

Introduzione ai sistemi dinamici I

SciSNS-2017

11 ottobre 2018

Quest'opera è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale. Per leggere una copia della licenza visita il sito web Quest'opera è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale. Per leggere una copia della licenza visita il sito web <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>.



Indice

1. Lezioni	1
1.1. Lezione del 09/10/2018 [Marmi]	1
1.2. Lezione del 10/10/2018	3
1.2.1. Introduzione	3
A. Appendice	5

1. Lezioni

1.1. Lezione del 09/10/2018 [Marmi]

Definizione 1.1 (gruppo). Un gruppo è una coppia $\mathcal{G} := (G, \star)$ dove G è un insieme e $\star: G \times G \rightarrow G$ è un'operazione binaria che gode delle seguenti proprietà

- (i) *associativa*: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, g_1 \star (g_2 \star g_3) = (g_1 \star g_2) \star g_3$;
- (ii) *elemento neutro sinistro*: $\exists e \in G : \forall g \in G, g \star e = g$;
- (iii) *inverso sinistro*: $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G : g \star g^{-1} = e$.

A partire da queste si mostra facilmente che l'elemento neutro destro è anche elemento neutro sinistro, l'inverso destro è anche inverso sinistro, che l'elemento neutro e l'inverso sono unici. Se non ci sono ambiguità circa l'operazione definita su G indicheremo più semplicemente il gruppo \mathcal{G} facendo riferimento al solo insieme G .

Definizione 1.2 (sistema dinamico). Un sistema dinamico è una terna $(\mathcal{G}, \mathcal{X}, \Phi)$ dove $\mathcal{G} := (G, \star)$ è un (semi-)gruppo¹, \mathcal{X} è uno spazio, cioè un insieme X dotato di una qualche struttura (per esempio una topologia), e

$$\begin{aligned}\Phi: G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \Phi(g, x) = \Phi_g(x)\end{aligned}$$

è un'applicazione tale che

- (i) $\forall x \in X, \Phi_e(x) = x$ dove e è l'elemento neutro di G , cioè $\Phi_e = \text{Id}_X$;
- (ii) $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X, \Phi_{(g_1 \star g_2)}(x) = (\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2})(x)$ cioè $\Phi_{(g_1 \star g_2)} = \Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2}$.

Più brevemente diciamo che un sistema dinamico è l'*azione* di un gruppo G su uno spazio X definita da una mappa Φ .

Nella maggior parte dei casi useremo come gruppo insiemi numerici \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{R} con le usuali operazioni. Nei primi due casi parleremo di sistemi a *tempo discreto* mentre nell'ultimo di sistemi a *tempo continuo*. Come spazio \mathcal{X} useremo spesso uno *spazio metrico compatto* (e.g. la sfera \mathbb{S}^d , il toro \mathbb{T}^d o un intervallo chiuso $[a, b]$), uno *spazio di misura* o gli insiemi \mathbb{R}^d e \mathbb{C} con le usuali strutture.

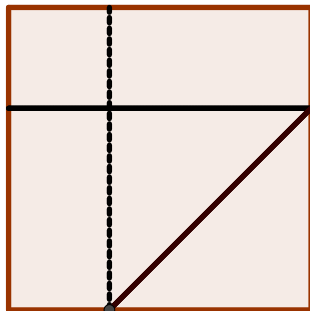
Per quanto riguarda la mappa Φ osserviamo che per definizione $\Phi_g \in \text{End}(X)$ ovvero è un *endomorfismo* su X . Tuttavia spesso penseremo a $\Phi_g \in \text{Aut}(X)$ ovvero un *automorfismo* cioè un endomorfismo invertibile.

¹Per *semigrupp* si intende una coppia (G, \star) dove \star è associativa.

Esempio 1.1. Sia $f \in \text{End}(X)$. Dato $n \in \mathbb{N}$ poniamo $f^n := f \circ \dots \circ f$ (f composta n volte) con la convenzione che $f^1 = f$ e $f^0 = \text{Id}_X$. Se consideriamo \mathbb{N} con l'operazione di addizione, l'applicazione Φ^f data da $\Phi_n^f(x) := f^n(x)$ definisce un sistema dinamico. Se prendiamo $f \in \text{Aut}(X)$ possiamo considerare la stessa costruzione usando come gruppo \mathbb{Z} e definendo f^{-n} come l'inversa di f^n .

Esempio 1.2. Partendo dalla costruzione appena data possiamo prendere $X = [0, 1]$ e per $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x + \alpha \pmod{1}$. Osserviamo che essendo f invertibile possiamo definire come sopra l'applicazione Φ su \mathbb{Z} . Il sistema così definito è un prototipo di *sistema periodico* se $\alpha \in \mathbb{Q}$ e di *sistema quasi-periodico* se $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

(0,1)



(0,0)

$(-\alpha, 0)$

(1,0)

Completare questo schifo.

Prendiamo come gruppo \mathbb{R} o $[0, +\infty)$. In tale caso data l'applicazione $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ prende il nome di *flusso* o *semi-flusso* rispettivamente.

Un esempio di sistema dinamico a tempo continuo è dato da un'equazione differenziale ordinaria (ODE) del primo ordine² autonoma

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

dove $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale. Se supponiamo che v sia di classe \mathcal{C}^1 allora abbiamo esistenza e unicità della soluzione (e **dipendenza continua dai parametri iniziali** ??), cioè esiste $\tau > 0$ e un'unica funzione $\phi: [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\phi(0) = x_0$ e $\phi'(t) = v(\phi(t))$ per ogni $t \in [0, \tau)$.

Se supponiamo per esempio che v sia un'applicazione lineare $v(x) := Ax$ con $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ allora abbiamo che la soluzione è prolungabile a tutto l'asse reale e introducendo la nozione di esponenziale di una matrice³ si può scrivere nella forma

$$\phi(t) = \exp(tA)x_0.$$

Definizione 1.3 (orbita e spazio delle orbite). Data $f \in \text{Aut}(X)$ e $\Phi^f: \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ definiamo orbita di $x \in X$ come

$$\mathcal{O}^f(x) := \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

²Di seguito considereremo quasi solo ODE del primo ordine in quanto equazioni differenziali di ordine superiore possono essere ricondotte a questa con il solito cambio di variabile a sistemi di ODE del primo ordine.

³Data $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ si pone

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Le orbite definiscono una naturale relazione di equivalenza $x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : y = f^n(x) \Leftrightarrow y \in \mathcal{O}^f(x) \Leftrightarrow x \in \mathcal{O}^f(y)$. Chiamiamo lo spazio quoziente X/\sim spazio delle orbite. **Topologia quoziente?**

Pendolo semplice...

1.2. Lezione del 10/10/2018

1.2.1. Introduzione

La Teoria della Misura nasce a inizio '900 per formalizzare la probabilità e per cercare di fondare una teoria dell'integrazione che risulti più efficace di quella di Riemann. Per alcuni sottoinsiemi di \mathbb{R} , in particolare per gli intervalli limitati, abbiamo un concetto intuitivo di "misura", ovvero la lunghezza dell'intervallo:

$$\lambda([a, b]) = b - a.$$

L'obiettivo della teoria della misura è estendere questa nozione ad altri sottoinsiemi di \mathbb{R} in modo coerente, ovvero in modo da rispettare, ad esempio, la proprietà di additività:

$$A \cap B = \emptyset \implies \lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

A. Appendice

