

群论考试试题

艾鑫

2016 年 1 月 10 日

1 有限群：非循环六阶群 G_6^2

六阶群有两种结构，其中一个为循环群

$$G_6^1 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\} \quad (1)$$

另外一个就是非循环六阶群 $G_6^2 = \{e, a, b, c, d, f\}$ ，它是最小的非阿贝尔群。其满足下列关系

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad d^2 = f, \quad f^2 = d, \quad fd = df = e \quad (2)$$

G_6^2 的乘法表如下：

G_6^2	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

(3)

1.1 G_6^2 的构造

G_6^2 可以通过保持正三角形不变的所有转动对称变换构成，也就是点群 D_3 。正三角形一共有 6 个对称操作：

- e 恒等变换
- c_3^1, c_3^2 分别绕中心点 O 逆时针旋转 $2\pi/3$ 和 $4\pi/3$ 角
- c_{2x}, c_{2y}, c_{2z} 分别绕 x, y, z 轴旋转 π 角

在这种构造中, c_{2x}, c_{2y}, c_{2z} 对应于 a, b, c ; c_3^1, c_3^2 对应于 d, f .

G_6^2 还可以通过置换群 S_3 来构造。置换群的群元有：

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} = e, \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} = (12), \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} = (23) \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = (31), \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = (123), \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} = (132) \quad (5)$$

其中 $(12), (23), (31)$ 对应于 a, b, c ; $(123), (132)$ 对应于 d, f .

1.2 G_6^2 的子群

定义 1 (子群) 群 G 的子集 H 如果在和群 G 相同的乘法规则下也构成群, 则称 H 为群 G 的子群.

对于任意一个群 G , 群 $\{e\}$ 和群 G 本身一定是 G 的子群. 其他的子群, 叫做真子群或固有子群. 对于六阶非循环群 G_6^2 的真子群有 4 个:

$$H_1 = \{e, a\}, \quad H_2 = \{e, b\}, \quad H_3 = \{e, c\}, \quad H_4 = \{e, d, f\} \quad (6)$$

要判断一个子集 H 是否是子群, 关键要看三个地方: 一是要看是否有单位元; 二是看是否有逆; 三是看是否满足封闭性. 结合性的满足是自然的, 因为 H 是群 G 的子集, 群 G 满足结合律, H 必然满足结合律. 很容易验证, 上面列出的 4 个子群都满足上述条件.

1.3 G_6^2 的分解

群 G 的元素可以按照共轭类或者陪集进行分解. 下面给出共轭的定义.

定义 2 (共轭) 对于群 G 中的两个元素 g_i, g_j , 如果存在另一个元素 $g \in G$ 使 $g_i = gg_jg^{-1}$ 成立, 则称 g_i, g_j 是相互共轭的, 用符号 \sim 表示, 记为 $g_i \sim g_j$.

共轭具有下列的性质:

- 每个元素都与自身共轭, $g_i \sim g_i$; (反身性)
- 如果 $g_i \sim g_j$, 则有 $g_j \sim g_i$; (对称性)
- 如果 $g_i \sim g_j, g_j \sim g_k$, 则有 $g_i \sim g_k$. (传递性)

定义 3 (共轭类) 群 G 内彼此共轭的元素集合构成共轭类, 简称类.

群中的每个元素仅属于一个类, 因为如果一个元素同时属于两个类, 那么由于共轭的传递性, 这两个类就可以合并为一个类. 由于单位元仅与自己共轭, 所以单位元自成一类. 通常用记号 $[g]$ 表示群元 g 所在类的元素集合. 对于 G_6^2 有三个类:

$$[e] = \{e\}, \quad [a] = \{a, b, c\}, \quad [d] = \{d, f\} \quad (7)$$

故可以将 G_6^2 按类分解为:

$$G_6^2 = [e] \oplus [a] \oplus [d]. \quad (8)$$

群还可以按照陪集进行分解, 下面来对陪集进行定义.

定义 4 (陪集) 设 $H \subset G$ 为群 G 的子群, 令 $g_i \in G, g_i \notin H$, 则集合 $g_i H = \{g_i h | h \in H\}$ 称为子群 H 的左陪集. 类似的可以定义子群 H 的右陪集 $H g_i$.

一般来说, 左陪集不一定和右陪集相等. 对于 G_6^2 , 考虑子群 $H_1 = \{e, a\}$, 则有

$$bH_1 = \{b, f\}, \quad cH_1 = \{c, d\}, \quad H_1 b = \{b, d\}, \quad H_1 c = \{c, f\} \quad (9)$$

如果考虑子群 $H_2 = \{e, d, f\}$, 则有

$$aH_2 = H_2 a = \{a, b, c\} \quad (10)$$

因此有陪集分解

$$\begin{aligned} G_6^2 &= H_1 \oplus bH_1 \oplus cH_1 = H_2 \oplus aH_2 \\ &= H_1 \oplus H_1 b \oplus H_1 c = H_2 \oplus H_2 a. \end{aligned} \quad (11)$$

1.4 G_6^2 的不变子群

首先给出不变子群的定义.

定义 5 (不变子群) 设 H 是群 G 的一个子群, 如果对任意的 $g \in G$ 都有 $gHg^{-1} = H$ 或 $gH = Hg$, 即 H 的每个左陪集和与其对应的右陪集完全相同, 则子群 H 称为群 G 的不变子群或正规子群.

关于不变子群有如下定理:

定理 1 (不变子群) 如果 H 是群 G 的不变子群, 则 H 一定包含群 G 的一些完整的类. 反之, 如果子群 H 包含了群 G 的完整的类, 则 H 一定是群 G 的不变子群.

由这个定理知, G_6^2 的子群中, 子群 $H_4 = \{e, d, f\}$ 完整的包含了群 G 的类 $\{e\}, \{d, f\}$, 因此 G_6^2 的不变子群为 $H_4 = \{e, d, f\}$.

1.5 商群 G_6^2/H

如果群 H 是群 G 的不变子群, 则可将群 G 分解为下列陪集的直和:

$$G = H \oplus g_1H \oplus g_2H \oplus \cdots \oplus g_{l-1}H, \quad (12)$$

其中 $g_iH = Hg_i$. 由此可以定义陪集之间的乘法

$$(g_iH)(g_jH) = g_iHg_jH = g_i g_j HH = g_kH. \quad (13)$$

可以证明, 这样定义的乘法是自洽的. 这样商集

$$G/H = \{H, g_1H, g_2H, \cdots, g_{l-1}H\} \quad (14)$$

构成阶数为 $l = n/n_H$ 的群, 其中 n_H 为不变子群 H 的阶, 这个群就称为群 G 的商群.

对于群 G_6^2 , 它有不变子群 $H = \{e, d, f\}$, 陪集 $M = aH = \{a, b, c\}$, 商群为

$$G_6^2/H = \{H, M\} \quad (15)$$

1.6 G_6^2 的二维表示矩阵

首先给出表示的定义:

定义 6 (群的表示) 如果存在从群 G 到作用在线性向量空间 V 上的算符群 Γ_G 的一个同态, 即

$$g \in G \mapsto \Gamma_g \in \Gamma_G, \quad (16)$$

其中 Γ_g 是与群元对应的算符, 满足

$$\Gamma_{g_1} \Gamma_{g_2} = \Gamma_{g_1 g_2} \quad (17)$$

则算符群 Γ_G 称为群 G 的一个表示, 线性向量空间 V 的维数称为表示的维数. 如果这个同态同时也是同构的, 则该表示称为忠实表示.

如果在 d 维向量空间 V 中选择一组基 $\{e_i, i = 1, 2, \cdots, d\}$, 则 Γ_g 可以用 $d \times d$ 的矩阵来实现, 具体为

$$\Gamma_g e_i = \sum_{j=1}^d e_j D_{ji}(g) \equiv e_j D_{ji}(g), \quad g \in G, i = 1, 2, \cdots, d. \quad (18)$$

下面通过 D_3 来构造 G_6^2 的二维表示矩阵. 考虑由 e_1, e_2 张成的二维空间, 由 D_3 的 6 个操作导出相应的矩阵表示.

设等边三角形的边长为 1, 三个顶角 A, B, C 在所取的二维空间中的坐标为

$$A(0, \frac{1}{\sqrt{3}}), \quad B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}), \quad C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}) \quad (19)$$

- 恒元: $D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- c_3^1 : 操作为 $A \rightarrow C \rightarrow B$, 设 $D(c_3^1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

由

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (21)$$

导出 $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{2}, c = \frac{\sqrt{3}}{2}, d = -\frac{1}{2}$, 所以

$$D(c_3^1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

- c_3^2 : 操作为 $A \rightarrow B \rightarrow C$, 同理有

$$D(c_3^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

- c_{2x} : 操作为 $A \rightarrow A, C \rightarrow B$,

$$D(c_{2x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

- c_{2y} : 操作为 $B \rightarrow B, A \rightarrow C$,

$$D(c_{2y}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

- c_{2z} : 操作为 $C \rightarrow C, A \rightarrow B$,

$$D(c_{2z}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

以上即为 G_6^2 的二维表示, 各个元素的特征标为

$$\chi(e) = 2, \quad \chi(c_3^1) = -1, \quad \chi(c_3^2) = -1 \quad (27)$$

$$\chi(c_{2x}) = 0, \quad \chi(c_{2y}) = 0, \quad \chi(c_{2z}) = 0. \quad (28)$$

其满足表达式

$$\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = n \quad (29)$$

其中 n 为群的阶, 因此这个表示为 G_6^2 的不可约表示.

1.7 G_6^2 的不可约表示的正交性

下面给出广义正交定理:

定理 2 (广义正交定理) 设 $D^{(p)}(G)$ 和 $D^{(q)}(G)$ 是 n 阶群 G 的两个不等价不可约么正表示, 维数分别为 d_p 和 d_q . 则下列正交关系成立:

$$\sum_{g \in G} D_{\mu\nu}^{(p)*}(g) D_{\mu'\nu'}^{(q)}(g) = \frac{n}{d_p} \delta_{pq} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \quad (30)$$

令 $p = q, \mu = \mu', \nu = \nu'$, 得到

$$\sum_{g \in G} |D_{\mu\nu}^{(p)}(g)|^2 = \frac{n}{d_p}. \quad (31)$$

对于固定的 (p, μ, ν) 值, 我们可以将 $\left\{ \sqrt{\frac{d_p}{n}} D_{\mu\nu}^{(p)}(g) \right\}$ 看成是具有 n 个分量的向量 $\mathbf{r}^{(p, \mu, \nu)}$, 其中不同的群元依次对应了向量的不同分量, 不同的 (p, μ, ν) 就代表了不同的向量. 则上述方程可以写成向量的正交归一关系

$$\mathbf{r}^{p, \mu, \nu*} \cdot \mathbf{r}^{p, \alpha, \beta} = \delta_{pq} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}, \quad (32)$$

即向量族 $\mathbf{r}^{(p, \mu, \nu)}$ 彼此是相互正交的.

下面来验证 G_6^2 的不可约表示的正交性. G_6^2 总共有三个不可约表示, 分别是恒等表示, 非平凡一维表示 $\{e, d, f\} \mapsto 1, \{a, b, c\} \mapsto -1$ 和上一节提到的二维表示. 各元素的矩阵为

	e	a	b	c	d	f
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	-1	-1	-1	1	1
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

(33)

广义正交定理表达式为:

$$\sum_{g \in G} D_{\mu\nu}^{(p)*}(g) D_{\mu'\nu'}^{(q)}(g) = \frac{n}{d_p} \delta_{pq} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \quad (34)$$

由上表直接计算

$$\sum_{g \in G} D^{(1)*}(g) D^{(2)}(g) = 0, \quad \sum_{g \in G} D_{\mu\nu}^{(3)*}(g) D^{(2)}(g) = 0, \quad \sum_{g \in G} D_{\mu\nu}^{(3)*}(g) D^{(1)}(g) = 0, \quad (35)$$

$$\sum_{g \in G} |D^{(1)}|^2 = 6/1 = 6, \quad \sum_{g \in G} |D^{(2)}|^2 = 6/1 = 6, \quad \sum_{g \in G} |D_{\mu\nu}^{(3)}|^2 = 6/2 = 3, \quad (36)$$

结果与广义正交定理一致.

1.8 G_6^2 的特征标的正交性

下面给出特征标正交定理:

定理 3 (特征标正交定理) 群 G 的不等价不可约表示的特征标满足正交关系

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^{(p)*}(g) \chi^{(q)}(g) = \delta_{pq}. \quad (37)$$

由于同类元素的特征标相同, 可以将求和改为

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k k_i \chi^{(p)*}([g_i]) \chi^{(q)}([g_i]) = \delta_{pq}, \quad (38)$$

其中 $[g_i]$ 表示群元 g_i 所在的类, k_i 是该类所包含的元素数.

如果群 G 有 k 个类, 则对固定的 p , 可以将 $\left\{ \sqrt{k_i/n} \chi^{(p)}([g_i]) \right\}$ 看成是一个 k 维向量 $\mathbf{r}^{(p)}$, 其中不同的类对应了向量的不同分量, 而不同的不可约表示则代表了不同的向量. 这样, 特征标的正交关系就变成了 k 维空间向量中的正交关系

$$\mathbf{r}^{(p)*} \cdot \mathbf{r}^{(q)} = \delta_{pq}. \quad (39)$$

下面来验证 G_6^2 的特征标的正交性. G_6^2 的特征标表为

G_6^2	e	$3a$	$2d$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	-1	1
$\Gamma^{(3)}$	2	0	-1

(40)

将特征标带入上式有:

$$(\chi^{(1)}, \chi^{(2)}) : \frac{1}{6} [1 \times 1 \times 1 + 3 \times 1 \times (-1) + 2 \times 1 \times 1] = 0, \quad (41)$$

$$(\chi^{(1)}, \chi^{(3)}) : \frac{1}{6} [1 \times 1 \times 2 + 3 \times 1 \times 0 + 2 \times 1 \times (-1)] = 0, \quad (42)$$

$$(\chi^{(2)}, \chi^{(3)}) : \frac{1}{6} [1 \times 1 \times 2 + 3 \times (-1) \times 0 + 2 \times 1 \times (-1)] = 0, \quad (43)$$

$$(\chi^{(1)}, \chi^{(1)}) : 1^2 + 3 \times 1^2 + 2 \times 1^2 = 6, \quad (44)$$

$$(\chi^{(2)}, \chi^{(2)}) : 1^2 + 3 \times (-1)^2 + 2 \times 1^2 = 6, \quad (45)$$

$$(\chi^{(3)}, \chi^{(3)}) : 2^2 + 0 + 2 \times (-1)^2 = 6. \quad (46)$$

1.9 G_6^2 的正则表示

由群的封闭性可知, 如果将群 G 的 n 个群元看成是 n 维向量空间的基, 即 $e_i = g_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 同时将群元 g 看成作用在这个向量空间上的算符, 即 $\Gamma_g = g(g \in G)$, 则算符对基

的作用可以写成

$$\Gamma_g e_i = gg_i = g_j, \quad \{g_i\} \xrightarrow{g} \{g_j\}. \quad (47)$$

上式表明这组基 $\{g_i\}$ 张成的向量空间在算符 $g(g \in G)$ 的作用下不变, 因此可以负载群 G 的一个表示. 这个表示称为正则表示. 为了得出正则表示矩阵, 将上式改写为

$$gg_i = \sum_{k=1}^n g_k D_{ki}^{(c)}(g), \quad \forall g \in G, \quad (48)$$

其中正则表示矩阵 $D^{(c)}(g)$ 的定义为

$$D_{ki}^{(c)}(g) = \begin{cases} 1, & k = j, gg_i = g_j, \\ 0, & k \neq j, gg_i \neq g_j. \end{cases} \quad (49)$$

可以利用乘法表来构造正则表示的表示矩阵. 有正则表示的定义, 仅当 $gg_i = g_j$ 或 $g = g_j g_i^{-1}$ 时, $D_{ji}^{(c)}(g) = 1$. 这意味着当 $g_j g_i^{-1}$ 等于 g 时, 表示矩阵 $D^{(c)}(g)$ 的第 j 行, 第 i 列的矩阵元为 1, 其余矩阵元为 0.

因此可以构造一个 $g_j \sim g_j^{-1}$ 的乘法表, 然后按照下列规则很容易写出正则表示矩阵 $D^{(c)}(g)$: 每当群元 g 在表中某个位置出现时, 就在表示矩阵的相应位置填上 1, 其余位置则全部填 0.

下面来构造 G_6^2 的正则表示. 首先来构造 $g \sim g^{-1}$ 的乘法表:

	e	a	b	c	f	d
e	e	a	b	c	f	d
a	a	e	d	f	c	b
b	b	f	e	d	a	c
c	c	d	f	e	b	a
d	d	c	a	b	e	f
f	f	b	c	a	d	e

(50)

从上表可以得到 G_6^2 的正则表示为

$$D^{(c)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{(c)}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (51)$$

$$D^{(c)}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(c)}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$D^{(c)}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(c)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

1.10 G_6^2 的基础表示

前面的正则表示中负载表示的是群元本身. 实际上也可以用子群 H 的陪集 $g_i H$ 作为基来负载群 G 的表示, 这样得到的表示称为基础表示. 设群 G 可以按子群 H 分解为陪集的直和

$$G = H \oplus g_2 H \oplus \cdots \oplus g_l H = \sum_{i=1}^l g_i H, \quad (54)$$

其中 $g_1 = e$. 由 $g(g_i H) = gg_i H = g_j H \in \{g_i H\}$, 可以看到, 陪集 $\{g_i H\}$ 张成的向量空间在群 G 的作用下是不变的, 因而可以负载群 G 的表示. 将上式改写为

$$g(g_i H) = \sum_{k=1}^l (g_k H) D_{ki}^{(d)}(g), \quad i = 1, 2, \dots, l, g \in G, \quad (55)$$

其中矩阵 $D^{(d)}(g)$ 定义为

$$D_{ki}^{(d)}(g) = \begin{cases} 1, & k = j, gg_i \in g_j H, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad (56)$$

可以用类似正则表示的方法来构造基础表示的表示矩阵. 将 $gg_i \in g_j H$ 改写为

$$g \in g_j H g_i^{-1} = g_j H H g_i^{-1}, \quad (57)$$

可以构造乘法表 $g_j H \sim H g_i^{-1}$, 则当

$$g \in g_j H H g_i^{-1} \quad (58)$$

时, 有

$$D_{ji}^{(d)}(g) = 1; \quad (59)$$

否则

$$D_{ji}^{(d)}(g) = 0. \quad (60)$$

考虑群 G_6^2 的子群 $H = \{e, a\}$, 容易计算得到

$$aH = \{e, a\}, \quad bH = \{b, f\}, \quad cH = \{c, d\}, \quad (61)$$

$$Ha^{-1} = \{e, a\}, \quad Hb^{-1} = \{b, d\}, \quad Hc^{-1} = \{c, f\}. \quad (62)$$

构造乘法表如下:

	Ha^{-1}	Hb^{-1}	Hc^{-1}
aH	$\{e, a\}$	$\{b, d\}$	$\{c, f\}$
bH	$\{b, f\}$	$\{e, c\}$	$\{a, d\}$
cH	$\{c, d\}$	$\{a, f\}$	$\{e, b\}$

(63)

则很容易从表中得到群 G_6^2 的基础表示矩阵

$$D^{(d)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{(d)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(d)}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (64)$$

$$D^{(d)}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(d)}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(d)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

1.11 G_6^2 的特征标表

前面已经给出了特征标正交关系 (行的正交性关系):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k k_i \chi^{(p)*}([g_i]) \chi^{(q)}([g_i]) = \delta_{pq} \quad (66)$$

它实质上反映的是不等价不可约表示的特征标是正交的. 事实上, 特征标又有另外一个正交定理 (列的正交性关系), 即

$$\frac{1}{n} \sum_p k_i \chi^{(p)*}([g_i]) \chi^{(p)}([g_j]) = \delta_{ij}. \quad (67)$$

它实质上反映的是不同共轭类的特征标同样是正交的. 因此我们可以通过这两个定理来确定特征标表.

群 G_6^2 有 3 类, 由 $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6$, 唯一解是 $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$, 即 G_6^2 有两个一维表示, 一个二维表示. 两个一维表示中其中一个是恒等表示, 另外一个是非平凡一维表示 $\{e, d, f\} \mapsto 1, \{a, b, c\} \mapsto -1$, 二维表示就是之前几节提到的二维表示. 由此我们可以写出特征标表的第一行和第一列:

G_6^2	$\{e\}$	$\{e, d, f\}$	$\{e, a\}$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(1)}$	1	x	y
$\Gamma^{(1)}$	2	z	w

(68)

其余的特征标可以有正交关系得到. 对 G_6^2 有

$$k = 3, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 2. \quad (69)$$

由行的正交关系:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k k_i \chi^{(1)*}([g_i]) \chi^{(2)}([g_i]) = \frac{1}{6} [1 \times (1 \times 1) + 3 \times (1 \times x) + 2 \times (1 \times y)] = 0, \quad (70)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k k_i \chi^{(1)*}([g_i]) \chi^{(3)}([g_i]) = \frac{1}{6} [1 \times (1 \times 2) + 3 \times (1 \times z) + 2 \times (1 \times w)] = 0. \quad (71)$$

由列的正交关系:

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^3 k_i \chi^{(p)*}(\{e\}) \chi^{(p)}(\{e, d, f\}) = \frac{1}{6} [1 \times (1 \times 1 + 1 \times x + 2 \times z)] = 0, \quad (72)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^3 k_i \chi^{(p)*}(\{e\}) \chi^{(p)}(\{e, a\}) = \frac{1}{6} [1 \times (1 \times 1 + 1 \times y + 2 \times w)] = 0. \quad (73)$$

由此给出 4 个方程

$$1 + 3x + 2y = 0, \quad 2 + 3z + 2w = 0, \quad (74)$$

$$1 + x + 2z = 0, \quad 1 + y + 2w = 0. \quad (75)$$

联立求解发现这个 4 个方程不完全独立, 无法求解. 再考虑行归一化关系

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k k_i \chi^{(2)*}([g_i]) \chi^{(2)}([g_i]) = \frac{1}{6} [1 \times (1 \times 1) + 3 \times (x \times x) + 2 \times (y \times y)] = 1, \quad (76)$$

即有

$$1 + 3x^2 + 2y^2 = 6. \quad (77)$$

结合前面的方程, 联立求解得

$$x = -1, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad w = -1. \quad (78)$$

最后得到 G_6^2 的特征标表:

G_6^2	$\{e\}$	$\{e, d, f\}$	$\{e, a\}$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(1)}$	1	-1	1
$\Gamma^{(1)}$	2	0	-1

(79)

2 李群与李代数: $\text{SO}(3)$

2.1 $\text{SO}(3)$ 的定义

首先我们定义实正交群 $\text{O}(n, \mathbf{R}) = \text{O}(n)$. 这是所有 $n \times n$ 构成的群, 即

$$X' = \alpha X, \quad \alpha^T \alpha = I. \quad (80)$$

对正交条件 $\alpha^T \alpha = I$, 取行列式后得

$$\det(\alpha^T \alpha) = (\det \alpha)^2 = 1, \quad (81)$$

即

$$\det \alpha = \pm 1. \quad (82)$$

因此正交群 $\text{O}(n)$ 有两个不连通的分支, 一个分支满足 $\det \alpha = 1$, 另一个分支满足 $\det \alpha = -1$. 满足条件 $\det \alpha = 1$ 的分支记为 $\text{SO}(n)$, 这是 $\text{O}(n)$ 群的子群. $\text{SO}(3)$ 群实际上就是我们熟悉的三维空间转动群.

2.2 $\text{SO}(3)$ 的参数化

$\text{SO}(3)$ 有 3 个独立参数, 有多种参数化选择. 下面介绍三个参数化方法.

2.2.1 方法一: 三个平面转动的组合

可以将一个转动按如下方式分解, 先绕 x 轴转动 α_1 角, 然后绕 y 轴转动 α_2 角, 最后绕 z 轴转动 α_3 角. 因此有

$$\begin{aligned}
 R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= R_z(\alpha_3)R_y(\alpha_2)R_x(\alpha_1) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & -\cos \alpha_1 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \\ \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \\ -\sin \alpha_2 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{83}$$

其中 $-\pi \leq \alpha_1, \alpha_2 < \pi, -\pi/2 \leq \alpha_3 < \pi/2$.

2.2.2 方法二: 三个独立转动的组合

还可以用 3 个 Euler 角 α, β, γ 来参数化 $SO(3)$ 群, 这可以用如下方法进行. 首先绕 z 轴转动 α 角, 将 (x, y, z) 转到 (x', y', z') , 然后绕 y' 轴转动 β 角, 将 (x', y', z') 转到 (x'', y'', z'') , 最后绕 z'' 轴转动 γ 角将 (x'', y'', z'') 转到最终位置完成转动. 因此我们有

$$\begin{aligned}
 R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_{z''}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) \\
 &= R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}(\beta)^{-1}R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) = R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\
 &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\alpha)^{-1}R_z(\gamma)R_z(\alpha) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma).
 \end{aligned} \tag{84}$$

以上用到了 $R_z(\gamma)$ 和 $R_z(\alpha)$ 对易的事实. 因此, 利用 Euler 角可以将转动表示为

$$\begin{aligned}
 R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{85}$$

其中 $0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi, 0 \leq \beta < \pi$.

2.2.3 方法三: 绕一动轴的”定轴”转动

一个转动也可以用转轴 \mathbf{n} 以及绕转轴转过的角度 ϕ 来描写, 而转轴 \mathbf{n} 可以用两个方向如极角和方位角 (θ, ψ) 来确定, 因此一个转动也可以用参数 (θ, ψ, ϕ) 来描述, 可以表示为 $R_n(\phi)$.

如果 R 是将转轴 \mathbf{n} 转到 \mathbf{n}' 的一个转动, 即

$$\mathbf{n}' = R\mathbf{n}, \tag{86}$$

则有

$$R_{n'}(\phi) = R R_n(\phi) R^{-1}. \quad (87)$$

这意味着 $\text{SO}(3)$ 群中凡是绕某一个轴转动相同角度 ϕ 的操作都属于同一类, 这为计算 $\text{SO}(3)$ 群的特征标提供了很大的方便.

2.3 $\text{SO}(3)$ 的无穷小生成元

对于 $\text{SO}(3)$ 群, 可以将无穷小形式写成

$$g = I + \varepsilon, \quad (88)$$

由正交条件 $g^T g = I$ 即得

$$\varepsilon^T = -\varepsilon, \quad (89)$$

其中 ε 是 3×3 的 3 参数反对称矩阵, 因而可以写为

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3. \quad (90)$$

由此可以得到无穷小生成元

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (91)$$

直接计算给出对易关系

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1 = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2. \quad (92)$$

上式可以统一写成

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, \quad (93)$$

其中 ε_{ijk} 是三阶全反对称张量, 满足 $\varepsilon_{123} = 1$.

$\text{SO}(3)$ 群的一般群元可以表示为

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3). \quad (94)$$

2.4 $\text{SO}(3)$ 的无穷小算符

下面来求 $\text{SO}(3)$ 群的无穷小算符. 对 $\text{SO}(3)$ 群, 由

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

可得

$$\begin{cases} dx_1 = -\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 = U_{\lambda,1}(x)\alpha_\lambda, \\ dx_2 = \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 = U_{\lambda,2}(x)\alpha_\lambda, \\ dx_3 = -\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 = U_{\lambda,3}(x)\alpha_\lambda. \end{cases} \quad (96)$$

容易得到无穷小算符

$$\hat{X}_1 = U_{1,i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} = i\hat{L}_1, \quad (97)$$

$$\hat{X}_2 = U_{2,i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} = i\hat{L}_2, \quad (98)$$

$$\hat{X}_3 = U_{3,i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} = i\hat{L}_3, \quad (99)$$

$$(100)$$

满足对易关系

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = -\hat{X}_3, \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = -\hat{X}_1, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_1] = -\hat{X}_2. \quad (101)$$

算符 \hat{L}_i 正是角动量算符, 满足

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k. \quad (102)$$

2.5 Lie 代数

每个 Lie 群都对应一个 Lie 代数, 而 Lie 代数则决定了 Lie 群单位元附近的局部性质. 因此, 研究 Lie 代数的结构及其表示对研究 Lie 群的结构及表示是非常重要的. 下面我们来研究 $SO(3)$ 的 Lie 代数.

首先我们给出 Lie 代数的定义:

定义 7 (Lie 代数) 设 \mathcal{L} 是域 K (实数域 \mathbf{R} 或复数域 \mathbf{C}) 上的有限线性向量空间, 定义映射

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}, \quad (103)$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto [\mathbf{x}, \mathbf{y}], \quad (104)$$

其中方括号运算 $[\cdot, \cdot]$ 称为 *Lie* 括号或 *Lie* 乘积, 它满足下列条件:

1. 封闭性 在向量空间中取一组基 $\{\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \dots\}$, 对任意的 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathcal{L}$, 有

$$[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j] = c_{ij}^k \mathbf{x}_k \in \mathcal{L}, \quad (105)$$

其中 $c_{ij}^k \in K$ 称为结构常数;

2. 线性 对任意向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, 有

$$[\mathbf{x}, \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2] = \lambda_1 [\mathbf{x}, \mathbf{y}_1] + \lambda_2 [\mathbf{x}, \mathbf{y}_2]; \quad (106)$$

3. 反对称 对任意向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$, 有

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}]; \quad (107)$$

4. Jacobi 恒等式 对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{L}$, 有

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = 0, \quad (108)$$

则称 \mathcal{L} 是一个 Lie 代数. \mathcal{L} 的维数就称为 Lie 代数的维数, 记为 $\dim \mathcal{L}$. 若 \mathcal{L} 定义在实数域 \mathbf{R} 上, 则称为实 Lie 代数; 若 \mathcal{L} 定义在复数域 \mathbf{C} 上, 则称为复 Lie 代数.

$\text{SO}(3)$ 群的三个无穷小生成元

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (109)$$

在对易子的运算下构成 Lie 代数:

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = -\mathbf{x}_3, \quad [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] = -\mathbf{x}_1, \quad [\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1] = -\mathbf{x}_2. \quad (110)$$

这个 Lie 代数记为 $\text{so}(3)$, 其结构常数为

$$c_{ij}^k = -\varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{123} = 1. \quad (111)$$

同理, $\text{SO}(3)$ 群的三个无穷小算符

$$\mathbf{x}_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathbf{x}_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \mathbf{x}_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (112)$$

也构成实 Lie 代数 $\text{so}(3)$.

2.6 伴随表示

利用结构常数可以构造 Lie 代数的一个表示, 即伴随表示. 定义

$$(\text{ad}(\mathbf{x}_k))_{ij} = c_{kj}^i, \quad (113)$$

可以证明

$$\text{ad}([\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k]) = [\text{ad}(\mathbf{x}_j), \text{ad}(\mathbf{x}_k)]. \quad (114)$$

因此 $\text{ad}(\mathbf{x})$ 构成 Lie 代数的一个表示, 即伴随表示.

考虑 Lie 代数 $\text{so}(3)$, 有

$$(\text{ad}(\mathbf{x}_k))_{ij} = c_{kj}^i = -\varepsilon_{kji}. \quad (115)$$

写成矩阵形式有

$$\text{ad}(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(\mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (116)$$

2.7 Killing 形式

李群的生成元和结构常数随参数的选择而改变, 不代表李代数的本质, 不能用来对李代数分类. 为此定义 Killing 形式.

定义 8 (Killing 形式) Lie 代数 \mathcal{L} 的任意两个元素 $x, y \in \mathcal{L}$ 的 Killing 形式 $g(x, y)$ 定义为

$$g(x, y) = \mathrm{Tr}[\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)], \quad (117)$$

其中 $\mathrm{ad}(x)$ 为 $x \in \mathcal{L}$ 的伴随表示矩阵. 取定一组基 $\{x_i\}$ 后, 可得

$$g_{ij} = g(x_i, x_j) = (\mathrm{ad}(x_i))_{kl}(\mathrm{ad}(x_j))_{lk} = c_{il}^k c_{jk}^l. \quad (118)$$

g_{ij} 称为 Lie 代数 \mathcal{L} 的度规张量.

根据定义, 我们将 $\mathrm{so}(3)$ Lie 代数的伴随表示代入上式可得

$$g_{ij} = -2\delta_{ij}. \quad (119)$$

关于半单 Lie 代数, 有如下定理.

定理 4 (Cartan 判据) Lie 代数 \mathcal{L} 是半单的, 当且仅当其 Killing 形式为非退化的, 即 $\det(g_{ij}) \neq 0$.

对于 $\mathrm{so}(3)$, $\det g = -8 \neq 0$, 因此 $\mathrm{so}(3)$ 是半单的. 又由于单 Lie 代数的维数必须等于或大于 2, $\mathrm{so}(3)$ 是 3 维的, 不可能分解为两个单 Lie 代数的直和, 因此是单 Lie 代数.