重离子碰撞中的电磁场

GGP 介质的影响

艾鑫

三峡大学理学院

2016 年 10 月 3 日

目录

简介

场方程与形式解

简介

- 动机: 更加准确的描述重离子碰撞中的电磁场
- 背景: 我们之前已经计算了重离子碰撞中的电磁场, 但是没有考虑 QGP 介质对电磁场的影响, 即我们计算的是真空中的结果
- 问题: 在重离子碰撞后, 真空会被激发, 形成所谓的 QGP. 若 QGP 中存在电导率 σ 和手征磁导率 σ_χ, 电磁场如何计算?
- 方法: 采用格林函数法, 并假设 σ_χ 远小于 σ 的情况下, 推导点电荷在介质中的电磁场公式

Maxwell 方程

- 假设: 考虑一个无限大的均匀介质, 其导电性可以用一个恒定的电导率 σ 和手征磁导率 σ_χ 来描述
- 在这种情况下, 总电流有三个部分: 外部电流, 由电场引入的欧姆电流 $\sigma\mathbf{E}$, 由磁场引入的手征磁电流 $\sigma_\chi\mathbf{B}$
- Maxwell 方程为:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{ext}}}{\epsilon} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \partial_t\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ext}} + \sigma\mathbf{E} + \sigma_\chi\mathbf{B} \tag{4}$$

  其中 ρ_{ext} 和 $\mathbf{J}_{\text{ext}}$ 分别为外部电荷和外部电流密度
- 需要注意的是, 一般情况下, 电容率 (介电常数) $\epsilon(\omega) = 1 + i\sigma/\omega$ 依赖于频率

- 对(3)式和(4)式取旋度, 利用公式

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) - \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{5}$$

有:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= -\partial_t \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \\
\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\partial_t(\partial_t \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ext}} + \sigma \mathbf{E} + \sigma_\chi \mathbf{B}) \\
\frac{1}{\epsilon} \boldsymbol{\nabla} \rho_{\text{ext}} - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\partial_t^2 \mathbf{E} - \partial_t \mathbf{J}_{\text{ext}} - \sigma \partial_t \mathbf{E} + \sigma_\chi \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} \\
(\nabla^2 - \partial_t^2 - \sigma \partial_t)\mathbf{E} + \sigma_\chi \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon} \boldsymbol{\nabla} \rho_{\text{ext}} + \partial_t \mathbf{J}_{\text{ext}} \qquad (6)
\end{aligned}$$

同理有:

$$(\nabla^2 - \partial_t^2 - \sigma \partial_t)\mathbf{B} + \sigma_\chi \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J}_{\text{ext}} \tag{7}$$

- 我们发现, (6)和(7)满足同样的偏微分方程:

$$\hat{L}\mathbf{F}(t,\mathbf{x}) + \sigma_\chi \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{8}$$

其中 $\mathbf{F}(t,\mathbf{x})$ 表示 $\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{E}$. 偏微分算符 $\hat{L} = \nabla^2 - \partial_t^2 - \sigma\partial_t$

- 式(8)右边的 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 表示源项
- 我们可以用矩阵把(8)表示成分量形式:

$$\begin{pmatrix} \hat{L} & -\sigma_\chi\partial_z & \sigma_\chi\partial_y \\ \sigma_\chi\partial_z & \hat{L} & -\sigma_\chi\partial_x \\ -\sigma_\chi\partial_y & \sigma_\chi\partial_x & \hat{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}(t,\mathbf{x}) \tag{9}$$

- 为了求解上述的方程, 将坐标空间变换到动量空间:

$$\mathbf{F}(t,\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{F}(\omega,\mathbf{k}) \tag{10}$$

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{f}(\omega,\mathbf{k} \tag{11}$$

- 通过替换 $\partial_t \to -i\omega, \nabla \to i\mathbf{k}$, 动量空间的方程为:

$$\begin{pmatrix} L & -i\sigma_\chi k_z & i\sigma_\chi k_y \\ i\sigma_\chi k_z & L & -i\sigma_\chi k_x \\ -i\sigma_\chi k_y & i\sigma_\chi k_x & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} (\omega,\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} (\omega,\mathbf{k}) \tag{12}$$

其中 $L = \omega^2 + i\sigma\omega - k^2, k = |\mathbf{k}|$

- 可以把上式的系数矩阵写成更紧凑的形式:

$$M_{ij} = L\delta_{ij} - i\sigma_\chi \epsilon_{ijl} k_l \tag{13}$$

- 其行列式为:

$$\det M = L(L^2 - \sigma_\chi^2 k^2) \tag{14}$$

- 如果 $\det M \neq 0$, 我们可以得到 M 的逆矩阵:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} L^2 - \sigma_\chi^2 k_x^2 & iL\sigma_{chi} k_z - \sigma_\chi^2 k_x k_y & -iL\sigma_\chi k_y - \sigma_\chi^2 k_x k_z \\ -iL\sigma_\chi k_z - \sigma_\chi^2 k_x k_y & L^2 - \sigma_\chi^2 k_y^2 & iL\sigma_\chi k_x - \sigma_\chi^2 k_y k_z \\ iL\sigma_\chi k_y - \sigma_\chi^2 k_x k_z & -iL\sigma_\chi k_x - \sigma_\chi^2 k_y k_z & L^2 - \sigma_\chi^2 k_z^2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- 利用上式, 我们可以将 $\mathbf{F}(\omega,\mathbf{k})$ 解出:

$$\mathbf{F}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{1}{L^2-\sigma_\chi^2 k^2}[L\mathbf{f}(\omega,\mathbf{k})-i\sigma_\chi \mathbf{k}\times\mathbf{f}(\omega,\mathbf{k})]-\frac{\sigma_\chi^2}{L(L^2-\sigma_\chi^2 k^2)}\mathbf{k}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}(\omega,\mathbf{k})] \tag{16}$$

- 其中源项 $\mathbf{f}(\omega,\mathbf{k})$ 由下式给出:

$$\mathbf{f}(\omega,\mathbf{k}) = \begin{cases} -i\mathbf{k}\times\mathbf{J}_{\text{ext}}(\omega,\mathbf{k}), & \text{for } \mathbf{B} \\ i\mathbf{k}\frac{\rho_{\text{ext}}(\omega,\mathbf{k})}{1+i\sigma/\omega} - i\omega\mathbf{J}_{\text{ext}}(\omega,\mathbf{k}), & \text{for } \mathbf{E} \end{cases} \tag{17}$$

- 注意到, (16)式第二项 $\sim \sigma_\chi^2\mathbf{k}[\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}(\omega,\mathbf{k})]$, 对 $\mathbf{B}$ 来说是为零的, 但是对 $\mathbf{E}$ 来说, 并不为零. 对于 $\mathbf{E}$, 这一项正比于 $\sim [(L^2-\sigma_\chi^2 k^2)(1+i\sigma/\omega)]^{-1}$

- 我们可以从 $\mathbf{F}(\omega, \mathbf{k})$ 的极点 (poles), 得到电磁场集体模式 (collective modes) 的色散关系 $\omega(\mathbf{k})$
- 对于 $\mathbf{B}$, 有 $L^2 - \sigma_\chi^2 k^2 = 0$, 解得:

$$\omega_{s_1 s_2} = -i\sigma/2 + s_1\sqrt{k^2 + s_2 k\sigma_\chi - \sigma^2/4} \tag{18}$$

  其中 $s_1, s_2 = \pm 1$
- 对于 $\mathbf{E}$, 还有额外的极点: $\omega = -i\sigma$
- 这些极点给出了在没有外源情况下的场的集体模式, 其中 ω 和 $\mathbf{k}$ 是独立变量
- 当考虑外部电荷时, 色散关系由于 ω 和 $\mathbf{k}$ 的额外的关系, 将会被修改. 例如: 在下一节中, 我们将考虑一个沿 z 轴运动的点电荷, 这将引入限制 $\omega = vk_z$