Méthodes Directes : systèmes linéaires $\boxed{Ax=b}$

Méthode	but	Conditions	Procédure
Gauss	$Ax=b \Leftrightarrow MAx=Mb$ MA : triangulaire supérieure $M=E_{n-1}P_{n-1}\cdots E_2P_2E_1P_1$ $\det(A)=(-1)^p\det(MA)$ p : nbr de permutations	A inversible	① Élimination (combinaisons linéaires) $[A\|b] \xrightarrow{l_2\leftrightarrow l_1} [P_iA\|P_ib] \sim$ $\begin{cases} l_1\leftarrow l_1 \\ l_2\leftarrow l_2-a\,l_1 \\ l_3\leftarrow l_3-b\,l_1\end{cases}$ $[E_iP_iA\|E_iP_ib]$ $P_i=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $E_i=\begin{pmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\-b&0&1\end{pmatrix}$ ② Résoudre $MAx=Mb$ par remontée
LU	$A=LU$ L : triang. inférieure U : triang. supérieure	$\forall k\in[\![1,n]\!]$: $\Delta_k\neq 0$ (Pas de permutation dans l'élimination de Gauss)	① Élimination de Gauss : $MAx=Mb$ ② $L=M^{-1}=E_1^{-1}.E_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\-b&0&1\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-c&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}$ $U=MA$ (Matrice après élimination de Gauss) ③ $Ax=b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y}=b \Leftrightarrow \begin{cases}Ly=b\\Ux=y\end{cases}$
PLU	$PA=LU$ P : matrice de permutation (Identité avec échange de lignes)	(On a effectué des permutations dans l'élimination de Gauss)	① Élimination de Gauss ② Détermination de P, L, U (gérer les lignes permutées) ③ $\underbrace{P.A}_{LU}x=P.b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y}=Pb \Leftrightarrow \begin{cases}Ly=Pb\\Ux=y\end{cases}$

Méthode	but	Conditions	Procédure
Cholesky	$A = C \cdot {}^tC$ C: triang. inférieure ${}^tC$: triang. supérieure	i/ A est définie positive $\left(\begin{array}{l}\forall k \in [\![1,n]\!] \\ \Delta_k > 0\end{array}\right)$ ii/ A symétrique	① Factorisation (Calcul de C): * Utilisant l'identification * Utilisant la factorisation LU $C = L\Lambda$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}$ ② $Ax = b \Leftrightarrow C \cdot \underbrace{{}^tC x}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} C y = b \\ {}^tC x = y \end{cases}$
QR	$A = Q \cdot R$ Q: orthogonale $(Q^{-1} = {}^tQ)$ R: triang. supérieure à diagonale positive $\lvert \det A \rvert = \lvert \det R \rvert$	Toujours (A inversible) ↳ unique	① Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt: $Q = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left(\begin{array}{c\|c\|c\|c} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{array}\right) \end{array}$, $R = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left(\begin{array}{c\|c\|c\|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{array}\right) \end{array}$, $A = \left(\begin{array}{c\|c\|c\|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}\right)$ itération 1: $\begin{cases} r_{11} = \lVert a_1 \rVert_2 \\ q_1 = \dfrac{a_1}{r_{11}} \end{cases}$ Autres itérations (3 par exemple): $\begin{cases} r_{13} = \langle q_1, a_3 \rangle, \ r_{23} = \langle q_2, a_3 \rangle \\ \tilde{a}_3 = a_3 - (r_{13} \cdot q_1 + r_{23} \cdot q_2) \\ r_{33} = \lVert \tilde{a}_3 \rVert_2, \ q_3 = \dfrac{\tilde{a}_3}{r_{33}} \end{cases}$ ② $Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^{-1} b \Leftrightarrow Rx = {}^tQ b$

Méthodes itératives : Système linéaires $\boxed{AX=b}$

On pose $A = M - N$, $AX = b \Leftrightarrow (M-N)X = b \Leftrightarrow MX = NX + b \Leftrightarrow X = \underbrace{M^{-1}N}_{\mathcal{L}} X + M^{-1}b$

$\mathcal{L}$: matrice d'itération

M inversible

$\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite :

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = M^{-1}N X^{(k)} + M^{-1}b \\ X^{(0)} \text{ vecteur initial} \end{cases}$$

Alors

si $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge

alors converge vers X

Rappel :

* $\rho(\mathcal{L}) = \max\{|\text{valeurs propres}|\}$
* $\|\mathcal{L}\|_1 = \max\{|\text{sommes des colonnes}|\}$
* $\|\mathcal{L}\|_\infty = \max\{|\text{sommes des lignes}|\}$

Conditions de Convergence :

CNS :

$$\left(X^{(k)}\right)_k \text{ CV} \Leftrightarrow \rho(M^{-1}\cdot N) < 1$$

CS :

$$\|M^{-1}\cdot N\| < 1 \Rightarrow \left(X^{k}\right)_k \text{ CV}$$

$$\begin{rcases} \text{i/ } A \text{ symétrique} \\ \text{ii/ } A \text{ définie positive} \\ \text{iii/ } {}^tM + N \text{ définie positive} \end{rcases} \Rightarrow \left(X^{(k)}\right)_k \text{ CV}$$

Vitesse de convergence :

$$v = \frac{1}{\rho(M^{-1}\cdot N)}$$

Conditionnement :

$$\text{Cond}(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$$

Estimation de l'erreur :

* $\|X^{(k)} - X\| \leq \dfrac{\|\mathcal{L}\|}{1 - \|\mathcal{L}\|} \underbrace{\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|}_{\leq \varepsilon}$
* $\|X^{(k)} - X\| \leq \dfrac{\text{Cond}(A)}{\|A\|} \underbrace{\|AX^{(k)} - b\|}_{\varepsilon}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = D-E-F, \quad D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode	M	N	Conditions suffisantes	
Jacobi	$M=D$ $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$	$N=E+F$ $\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix}$	A à diagonale strictement dominante	i/ A symétrique ii/ A définie positive iii/ $2D-A$ définie positive
Gauss-Seidel	$M=D-E$ $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	$N=F$ $\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	A à diagonale strictement dominante	i/ A symétrique ii/ A définie positive
Relaxation SOR $0<w<2$	$M=\frac{1}{w}D-E$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{w}a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & \frac{1}{w}a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \frac{1}{w}a_{33} \end{pmatrix}$	$N=F-\left(1-\frac{1}{w}\right)D$ $\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{w}-1\right)a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & \left(\frac{1}{w}-1\right)a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{w}-1\right)a_{33} \end{pmatrix}$	i/ A à diagonale strictement dominante ii/ $0<w\leq 1$	i/ A symétrique ii/ A définie positive iii/ $0<w<2$

A tridiagonale

$$\rho(\mathcal{L}_{GS}) = \left(\rho(\mathcal{L}_J)\right)^2$$

GS plus rapide

Si les valeurs propres sont réels

w_0 optimale :

$$w_0 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\rho(\mathcal{L}_J)\right)^2}}, \quad \rho(\mathcal{L}_{w_0}) = w_0-1$$

Remarques :

* ${}^tA\,AX = {}^tA\,b$ converge avec GS
* $X_{SOR}^{(k+1)} = X_{SOR}^{(k)} + w\left(X_{GS}^{(k+1)} - X_{SOR}^{(k)}\right)$

Jacobi et GS :

Si A est tridiagonale

Alors i/ Jacobi et GS cv ou div simultanément

ii/ $\rho(\mathcal{L}_{GS}) = \left(\rho(\mathcal{L}_J)\right)^2$

GS est plus rapide

Jacobi et SOR :

Si i/ A est tridiagonale

ii/ les valeurs propres de A sont réels

Alors i/ Jacobi et SOR cv ou div simultanément

ii/ w_0 optimal : $w_0 = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\rho(\mathcal{L}_J)\right)^2}}$, $\rho(\mathcal{L}_{w_0}) = w_0 - 1$

Remarques :

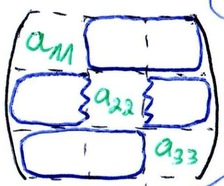
* ${}^tAAX = {}^tAb$ converge avec GS
* $X_{SOR}^{(k+1)} = X_{SOR}^{(k)} + w\left(X_{GS}^{(k+1)} - X_{SOR}^{(k)}\right)$

Valeurs et Vecteurs Propres

Localisation des Valeurs Propres :

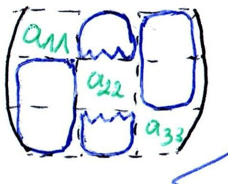
Théorème de Gershgörin-Hadamard :

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{R},\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$



$$Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

$$C_j = \left\{ z \in \mathbb{R},\ |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$



$$Sp(A) \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

Méthodes Directes : Krylov

1. $P_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$
2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton : $P_A(A) = 0$
3. d'où : $a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} = (-1)^{n-1} A^n$
4. $\forall v \in \mathbb{R}^n$: $a_0 v + a_1 A v + \dots + a_{n-1} A^{n-1} v = (-1)^{n-1} A^n v$
5. On choisit un vecteur initial v
6. On résout le système linéaire

Méthodes itératives partielles :

Méthode	Conditions	Itération k	Résultat
Puissance itérée	i/ A est diagonalisable (CS : A symétrique) ii/ la VP dominante est simple et unique (CS : A strictement positive)	$X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ est arbitraire $q^{(k-1)} = \frac{1}{\lVert X^{(k-1)} \rVert_2} \cdot X^{(k-1)}$ $X^{(k)} = A \cdot q^{(k-1)}$	Permet de calculer VP dominante $\lambda = \lim_{k \to \infty} \alpha^{(k-1)}$, $\alpha^{(k-1)} = {}^t X^{(k)} \cdot q^{(k-1)}$ $V = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{\lambda}{\lvert \lambda \rvert} \right)^{k-1} \cdot q^{(k-1)}$
Puissance inverse	i/ A^{-1} diagonalisable $\Leftrightarrow$ A diagonalisable ii/ la VP la plus petite en module est simple et unique	Même procédure utilisant A^{-1}	VP la plus petite en module de A $= \frac{1}{\text{VP dominante de } A^{-1}}$

Méthodes itératives globales :

Méthode	Conditions	Itération k	Résultat (cv)
Jacobi classique avec Rotation de Givens	A symétrique On pose $A^{(0)} = A$	$A^{(k-1)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ \\ q \end{array} & \begin{pmatrix} a_{pp} & \boxed{a_{pq}} \\ & \\ & a_{qq} \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow Q_{p,q} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ \\ q \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & & 1 \ 1 \ 1 & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ ① On choisit (p,q) avec $p<q$ et $\|a_{pq}\|$ est le plus grand ② $\beta = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ ③ $t = -\beta \pm \sqrt{\beta^2+1}$ $(\beta \gtrless 0)$ ④ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$, $\sin\theta = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ ⑤ $Q^{(k)} = Q_{p,q}$ ⑥ $A^{(k)} = {}^tQ^{(k)} . A^{(k-1)} . Q^{(k)}$	$\left(A^{(k)}\right)_k$ converge vers une matrice diagonale D $\begin{cases} D = {}^tQ . A . Q \\ Q = Q^{(1)} Q^{(2)} \dots Q^{(k)} \end{cases}$ * Les valeurs propres λ : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ * Les vecteurs propres V : $Q = \left(V_1 \middle\| V_2 \middle\| \dots \middle\| V_n\right)$
QR	i/ A symétrique ii/ A définie positive	On pose $A_1 = A$ ① $A_{k-1} = Q_{k-1} R_{k-1}$ ② $A_k = R_{k-1} Q_{k-1}$	$(A_k)_k \rightsquigarrow$ matrice diagonale * λ : les élt diagonaux de A_k * V : les colonnes de $Q_1 Q_2 \dots Q_{k-1}$
LR	i/ Les VP de A sont réels et distincts en valeur absolue ii/ toutes les A_k admettent une factorisation LU	On pose $A_1 = A$ ① $A_{k-1} = L_{k-1} U_{k-1}$ ② $A_k = U_{k-1} L_{k-1}$	$(A_k)_k \rightsquigarrow$ matrice triangulaire supérieur * λ : les éléments diagonaux de A_k * V : Pour chaque λ : ① On résout $(A_k - \lambda I_n) X = 0$ ② donc X vecteur propre de A_k ③ $V = P.X$ vecteur propre de A avec $P = L_1 L_2 \dots L_{k-1}$

Équations non linéaires

I Méthode de Dichotomie :

i/ f admet une seule racine sur $[a,b]$

ii/ f continue sur $[a,b]$

iii/ $f(a)f(b) < 0$

itération	a	r_n	b	$f(a)$	$f(r_n)$	$f(b)$	$\frac{b-a}{2}$

Estimation de l'erreur : $|r_n - r| \leq \frac{b-a}{2^n}$

II Méthode du Point Fixe :

$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x$

g fonction d'itération

$\begin{cases} r_0 \in [a,b] \\ r_{n+1} = g(r_n) \end{cases}$

Théorème de la fonction contractante :

Le processus CV vers la racine r ssi
i/ $[a,b]$ fermé de $\mathbb{R}$
ii/ $g([a,b]) \subseteq [a,b]$
iii/ g fonction contractante sur $[a,b]$

Erreur d'approximation :

$$|r_n - r| \leq \frac{K^n}{1-K}|r_1 - r_0|$$

Fonction contractante :

$$\exists K \in [0,1[\,,\ \forall x,y \in [a,b] : |g(x)-g(y)| \leq K|x-y|$$

$$K = \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$$

Ordre de convergence $= k$:

$$g \in C^k,\quad g'(r) = g''(r) = \dots = g^{(k-1)}(r) = 0\ ,\quad g^{(k)}(r) \neq 0$$

III Méthode de Newton :

Fonction d'itération de Newton : $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Théorème de CV 1 :

$f \in C^2([a,b])$

i/ $f(a).f(b) < 0$

ii/ $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,b]$

iii/ $f''(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,b]$

iv/ $r_0 \in [a,b]$ tq $f(r_0)f''(r_0) > 0$

CV pour r_0 en particulier

Théorème de CV 2 :

$f \in C^2([a,b])$

i/ $f(a).f(b) < 0$

ii/ $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in [a,b]$

iii/ f'' ne change pas de signe sur $[a,b]$

iv/ $\left|\frac{f(c)}{f'(c)}\right| \leq b-a\ ,\ c \in \{a,b\}$

$|f'(c)| = \inf\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$

CV pour $\forall r_0 \in [a,b]$

Ordre de CV : au moins 2

Erreur : $|r_n - r| \sim |r_{n+1} - r_n|$

Interpolation Polynomiale de Lagrange

Formule	Base	Méthode
Résolution d'un système de Vandermonde	Canonique	$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & \cdots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & (x_n)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow P_n(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$
de Lagrange	de Lagrange	$P_n(X) = y_0 l_0(X) + y_1 l_1(X) + \cdots + y_n l_n(X)$, $l_k(X) = \dfrac{(X-x_0)\cdots(X-x_{k-1})(X-x_{k+1})\cdots(X-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$
des Différences Divisées (FDD)	Base 1 de Newton	$x_0 = \cdots \to f(x_0) = \cdots \to f[x_0, x_1] = \cdots \to f[x_0, x_1, x_2] = \cdots$; $x_1 = \cdots \to f(x_1) = \cdots \to f[x_1, x_2] = \cdots$; $x_2 = \cdots \to f(x_2) = \cdots$; $f[x_i] = f(x_i)$, $f[x_i, \ldots, x_j] = \dfrac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$; $P_2(X) = f[x_0] + f[x_0, x_1](X - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](X - x_0)(X - x_1)$
Différences Finies (FDF) Les pts d'interpolation sont équidistants	Base 2 de Newton	$x_0 = \cdots \to f_0 = \cdots \to \nabla f_0 = \cdots \to \nabla^2 f_0 = \cdots$; $x_1 = \cdots \to f_1 = \cdots \to \nabla f_1 = \cdots$; $x_2 = \cdots \to f_2 = \cdots$; $\nabla^0 f_i = f_i$, $\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_{i+1} - \nabla^{k-1} f_i$, $h = \text{pas}$, $S = \dfrac{X - x_0}{h}$, $\binom{S}{k} = \dfrac{S(S-1)\cdots(S-(k-1))}{k!}$; $P_2(X) = f_0 + \nabla f_0 \binom{S}{1} + \nabla^2 f_0 \binom{S}{2}$

Estimation de l'erreur d'approximation : $f \in C^{n+1}([a,b])$, $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$

* en un point : $\left| f(x) - P_n(x) \right| \leq \dfrac{1}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right| \cdot \left| (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \right|$

* globale : $\sup_{[a,b]} \left| f - P_n \right| \leq \dfrac{1}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right| \sup_{x \in [a,b]} \left| (x-x_0)\cdots(x-x_n) \right|$

Approximation de $f(x)$:

* $x \in [a,b]$: $f(x) \sim P_n(x)$

* $x \notin [a,b]$: extrapolation

Intégration Numérique

$$\boxed{I(f) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

I Formule simple de Newton-Cotes :

de degré n	$I_n(f) = (b-a)\left(B_0^n f(a) + B_1^n f(a+h) + B_2^n f(a+2h) + \dots\right)$ $h = \frac{b-a}{n}$
Trapèze	$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$
Simpson	$I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Estimation de l'erreur :

$$\left|I(f) - I_n(f)\right| \leq \frac{1}{n+1}(b-a)^{n+2} \sup_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right|$$

$$\leq \frac{\square}{\square} h^{\square} \sup_{[a,b]} \left|f^{(\square)}\right|$$

II Formule composite de Newton-Cotes :

$Z_0 \xleftrightarrow{H} Z_n$ — q intervalles

$Z_0 \xleftrightarrow{h} | \; | \dots | \; Z_n \; | \; | \dots | \; Z_{2n} \dots\dots Z_{qn}$

$\underbrace{\qquad}_{n \text{ intervalle}}$ $\underbrace{\qquad}_{n \text{ intervalle}}$

$\boxed{nq+1 \text{ valeurs}}$

Formule composite de Trapèze :

$Z_0 \xleftrightarrow{h=H} Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \dots\dots Z_{q-1} \quad Z_q$ $\quad \boxed{q+1 \text{ valeurs}}$

$$I_{1,q} = \frac{H}{2}\left[f(Z_0) + f(Z_q) + 2\left(f(Z_1) + f(Z_2) + \dots\right)\right]$$

Formule composite de Simpson :

$Z_0 \xleftrightarrow{H} Z_2$

$Z_0 \xleftrightarrow{h} Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \quad Z_4 \dots Z_{2q-1} \quad Z_{2q}$ $\quad \boxed{2q+1 \text{ val}}$

$$I_{2,q} = \frac{H}{6}\left[f(Z_0) + f(Z_{2q}) + 2\left(f(Z_2) + f(Z_4) + \dots\right) + 4\left(f(Z_1) + f(Z_3) + \dots\right)\right]$$

Estimation d'erreur :

$$\left|I(f) - I_{n,q}(f)\right| \leq q \cdot \frac{h^{\square}}{\square} \sup_{[a,b]} \left|f^{(\square)}\right|$$