

# 面向节能的单/多列车优化决策问题

艾鑫<sup>1</sup> 杨志巧<sup>2</sup> 李金武<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 三峡大学 理学院

<sup>2</sup> 武汉大学 数学与统计学院

<sup>3</sup> 湖南大学 机械与运载工程学院

2015 年 12 月 5 日

## 问题回顾

# 第一问、单列车节能运行优化控制问题

# 问题回顾

## 问题一、单列车节能运行优化控制问题

**第一小问** 请建立计算速度距离曲线的数学模型，计算寻找一条列车从  $A_6$  站出发到达  $A_7$  站的最节能运行的速度距离曲线，其中两车站间的运行时间为 110 秒

**第二小问** 请建立新的计算速度距离曲线的数学模型，计算寻找一条列车从  $A_6$  站出发到达  $A_8$  站的最节能运行的速度距离曲线，其中要求列车在  $A_7$  车站停站 45 秒， $A_6$  站和  $A_8$  站间总运行时间规定为 220 秒（不包括停站时间）

## 第二问、多列车节能运行优化控制问题

# 问题回顾

## 第二问、多列车节能运行优化控制问题

**第一小问** 当 100 列列车以间隔  $H = h_1, \dots, h_{99}$  从  $A_1$  站出发, 追踪运行, 依次经过  $A_2, A_3, \dots$  到达  $A_{14}$  站, 中间在各个车站停站最少  $D_{\min}$  秒, 最多  $D_{\max}$  秒。间隔  $H$  各分量的变化范围是  $H_{\min}$  秒至  $H_{\max}$  秒。请建立优化模型并寻找使所有列车运行总能耗最低的间隔  $H$ 。要求第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔为  $T_0 = 63900$  秒, 且从  $A_1$  站到  $A_{14}$  站的总运行时间不变, 均为 2086 秒 (包括停站时间)。假设所有列车处于同一供电区段。

# 问题回顾

## 第二问、多列车节能运行优化控制问题

**第二小问** 接上问，如果高峰时间（早高峰 7200 秒至 12600 秒，晚高峰 43200 至 50400 秒）发车间隔不大于 2.5 分钟且不小于 2 分钟，其余时间发车间隔不小于 5 分钟，每天 240 列。请重新为它们制定运行图和相应的速度距离曲线。

### 第三问、列车延误后运行优化控制问题



# 问题回顾

## 第三问、列车延误后运行优化控制问题

**第一小问** 接上问，若列车  $i$  在车站  $A_j$  延误  $DT_j^i$  (10 秒) 发车，请建立控制模型，找出在确保安全的前提下，首先使所有后续列车尽快恢复正点运行，其次恢复期间耗能最少的列车运行曲线

**第二小问** 假设  $DT_j^i$  为随机变量，普通延误 ( $0 < DT_j^i < 10\text{s}$ ) 概率为 20%，严重延误 ( $DT_j^i > 10\text{s}$ ) 概率为 10% (超过 120 秒，接近下一班，不考虑调整)，无延误 ( $DT_j^i = 0$ ) 概率为 70%。若允许列车在各站到、发时间与原时间相比提前不超过 10 秒，根据上述统计数据，如何对第二问的控制方案进行调整？

# 问题求解

# 第一问、单列车节能运行优化控制问题

# 模型建立

# 目标函数的确定

题设给出的目标是使得耗能最少，根据题设可知耗能主要是由于列车行驶需要牵引力，导致发电机就处于耗能状态。查阅相关参考文献 [2] 可知在整个运行过程中所消耗的能量由牵引力来决定，如下所示：

$$E = \int_0^{t_{\max}} F(t) v_t dt$$

注：  $t_{\max} = 110$  ， 因为总的运行时间为 110 秒。

# 约束条件的确定

约束条件一：由题目所给的数据中可以知道从  $A_6$  站到  $A_7$  站的总路程为 1354m，因此整个过程中行走的总路程  $L_{\max} = 1354 \text{ m}$ ，即：

$$\int_0^{t_{\max}} v_t dt = L_{\max}$$

约束条件二：列车起始时刻和到达  $A_7$  站时刻的速度均为 0 且在运行的任何时刻速度都不能大于该时刻所处路段的最大速度  $\overline{v_t}$ ，即：

$$\begin{cases} v_0 = v_{t_{\max}} = 0 \\ v_t \leq \overline{v_t} \end{cases}$$

约束条件三：由牛顿学第二定律可知，实际输出的牵引加速度乘以质量等于合外力，即：

$$ma_t = m \frac{dv_t}{dt} = F(t) - B(t) - W(t)$$

# 第一问模型

综上所述，建立的单列车两个站点之间的最优化模型为：

$$\begin{aligned} \min \quad & E = \int_0^{t_{\max}} F(t) v_t dt \\ s.t. \quad & \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{t_{\max}} v_t dt = L_{\max} \\ \begin{cases} v_0 = v_{t_{\max}} = 0 \\ v_t \leq \bar{v}_t \end{cases} \\ ma_t = m \frac{dv_t}{dt} = F(t) - B(t) - W(t) \\ F(t) = k_t F_{\max}(t) \\ B(t) = k_b B_{\max}(t) \\ W(t) = [w_0(t) + w_1(t)] \times g \times m / 1000 \end{array} \right. \end{aligned}$$

# 求解算法



# 换一个角度看问题

- 题目要求在给定的时间内，使消耗的能量最小

# 换一个角度看问题

- 题目要求在给定的时间内，使消耗的能量最小
- 给定时间让能量最小  $\implies$  比较困难

# 换一个角度看问题

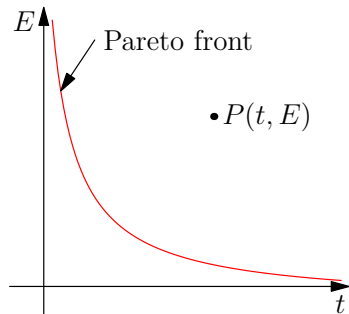
- 题目要求在给定的时间内，使消耗的能量最小
- 给定时间让能量最小  $\implies$  比较困难
- 给定能量让时间最小  $\implies$  容易求解

# 换一个角度看问题

- 题目要求在给定的时间内，使消耗的能量最小
- 给定时间让能量最小  $\implies$  比较困难
- 给定能量让时间最小  $\implies$  容易求解
- 可以将第一个问题转化为第二个问题，首先构造一个能量比较小的初始解，然后不断的增加能量，直到时间满足要求

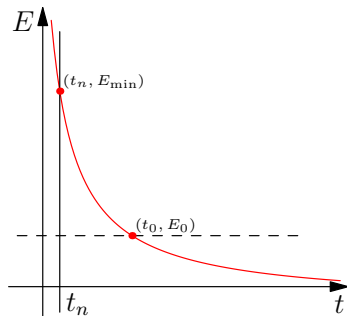
# 为什么能够这么做？

- 将此问题推广为一个多目标规划问题
  - 目标一：  $\min t$
  - 目标二：  $\min E$
- 运行方案  $(t, E) \implies P(t, E)$
- 多目标规划：Pareto front  $C$ （非劣解集）



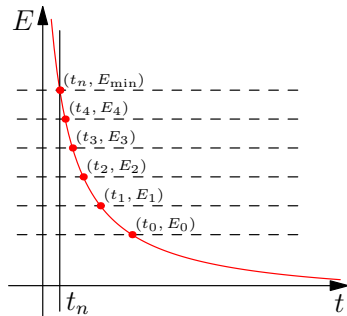
# 为什么能够这么做？

- 原问题：给定时间  $t_n$ ，求  $E_{\min} \Rightarrow$  求  $t = t_n$  与  $C$  的交点对应的运行方案
- 如果我们能够给出能量较小的初始解  $(t_1, E_1)$ ，然后逐步添加能量，直到  $t = t_n$ ，即求得原问题的运行方案



# 为什么能够这么做？

- 原问题：给定时间  $t_n$ ，求  $E_{\min} \Rightarrow$  求  $t = t_n$  与  $C$  的交点
- 如果我们能够给出能量较小的初始解  $(t_1, E_1)$ ，然后逐步添加能量，直到  $t = t_n$



# 考虑一个理想的情况

下面考虑一个理想的情况，即假设：

- 速度限制  $v_{\max}$  为常数
- 阻力  $r$  也为常数

## 优化模型

$$\min \quad E = \int_0^{t_{\max}} k_t(t) v(t) F(t) dt$$

$$s.t. \quad \begin{cases} m \frac{dv(t)}{dt} = k_t F - k_b B - r \\ L = \int_0^{t_{\max}} v(t) dt \\ v(0) = v_0, \quad v(t_{\max}) = v_T \\ k_t \in [0, 1], k_b \in [0, 1], v \leq v_{\max} \end{cases}$$



# Pontryagin 最大值原理

根据 Pontryagin 最大值原理, 前述优化模型可以转化为最大化下面的哈密顿函数:

$$H = \frac{p_1}{v} \times (k_t F - k_b B - r) + p_2 v - k_t v F$$

其中  $p_1$  应该满足下面的微分方程:

$$\frac{dp_1}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial v}$$

## 求解结果

$$\begin{cases} k_t = 1, k_b = 0, (p_1 > v^2) \\ k_t \in [0, 1], k_b = 0, (p_1 = v^2) \\ k_t = 0, k_b \in [0, 1], (p_1 = 0) \\ k_t = 0, k_b = 0, (0 < p_1 < v^2) \\ k_t = 0, k_b = 1, (p_1 < 0). \end{cases}$$

# Pontryagin 最大值原理

求解结果与四个阶段相对应：

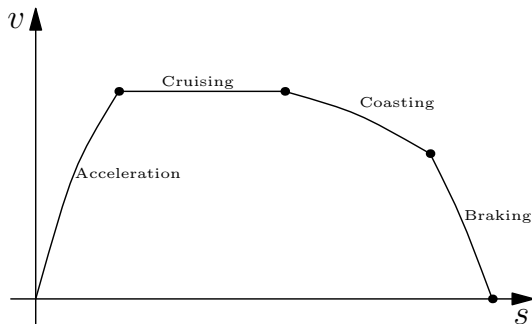
**最大加速**  $k_t = 1, k_b = 0$

**巡航**  $k_t \in [0, 1], k_b = 0$

**巡航**  $k_t = 0, k_b \in [0, 1]$

**惰行**  $k_t = 0, k_b = 0$

**最大加速**  $k_t = 0, k_b = 1$



# Pontryagin 最大值原理

## 最大值原理结论

对于理想情况，所有“能量最小”和“时间最短”问题的最优解都是由：最大牵引、巡航、惰行和最大制动组成。

