群论考试试题

艾鑫

2016 年 1 月 9 日

1 有限群：非循环六阶群 G_6^2

六阶群有两种结构，其中一个是循环群

$$G_6^1 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\} \tag{1}$$

另外一个就是非循环六阶群 $G_6^2 = \{e, a, b, c, d, f\}$，它是最小的非阿贝尔群. 其满足下列关系

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad d^2 = f, \quad f^2 = d, \quad fd = df = e \tag{2}$$

G_6^2 的乘法表如下：

G_6^2	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

(3)

1.1 G_6^2 的构造

G_6^2 可以通过保持正三角形不变的所有转动对称变换构成，也就是点群 D_3. 正三角形一共有 6 个对称操作：

- e 恒等变换
- c_3^1,c_3^2 分别绕中心点 O 逆时针旋转 $2\pi/3$ 和 $4\pi/3$ 角
- c_{2x},c_{2y},c_{2z} 分别绕 x,y,z 轴旋转 π 角

在这种构造中,c_{2x},c_{2y},c_{2z} 对应于 a,b,c;c_3^1,c_3^2 对应于 d,f.

G_6^2 还可以通过置换群 S_3 来构造。置换群的群元有：

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}=e,\quad \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}=(12),\quad \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}=(23) \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}=(31),\quad \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}=(123),\quad \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}=(132) \tag{5}$$

其中 $(12),(23),(31)$ 对应于 a,b,c; $(123),(132)$ 对应于 d,f.

1.2 G_6^2 的子群

定义 1 (子群) *群 G 的子集 H 如果在和群 G 相同的乘法规则下也构成群, 则称 H 为群 G 的子群.*

对于任意一个群 G，群 $\{e\}$ 和群 G 本身一定是 G 的子群. 其他的子群, 叫做真子群或固有子群. 对于六阶非循环群 G_6^2 的真子群有 4 个：

$$H_1=\{e,a\},\quad H_2=\{e,b\},\quad H_3=\{e,c\},\quad H_4=\{e,d,f\} \tag{6}$$

要判断一个子集 H 是否是子群，关键要看三个地方：一是要看是否有单位元；二是看是否有逆；三是看是否满足封闭性。结合性的满足是自然的，因为 H 是群 G 的子集，群 G 满足结合律，H 必然满足结合律。很容易验证，上面列出的 4 个子群都满足上述条件。

1.3 G_6^2 的分解

群 G 的元素可以按照共轭类或者陪集进行分解. 下面给出共轭的定义.

定义 2 (共轭) *对于群 G 中的两个元素 g_i,g_j, 如果存在另一个元素 $g\in G$ 使 $g_i=gg_ig^{-1}$ 成立, 则称 g_i,g_j 是相互共轭的, 用符号 $\sim$ 表示, 记为 $g_i\sim g_j$.*

共轭具有下列的性质:

- 每个元素都与自身共轭, $g_i\sim g_i$; (反身性)
- 如果 $g_i\sim g_j$, 则有 $g_j\sim g_i$; (对称性)
- 如果 $g_i\sim g_j$, $g_j\sim g_k$, 则有 $g_i\sim g_k$. (传递性)

定义 3 (共轭类) *群 G 内彼此共轭的元素集合构成共轭类, 简称类.*

群中的每个元素仅属于一个类, 因为如果一个元素同时属于两个类, 那么由于共轭的传递性, 这两个类就可以合并为一个类. 由于单位元仅与自己共轭, 所以单位元自成一类. 通常用记号 $[g]$ 表示群元 g 所在类的元素集合. 对于 G_6^2 有三个类:

$$[e] = \{e\}, \quad [a] = \{a, b, c\}, \quad [d] = \{d, f\} \tag{7}$$

故可以将 G_6^2 按类分解为:

$$G_6^2 = [e] \oplus [a] \oplus [d]. \tag{8}$$

群还可以按照陪集进行分解, 下面来对陪集进行定义.

定义 4 (陪集) *设 $H \subset G$ 为群 G 的子群, 令 $g_i \in G, g_i \notin H$, 则集合 $g_i H = \{g_i h | h \in H\}$ 称为子群 H 的左陪集. 类似的可以定义子群 H 的右陪集 Hg_i.*

一般来说, 左陪集不一定和右陪集相等. 对于 G_6^2, 考虑子群 $H_1 = \{e, a\}$, 则有

$$bH_1 = \{b, f\}, \quad cH_1 = \{c, d\}, \quad H_1 b = \{b, d\}, \quad H_1 c = \{c, f\} \tag{9}$$

如果考虑子群 $H_2 = \{e, d, f\}$, 则有

$$aH_2 = H_2 a = \{a, b, c\} \tag{10}$$

因此有陪集分解

$$\begin{aligned} G_6^2 &= H_1 \oplus bH_1 \oplus cH_1 = H_2 \oplus aH_2 \\ &= H_1 \oplus H_1 b \oplus H_1 c = H_2 \oplus H_2 a. \end{aligned} \tag{11}$$

1.4 G_6^2 的不变子群

首先给出不变子群的定义.

定义 5 (不变子群) *设 H 是群 G 的一个子群, 如果对任意的 $g \in G$ 都有 $gHg^{-1} = H$ 或 $gH = Hg$, 即 H 的每个左陪集和与其对应的右陪集完全相同, 则子群 H 称为群 G 的不变子群或正规子群.*

关于不变子群有如下定理:

定理 1 (不变子群) *如果 H 是群 G 的不变子群, 则 H 一定包含群 G 的一些完整的类. 反之, 如果子群 H 包含了群 G 的完整的类, 则 H 一定是群 G 的不变子群.*

由这个定理知, G_6^2 的子群中, 子群 $H_4 = \{e, d, f\}$ 完整的包含了群 G 的类 $\{e\}, \{d, f\}$, 因此 G_6^2 的不变子群为 $H_4 = \{e, d, f\}$.

1.5 商群 G_6^2/H

如果群 H 是群 G 的不变子群, 则可将群 G 分解为下列陪集的直和:

$$G = H \oplus g_1 H \oplus g_2 H \oplus \cdots \oplus g_{l-1} H, \tag{12}$$

其中 $g_i H = H g_i$. 由此可以定义陪集之间的乘法

$$(g_i H)(g_j H) = g_i H g_j H = g_i g_j H H = g_k H. \tag{13}$$

可以证明, 这样定义的乘法是自洽的. 这样商集

$$G/H = \{H, g_1 H, g_2 H, \cdots, g_{l-1} H\} \tag{14}$$

构成阶数为 $l = n/n_H$ 的群, 其中 n_H 为不变子群 H 的阶, 这个群就称为群 G 的商群.

对于群 G_6^2, 它有不变子群 $H = \{e, d, f\}$, 陪集 $M = aH = \{a, b, c\}$, 商群为

$$G_6^2/H = \{H, M\} \tag{15}$$

1.6 G_6^2 的二维表示矩阵

首先给出表示的定义:

定义 6 (群的表示) *如果存在从群 G 到作用在线性向量空间 V 上的算符群 $\mathit{\Gamma}_G$ 的一个同态, 即*

$$g \in G \mapsto \mathit{\Gamma}_g \in \mathit{\Gamma}_G, \tag{16}$$

其中 $\mathit{\Gamma}_g$ 是与群元对应的算符, 满足

$$\mathit{\Gamma}_{g_1} \mathit{\Gamma}_{g_2} = \mathit{\Gamma}_{g_1 g_2} \tag{17}$$

则算符群 $\mathit{\Gamma}_G$ 称为群 G 的一个表示, 线性向量空间 V 的维数称为表示的维数. 如果这个同态同时也是同构的, 则该表示称为忠实表示.

如果在 d 维向量空间 V 中选择一组基 $\{e_i, i = 1, 2, \cdots, d\}$, 则 $\mathit{\Gamma}_g$ 可以用 $d \times d$ 的矩阵来实现, 具体为

$$\mathit{\Gamma}_g e_i = \sum_{j=1}^{d} e_j D_{ji}(g) \equiv e_j D_{ji}(g), \quad g \in G, i = 1, 2, \cdots, d. \tag{18}$$

下面通过 D_3 来构造 G_6^2 的二维表示矩阵. 考虑由 e_1, e_2 张成的二维空间, 由 D_3 的 6 个操作导出相应的矩阵表示.

设等边三角形的边长为 1, 三个顶角 A, B, C 在所取的二维空间中的坐标为

$$A(0, \frac{1}{\sqrt{3}}), \quad B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}), \quad C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}) \tag{19}$$

- 恒元: $D(e)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

- c_3^1: 操作为 $A\to C\to B$, 设 $D(c_3^1)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

  由

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix} \tag{21}$$

  导出 $a=-\frac{1}{2},b=-\frac{\sqrt{3}}{2},c=\frac{\sqrt{3}}{2},d=-\frac{1}{2}$, 所以

$$D(c_3^1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix} \tag{22}$$

- c_3^2: 操作为 $A\to B\to C$, 同理有

$$D(c_3^2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix} \tag{23}$$

- c_{2x}: 操作为 $A\to A, C\to B$,

$$D(c_{2x})=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{24}$$

- c_{2y}: 操作为 $B\to B, A\to C$,

$$D(c_{2y})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix} \tag{25}$$

- c_{2z}: 操作为 $C\to C, A\to B$,

$$D(c_{2z})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix} \tag{26}$$

  以上即为 G_6^2 的二维表示, 各个元素的特征标为

$$\chi(e)=2,\quad \chi(c_3^1)=-1,\quad \chi(c_3^2)=-1 \tag{27}$$

$$\chi(c_{2x})=0,\quad \chi(c_{2y})=0,\quad \chi(c_{2z})=0. \tag{28}$$

其满足表达式

$$\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2=n \tag{29}$$

其中 n 为群的阶, 因此这个表示为 G_6^2 的不可约表示.

1.7 G_6^2 的不可约表示的正交性

下面给出广义正交定理:

定理 2 (广义正交定理) *设 $D^{(p)}(G)$ 和 $D^{(q)}(G)$ 是 n 阶群 G 的两个不等价不可约幺正表示, 维数分别为 d_p 和 d_q. 则下列正交关系成立:*

$$\sum_{g\in G} D_{\mu\nu}^{(p)*}(g) D_{\mu'\nu'}^{(q)}(g) = \frac{n}{d_p}\delta_{pq}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} \tag{30}$$

令 $p=q, \mu=\mu', \nu=\nu'$, 得到

$$\sum_{g\in G} |D_{\mu\nu}^{(p)}(g)|^2 = \frac{n}{d_p}. \tag{31}$$

对于固定的 (p,μ,ν) 值, 我们可以将 $\left\{\sqrt{\frac{d_p}{n}} D_{\mu\nu}^{(p)}(g)\right\}$ 看成是具有 n 个分量的向量 $\boldsymbol{r}^{(p,\mu,\nu)}$, 其中不同的群元依次对应了向量的不同分量, 不同的 (p,μ,ν) 就代表了不同的向量. 则上述方程可以写成向量的正交归一关系

$$\boldsymbol{r}^{p,\mu,\nu *}\cdot \boldsymbol{r}^{p,\alpha,\beta} = \delta_{pq}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}, \tag{32}$$

即向量族 $\boldsymbol{r}^{(p,\mu,\nu)}$ 彼此是相互正交的.

下面来验证 G_6^2 的不可约表示的正交性. G_6^2 总共有三个不可约表示, 分别是恒等表示, 非平凡一维表示 $\{e,d,f\}\mapsto 1, \{a,b,c\}\mapsto -1$ 和上一节提到的二维表示. 各元素的矩阵为

	e	a	b	c	d	f
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	-1	-1	-1	1	1
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$

(33)

广义正交定理表达式为:

$$\sum_{g\in G} D_{\mu\nu}^{(p)*}(g) D_{\mu'\nu'}^{(q)}(g) = \frac{n}{d_p}\delta_{pq}\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu'\nu'} \tag{34}$$

由上表直接计算

$$\sum_{g\in G} D^{(1)*}(g)D^{(2)}(g)=0,\quad \sum_{g\in G} D_{\mu\nu}^{(3)*}(g)D^{(2)}(g)=0,\quad \sum_{g\in G} D_{\mu\nu}^{(3)*}(g)D^{(1)}(g)=0, \tag{35}$$

$$\sum_{g\in G}|D^{(1)}|^2 = 6/1=6,\quad \sum_{g\in G}|D^{(2)}|^2=6/1=6,\quad \sum_{g\in G}|D_{\mu\nu}^{(3)}|^2 = 6/2=3, \tag{36}$$

结果与广义正交定理一致.

1.8 G_6^2 的特征标的正交性

1.9 G_6^2 的正则表示

1.10 G_6^2 的基础表示

1.11 G_6^2 的特征标表

2 李群与李代数：SO(3)

测试 2