角动量算符对易关系

艾鑫

三峡大学　理学院

2016 年 1 月 3 日

经典力学中的角动量

在经典力学中, 角动量的定义为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{1}$$

展开为

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x \tag{2}$$

在量子力学中只需将动量换成动量算符, 即为轨道角动量的定义

角动量的一般定义

角动量的一般定义是通过对易关系定义的

$$\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{J} = i\hbar \boldsymbol{J} \tag{3}$$

展开为

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y \tag{4}$$

角动量平方算符

由于 J_x, J_y, J_z 相互之间不对易，因此没有共同的本征态．而角动量平方算符

$$\vec{J}^2 = \vec{J}_x^2 + \vec{J}_y^2 + \vec{J}_z^2 \tag{5}$$

却与 J_x, J_y, J_z 都对易，即

$$[\vec{J}^2, J_x] = 0, \quad [\vec{J}^2, J_y] = 0, \quad [\vec{J}^2, J_z] = 0 \tag{6}$$

我们可以找到 $\vec{J}^2$ 和 J_z 的共同的本征态 $|\psi\rangle$:

$$\vec{J}^2 |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle, J_z |\psi\rangle = \mu |\psi\rangle . \tag{7}$$

引入升降算符

定义升降算符

$$J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y \tag{8}$$