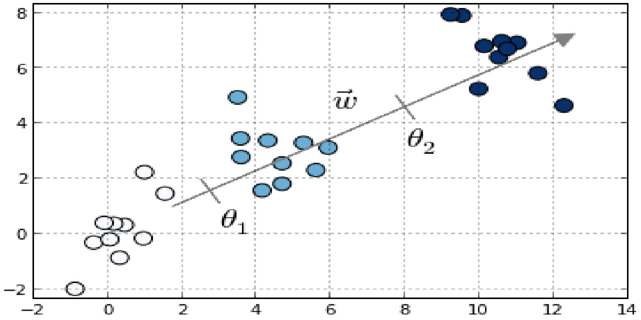
Ординальная версия логистической регрессии

- Ординальная классификация- это случай классификации, когда имеется несколько упорядоченных по какому-либо признаку классов. Фактически это гибрид классификации и регрессии. Также это гибрид бинарной и мультиклассовой классификации.



Взято с https://pythonhosted.org/mord/

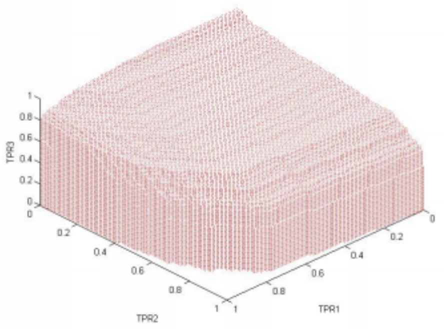
- Для данного случая, подобно случаю бинарной классификации, в модели рассчитывается один балл, который задаёт вероятности принадлежности к любому классу.
- В случае бинарной классификации вероятности принадлежности к положительному классу, большей 50% соответствуют положительные значения балла, отрицательному-классу-отрицательные значения. Т. е. каждому классу соответствует свой регион. Аналогично и в ординальной версии.
- Для задания n интервалов, соответствующих n классам в ординальной версии Логистической Регрессии используется n-1 порогов.

Ординальная версия логистической регрессии

- Для получения n-1 пределов необходимо определить соответствующие штрафные функции. В бинарном случае штрафная функция зависила от y*score.
- Переопределение y очевидно. Если данный порог разделяет классы 0...i и i+1...n, то для первых y будет равен -1, для вторых 1.
- Вместо score в случае бинарной классификации будет использоваться разница балла и порога.
- Чтобы понять как включить порог в функцию вероятности вернемся обратно к бинарному случаю. В бинарном случае порог один и используемый ранее балл- это разница классификационного балла и порога. Очевидно, что порог в бинарном случае это нулевой коэффициент(он же коэффициент сдвига). Отсюда следует:
  - В ординальной версии нам не нужны нулевые коэффициенты в формуле классификационного балла- их заменят пороговые значения.
  - Мы как прежде можем получать вероятности, подставляя в логистическую функцию разность балла и порога.
  - Для n-1 порогов мы можем таким образом рассчитать вероятности принадлежности классам в диапазонах от 1 до n включительно, от 2 до n включительно, от n до n включительно. Вычитая соседние вероятности друг из друга получаем вероятность принадлежности к отдельным классам.
- Существует два подхода объединения штрафных функций пределов в общую штрафную функцию: AT(All Threshold)- сумма штрафных функция всех пределов, IT(Immediate-Threshold)-сумма штрафных функций ограничивающих интервалы, соответствующие классам объектов.

Оценка дискриминационной способности в ординальных моделях

- Пусть у нас есть функция $f(x)$ возвращающая классификационный балл. Мы знаем что в бинарном случае $AUROC = \frac{1}{n_- \ n_+} \sum_{i=1}^{n_-} \sum_{j=1}^{n_+} I_{f(x_i)<f(x_j)}$
- Мы можем легко обобщить это выражение на ординальный случай
$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{r} n_k} \sum_{y_{j1}<\ldots<y_{jr}} I_{f(x_{j1})<\ldots<f(x_{jr})}$$
- Это выражение почти никогда не получается посчитать напрямую из-за непомерной вычислительной сложности, поэтому используется ряд его апроксимаций



$$Cons(f) = \frac{1}{r-1} \sum_{l=1}^{r-1} AUC_l(f)$$
$$AUC_l(f) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{l} n_i \sum_{j=l+1}^{n} n_j} \sum_{i:y_i \le l} \sum_{j:y_j > l} I_{f(x_i)<f(x_j)}$$

$$Ovo(f) = \frac{2}{r(r-1)} \sum_{l<k} AUC_{lk}(f)$$
$$AUC_{lk}(f) = \frac{1}{n_l n_k} \sum_{i:y_i=l} \sum_{j:y_j=k} I_{f(x_i)<f(x_j)}$$

$$Pairs(f) = \frac{1}{\sum_{k<l} n_k n_l} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1;y_i<y_j}^{n} I_{f(x_i)<f(x_j)}$$

Взято с http://dmip.webs.upv.es/ROCML2006/Papers/waegemanROCML06.pdf