三峡大学

研

究

生

课

程

考

试

课程名称：群　　　　　　论

专　　业：粒子与原子核物理

姓　　名：艾 鑫

学　　号：2015111213009

群论考试试题

艾鑫

2016 年 1 月 15 日

1　有限群：非循环六阶群G_6^2

六阶群有两种结构，其中一个是循环群

$$G_6^1 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\} \tag{1}$$

另外一个就是非循环六阶群$G_6^2 = \{e, a, b, c, d, f\}$，它是最小的非阿贝尔群. 其满足下列关系

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad d^2 = f, \quad f^2 = d, \quad fd = df = e \tag{2}$$

G_6^2的乘法表如下：

G_6^2	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

(3)

1.1　G_6^2的构造

G_6^2可以通过保持正三角形不变的所有转动对称变换构成，也就是点群D_3.正三角形一共有6个对称操作：

- e 恒等变换
- c_3^1,c_3^2分别绕中心点O逆时针旋转$2\pi/3$和$4\pi/3$角
- c_{2x},c_{2y},c_{2z}分别绕x,y,z轴旋转π角

在这种构造中,c_{2x},c_{2y},c_{2z}对应于a,b,c;c_3^1,c_3^2对应于d,f.

G_6^2还可以通过置换群S_3来构造。置换群的群元有：

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}=e,\quad \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}=(12),\quad \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}=(23) \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}=(31),\quad \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}=(123),\quad \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}=(132) \tag{5}$$

其中$(12),(23),(31)$对应于a,b,c; $(123),(132)$对应于d,f.

1.2 G_6^2的子群

定义 1 (子群) *群G的子集H如果在和群G相同的乘法规则下也构成群, 则称H为群G的子群.*

对于任意一个群G，群$\{e\}$和群G本身一定是G的子群. 其他的子群, 叫做真子群或固有子群. 对于六阶非循环群G_6^2的真子群有4个：

$$H_1=\{e,a\},\quad H_2=\{e,b\},\quad H_3=\{e,c\},\quad H_4=\{e,d,f\} \tag{6}$$

要判断一个子集H是否是子群，关键要看三个地方：一是要看是否有单位元；二是看是否有逆；三是看是否满足封闭性。结合性的满足是自然的，因为H是群G的子集，群G满足结合律，H必然满足结合律。很容易验证，上面列出的4个子群都满足上述条件。

1.3 G_6^2的分解

群G的元素可以按照共轭类或者陪集进行分解. 下面给出共轭的定义.

定义 2 (共轭) *对于群G中的两个元素g_i,g_j,如果存在另一个元素$g\in G$使$g_i=gg_ig^{-1}$成立, 则称g_i,g_j是相互共轭的, 用符号∼表示, 记为$g_i\sim g_j$.*

共轭具有下列的性质:

- 每个元素都与自身共轭, $g_i\sim g_i$; (反身性)
- 如果$g_i\sim g_j$, 则有$g_j\sim g_i$; (对称性)
- 如果$g_i\sim g_j$, $g_j\sim g_k$, 则有$g_i\sim g_k$. (传递性)

定义 3 (共轭类) *群G内彼此共轭的元素集合构成共轭类,简称类.*

群中的每个元素仅属于一个类, 因为如果一个元素同时属于两个类, 那么由于共轭的传递性, 这两个类就可以合并为一个类. 由于单位元仅与自己共轭, 所以单位元自成一类. 通常用记号$[g]$表示群元g所在类的元素集合. 对于G_6^2有三个类:

$$[e]=\{e\},\quad [a]=\{a,b,c\},\quad [d]=\{d,f\} \tag{7}$$

故可以将G_6^2按类分解为:

$$G_6^2 = [e] \oplus [a] \oplus [d]. \tag{8}$$

群还可以按照陪集进行分解, 下面来对陪集进行定义.

定义 4 (陪集) *设$H \subset G$为群G的子群, 令$g_i \in G, g_i \notin H$, 则集合$g_iH = \{g_ih|h \in H\}$称为子群H的左陪集. 类似的可以定义子群H的右陪集Hg_i.*

一般来说, 左陪集不一定和右陪集相等.对于G_6^2, 考虑子群$H_1 = \{e, a\}$, 则有

$$bH_1 = \{b, f\}, \quad cH_1 = \{c, d\}, \quad H_1b = \{b, d\}, \quad H_1c = \{c, f\} \tag{9}$$

如果考虑子群$H_2 = \{e, d, f\}$, 则有

$$aH_2 = H_2a = \{a, b, c\} \tag{10}$$

因此有陪集分解

$$\begin{aligned} G_6^2 &= H_1 \oplus bH_1 \oplus cH_1 = H_2 \oplus aH_2 \\ &= H_1 \oplus H_1b \oplus H_1c = H_2 \oplus H_2a. \end{aligned} \tag{11}$$

1.4 G_6^2的不变子群

首先给出不变子群的定义.

定义 5 (不变子群) *设H是群G的一个子群, 如果对任意的$g \in G$都有$gHg^{-1} = H$或$gH = Hg$, 即H的每个左陪集和与其对应的右陪集完全相同, 则子群H称为群G的不变子群或正规子群.*

关于不变子群有如下定理:

定理 1 (不变子群) *如果H是群G的不变子群,则H一定包含群G的一些完整的类. 反之, 如果子群H包含了群G的完整的类, 则H一定是群G的不变子群.*

由这个定理知, G_6^2的子群中,子群$H_4 = \{e, d, f\}$完整的包含了群G的类$\{e\}, \{d, f\}$, 因此G_6^2的不变子群为$H_4 = \{e, d, f\}$.

1.5 商群G_6^2/H

如果群H是群G的不变子群, 则可将群G分解为下列陪集的直和:

$$G = H \oplus g_1H \oplus g_2H \oplus \cdots \oplus g_{l-1}H, \tag{12}$$

其中$g_iH = Hg_i$. 由此可以定义陪集之间的乘法

$$(g_iH)(g_jH) = g_iHg_jH = g_ig_jHH = g_kH. \tag{13}$$

可以证明,这样定义的乘法是自洽的. 这样商集

$$G/H = \{H, g_1H, g_2H, \cdots, g_{l-1}H\} \tag{14}$$

构成阶数为$l = n/n_H$的群, 其中n_H为不变子群H的阶, 这个群就称为群G的商群.

对于群G_6^2, 它有不变子群$H = \{e, d, f\}$, 陪集$M = aH = \{a, b, c\}$,商群为

$$G_6^2/H = \{H, M\} \tag{15}$$

1.6 G_6^2的二维表示矩阵

首先给出表示的定义:

定义 6 (群的表示) *如果存在从群G到作用在线性向量空间V上的算符群$\varGamma_G$的一个同态,即*

$$g \in G \mapsto \varGamma_g \in \varGamma_G, \tag{16}$$

其中$\varGamma_g$是与群元对应的算符,满足

$$\varGamma_{g_1}\varGamma_{g_2} = \varGamma_{g_1g_2} \tag{17}$$

则算符群$\varGamma_G$称为群G的一个表示,线性向量空间V的维数称为表示的维数.如果这个同态同时也是同构的, 则该表示称为忠实表示.

如果在d维向量空间V中选择一组基$\{e_i, i = 1, 2, \cdots, d\}$, 则$\varGamma_g$可以用$d \times d$的矩阵来实现, 具体为

$$\varGamma_g e_i = \sum_{j=1}^{d} e_j D_{ji}(g) \equiv e_j D_{ji}(g), \quad g \in G, i = 1, 2, \cdots, d. \tag{18}$$

下面通过D_3来构造G_6^2的二维表示矩阵. 考虑由e_1, e_2张成的二维空间, 由D_3的6个操作导出相应的矩阵表示.

设等边三角形的边长为1, 三个顶角A, B, C在所取的二维空间中的坐标为

$$A(0, \frac{1}{\sqrt{3}}), \quad B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}), \quad C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}) \tag{19}$$

- 恒元: $D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- c_3^1: 操作为$A \to C \to B$, 设$D(c_3^1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

  由

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{21}$$

导出$a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{\sqrt{3}}{2}, c=\frac{\sqrt{3}}{2}, d=-\frac{1}{2}$, 所以

$$D(c_3^1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix} \tag{22}$$

- c_3^2: 操作为$A\to B\to C$, 同理有

$$D(c_3^2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix} \tag{23}$$

- c_{2x}: 操作为$A\to A, C\to B$,

$$D(c_{2x})=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{24}$$

- c_{2y}: 操作为$B\to B, A\to C$,

$$D(c_{2y})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix} \tag{25}$$

- c_{2z}: 操作为$C\to C, A\to B$,

$$D(c_{2z})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix} \tag{26}$$

以上即为G_6^2的二维表示, 各个元素的特征标为

$$\chi(e)=2,\quad \chi(c_3^1)=-1,\quad \chi(c_3^2)=-1 \tag{27}$$

$$\chi(c_{2x})=0,\quad \chi(c_{2y})=0,\quad \chi(c_{2z})=0. \tag{28}$$

其满足表达式

$$\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2=n \tag{29}$$

其中n为群的阶, 因此这个表示为G_6^2的不可约表示.

1.7　G_6^2的不可约表示的正交性

下面给出广义正交定理:

定理 2 (广义正交定理) *设$D^{(p)}(G)$和$D^{(q)}(G)$是n阶群G的两个不等价不可约幺正表示, 维数分别为d_p和d_q. 则下列正交关系成立:*

$$\sum_{g\in G}{D_{\mu\nu}^{(p)}}^*(g)D_{\mu'\nu'}^{(q)}(g)=\frac{n}{d_p}\delta_{pq}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} \tag{30}$$

令$p=q, \mu=\mu', \nu=\nu'$, 得到

$$\sum_{g\in G}|D_{\mu\nu}^{(p)}(g)|^2=\frac{n}{d_p}. \tag{31}$$

对于固定的(p,μ,ν)值,我们可以将$\left\{\sqrt{\frac{d_p}{n}}D^{(p)}_{\mu\nu}(g)\right\}$看成是具有$n$个分量的向量$\boldsymbol{r}^{(p,\mu,\nu)}$, 其中不同的群元依次对应了向量的不同分量, 不同的(p,μ,ν)就代表了不同的向量. 则上述方程可以写成向量的正交归一关系

$$\boldsymbol{r}^{p,\mu,\nu*}\cdot\boldsymbol{r}^{p,\alpha,\beta}=\delta_{pq}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}, \tag{32}$$

即向量族$\boldsymbol{r}^{(p,\mu,\nu)}$彼此是相互正交的.

下面来验证G_6^2的不可约表示的正交性. G_6^2总共有三个不可约表示, 分别是恒等表示, 非平凡一维表示$\{e,d,f\}\mapsto 1,\{a,b,c\}\mapsto -1$和上一节提到的二维表示. 各元素的矩阵为

	e	a	b	c	d	f
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	-1	-1	-1	1	1
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$

(33)

广义正交定理表达式为:

$$\sum_{g\in G}D^{(p)^*}_{\mu\nu}(g)D^{(q)}_{\mu'\nu'}(g)=\frac{n}{d_p}\delta_{pq}\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu'\nu'} \tag{34}$$

由上表直接计算

$$\sum_{g\in G}D^{(1)^*}(g)D^{(2)}(g)=0,\quad \sum_{g\in G}D^{(3)^*}_{\mu\nu}(g)D^{(2)}(g)=0,\quad \sum_{g\in G}D^{(3)^*}_{\mu\nu}(g)D^{(1)}(g)=0, \tag{35}$$

$$\sum_{g\in G}|D^{(1)}|^2=6/1=6,\quad \sum_{g\in G}|D^{(2)}|^2=6/1=6,\quad \sum_{g\in G}|D^{(3)}_{\mu\nu}|^2=6/2=3, \tag{36}$$

结果与广义正交定理一致.

1.8 G_6^2的特征标的正交性

下面给出特征标正交定理:

定理 3 (特征标正交定理) *群G的不等价不可约表示的特征标满足正交关系*

$$\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^{(p)^*}(g)\chi^{(q)}(g)=\delta_{pq}. \tag{37}$$

由于同类元素的特征标相同,可以将求和改为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}k_i\chi^{(p)^*}([g_i])\chi^{(q)}([g_i])=\delta_{pq}, \tag{38}$$

其中$[g_i]$表示群元g_i所在的类, k_i是该类所包含的元素数.

如果群G有k个类, 则对固定的p, 可以将$\left\{\sqrt{k_i/n}\chi^{(p)}([g_i])\right\}$看成是一个$k$维向量$\boldsymbol{r}^{(p)}$, 其中不同的类对应了向量的不同分量, 而不同的不可约表示则代表了不同的向量. 这样, 特征标的正交关系就变成了k维空间向量中的正交关系

$$\boldsymbol{r}^{(p)*}\cdot\boldsymbol{r}^{(q)}=\delta_{pq}. \tag{39}$$

下面来验证G_6^2的特征标的正交性. G_6^2的特征标表为

G_6^2	e	$3a$	$2d$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	-1	1
$\Gamma^{(3)}$	2	0	-1

(40)

将特征标带入上式有:

$$(\chi^{(1)},\chi^{(2)}):\frac{1}{6}[1\times1\times1+3\times1\times(-1)+2\times1\times1]=0, \tag{41}$$

$$(\chi^{(1)},\chi^{(3)}):\frac{1}{6}[1\times1\times2+3\times1\times0+2\times1\times(-1)]=0, \tag{42}$$

$$(\chi^{(2)},\chi^{(3)}):\frac{1}{6}[1\times1\times2+3\times(-1)\times0+2\times1\times(-1)]=0, \tag{43}$$

$$(\chi^{(1)},\chi^{(1)}):1^2+3\times1^2+2\times1^2=6, \tag{44}$$

$$(\chi^{(2)},\chi^{(2)}):1^2+3\times(-1)^2+2\times1^2=6, \tag{45}$$

$$(\chi^{(3)},\chi^{(3)}):2^2+0+2\times(-1)^2=6. \tag{46}$$

1.9 G_6^2的正则表示

由群的封闭性可知,如果将群G的n个群元看成是n维向量空间的基, 即$e_i=g_i\,(i=1,2,\cdots,n)$, 同时将群元$g$看成作用在这个向量空间上的算符, 即$\Gamma_g=g(g\in G)$, 则算符对基的作用可以写成

$$\Gamma_g e_i=gg_i=g_j,\quad\{g_i\}\overset{g}{\mapsto}\{g_j\}. \tag{47}$$

上市表明这组基$\{g_i\}$张成的向量空间在算符$g(g\in G)$的作用下不变, 因此可以负载群G的一个表示. 这个表示称为正则表示. 为了得出正则表示矩阵, 将上式改写为

$$gg_i=\sum_{k=1}^{n}g_kD_{ki}^{(c)}(g),\quad\forall g\in G, \tag{48}$$

其中正则表示矩阵$D^{(c)}(g)$的定义为

$$D_{ki}^{(c)}(g)=\begin{cases}1,\quad k=j,\,gg_i=g_j,\\0,\quad k\neq j,gg_i\neq g_j.\end{cases} \tag{49}$$

可以利用乘法表来构造正则表示的表示矩阵. 有正则表示的定义, 仅当$gg_i = g_j$或$g = g_jg_i^{-1}$时, $D_{ji}^c(g) = 1$. 这意味着当$g_jg_i^{-1}$等于g时, 表示矩阵$D^{(c)}(g)$的第j行, 第i列的矩阵元为1, 其余矩阵元为0.

因此可以构造一个$g_j \sim g_j^{-1}$的乘法表, 然后按照下列规则很容易写出正则表示矩阵$D^{(c)}(g)$: 每当群元g在表中某个位置出现时, 就在表示矩阵的相应位置填上1, 其余位置则全部填0.

下面来构造G_6^2的正则表示. 首先来构造$g \sim g^{-1}$的乘法表:

	e	a	b	c	f	d
e	e	a	b	c	f	d
a	a	e	d	f	c	b
b	b	f	e	d	a	c
c	c	d	f	e	b	a
d	d	c	a	b	e	f
f	f	b	c	a	d	e

(50)

从上表可以得到G_6^2的正则表示为

$$D^{(c)}(e) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad D^{(c}(a) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

$$D^{(c)}(b) = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad D^{(c}(c) = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

$$D^{(c)}(d) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad D^{(c}(f) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

1.10 G_6^2的基础表示

前面的正则表示中负载表示的是群元本身. 实际上也可以用子群H的陪集g_iH作为基来负载群G的表示, 这样得到的表示称为基础表示. 设群G可以按子群H分解为陪集的直和

$$G = H \oplus g_2H \oplus \cdots \oplus g_lH = \sum_{i=1}^{l} g_iH, \tag{54}$$

其中$g_1 = e$. 由$g(g_iH) = gg_iH = g_jH \in \{g_iH\}$, 可以看到, 陪集$\{g_iH\}$张成的向量空间在群$G$的作用下是不变的, 因而可以负载群$G$的表示. 将上式改写为

$$g(g_iH) = \sum_{k=1}^{l} (g_kH)D_{ki}^{(d)}(g), \quad i = 1, 2, \cdots, l, g \in G, \tag{55}$$

其中矩阵$D^{(d)}(g)$定义为

$$D_{ki}^{(d)}(g) = \begin{cases} 1, & k = j, gg_i \in g_jH, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \tag{56}$$

可以用类似正则表示的方法来构造基础表示的表示矩阵. 将$gg_i \in g_jH$改写为

$$g \in g_jHg_i^{-1} = g_jHHg_i^{-1}, \tag{57}$$

可以构造乘法表$g_jH \sim Hg_i^{-1}$, 则当

$$g \in g_jHHg_i^{-1} \tag{58}$$

时, 有

$$D_{ji}^{(d)}(g) = 1; \tag{59}$$

否则

$$D_{ji}^{(d)}(g) = 0. \tag{60}$$

考虑群G_6^2的子群$H = \{e, a\}$, 容易计算得到

$$aH = \{e, a\}, \quad bH = \{b, f\}, \quad cH = \{c, d\}, \tag{61}$$

$$Ha^{-1} = \{e, a\}, \quad Hb^{-1} = \{b, d\}, \quad Hc^{-1} = \{c, f\}. \tag{62}$$

构造乘法表如下:

	Ha^{-1}	Hb^{-1}	Hc^{-1}
aH	$\{e, a\}$	$\{b, d\}$	$\{c, f\}$
bH	$\{b, f\}$	$\{e, c\}$	$\{a, d\}$
cH	$\{c, d\}$	$\{a, f\}$	$\{e, b\}$

(63)

则很容易从表中得到群G_6^2的基础表示矩阵

$$D^{(d)}(e)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad D^{(d)}(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad D^{(d)}(b)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\tag{64}$$

$$D^{(d)}(c)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad D^{(d)}(d)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad D^{(d)}(f)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.\tag{65}$$

1.11 G_6^2的特征标表

前面已经给出了特征标正交关系(行的正交性关系):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}k_i\chi^{(p)^*}([g_i])\chi^{(q)}([g_i])=\delta_{pq}\tag{66}$$

它实质上反映的是不等价不可约表示的特征标是正交的. 事实上, 特征标又有另外一个正交定理(列的正交性关系),即

$$\frac{1}{n}\sum_{p}k_i\chi^{(p)^*}([g_i])\chi^{(p)}([g_j])=\delta_{ij}.\tag{67}$$

它实质上反映的是不同共轭类的特征标同样是正交的. 因此我们可以通过这两个定理来确定特征标表.

群G_6^2有3类, 由$d_1^2+d_2^2+d_3^2=6$, 唯一解是$1^2+1^2+2^2=6$, 即G_6^2有两个一维表示, 一个二维表示. 两个一维表示中其中一个是恒等表示,另外一个是非平凡一维表示$\{e,d,f\}\mapsto 1,\{a,b,c\}\mapsto -1$, 二维表示就是之前几节提到的二维表示. 由此我们可以写出特征标表的第一行和第一列:

G_6^2	$\{e\}$	$\{e,d,f\}$	$\{e,a\}$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(1)}$	1	x	y
$\Gamma^{(1)}$	2	z	w

(68)

其余的特征标可以有正交关系得到. 对G_6^2有

$$k=3,\quad k_1=1,\quad k_2=3,\quad k_3=2.\tag{69}$$

由行的正交关系:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}k_i\chi^{(1)^*}([g_i])\chi^{(2)}([g_i])=\frac{1}{6}[1\times(1\times1)+3\times(1\times x)+2\times(1\times y)]=0,\tag{70}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}k_i\chi^{(1)^*}([g_i])\chi^{(3)}([g_i])=\frac{1}{6}[1\times(1\times2)+3\times(1\times z)+2\times(1\times w)]=0.\tag{71}$$

由列的正交关系:

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{3}k_i\chi^{(p)^*}(\{e\})\chi^{(p)}(\{e,d,f\})=\frac{1}{6}[1\times(1\times 1+1\times x+2\times z)]=0, \tag{72}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{1}k_i\chi^{(p)^*}(\{e\})\chi^{(p)}(\{e,a\})=\frac{1}{6}[1\times(1\times 1+1\times y+2\times w)]=0. \tag{73}$$

由此给出4个方程

$$1+3x+2y=0,\quad 2+3z+2w=0, \tag{74}$$

$$1+x+2z=0,\quad 1+y+2w=0. \tag{75}$$

联立求解发现这个4个方程不完全独立, 无法求解. 再考虑行归一化关系

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}k_i\chi^{(2)^*}([g_i])\chi^{(2)}([g_i])=\frac{1}{6}[1\times(1\times 1)+3\times(x\times x)+2\times(y\times y)]=1, \tag{76}$$

即有

$$1+3x^2+2y^2=6. \tag{77}$$

结合前面的方程, 联立求解得

$$x=-1,\quad y=1,\quad z=0,\quad w=-1. \tag{78}$$

最后得到G_6^2的特征标表:

G_6^2	$\{e\}$	$\{e,d,f\}$	$\{e,a\}$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(1)}$	1	-1	1
$\Gamma^{(1)}$	2	0	-1

(79)

2 李群与李代数：SO(3)

2.1 SO(3)的定义

首先我们定义实正交群$\mathrm{O}(n,\mathbf{R})=\mathrm{O}(n)$. 这是所有$n\times n$构成的群, 即

$$X'=\alpha X,\quad \alpha^T\alpha=I. \tag{80}$$

对正交条件$\alpha^T\alpha=I$,取行列式后得

$$\det(\alpha^T\alpha)=(\det\alpha)^2=1, \tag{81}$$

即

$$\det\alpha=\pm 1. \tag{82}$$

因此正交群$\mathrm{O}(n)$有两个不连通的分支, 一个分支满足$\det\alpha = 1$, 另一个分支满足$\det\alpha = -1$. 满足条件$\det\alpha = 1$的分支记为$\mathrm{SO}(n)$, 这是$\mathrm{O}(n)$群的子群. SO(3)群实际上就是我们熟悉的三维空间转动群.

2.2 SO(3)的参数化

SO(3)有3个独立参数, 有多种参数化选择. 下面介绍三个参数化方法.

2.2.1 方法一:三个平面转动的组合

可以将一个转动按如下方式分解, 先绕x轴转动α_1角, 然后绕y轴转动α_2角, 最后绕z轴转动α_3角. 因此有

$$\begin{aligned}
&R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\\
&= R_z(\alpha_3)R_y(\alpha_2)R_x(\alpha_1)\\
&= \begin{pmatrix}\cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0\\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\alpha_2\cos\alpha_3 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_3+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 & \sin\alpha_1\sin\alpha_3+\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3\\ \cos\alpha_2\sin\alpha_3 & \cos\alpha_1\cos\alpha_3+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 & -\sin\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\\ -\sin\alpha_2 & \sin\alpha_1\cos\alpha_2 & \cos\alpha_1\cos\alpha_2\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{83}$$

其中$-\pi \le \alpha_1, \alpha_2 < \pi, -\pi/2 \le \alpha_3 < \pi/2$.

2.2.2 方法二: 三个独立转动的组合

还可以用3个Euler角α,β,γ来参数化SO(3)群, 这可以用如下方法进行. 首先绕z轴转动α角, 将(x,y,z)转到(x',y',z'), 然后绕y'轴转动β角, 将(x',y',z')转到(x'',y'',z''), 最后绕z''轴转动γ角将(x'',y'',z'')转到最终位置完成转动. 因此我们有

$$\begin{aligned}
R(\alpha,\beta,\gamma) &= R_{z''}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)\\
&= R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}(\beta)^{-1}R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) = R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_z(\alpha)\\
&= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\alpha)^{-1}R_z(\gamma)R_z(\alpha) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma).
\end{aligned} \tag{84}$$

以上用到了$R_z(\gamma)$和$R_z(\alpha)$对易的事实. 因此, 利用Euler角可以将转动表示为

$$\begin{aligned}
&R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)\\
&\quad= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\\ -\sin\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{85}$$

其中$0 \le \alpha, \gamma < 2\pi, 0 \le \beta < \pi$.

2.2.3 方法三：绕一动轴的"定轴"转动

一个转动也可以用转轴$\boldsymbol{n}$以及绕转轴转过的角度ϕ来描写, 而转轴$\boldsymbol{n}$可以用两个方向如极角和方位角(θ, ψ)来确定, 因此一个转动也可以用参数(θ, ψ, ϕ)来描述, 可以表示为$R_n(\phi)$.

如果R是将转轴$\boldsymbol{n}$转到$\boldsymbol{n}'$的一个转动, 即

$$\boldsymbol{n}' = R\boldsymbol{n}, \tag{86}$$

则有

$$R_{n'}(\phi) = RR_n(\phi)R^{-1}. \tag{87}$$

这意味着SO(3)群中凡是绕某一个轴转动相同角度ϕ的操作都属于同一类, 这为计算SO(3)群的特征标提供了很大的方便.

2.3 SO(3)的无穷小生成元

对于SO(3)群, 可以将无穷小形式写成

$$g = I + \varepsilon, \tag{88}$$

由正交条件$g^T g = I$即得

$$\varepsilon^T = -\varepsilon, \tag{89}$$

其中ε是3×3的3参数反对称矩阵, 因而可以写为

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3. \tag{90}$$

由此可以得到无穷小生成元

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{91}$$

直接计算给出对易关系

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1,\, [X_3, X_1] = X_2. \tag{92}$$

上式可以统一写成

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, \tag{93}$$

其中ε_{ijk}是三阶全反对称张量, 满足$\varepsilon_{123} = 1$.

SO(3)群的一般群元可以表示为

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3). \tag{94}$$

2.4 SO(3)的无穷小算符

下面来求SO(3)群的无穷小算符. 对SO(3)群,由

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{95}$$

可得

$$\begin{cases} dx_1 = -\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 = U_{\lambda,1}(x)\alpha_\lambda, \\ dx_2 = \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 = U_{\lambda,2}(x)\alpha_\lambda, \\ dx_3 = -\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 = U_{\lambda,3}(x)\alpha_\lambda. \end{cases} \tag{96}$$

容易得到无穷小算符

$$\hat{X}_1 = U_{1,i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} = x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} = i\hat{L}_1, \tag{97}$$

$$\hat{X}_2 = U_{2,i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} = x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} = i\hat{L}_2, \tag{98}$$

$$\hat{X}_3 = U_{3,i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1} = i\hat{L}_3, \tag{99}$$

$$\tag{100}$$

满足对易关系

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = -\hat{X}_3, \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = -\hat{X}_1, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_1] = -\hat{X}_2. \tag{101}$$

算符$\hat{L}_i$正是角动量算符, 满足

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k. \tag{102}$$

2.5 Lie代数

每个Lie群都对应一个Lie代数, 而Lie代数则决定了Lie群单位元附近的局部性质. 因此, 研究Lie代数的结构及其表示对研究Lie群的结构及表示是非常重要的. 下面我们来研究SO(3)的Lie代数.

首先我们给出Lie代数的定义:

定义 7 (Lie代数) *设$\mathcal{L}$是域K(实数域$\mathbf{R}$或复数域$\mathbf{C}$)上的有限线性向量空间, 定义映射*

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}, \tag{103}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \mapsto [x, y], \tag{104}$$

其中方括号运算$[\cdot,\cdot]$称为Lie括号或Lie乘积, 它满足下列条件:

1. 封闭性　在向量空间中取一组基$\{\boldsymbol{x}_i, i = 1, 2, \cdots\}$, 对任意的$\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j \in \mathcal{L}$, 有

$$[\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j] = c_{ij}^k \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{L}, \tag{105}$$

其中$c_{ij}^k \in K$称为结构常数;

2. 线性　对任意向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, 有

$$[\boldsymbol{x}, \lambda_1 \boldsymbol{y}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{y}_2] = \lambda_1 [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1] + \lambda_2 [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2]; \tag{106}$$

3. 反对称　对任意向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$, 有

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = -[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]; \tag{107}$$

4. *Jacobi*恒等式　对任意的$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$, 有

$$[\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]] + [\boldsymbol{y}, [\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}]] + [\boldsymbol{z}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]] = 0, \tag{108}$$

则称$\mathcal{L}$是一个*Lie*代数. $\mathcal{L}$的维数就称为*Lie*代数的维数, 记为$\dim \mathcal{L}$. 若$\mathcal{L}$定义在实数域$\mathbf{R}$上, 则称为实*Lie*代数; 若$\mathcal{L}$定义在复数域$\mathbf{C}$上, 则称为复*Lie*代数.

SO(3)群的三个无穷小生成元

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{109}$$

在对易子的运算下构成Lie代数:

$$[x_1, x_2] = -x_3, \quad [x_2, x_3] = -x_1, \quad [x_3, x_1] = -x_2. \tag{110}$$

这个Lie代数记为so(3), 其结构常数为

$$c_{ij}^k = -\varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{123} = 1. \tag{111}$$

同理, SO(3)群的三个无穷小算符

$$\boldsymbol{x}_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \boldsymbol{x}_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \boldsymbol{x}_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{112}$$

也构成实Lie代数so(3).

2.6 伴随表示

利用结构常数可以构造Lie代数的一个表示, 即伴随表示. 定义

$$(\mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_k))_{ij} = c^i_{kj}, \tag{113}$$

可以证明

$$\mathrm{ad}([\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k]) = [\mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_j), \mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_k)]. \tag{114}$$

因此$\mathrm{ad}(\boldsymbol{x})$构成Lie代数的一个表示, 即伴随表示.

考虑Lie代数so(3), 有

$$(\mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_k))_{ij} = c^i_{kj} = -\varepsilon_{kji}. \tag{115}$$

写成矩阵形式有

$$\mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{116}$$

2.7 Killing 形式

李群的生成元和结构常数随参数的选择而改变, 不代表李代数的本质, 不能用来对李代数分类. 为此定义Killing形式.

定义 8 (Killing形式) *Lie代数$\mathcal{L}$的任意两个元素$x, y \in \mathcal{L}$的Killing形式$g(x, y)$定义为*

$$g(x, y) = \mathrm{Tr}[\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)], \tag{117}$$

其中$\mathrm{ad}(x)$为$x \in \mathcal{L}$的伴随表示矩阵. 取定一组基$\{x_i\}$后, 可得

$$g_{ij} = g(x_i, x_j) = (\mathrm{ad}(x_i))_{kl}(\mathrm{ad}(x_j))_{lk} = c^k_{il} c^l_{jk}. \tag{118}$$

g_{ij}称为Lie代数$\mathcal{L}$的度规张量.

根据定义, 我们将so(3)Lie代数的伴随表示代入上式可得

$$g_{ij} = -2\delta_{ij}. \tag{119}$$

关于半单Lie代数, 有如下定理.

定理 4 (Cartan判据) *Lie代数$\mathcal{L}$是半单的, 当且仅当其Killing形式为非退化的, 即$\det(g_{ij}) \neq 0$.*

对于so(3), $\det g = -8 \neq 0$, 因此so(3)是半单的. 又由于单Lie代数的维数必须等于或大于2, so(3)是3维的, 不可能分解为两个单Lie代数的直和, 因此是单Lie代数.

2.8 单根与Dynkin图

为了找出所有的半单李代数, 需要把无穷小算符之间的对易关系写成一种标准形式, 以便分类, 即下面所谓的Cartan分解.

Cartan考虑了本征值问题

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}] = \rho \boldsymbol{X}, \tag{120}$$

其中ρ为相应的本征值. 而$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{X}$都是Lie代数基$\{\boldsymbol{x}_i\}$的线性组合, 具体写为

$$\boldsymbol{A} = a^i \boldsymbol{x}_i, \quad \boldsymbol{X} = b^i \boldsymbol{x}_i. \tag{121}$$

将上式带入本征方程后得

$$a^i b^j c_{ij}^k \boldsymbol{x}_k = \rho b^k \boldsymbol{x}_k. \tag{122}$$

由于基$\{\boldsymbol{x}_i\}$是一组线性无关的向量, 因此得

$$(a^i c_{ij}^k - \rho \delta_j^k) b^j = 0. \tag{123}$$

这一方程有非零解的条件为

$$\det(|a^i c_{ij}^k - \rho \delta_j^k|) = 0. \tag{124}$$

对于r维Lie代数$\mathcal{L}$, 久期方程(124)是ρ的r次方程, 在复数域上有r个解, 每个解称为Lie代数$\mathcal{L}$的一个根. 因此r维Lie代数有r个根. 但是可能有重根. Cartan证明, 可以选择$\boldsymbol{A}$, 使重根数最少, 并且对半单Lie代数来说, 重根只发生在$\rho = 0$的情形. 下面我们给出秩的定义.

定义 9 (秩) *如果$\rho = 0$的根是l重简并的, 则l称为半单Lie代数$\mathcal{L}$的秩.*

对应根$\rho = 0$, 有l个线性无关的本证向量$\boldsymbol{H}_i$, 满足

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}_i] = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l, \tag{125}$$

其余的$r - l$个向量$\boldsymbol{E}_\alpha$都对应不同的根, 即

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}_\alpha] = \alpha \boldsymbol{E}_\alpha. \tag{126}$$

由于$\boldsymbol{H}_i$彼此对易, 即

$$[\boldsymbol{H}_i, \boldsymbol{H}_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, l, \tag{127}$$

则集合$\{\boldsymbol{H}_i, i = 1, 2, \cdots, l\}$构成Lie代数$\mathcal{L}$的一个$l$维Abel子代数, 通常称为$\mathcal{L}$的Cartan子代数, 记为$\mathcal{H}$.

对于so(3)代数, 结构常数为$c_{ij}^k = -\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ikj}$, 取$\boldsymbol{A} = a^i \boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{X} = b^i \boldsymbol{x}_i$. 久期方程为

$$\begin{vmatrix} -\rho & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & -\rho & a^1 \\ a^2 & -a^1 & -\rho \end{vmatrix} = 0. \tag{128}$$

解得:

$$\rho = 0, \quad \rho = \pm i\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \tag{129}$$

若选择

$$a^1 = a^2 = 0, \quad a^3 = i\alpha, \tag{130}$$

则根$\rho = 0, \pm\alpha$. 将各值带入本征值方程, 可得

$$\rho = 0: \quad b^1 = b^2 = 0, \quad \boldsymbol{H} = b^3\boldsymbol{x}_3 \tag{131}$$

$$\rho = \pm\alpha: \quad b^3 = 0, b^2 = \pm ib^1, \quad \boldsymbol{E}_{\pm\alpha} = b^1(x_1 \pm ix_2) \tag{132}$$

式中b^1, b^3是任意常数. 显然有$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}_{\pm\alpha}] = \pm\boldsymbol{E}_{\pm\alpha}$.

2.9 正则基

可以将半单Lie代数$\mathcal{L}$的对易关系写成如下标准形式:

$$\begin{cases} [\boldsymbol{H}_i, \boldsymbol{H}_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, l, \\ [\boldsymbol{H}_i, \boldsymbol{E}_\alpha] = \alpha_i\boldsymbol{E}_\alpha, \\ [\boldsymbol{E}_\alpha, \boldsymbol{E}_\alpha] = N_{\alpha,\beta} = N_{\alpha,\beta}\boldsymbol{E}_{\alpha+\beta}, \quad \alpha + \beta \neq 0. \\ [\boldsymbol{E}_\alpha, \boldsymbol{E}_{-\alpha}] = \alpha^i\boldsymbol{H}_i. \end{cases} \tag{133}$$

这组基通常称为Cartan-Weyl基, 或称为正则基. 对so(3)和su(2)代数, 它们的秩为1, 若一个根向量为$\alpha = \rho e_1$, 则另一个根向量为$-\rho e_1$选择适当的归一化条件, 使得$g_{\alpha,-\alpha} = 1$, 即取

$$\rho\rho + (-\rho)(-\rho) = 1 \tag{134}$$

所以$\rho = 1/\sqrt{2}$, 故标准基为

$$\boldsymbol{E}_{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \quad \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{E}_{-1/\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 \tag{135}$$

正则对易关系为

$$[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}_{\pm1/\sqrt{2}}] = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{E}_{\pm1/\sqrt{2}}, \quad [\boldsymbol{E}_{1/\sqrt{2}}, \boldsymbol{E}_{-1/\sqrt{2}}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{H} \tag{136}$$