面向节能的单/多列车优化决策问题

艾鑫[1]　杨志巧[2]　李金武[3]

[1] 三峡大学　理学院

[2] 武汉大学　数学与统计学院

[3] 湖南大学　机械与运载工程学院

2015 年 12 月 4 日

问题回顾

第一问、单列车节能运行优化控制问题

第一小问 请建立计算速度距离曲线的数学模型，计算寻找一条列车从 A_6 站出发到达 A_7 站的最节能运行的速度距离曲线，其中两车站间的运行时间为 110 秒

第二小问 请建立新的计算速度距离曲线的数学模型，计算寻找一条列车从 A_6 站出发到达 A_8 站的最节能运行的速度距离曲线，其中要求列车在 A_7 车站停站 45 秒，A_6 站和 A_8 站间总运行时间规定为 220 秒（不包括停站时间）

第二问、多列车节能运行优化控制问题

第一小问 当 100 列列车以间隔 $H=h_1,\cdots,h_{99}$ 从 A_1 站出发，**追踪运行**，依次经过 A_2，A_3,……到达 A_{14} 站，中间在各个车站停战最少 $D_{\min}$ 秒，最多 $D_{\max}$ 秒。间隔 H 各分量的变化范围是 $H_{\min}$ 秒至 $H_{\max}$ 秒。请建立优化模型并寻找使所有列车运行总能耗最低的间隔 H。要求第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔为 $T_0=63900$ 秒，且从 A_1 站到 A_{14} 站的总运行时间不变，均为 2086 秒（包括停站时间）。假设所有列车处于同一供电区段。

第二小问 接上问，如果高峰时间（早高峰 7200 秒至 12600 秒，晚高峰 43200 至 50400 秒）发车间隔不大于 2.5 分钟且不小于 2 分钟，其余时间发车间隔不小于 5 分钟，每天 240 列。请重新为它们制定运行图和相应的速度距离曲线。

第三问、列车延误后运行优化控制问题

第一小问 接上问，若列车 i 在车站 A_j 延误 DT_j^i（10 秒）发车，请建立控制模型，找出在确保安全的前提下，首先使所有后续列车尽快恢复正点运行，其次恢复期间耗能最少的列车运行曲线

第二小问 假设 DT_j^i 为随机变量，普通延误（$0 < DT_j^i < 10\,\mathrm{s}$）概率为 20%，严重延误（$DT_j^i > 10\,\mathrm{s}$）概率为 10%（超过 120 秒，接近下一班，不考虑调整），无延误（$DT_j^i = 0$）概率为 70%。若允许列车在各站到、发时间与原时间相比提前不超过 10 秒，根据上述统计数据，如何对第二问的控制方案进行调整？

问题求解

第一问、单列车节能运行优化控制问题

模型建立

目标函数的确定

题设给出的目标是使得耗能最少，根据题设可知耗能主要是由于列车行驶需要牵引力，导致发电机就处于耗能状态。查阅相关参考文献 [2] 可知在整个运行过程中所消耗的能量由牵引力来决定，如下所示：

$$E = \int_0^{t_{\max}} F(t)\, v_t dt$$

注：$t_{\max} = 110$ ，因为总的运行时间为 110 秒。

约束条件的确定

约束条件一：由题目所给的数据中可以知道从 A_6 站到 A_7 站的总路程为 1354m，因此整个过程中行走的总路程 $L_{\max} = 1354$ m，即：

$$\int_o^{t_{\max}} v_t dt = L_{\max}$$

约束条件二：列车起始时刻和到达 A_7 站时刻的速度均为 0 且在运行的任何时刻速度都不能大于该时刻所处路段的最大速度 $\overline{v_t}$，即：

$$\begin{cases} v_0 = v_{t_{\max}} = 0 \\ v_t \leq \overline{v_t} \end{cases}$$

约束条件三：由牛顿学第二定律可知，实际输出的牵引加速度乘以质量等于合外力，即：

$$ma_t = m\frac{dv_t}{dt} = F(t) - B(t) - W(t)$$

第一问模型

综上所述，建立的单列车两个站点之间的最优化模型为：

$$\min \quad E = \int_{o}^{t_{\max}} F(t)\, v_t dt$$

$$s.t. \begin{cases} \int_{o}^{t_{\max}} v_t dt = L_{\max} \\ \begin{cases} v_0 = v_{t_{\max}} = 0 \\ v_t \le \overline{v_t} \end{cases} \\ ma_t = m\frac{dv_t}{dt} = F(t) - B(t) - W(t) \\ F(t) = k_t F_{\max}(t) \\ B(t) = k_b B_{\max}(t) \\ W(t) = [w_0(t) + w_1(t)] \times g \times m/1000 \end{cases}$$

求解算法

换一个角度看问题

- 题目要求在给定的时间内，使消耗的能量最小

换一个角度看问题

- 题目要求在给定的时间内，使消耗的能量最小
- 给定时间让能量最小 $\Longrightarrow$ 比较困难

换一个角度看问题

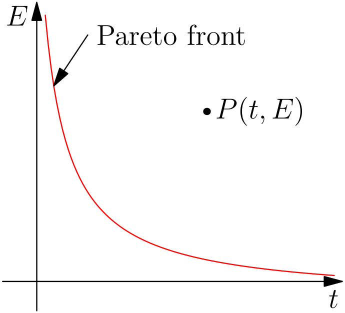
- 题目要求在给定的时间内，使消耗的能量最小
- 给定时间让能量最小 $\Longrightarrow$ 比较困难
- 给定能量让时间最小 $\Longrightarrow$ 容易求解

换一个角度看问题

- 题目要求在给定的时间内，使消耗的能量最小
- 给定时间让能量最小 $\Longrightarrow$ 比较困难
- 给定能量让时间最小 $\Longrightarrow$ 容易求解
- 可以将第一个问题转化为第二个问题，首先构造一个能量比较小的初始解，然后不断的增加能量，直到时间满足要求

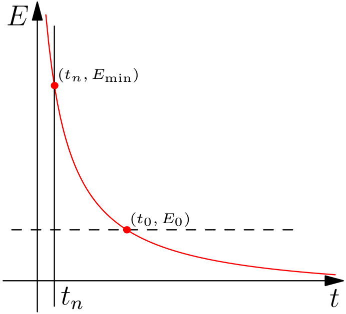
为什么能够这么做？

- 将此问题推广为一个多目标规划问题
  - 目标一：$\min \quad t$
  - 目标二：$\min \quad E$
- 运行方案 $(t, E) \Longrightarrow P(t, E)$
- 多目标规划：Pareto front C（非劣解集）



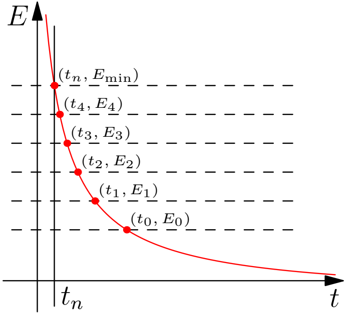
为什么能够这么做？

- 原问题：给定时间 t_n，求 $E_{\min} \Longrightarrow$ 求 $t = t_n$ 与 C 的交点对应的运行方案
- 如果我们能够给出能量较小的初始解 (t_1, E_1)，然后逐步添加能量，直到 $t = t_n$，即求得原问题的运行方案



为什么能够这么做？

- 原问题：给定时间 t_n，求 $E_{\min} \Longrightarrow$ 求 $t = t_n$ 与 C 的交点
- 如果我们能够给出能量较小的初始解 (t_1, E_1)，然后逐步添加能量，直到 $t = t_n$



考虑一个理想的情况

下面考虑一个理想的情况，即假设：

- 速度限制 $v_{\max}$ 为常数
- 阻力 r 也为常数

优化模型

$$\min \quad E = \int_0^{t_{\max}} k_t(t)v(t)F(t)\,dt$$

$$s.t. \begin{cases} m\frac{dv(t)}{dt} = k_tF - k_bB - r \\ L = \int_0^{t_{\max}} v(t)\,dt \\ v(0) = v_0, \quad v(t_{\max}) = v_T \\ k_t \in [0,1], k_b \in [0,1], v \le v_{\max} \end{cases}$$

根据 Pontryagin 最大值原理，前述优化模型可以转化为最大化下面的哈密顿函数：

$$H = \frac{p_1}{v} \times (k_t F - k_b B - r) + p_2 v - k_t v F$$

其中 p_1 应该满足下面的微分方程：

$$\frac{dp_1}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial v}$$

求解结果

$$\begin{cases} k_t = 1, k_b = 0, \ (p_1 > v^2) \\ k_t \in [0,1], k_b = 0, \ (p_1 = v^2) \\ k_t = 0, k_b \in [0,1], \ (p_1 = 0) \\ k_t = 0, k_b = 0, \ (0 < p_1 < v^2) \\ k_t = 0, k_b = 1, \ (p_1 < 0). \end{cases}$$

Pontryagin 最大值原理

求解结果与四个阶段相对应：

- 最大加速 $k_t = 1, k_b = 0$
- 巡航 $k_t \in [0,1], k_b = 0$
- 巡航 $k_t = 0, k_b \in [0,1]$
- 惰行 $k_t = 0, k_b = 0$
- 最大加速 $k_t = 0, k_b = 1$