Introduzione ai sistemi dinamici I

SciSNS-2017

18 ottobre 2018

Indice

1. Lezioni

1.1. Lezione del 09/10/2018 [Marmi]

Definizione 1.1 (gruppo)**.** Un gruppo è una coppia $\mathcal{G} \coloneqq (G, \star)$ dove G è un insieme e $\star\colon G \times G \to G$ è un'operazione binaria che gode delle seguenti proprietà

(i) *associativa*: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G,\ g_1 \star (g_2 \star g_3) = (g_1 \star g_2) \star g_3$;

(ii) *elemento neutro sinistro*: $\exists e \in G : \forall g \in G,\ g \star e = g$;

(iii) *inverso sinistro*: $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G : g \star g^{-1} = e$.

A partire da queste si mostra facilmente che l'elemento neutro destro è anche elemento neutro sinistro, l'inverso destro è anche inverso sinistro, che l'elemento neutro e l'inverso sono unici. Se non ci sono ambiguità circa l'operazione definita su G indicheremo più semplicemente il gruppo $\mathcal{G}$ facendo riferimento al solo insieme G.

Definizione 1.2 (sistema dinamico)**.** Un sistema dinamico è una terna $(\mathcal{G}, \mathcal{X}, \Phi)$ dove $\mathcal{G} \coloneqq (G, \star)$ è un (semi-)gruppo[1], $\mathcal{X}$ è uno spazio, cioè un insieme X dotato di una qualche struttura, e

$$\begin{aligned} \Phi\colon G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto \Phi(g, x) = \Phi_g(x) \end{aligned}$$

è un'applicazione tale che

(i) $\forall x \in X,\ \Phi_e(x) = x$ dove e è l'elemento neutro di G, cioè $\Phi_e = \mathrm{Id}_X$;

(ii) $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X,\ \Phi_{(g_1 \star g_2)}(x) = (\Phi_{g1} \circ \Phi_{g_2})(x)$ cioè $\Phi_{(g_1 \star g_2)} = \Phi_{g1} \circ \Phi_{g_2}$.

Più brevemente diciamo che un sistema dinamico è l'*azione* di un gruppo G su uno spazio X definita da una mappa Φ.

Nella maggior parte dei casi useremo come gruppo insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ con le usuali operazioni. Nei primi due casi parleremo di sistemi a *tempo discreto* mentre nell'ultimo di sistemi a *tempo continuo*. Come spazio $\mathcal{X}$ useremo spesso uno *spazio metrico compatto* (e.g. la sfera $\mathbb{S}^d$, il toro $\mathbb{T}^d$ o un intervallo chiuso $[a, b]$), uno *spazio di misura* o gli insiemi $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{C}$ con le usuali strutture. Se non ci sono ambiguità circa la struttura definita su X indicheremo più semplicemente lo spazio $\mathcal{X}$ facendo rifermento al solo insieme G.

Per quanto riguarda la mappa Φ osserviamo che per definizione $\Phi_g \in \mathrm{End}\,(X)$ ovvero è un *endomorfismo* su X. Tuttavia spesso penseremo a $\Phi_g \in \mathrm{Aut}\,(X)$ ovvero un *automorfismo* cioè un endomorfismo invertibile.

[1] Per *semigruppo* si intende una coppia $(G, \star)$ dove $\star$ è associativa.

Una tipo di sistema dinamico a tempo discreto di uso frequente è l'iterazione di una mappa da X in sé. Data $f \in \mathrm{End}\,(X)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $f^n := f \circ \cdots \circ f$ (f composta n volte) con la convenzione che $f^1 = f$ e $f^0 = \mathrm{Id}_X$. Se consideriamo $\mathbb{N}$ con l'operazione di addizione, l'applicazione Φ^f data da $\Phi^f_n(x) := f^n(x)$ definisce un sistema dinamico.
Se prendiamo $f \in \mathrm{Aut}\,(X)$ possiamo considerare la stessa costruzione usando come gruppo $\mathbb{Z}$ e definendo f^{-n} come l'inversa di f^n.
Nel seguito quando diremo che $f\colon X \to X$ è un sistema dinamico sottintenderemo la costruzione appena data nell'esempio seguente a meno di ulteriori precisazioni.

Esempio 1.1. Partendo dalla costruzione appena data possiamo prendere $X = [0, 1]$ e per $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x + \alpha \pmod 1$. Osserviamo che essendo f invertibile possiamo definire come sopra l'applicazione Φ su $\mathbb{Z}$. Il sistema così definito è un prototipo di *sistema periodico* se $\alpha \in \mathbb{Q}$ e di *sistema quasi-periodico* se $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Prendiamo come gruppo $\mathbb{R}$ o $[0, +\infty)$. In tale caso data l'applicazione $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ prende il nome di *flusso* o *semi-flusso* rispettivamente.

Un esempio di sistema dinamico a tempo continuo è dato da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) del primo ordine[2] autonoma

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

dove $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale. Se supponiamo che v sia di classe $\mathcal{C}^1$ allora abbiamo esistenza e unicità della soluzione `(e dipendenza continua dai parametri iniziali ??)`, cioè esiste $\tau > 0$ e un'unica funzione $\phi\colon [0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ tale che $\phi(0) = x_0$ e $\phi'(t) = v(\phi(0))$ per ogni $t \in [0, \tau)$.
Se supponiamo per esempio che v sia un'applicazione lineare $v(x) := Ax$ con $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ allora abbiamo che la soluzione è prolungabile a tutto l'asse reale e introducendo la nozione di esponenziale di una matrice[3] si può scrivere nella forma

$$\phi(t) = \exp\,(t\,A)\,x_0.$$

Definizione 1.3 (orbita e spazio delle orbite)**.** Data $f \in \mathrm{Aut}\,(X)$ e $\Phi^f : \mathbb{Z} \times X \to X$ definiamo orbita di $x \in X$ come

$$\mathcal{O}^f(x) := \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Le orbite definiscono una naturale relazione di equivalenza $x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : y = f^n(x) \Leftrightarrow y \in \mathcal{O}^f(x) \Leftrightarrow x \in \mathcal{O}^f(y)$. Chiamiamo lo spazio quoziente ${}^{X}\!/_{\sim}$ spazio delle orbite. `Topologia quoziente?`

1.1.1. Flussi vs tempo discreto: il pendolo semplice e la mappa standard

Solitamente siamo interessati al comportamento asintotico dell'azione di Φ e pertanto più essere utile rendere discreto un flusso continuo. Dato un flusso Φ_t con $t \in \mathbb{R}$ possiamo considerare la

[2] Di seguito considereremo quasi solo ODE del primo ordine in quanto equazioni differenziali di ordine superiore possono essere ricondotte a questa con il solito cambio di variabile a sistemi di ODE del primo ordine.

[3] Data $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ si pone

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

funzione $f = \Phi_\tau$ con $\tau > 0$ e la mappa $\Phi_n^f := f^{n/\tau}$ con $n \in \tau\mathbb{Z}$ che è un sistema dinamico a tempo discreto. Tuttavia bisogna osservare che la *discretizzazione* dell'equazione differenziale che definisce un sistema dinamico continuo non è un mero artificio algebrico e il sistema a tempo discreto ottenuto può differire in modo significativo dal *fotografare* un sistema continuo a tempi discreti.

Esempio 1.2 (pendolo semplice)**.** Consideriamo il sistema dinamico descritto dall'equazione differenziale del pendolo semplice ($g = 1$)

$$\ddot{x} = \sin x$$

che può essere portato nella forma della (1.1) ponendo $y = \dot{x}$ da cui

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin x \end{cases} \qquad \to \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \sin x \end{pmatrix}$$

dove $v(x, y) = (y, \sin x)$. Nel linguaggio della Definizione 1.2, $G := \mathbb{R}$, $X := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e $\Phi(t, (x, y)) := (\phi(t), \phi'(t))$ dove $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione differenziale.
$E = \frac{1}{2}y^2 + \cos x$ `integrale primo del moto e spazio delle fasi?`
A fissato *step* μ trasformiamo l'equazione differenziale del secondo ordine in [4]

$$x(t + \mu) - 2x(t) + x(t - \mu) = \mu^2 \sin(x(t)).$$

Posto ora $\varepsilon = \mu^2$, $x = x(t)$, $x' = x(t + \mu)$, $y = x(t) - x(t - \mu)$ e $y' = x(t + \mu) - x(t)$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x' = x + y' \\ y' = \varepsilon \sin x + y \end{cases}$$

che è la *mappa standard*.
`Commenti...`

1.2. Lezione del 10/10/2018

1.2.1. Introduzione

La Teoria della Misura nasce a inizio '900 per formalizzare la probabilità e per cercare di fondare una teoria dell'integrazione che risulti più efficace di quella di Riemann. Per alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, in particolare per gli intervalli limitati, abbiamo un concetto intuitivo di "misura", ovvero la lunghezza dell'intervallo:

$$\lambda\big([a, b]\big) = b - a.$$

L'obiettivo della teoria della misura è estendere questa nozione ad altri sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ in modo coerente, ovvero in modo da rispettare, ad esempio, la proprietà di additività:

$$A \cap B = \varnothing \implies \lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

---

[4]

$$\ddot{x}(t) \approx \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}(t - \mu)}{\mu} \approx \frac{\frac{x(t+\mu) - x(t)}{\mu} - \frac{x(t) - x(t-\mu)}{\mu}}{\mu} = \frac{x(t + \mu) - 2x(t) + x(t - \mu)}{\mu^2}$$

A. Appendice