第14卷 第2期　　兰州铁道学院学报　　Vol. 14 No. 2
1995年6月　　JOURNAL OF LANZHOU RAILWAY INSTITUTE　　Jun. 1995

锁具装箱的组合算法①

余 兴　　韩仁忠

(兰州铁道学院运输系,兰州 730070)　(兰州铁道学院电信系,兰州 730070)

张宇宁

(兰州铁道学院土木系,兰州 730070)

摘 要 本文讨论锁具装箱问题.通过对锁具特征及其排列组合方式与顾客抱怨程度关系的分析,针对提出的问题,分别建立了数学模型.运用概率论、组合论及计算机搜索给出了相应的结果.

关键词 锁具;装箱;组合算法;概率

分类号 O122.4,O157.5,O211.67

1 问题的提出

锁具的生产工艺主要由槽高决定.实验表明,对于有5个槽,槽深有六种选择的锁具必须满足两个条件:(一)至少有3种不同的槽深,(二)相邻两个槽的高差不能为5.生产上将满足上面两个条件的所有互不相同的锁具称为一批.在当前工艺下,还有如下试验结果:若二把锁具相对应的5个槽有四个相同,另外一个高差为1,则锁具可能互开,否则锁具一定不互开.

鉴于以上情况,若采取随机装箱的办法,不同箱中锁具互开的现象必然很大.本文就锁具的装箱及顾客的抱怨程度进行分析,取得了较为理想的结果.

2 模型假设及说明

假定在同一批锁具中,若两把钥匙相对应的五个槽的高度中有四个相同,另外一个槽高差为1,则可能互开,其可能互开的概率为P.

记$\vec{A}_i(X_{i1},X_{i2},X_{i3},X_{i4},X_{i5})$为锁具向量.其中$X_{im}$为锁具第$m$个槽的高,$m=1,2,3,4,5$.

不可互开序列长度——某一锁具序列中,若从第i箱起至第$i+K$箱($K\in N$),任意二锁具均不可互开,而至第$i+K+1$箱则一定出现互开现象,则称K为第i箱的不可互开序列长度,记作$d_i=K$.

3 模型的建立与求解

3.1 一批锁具的个数及箱数求解[1,2]

收稿日期:1995-03-14

①本文作者为全国大学生数学建模竞赛二等奖获得者(教练 俞建宁副教授)

令

P_1：至少有3个不同数组成的槽高组合的集合.

P_2：相邻槽高差不为5的槽高组合的集合.

Q_i：第i位和第$i+1$位的数为(1,6)或(6,1)的槽高组合的集合.

一批锁具的个数为：

$|P_1 \cap P_2| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \cup P_2|$

(1) $|P_1| = 6^5 - 6 - C_6^2 \sum_{i=1}^{4} 2^i = 7\ 320$

(2) $|P_2| = |\overline{\bigcup_{i=1}^{4} Q_i}| = 6^5 - |\bigcup_{i=1}^{4} Q_i|$

而$|\bigcup_{i=1}^{4} Q_i| = \sum_{i=1}^{4} |Q_i| - \sum_{i,j=1,i\neq j}^{4} |Q_i \cap Q_j| + \sum_{1\leqslant i<j<K\leqslant 4} |Q_i \cap Q_j \cap Q_K| - \sum_{1\leqslant i<j<K<m\leqslant 4} |Q_i \cap Q_j \cap Q_K \cap Q_m|$

可计算得$|\bigcup_{i=1}^{4} Q_i| = 1\ 470$

$\therefore |P_2| = 6^5 - 1\ 470 = 6\ 306$

(3) $|P_1 \cup P_2| = 6^5 - |\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2| = 6^5 - 30 = 7\ 746$

由(1)、(2)、(3)可得

$|P_1 \cap P_2| = 5\ 880$(把)

用计算机对各种槽高组合进行全搜索，结果表明上述结论完全正确.

3.2　装箱方案及销售方案

3.2.1　锁具向量分析及函数构造[3]

结论1　对任意合格的锁具向量$\vec{A}_i(X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4}, X_{i5})$，有$\sum_{m=1}^{5} X_{im} \in [8,27]$

结论2　对任意二个合格的锁具向量$\vec{A}_i, \vec{A}_j$，其可互开的充要条件是$\sum_{m=1}^{5} |X_{im} - X_{jm}| = 1$

由以上两条结构可以构造函数$f(\vec{A}_i) = \sum_{m=1}^{5} X_{im}$其中$i \in [1, 5\ 880]$，$f(\vec{A}_i) \in [8,27]$. i，$f(\vec{A}_i) \in N$

对任意两个锁具向量$\vec{A}_i, \vec{A}_j (i \neq j)$，有且仅有以下3种情况：

① $|f(\overline{A}_i) - f(\overline{A}_i)| = 0$

② $|f(\overline{A}_i) - f(\overline{A}_j)| = 1$

③ $|f(\overline{A}_i) - f(\overline{A}_j)| \geqslant 2$

由上面的结论可知，只有满足②式的锁具才可能互开. 以$f(\overline{A}_i)$值为标准，利用计算机对样本空间进行分组.

分组结果如下表所示：

组值	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
组号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
个数	20	50	120	162	251	322	405	508	539	563	563	539	508	405	322	251	162	120	50	20

并且有如下结论:组内任意锁具不互开;任意非相邻组中锁具不互开;任意相邻组中锁具可能互开.

3.2.2 装箱方案及销售方案

3.2.2.1 装箱方案及销售方案

对 20 个组排列后装箱,装箱方案应满足条件:

$$D = \max\{\min(d_i) \mid \prod_0 \in \prod\} i \in [1,5\,880]$$

其中,$\prod$ 为排列集合

由于不同的锁具多达 5 880 种,做全排列进行比较极为困难.笔者认为最优排列应具有以下 3 个特点:

① d_i 的分布比较均匀,即波动幅度小

② $\max(d_i)$ 与 $\min(d_i)$ 相差不应太大

③ $\max(d_i)$ 应尽可能的大

对锁具分组后进行排列,容易找到最大的 d_i 为 49 箱,其排列如下(数字代表组号):

1,3,5,…,19,2,4,6,…,20,1,3,5,…

在以上排列中可以得到最小的 d_i 为 35 箱,其具体结果如下(仅列出关键箱):

$d(1)=49$	$d(3)=47$	$d(7)=43$	$d(14)=39$
$d(23)=35$	$d(32)=35$	$d(41)=35$	$d(46)=39$
$d(49)=43$	$d(50)=49$	$d(53)=46$	$d(58)=43$
$d(67)=38$	$d(76)=36$	$d(85)=36$	$d(92)=38$
$d(96)=43$	$d(97)=47$	$d(98)=46$	

(关键箱:同一箱中锁具分别属于两个组)

对于以上结果,笔者认为大体符合最优排列的要求.

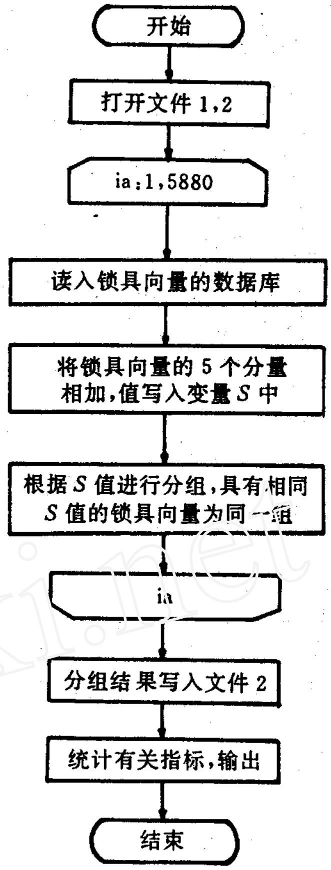

图 1　程序框架图

3.2.2.2 销售方案

(1)按上述排列顺序每 60 个装一箱,并依次对箱编号,按顺序存放,在同一批中的第 1 箱,第 49 箱,第 50 箱,第 98 箱标上“*”记号,如下所示(数字代表箱号):

1*,2,3,…,48,49*,50*,51,52,…,97,98*,1*,2,…

①当顾客的需求量不超过 35 箱时,顺序取货。

②当顾客的需求量在 36 到 49 箱之间时,截取“*”号之间的箱段取货,段内残余的货箱另行处理.

③当顾客的需求量超过 49 箱时,同①法取货.

(2)在方案(1)中,$\max(d_i)$和 $\min(d_i)$相差较大,这是由于各组元素不等和奇、偶组并存的原因.若分开奇偶组,即做如下排列(数字为组号):

排列 1:1,3,5,…,19,1,3,5,…,19

排列 2:2,4,6,…,20,2,4,6,…,20

在仓库中划分两个区位,一个区存放一种排列并按 60 个装一箱存放,则各区位中只有对

应箱中的对应锁才能互开，即 d_i 恒为 49，当顾客来取货时，在某一区中顺序取货即可.

3.3 顾客抱怨程度定量分析[4]

符号说明：

S：样本空间容量，即一批中锁的个数.

W：一批锁具中可能互开的锁具对数

n 元集：含有 n 个元素的集合

V_n：任一 n 元集

K_V：在 n 元集 V 中的可能互开的锁具对数

Z_n：所有 n 元集的集合

Y：从 Z_n 中任取一个 n 元集的随机实验

X_n：购买 n 把锁具，出现可能互开的锁具的随机事件

$\{X_n=r\}$：购买 n 把锁具，出现 r 对可能互开的随机事件.

笔者在程序 HK1.FOR(略)中给出了 W 为 22 778，并且有如下定理：

对于所有 $V_n\subset Z_n$，合格的锁具对数为 $W\cdot C_{s-2}^{n-2}$，即 $\sum\limits_{V_n\in Z_n} = W\cdot C_{s-2}^{n-2}$

在 Y 发生的条件下，$\{X_n=r\}$服从二项分布. 设$\{X_n=r\}$发生的概率为 P_0，则

$P(\{X_n=r\}|Y=V_n)=C_{K_v}^{r}P_0^r(1-P_0)^{K_v-r}$

而 Y 可以用古典概率来衡量

即：$P(Y=V_n)=1/C_{5\,880}^{n}$

由全概率公式有

$$P(X_n=r)=\sum_{V_n\in Z_n}P(\{X_n=r\}|Y=V_n]\cdot P(Y=V_n)$$

$$=\frac{1}{C_{5\,880}^{n}}\sum_{V_n\in Z_n}C_{K_v}^{r}P_0^r(1-P_0)^{K_v-r}$$

$C_{K_v}^{r}P_0^r(1-P_0)^{K_v-r}$ 为对应于每个 r 的概率，故

$$\sum_{r\geqslant 0}r\cdot C_{K_v}^{r}P_0^r(1-P_0)^{K_v-r}=\sum_{r\geqslant 0}r\cdot P(X_n=r)=K_V\cdot P_0$$

事件 X_n 的数学期望

$$E(X_n)=\sum_{r\geqslant 0}r\cdot P(X_n=r)=\frac{1}{C_{5880}^{n}}\sum_{V_n\in Z_n}\sum_{r\geqslant 0}rC_{K_v}^{r}P_0^r(1-P_0)^{K_V-r}$$

$$=\frac{1}{C_{5\,880}^{n}}P_0\sum_{V_n\in Z_n}K_V=\frac{1}{C_{5\,880}^{n}}22\,778C_{5\,880-2}^{n-2}\cdot P_0$$

$$\doteq 6.59\times 10^{-4}n(n-1)P_0$$

取 $P_0=0.6,0.7,\cdots,1.0$，作 $E(X_n)$曲线.

结果表明：当 P_0 一定时，顾客购买量 n 越大，出现互开的机率也就越大；当 n 一定时，P_0 越大，出现互开的机率也越大.

所以 $E(X_n)$可以定量地衡量顾客的抱怨程度. 由于可以得到顾客的抱怨程度函数

$$G(n)=6.59\times 10^{-4}\cdot n(n-1)P_0$$

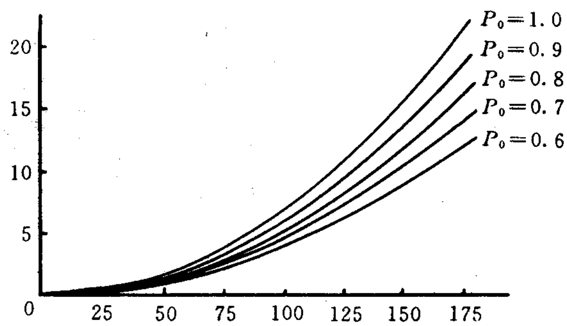

图 2　$E(X_n)$曲线

可见,采取随机取锁,随机装箱的方法时,顾客的抱怨程度很大,而采用笔者的组织方法将大大减少顾客的抱怨程度.

参　考　文　献

1　天津大学概率统计教研室.应用概率统计.天津:天津大学出版社,1990.10～38

2　石纯一等.数理逻辑与集合论.北京:清华大学出版社,1990.171～195

3　安希忠等.实用多元统计方法.吉林:吉林科学技术出版社,1992.115～141

4　郭绍建等.概率统计与随机过程.北京:航空工业出版社,1993.171～195

5　胡全栓.Fortran77 与应用软件开发方法.北京:化学工业出版社,1991.10～38

The Problem of Putting Locks into Boxes

Yu Xing

(Dept. of Transportation Management, Lanzhou Railway Institute, Lanzhou　730070)

Han Shizhong

(Dept. of Telecommunication & Autocontrol, Lanzhou Railway Institute, Lanzhou　730070)

Zhang Yuning

(Dept. of Civil Engineering, Lanzhou Railway Institute, Lanzhou　730070)

Abstract　This article discussed some problems about putting locks into boxes. After analysing the relation between the mass customers' complaining extent, the characteristics of the locks and the queue of the locks, several mathmatical models are presented according to the questions of the test, by combinating the probability theory and the assembling theory. The answers were given.

Key words　locks; putting; assembling calculation; probability

责任编辑:边际