角动量算符对易关系

艾鑫

三峡大学　理学院

2016 年 1 月 3 日

经典力学中的角动量

在经典力学中，角动量的定义为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{1}$$

展开为

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x \tag{2}$$

在量子力学中只需将动量换成动量算符，即为轨道角动量的定义

角动量的一般定义

角动量的一般定义是通过对易关系定义的

$$\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{J} = i\hbar \boldsymbol{J} \tag{3}$$

展开为

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y \tag{4}$$

角动量平方算符

由于 J_x, J_y, J_z 相互之间不对易, 因此没有共同的本征态. 而角动量平方算符

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \tag{5}$$

却与 J_x, J_y, J_z 都对易, 即

$$[J^2, J_x] = 0, \quad [J^2, J_y] = 0, \quad [J^2, J_z] = 0 \tag{6}$$

我们可以找到 J^2 和 J_z 的共同的本征态 $|\psi\rangle$:

$$J^2 |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle, J_z |\psi\rangle = \mu |\psi\rangle. \tag{7}$$

升降算符

定义升降算符

$$J_\pm \equiv J_x \pm iJ_y \tag{8}$$

升降算符有下列性质:

- ${J_\pm}^\dagger = J_\mp$
- $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$
- $\left[J_\pm, J^2\right] = 0$
- $[J_\pm, J_z] = \mp\hbar J_\pm$
- $J_\pm J_\mp = J^2 - J_z^2 \pm \hbar J_z$

升降算符

如果 $|\psi\rangle$ 是 J^2 和 J_z 的共同本征态, 那么 $L_\pm|\psi\rangle$ 也是它们的本征态.

$$J^2(J_\pm|\psi\rangle) = J_\pm(J^2|\psi\rangle) = J_\pm(\lambda|\psi\rangle) = \lambda(J_\pm|\psi\rangle) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} J_z(L_\pm|\psi\rangle) &= (J_zJ_\pm - J_\pm J_z)|\psi\rangle + J_\pm J_z|\psi\rangle \\ &= \pm\hbar J_\pm|\psi\rangle + J_\pm(\mu|\psi\rangle) \\ &= (\mu\pm\hbar)(J_\pm|\psi\rangle) \end{aligned} \tag{10}$$

由上式可知, J^2 的本征值不变, J_z 的本征值加 (减) 一个 $\hbar$

升降算符

对于给定的 λ, 不断的施加一个升算符, J_z 的本征值将不断增加. 但是增加到一程度就会到顶, 我们令这个态为 $|\psi_t\rangle$, 有

$$J_+ |\psi_t\rangle = 0 \tag{11}$$

设此时 J_z 的本征值为 $\hbar j$:

$$J_z |\psi_t\rangle = \hbar j |\psi_t\rangle , \quad J^2 |\psi_t\rangle = \lambda |\psi_t\rangle \tag{12}$$