac{n - n_1}{n + n_1} = \frac{1.38 - 1.0}{1.38 + 1.0} \approx 16.0\%$$

$$t_A t'_A = (1 - r_A^2) \approx 82.1\%$$

考虑到上述两束光之位相差为 π , 故膜层反射光强为

$$\begin{aligned} I &= (A_1 - A_2)^2 \\ &= [r_A - r_B (1 - r_A^2)]^2 A_0^2 \end{aligned}$$

光强反射率为

$$\begin{aligned} R &= \frac{I}{I_0} = [r_A - r_B (1 - r_A^2)]^2 \\ &\approx 8.5\% \end{aligned}$$

(4) 如果选用折射率 $n = 2.35$ 的硫化锌作膜层, 同理可以增透, 光强反射率

$$R = [r_A - r_B (1 - r_A^2)]^2$$

式中

$$r_A = \frac{3.4 - 2.35}{3.4 + 2.35} \approx 18.3\%$$

$$(1 - r_A^2) \approx 96.7\%$$

$$r_B = \frac{2.35 - 1.0}{2.35 + 1.0} \approx 40.3\%$$

算出

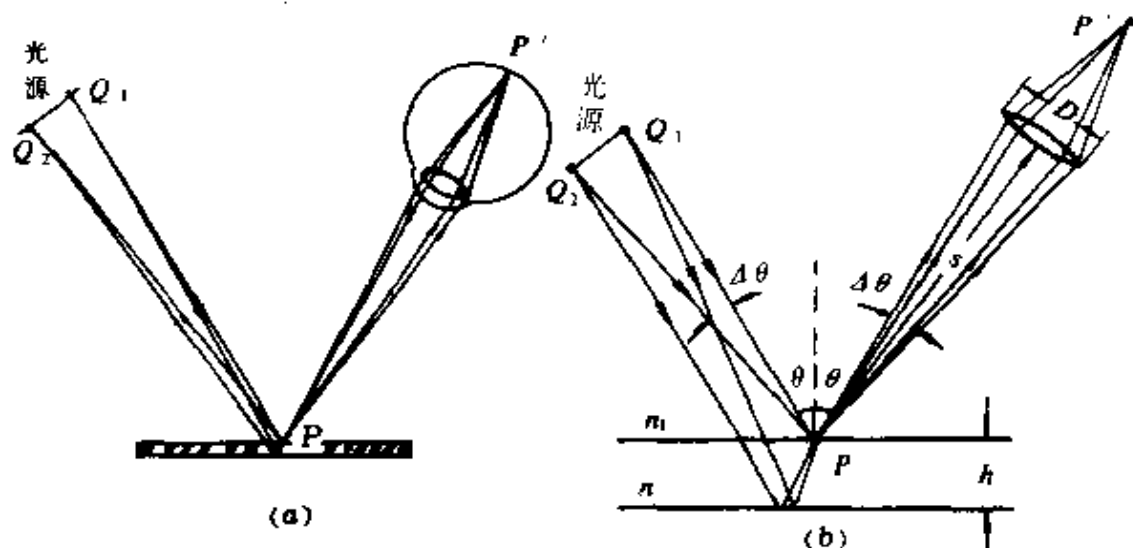
$$R \approx 4.3\%$$

* 9. 如附图(a), 用肉眼直接观察薄膜表面的干涉条纹。设薄膜折射率为1.5, 上方为空气, 瞳孔直径为3 mm, 与观察点P相距30 cm, 视线与表面法线夹角 30° 。

(1) 分别计算膜厚2 nm及20 nm两种情况下, 点源 Q_1, Q_2 在观察点P产生的光程差改变量 $\delta(\Delta L)$ 。

(2) 如果为了保证条纹有一定的反衬度, 要求上述光程差改变量的数量级不能超过多少? 以此来估计对膜厚 h 的限制。

解 本题是为了具体理解薄膜表面条纹的反衬度是如何因扩展光源的影响而下降的, 并注意到影响反衬度的光源有效宽度应由观察者(包括仪器)的入射光瞳的孔径来决定。



题 9 图

(1) 如图 (b), 设点源 Q_1 的入射角为 θ , 对应的折射角为 γ , 点源 Q_2 的入射角为 $(\theta + \Delta\theta)$, 对应的折射角为 $(\gamma + \Delta\gamma)$, 它们在同一场点 P 产生的光程差不等, 分别为

$$\Delta L_1(P) = 2nh \cos \gamma$$

$$\Delta L_2(P) = 2nh \cos(\gamma + \Delta\gamma)$$

光程差之改变量为

$$\delta(\Delta L) = 2nh \cos \gamma - 2nh \cos(\gamma + \Delta\gamma)$$

$$\approx 2nh \sin \gamma \Delta\gamma$$

若要进一步化简, 可以考虑到 $\Delta\gamma$ 由 $\Delta\theta$ 确定, 而 $\Delta\theta$ 由观察者的距离 S 与入射光瞳孔径 D 决定, 即

$$\Delta\theta \approx \frac{D}{S}$$

并对折射定律 $n_1 \sin \theta = n \sin \gamma$, 作如下微分运算

$$n_1 \cos \theta \Delta\theta \approx n \cos \gamma \Delta\gamma$$

得

$$\Delta\gamma \approx \frac{n_1 \cos \theta}{n \cos \gamma} \Delta\theta$$

化简

$$\delta(\Delta L) \approx 2h \frac{n_1^2 \sin \theta \cos \theta}{n \cos \gamma} \Delta\theta$$

$$\approx \frac{n_1^2}{n} \frac{\sin 2\theta}{\cos \gamma} \Delta\theta h$$

取 $n_1 = 1.0$, $n = 1.5$, $\theta = 30^\circ$, $s = 30\text{cm}$, $D = 3\text{mm}$, 算出

$$\Delta\theta \approx 10^{-2}, \sin 2\theta \approx 0.8660$$

$$\frac{n_1^2}{n} = 0.6667$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \theta}{n} \right)^2}$$

$$\approx 0.9428$$

得 $\delta(2L) = 0.0061h$

当 $h = 2 \text{ cm}$ 时, 则 $\delta(2L) = 0.0122 \text{ cm} = 122 \mu\text{m}$

当 $h = 20 \mu\text{m}$ 时, 则 $\delta(2L) = 0.122 \mu\text{m}$

(2) 为使干涉条纹有一定的反衬度, 至少要求

$$\delta(2L) = \lambda$$

要使反衬度不至过小, 应要求

$$\delta(2L) = \lambda/2$$

即

$$\frac{n_1^2}{n} - \frac{\sin 2\theta}{\cos \gamma} \Delta\theta h \leq \frac{\lambda}{2}$$

在其它条件确定的情况下, 应使膜层厚度

$$h \leq \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{n \cos \gamma}{n_1^2 \sin 2\theta \Delta\theta}$$

本题

$$h \leq \frac{\lambda}{2 \times 0.0061} \approx 82\lambda$$

若取 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$, 则得

$$h = 45 \mu\text{m}$$

综上所述, 为使薄膜表面出现等厚干涉条纹, 膜层应当很薄, 其主要原因是光源本身各部分的非相干性, 而并不是光源发光的非单色性。换句话说, 这里主要是一个光场的空间相干性问题, 而不是光场的时间相干性问题。

§ 3 薄膜干涉 (二) —— 等倾条纹

* 1. 在傍轴条件下, 等倾条纹的半径与干涉级数有怎样的依赖关系? 牛顿圈的情况怎样? 两者有区别吗? 你怎样把二者区分开来?

解 如图, 设透镜焦距为 f , 薄膜光学厚度为 nh , 入射倾角为 i , 对应膜层内的折射角为 γ 。对于等倾干涉条纹来说, 内圈干涉环的级别高, 外圈干涉环的级别低, 而且中心并不一定正好为亮斑 (或暗斑)。为方便起见, 设最靠里边的干涉环级别为 k_1 , 则往外相隔 m 圈干涉环的级别为 $(k_1 - m)$, 于是

$$2nh \cos \gamma_1 = k_1 \lambda$$

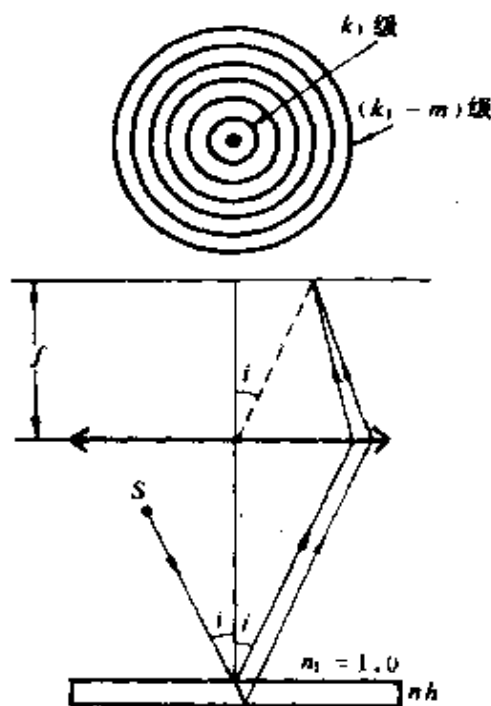
$$2nh \cos \gamma_m = (k_1 - m) \lambda$$

注意此处 γ_1, k_1 是常量, γ_m, m 是变量。在傍轴条件下, i_m, γ_m, γ_1 均远小于 1, 第 m 圈在透镜后焦面 (接收面) 上的半径为

$$\rho_m \approx f \sin i_m \approx n f \sin \gamma_m$$

$$= n f \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_m} = n f \sqrt{1 - \left(\frac{k_1 \lambda - m \lambda}{2nh} \right)^2}$$

$$= n f \sqrt{1 - \left(\cos \gamma_1 - \frac{m \lambda}{2nh} \right)^2}$$



题 1 图

$$= n f \sqrt{1 - \left[\cos^2 \varphi_1 + \left(\frac{m\lambda}{2nh} \right)^2 - m \frac{\cos \varphi_1 \lambda}{nh} \right]}$$

忽略 $\left(\frac{m\lambda}{2nh} \right)^2 \approx 0$ ，取近似 $\cos^2 \varphi_1 \approx \cos \varphi_1 \approx 1$ ，于是

$$\begin{aligned} \rho_m &= f \sqrt{m \frac{n\lambda}{h}} \\ &= \sqrt{m} \rho_1, \quad \rho_1 = f \sqrt{\frac{n\lambda}{h}} \end{aligned}$$

式中 ρ_1 为一个参量。总之，等倾条纹的半径与整数的平方根成正比，整数 m 取值为该干涉环与最靠中心干涉环之间的条纹数。结果表明，等倾圆环间隔是里边疏，外边密，这与牛顿环相似。但是牛顿环（等效空气膜是中间薄外边厚）的级别是里边低外边高，这一点与等倾条纹不同。于是，人们可以利用这一点将两者区别开来。譬如设法加大膜层厚度，看看条纹的变动情况，若是等倾条纹，此时必将外冒；若是中间薄外边厚的牛顿环，此时必将往里吞；若是中间厚外边薄的牛顿环，此时吞吐情况就与等倾条纹相同，仅此操作两者就难以区别了。

§ 4 迈克耳孙干涉仪 光场的时间相干性

* 1. 用钠光 5893\AA 观察迈克耳孙干涉条纹，先看到干涉场中有 12 个亮环，且中心是亮的，移动平面镜 M_1 后，看到中心吞（吐）了 10 环，而此时干涉场中还剩有 5 个亮环。试求：

- （1） M_1 移动的距离；
- （2）开始时中心亮斑的干涉级；
- （3） M_1 移动后，从中心向外数第 5 个亮环的干涉级。

解 本题的意义在于通过条纹的移动，由条纹相对级别的变化来确定条纹的绝对级别。

(1) 首先定性分析一下, 等效空气膜的厚度是增加了还是减少了。在相同视场(角范围)之内, 条纹数目变小, 条纹变稀, 说明膜厚变薄, 条纹向里吞了10环, 因而位移绝对值为

$$\begin{aligned}\Delta h &= N \frac{\lambda}{2} \\ &= 2.947 \mu\text{m}\end{aligned}$$

(2) 中心级别的绝对数 k 取决于膜层厚度 h , 而 k , h 以及视场角范围 θ 开始时都是未知的。为此, 考虑镜面移动前有

$$2h = k\lambda \quad (a)$$

$$2h \cos \theta = (k - 12)\lambda \quad (b)$$

镜面移动后有

$$2(h - \Delta h) = (k - 10)\lambda \quad (c)$$

$$2(h - \Delta h) \cos \theta = (k - 15)\lambda \quad (d)$$

由式 (a) 和式 (b), 式 (c) 和式 (d), 分别得

$$k\lambda \cos \theta = (k - 12)\lambda$$

$$(k - 10)\lambda \cos \theta = (k - 15)\lambda$$

以上两式相比, 消去 $\cos \theta$, 得方程

$$\frac{k - 10}{k} = \frac{k - 15}{k - 12}$$

解出

$$k \approx 17$$

(3) 显然, 移动后中心亮环级别为 7, 向外数第 5 个亮环的干涉级别为 2。

• 2. 在迈克耳孙干涉仪中, 反射镜移动 0.33mm, 测得条纹变动 192 次, 求光的波长。

解 根据

$$\Delta h = N \frac{\lambda}{2}$$

得

$$\lambda = \frac{2 \Delta h}{N} = \frac{2 \times 0.33 \text{ mm}}{192} \approx 3.438 \mu\text{m}$$

此光波长在红外波段。

3. 钠光灯发射的黄线包含两条相近的谱线，平均波长为 5893 \AA 。在钠光下调节迈克耳孙干涉仪，人们发现干涉场的反衬度随镜面移动而周期性地变化。实测的结果由条纹最清晰到最模糊，视场中吞（吐）490圈条纹，求钠双线的两个波长。

解 双谱线产生的两套条纹不相干叠加结果，将使干涉场的反衬度随光程差的增加而呈现周期性的变化，从最清晰到最模糊（或从最模糊到最清晰）的光程差改变量 $\delta(\Delta L)$ 以及条纹的吞（吐）数 ΔN 满足

$$\delta(\Delta L) = \frac{\bar{\lambda}^2}{2 \Delta \lambda} \Delta N \bar{\lambda}$$

由此求得双线间隔为

$$\Delta \lambda = \frac{\bar{\lambda}}{2 \Delta N} = \frac{5893}{2 \times 490} \approx 6.0 \text{ \AA}$$

波长分别为

$$\lambda_1 = \bar{\lambda} - \frac{\Delta \lambda}{2} = 5890.0 \text{ \AA}$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda} + \frac{\Delta \lambda}{2} = 5896.0 \text{ \AA}$$

4. 在一次迈克耳孙干涉仪实验中，所用的最短标准具长度为 0.39 mm ，如用镉灯（波长为 6428.41 \AA ）作光源，实验时所测得的条纹变动数目应是多少？

解 设标准具长度为 l ，则动镜移动距离 $\Delta h = l$ ，根据

$$\Delta h = N \frac{\lambda}{2}$$

得条纹变动为

$$N = \frac{2l}{\lambda} = 1213.36 \text{ (条)}$$

* 5. 用迈克耳孙干涉仪进行精密测长, 光源为 6328Å 的氦氖激光, 其谱线宽度为 10^{-3}Å , 整机接收(光电转换)灵敏度可达 $1/10$ 个条纹, 求这台仪器测长精度为多少? 一次测长量程为多少?

解 干涉精密测长精度 δl 被接收灵敏度(可达一个条纹的分数 δN)所决定。按题意 $\delta N = 1/10$, 算出

$$\begin{aligned}\delta l &= \delta N \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{20} \lambda = 316.4\text{Å} \\ &\approx 0.032\text{ }\mu\text{m}\end{aligned}$$

此精度比最高级的螺旋测径器(千分尺)还高一个量级。

一次测长量程 l_M 被相干长度 l_0 所决定, 而相干长度 l_0 可由谱线宽度 $\Delta\lambda$ 算出:

$$l_M = \frac{1}{2} l_0 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \approx 2\text{ m}$$

* 6. 迈克耳孙干涉仪中的一臂(反射镜)以速度 v 匀速推移, 用透镜接收干涉条纹, 将它会聚到光电元件上, 把光强变化转换为电讯号。

(1) 若测得电讯号的时间频率为 ν , 求入射光的波长 λ ;

(2) 若入射光波长在 $0.6\text{ }\mu\text{m}$ 左右, 要使电讯号频率控制在 50Hz , 反射镜平移的速度应为多少?

(3) 按以上速度移动反射镜, 钠黄光产生电讯号的拍频为多少? (钠黄光双线波长为 5890Å 和 5896Å 。)

解 (1) 根据

$$\Delta h = \Delta N \frac{\lambda}{2}$$

将上式两边除以时间间隔 Δt , 即

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} \frac{\lambda}{2}$$

得

$$v = \nu \frac{\lambda}{2}$$

故

$$\lambda = \frac{2v}{\nu}$$

(2) 根据以上关系, 可按

$$v = \frac{1}{2} \nu \lambda$$

估算动镜速度。若 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$, $\nu = 50\text{Hz}$, 则

$$v = 15 \mu\text{m/s}$$

若 $\lambda = 40 \mu\text{m}$, $\nu = 100\text{Hz}$, 则

$$v = 2 \text{ mm/s}$$

快速扫描型傅里叶变换光谱仪的动镜速度属于这一量级。

(3) 设钠黄光双线波长为 λ_1, λ_2 , 则干涉仪中产生电讯号的时间频率分别为

$$\nu_1 = \frac{2v}{\lambda_1}, \quad \nu_2 = \frac{2v}{\lambda_2}$$

合成结果, 产生电讯号的拍频为

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \nu_1 - \nu_2 = 2v \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \\ &\approx 2v \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \end{aligned}$$

若取 $v = 15 \mu\text{m/s}$, 平均波长 $\lambda = 5893 \text{ \AA}$, $\Delta\lambda = 6 \text{ \AA}$, 算出拍频数值为

$$\Delta\nu = 5.2 \times 10^{-2} \text{ Hz} \ll \nu_1, \nu_2$$

7. 迈克耳孙干涉仪中的一臂(反射镜)以速度 v 匀速推移, 现用透镜将干涉条纹会聚到光电元件上, 把光强变化转换为电讯号。设电讯号 i 对光强 I 的响应是线性的, 且本底为零。

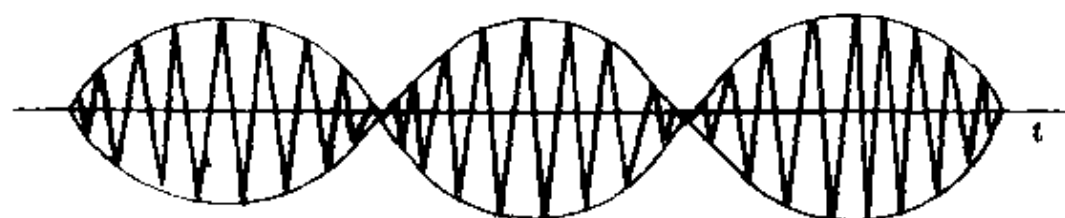
经频谱分析，实测的电讯号可以表示为

$$i(t) = i_0 + i_1 \cos \omega_1 t + i_2 \cos \omega_2 t$$

求：

(1) 入射光谱，即包含几种波长成分及其相对强度为多少？这台干涉仪实现双光束干涉的反衬度为多少？

(2) 若入射光选为水银光谱的黄双线 5770\AA ， 5791\AA ，动臂速度取 $4\text{ }\mu\text{m/s}$ ，电讯号的拍频为多少？在低频包络的一个周期中包含有多少个振荡（参见附图）？



题 7 图

解 (1) 若入射波长为 λ ，则电讯号的时间频率为

$$\nu = \frac{2v}{\lambda}$$

因目前电讯号中包含两种圆频率 ω_1 、 ω_2 ，所以入射光包含了两条谱线，其波长值分别为

$$\lambda_1 = \frac{2v}{\nu_1} = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi v}{\omega_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{2v}{\nu_2} = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi v}{\omega_2}$$

设这两条谱线强度分别为 I_{10} 、 I_{20} ，若忽略干涉仪各元件在光路转换过程中对光强的损耗，则干涉场合成强度应是

$$\begin{aligned} I(t) &= I_{10}(1 + \gamma \cos \omega_1 t) + I_{20}(1 + \gamma \cos \omega_2 t) \\ &= (I_{10} + I_{20}) + \gamma I_{10} \cos \omega_1 t + \gamma I_{20} \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

对比电讯号中的三个系数, 有

$$i_0 \propto (I_{10} + I_{20}), \quad i_1 \propto p I_{10}, \quad i_2 \propto p I_{20}$$

由此得到两条谱线的相对强度为

$$\frac{I_{20}}{I_{10}} = \frac{i_2}{i_1}$$

干涉仪实现双光束干涉的反衬度为

$$p = \frac{i_1 + i_2}{i_0}$$

(2) 如设这两条黄双线的强度相近, 则电讯号表示为

$$i(t) = i_0 + \frac{1}{2}i_0 p \cos \omega_1 t + \frac{1}{2}i_0 p \cos \omega_2 t$$

$$i_0 \left[1 + p \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \right]$$

由此得高频振荡频率为

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) c \\ &\approx 13.81 \text{ Hz} \end{aligned}$$

拍频 (低频包络频率) 为

$$\begin{aligned} \Delta \nu = \nu_1 - \nu_2 &= 2c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \\ &\approx 0.05 \text{ Hz} \end{aligned}$$

在低频包络的一个周期 (波包) 中包含的振荡数目有

$$N = \frac{\bar{\nu}}{\Delta \nu} \approx 277$$

§ 5 多光束干涉 法布里—珀罗干涉仪

* 1. 有两个波长 λ_1 和 λ_2 , 在 6000 \AA 附近相差 0.001 \AA . 要用法布里—珀罗干涉仪把它们分辨开来, 间隔 h 需要多大? 设

反射率 $R = 0.95$ 。

解 法一珀仪属于多光束长程干涉仪，有很高的色分辨本领，在光波长为 λ 的 k 级可分辨的最小波长间隔为 $\delta\lambda$ ，它们满足以下关系（色分辨本领公式）

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

其中 k 值很高，中心 k 值决定于

$$2nh = k\lambda$$

按题意，合并以上两式得

$$h = \frac{k\lambda}{2n} = \frac{1}{2n\pi} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \frac{\lambda^2}{\delta\lambda}$$

取 $n = 1$ ， $R = 0.95$ ， $\lambda = 0.6\mu\text{m}$ ， $\delta\lambda = 10^{-7}\mu\text{m}$ ，算出

$$h \approx 2.94\text{cm}$$

这是题目给出的分辨要求下，腔长下限值。

2. 如果法布里—珀罗干涉仪两反射面之间的距离为 1.00cm ，用绿光（ 5000\AA ）作实验，干涉图样的中心正好是一亮斑。求第10个亮环的角直径。

解 在法—珀干涉仪中，极强（亮纹）所满足的角方位条件为

$$2nh\cos\theta_k = k\lambda$$

中心亮斑的级别由下式决定

$$2nh = k_0\lambda$$

所以第10个亮环的角半径 θ_k 满足

$$\begin{aligned}\cos\theta_k &= \frac{(k_0 - 10)\lambda}{2nh} \\ &= 1 - 10\frac{\lambda}{2nh}\end{aligned}$$

取 $n = 1$ ， $h = 1.00\text{cm}$ ， $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ ，算得

$$\cos \theta_k \approx 0.9998$$

$$\theta_k \approx 1'9''$$

角直径为

$$2\theta_k = 2^\circ 18'$$

• 3. 设法一珀腔长 5 cm, 用扩展光源作实验, 光波波长为 $0.6\mu\text{m}$ 。问:

(1) 中心干涉级数为多少?

(2) 在倾角为 1° 附近干涉环的半角宽度为多少? 设反射率 $R = 0.98$ 。

(3) 如果用这个法一珀腔分辨谱线, 其色分辨本领有多高? 可分辨的最小波长间隔为多少?

(4) 如果用这个法一珀腔对白光进行选频, 透射最强的谱线有几条? 每条谱线宽度为多少?

(5) 由于热胀冷缩, 引起腔长的改变量为 10^{-5} (相对值), 则谱线的漂移量为多少?

解 (1) 中心级别

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{2nh}{\lambda} \\ &= \frac{2 \times 5}{6 \times 10^{-5}} \approx 1.7 \times 10^5 \end{aligned}$$

(2) k 级亮环的半角宽度公式为

$$\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{2\pi n h \sin\theta_k} \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

由此算出 $\theta_k \approx 1^\circ$ 时, 半角宽度为

$$\Delta\theta_k \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx 0.45''$$

可见亮环非常细锐。

(3) 色分辨本领

$$-\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k_0 \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

$$\approx 2.6 \times 10^7$$

可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda \approx \frac{1}{2.6 \times 10^7} \lambda \approx 2.3 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

(4) 法-珀仪作为一个无源谐振腔具有选频作用, 所选纵模(频率)间隔为

$$\Delta\nu = \frac{c}{2nh} \approx 3 \times 10^9 \text{ Hz}$$

白光的波长范围为 $4000\text{\AA} - 7600\text{\AA}$, 相应的光频范围为 $\nu_m = 4.0 \times 10^{14} \text{ Hz} - \nu_M = 7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$, 在此范围内包含的纵模数目(最强的谱线数目)为

$$\Delta N = \frac{\nu_M - \nu_m}{\Delta\nu} \approx \frac{3.5 \times 10^{14}}{3 \times 10^9} \\ \approx 1.2 \times 10^5 \quad (\text{条})$$

每条谱线宽度为

$$\delta\nu = \frac{c}{2\pi nh} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} \Delta\nu \\ \approx 6.4 \times 10^{-3} \Delta\nu \\ \approx 1.9 \times 10^7 \text{ Hz} = 19 \text{ MHz}$$

换算为 $\lambda = 0.55\mu\text{m}$ 附近的波长线宽为

$$\delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{c} \delta\nu \approx 1.9 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

值得提出的是, 用频率间隔 $\Delta\nu$ 或 $\delta\nu$ 来计算法-珀腔的选频性能较为省事, 避开了入射光频(或波长)的影响, 突出了器件参数 h , R 的作用。

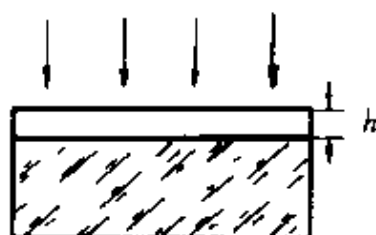
(5) 从以上纵模间隔 $\Delta\nu$ 公式看出, $\Delta\nu \propto 1/h$, 故腔长的微小改变量都将引起纵模间隔 $\Delta\nu$ 的改变, 即使在中心波长被稳住的情况下, 此时也必将引起两侧谱线频移, 频移量

$$\begin{aligned}\delta(\Delta\nu) &= \delta\left(\frac{c}{2nh}\right) = \frac{c}{2nh} \cdot \frac{\delta\lambda}{h} \\ &\approx (3 \times 10^9) \times (10^{-5}) \text{ Hz} \\ &= 3 \times 10^4 \text{ Hz}\end{aligned}$$

换算为 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ 附近的波长漂移量为

$$\delta(\Delta\lambda) \approx \frac{\lambda^2}{c} \delta(\Delta\nu) \approx 3 \times 10^{-7} \text{ \AA}$$

* 4. 利用多光束干涉可以制成一种干涉滤光片。如附图，在很平的玻璃片上镀一层银，在银面上加一层透明膜，例如水晶石（ $3\text{NaF} \cdot \text{AlF}_6$ ），其上再镀一层银。于是两个银面之间形成一个膜层，产生多光束干涉。设



题 4 图

银面的反射率 $R = 0.96$ ，透明膜的折射率为 1.55，膜厚 $h = 4 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ，平行光正入射。问：

（1）在可见光范围内，透射最强的谱线有几条，它们的光波长为多少？

（2）每条谱线的宽度为多少？

解 （1）先算纵模频率间隔

$$\Delta\nu = \frac{c}{2nh} \approx 2.4 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

再算可见光频段内包含的纵模个数（即透射最强的谱线条数）

$$\Delta N = \frac{3.5 \times 10^{14}}{2.4 \times 10^{14}} \approx 1.5 \text{ (条)}$$

鉴于目前谱线为数很少，不妨算出谱线波长的具体数值。为此，令 $\lambda_m = 4000 \text{ \AA}$ ，算出

$$k_M = \frac{2nh}{\lambda_m} = 3.1$$

令 $\lambda_M = 7600 \text{Å}$ ，算出

$$k_m = \frac{2\pi h}{\lambda_M} = 1.6$$

因此在可见光范围内，只能在 1.6—3.1 之间取可能的整数值

$$k = 2, 3$$

相应的最强谱线波长为

$$\lambda = \frac{2\pi h}{2} \approx 6200 \text{Å}$$

$$\lambda' = \frac{2\pi h}{3} \approx 4133 \text{Å}$$

(2) 上述两条谱线的宽度分别为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{\pi k} \frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{6200}{2\pi} \frac{0.04}{\sqrt{0.96}} \approx 40.3 \text{Å}$$

$$\delta\lambda' = \frac{4133}{3\pi} \frac{0.04}{\sqrt{0.96}} \approx 17.9 \text{Å}$$

• 5. 如果平行膜层两侧的折射率不等 [见附图(a)]，设入射光强为 I_0 。

(1) 导出多光束干涉后形成的反射光强 I_R 和透射光强 I_T 公式；

(2) 证明只有同时满足以下三个条件时，才能使波长为 λ 的正入射光完全透过 ($I_R = 0$)：a) $n_3 > n_2 > n_1$ ，b) $n_2 h = \lambda/4$ ，c) $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ 。

解 (1) 设上下界面单次反射或透射的振幅反射率或振幅透射率如图(b)。则反射多光束的复振幅系列为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_1 &= Ar_1 \\ \widetilde{U}_2 &= At_1 t_1' r_2 e^{i\phi} \\ \widetilde{U}_3 &= At_1 t_1' r_2^2 r_1' e^{i2\phi} \\ \widetilde{U}_4 &= At_1 t_1' r_2^3 r_1' e^{i3\phi} \\ &\dots\dots\end{aligned}$$