

# 群论考试试题

艾鑫

2016 年 1 月 9 日

## 1 有限群：非循环六阶群 $G_6^2$

六阶群有两种结构，其中一个为循环群

$$G_6^1 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\} \quad (1)$$

另外一个就是非循环六阶群  $G_6^2 = \{e, a, b, c, d, f\}$ ，它是最小的非阿贝尔群。其满足下列关系

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad d^2 = f, \quad f^2 = d, \quad fd = df = e \quad (2)$$

$G_6^2$  的乘法表如下：

$G_6^2$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$a$	$a$	$e$	$d$	$f$	$b$	$c$
$b$	$b$	$f$	$e$	$d$	$c$	$a$
$c$	$c$	$d$	$f$	$e$	$a$	$b$
$d$	$d$	$c$	$a$	$b$	$f$	$e$
$f$	$f$	$b$	$c$	$a$	$e$	$d$

(3)

### 1.1 $G_6^2$ 的构造

$G_6^2$  可以通过保持正三角形不变的所有转动对称变换构成，也就是点群  $D_3$ 。正三角形一共有 6 个对称操作：

- $e$  恒等变换
- $c_3^1, c_3^2$  分别绕中心点  $O$  逆时针旋转  $2\pi/3$  和  $4\pi/3$  角
- $c_{2x}, c_{2y}, c_{2z}$  分别绕  $x, y, z$  轴旋转  $\pi$  角

在这种构造中,  $c_{2x}, c_{2y}, c_{2z}$  对应于  $a, b, c$ ;  $c_3^1, c_3^2$  对应于  $d, f$ .

$G_6^2$  还可以通过置换群  $S_3$  来构造。置换群的群元有：

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} = e, \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} = (12), \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} = (23) \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = (31), \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = (123), \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} = (132) \quad (5)$$

其中  $(12), (23), (31)$  对应于  $a, b, c$ ;  $(123), (132)$  对应于  $d, f$ .

## 1.2 $G_6^2$ 的子群

**定义 1 (子群)** 群  $G$  的子集  $H$  如果在和群  $G$  相同的乘法规则下也构成群, 则称  $H$  为群  $G$  的子群.

对于任意一个群  $G$ , 群  $\{e\}$  和群  $G$  本身一定是  $G$  的子群. 其他的子群, 叫做真子群或固有子群. 对于六阶非循环群  $G_6^2$  的真子群有 4 个:

$$H_1 = \{e, a\}, \quad H_2 = \{e, b\}, \quad H_3 = \{e, c\}, \quad H_4 = \{e, d, f\} \quad (6)$$

要判断一个子集  $H$  是否是子群, 关键要看三个地方: 一是要看是否有单位元; 二是看是否有逆; 三是看是否满足封闭性. 结合性的满足是自然的, 因为  $H$  是群  $G$  的子集, 群  $G$  满足结合律,  $H$  必然满足结合律. 很容易验证, 上面列出的 4 个子群都满足上述条件.

## 1.3 $G_6^2$ 的分解

群  $G$  的元素可以按照共轭类或者陪集进行分解. 下面给出共轭的定义.

**定义 2 (共轭)** 对于群  $G$  中的两个元素  $g_i, g_j$ , 如果存在另一个元素  $g \in G$  使  $g_i = gg_jg^{-1}$  成立, 则称  $g_i, g_j$  是相互共轭的, 用符号  $\sim$  表示, 记为  $g_i \sim g_j$ .

共轭具有下列的性质:

- 每个元素都与自身共轭,  $g_i \sim g_i$ ; (反身性)
- 如果  $g_i \sim g_j$ , 则有  $g_j \sim g_i$ ; (对称性)
- 如果  $g_i \sim g_j, g_j \sim g_k$ , 则有  $g_i \sim g_k$ . (传递性)

**定义 3 (共轭类)** 群  $G$  内彼此共轭的元素集合构成共轭类, 简称类.

群中的每个元素仅属于一个类, 因为如果一个元素同时属于两个类, 那么由于共轭的传递性, 这两个类就可以合并为一个类. 由于单位元仅与自己共轭, 所以单位元自成一类. 通常用记号  $[g]$  表示群元  $g$  所在类的元素集合. 对于  $G_6^2$  有三个类:

$$[e] = \{e\}, \quad [a] = \{a, b, c\}, \quad [d] = \{d, f\} \quad (7)$$

故可以将  $G_6^2$  按类分解为:

$$G_6^2 = [e] \oplus [a] \oplus [d]. \quad (8)$$

群还可以按照陪集进行分解, 下面来对陪集进行定义.

**定义 4 (陪集)** 设  $H \subset G$  为群  $G$  的子群, 令  $g_i \in G, g_i \notin H$ , 则集合  $g_i H = \{g_i h | h \in H\}$  称为子群  $H$  的左陪集. 类似的可以定义子群  $H$  的右陪集  $H g_i$ .

一般来说, 左陪集不一定和右陪集相等. 对于  $G_6^2$ , 考虑子群  $H_1 = \{e, a\}$ , 则有

$$bH_1 = \{b, f\}, \quad cH_1 = \{c, d\}, \quad H_1 b = \{b, d\}, \quad H_1 c = \{c, f\} \quad (9)$$

如果考虑子群  $H_2 = \{e, d, f\}$ , 则有

$$aH_2 = H_2 a = \{a, b, c\} \quad (10)$$

因此有陪集分解

$$\begin{aligned} G_6^2 &= H_1 \oplus bH_1 \oplus cH_1 = H_2 \oplus aH_2 \\ &= H_1 \oplus H_1 b \oplus H_1 c = H_2 \oplus H_2 a. \end{aligned} \quad (11)$$

#### 1.4 $G_6^2$ 的不变子群

首先给出不变子群的定义.

**定义 5 (不变子群)** 设  $H$  是群  $G$  的一个子群, 如果对任意的  $g \in G$  都有  $gHg^{-1} = H$  或  $gH = Hg$ , 即  $H$  的每个左陪集和与其对应的右陪集完全相同, 则子群  $H$  称为群  $G$  的不变子群或正规子群.

关于不变子群有如下定理:

**定理 1 (不变子群)** 如果  $H$  是群  $G$  的不变子群, 则  $H$  一定包含群  $G$  的一些完整的类. 反之, 如果子群  $H$  包含了群  $G$  的完整的类, 则  $H$  一定是群  $G$  的不变子群.

由这个定理知,  $G_6^2$  的子群中, 子群  $H_4 = \{e, d, f\}$  完整的包含了群  $G$  的类  $\{e\}, \{d, f\}$ , 因此  $G_6^2$  的不变子群为  $H_4 = \{e, d, f\}$ .

### 1.5 商群 $G_6^2/H$

如果群  $H$  是群  $G$  的不变子群, 则可将群  $G$  分解为下列陪集的直和:

$$G = H \oplus g_1H \oplus g_2H \oplus \cdots \oplus g_{l-1}H, \quad (12)$$

其中  $g_iH = Hg_i$ . 由此可以定义陪集之间的乘法

$$(g_iH)(g_jH) = g_iHg_jH = g_i g_j HH = g_kH. \quad (13)$$

可以证明, 这样定义的乘法是自洽的. 这样商集

$$G/H = \{H, g_1H, g_2H, \cdots, g_{l-1}H\} \quad (14)$$

构成阶数为  $l = n/n_H$  的群, 其中  $n_H$  为不变子群  $H$  的阶, 这个群就称为群  $G$  的商群.

对于群  $G_6^2$ , 它有不变子群  $H = \{e, d, f\}$ , 陪集  $M = aH = \{a, b, c\}$ , 商群为

$$G_6^2/H = \{H, M\} \quad (15)$$

### 1.6 $G_6^2$ 的二维表示矩阵

首先给出表示的定义:

**定义 6 (群的表示)** 如果存在从群  $G$  到作用在线性向量空间  $V$  上的算符群  $\Gamma_G$  的一个同态, 即

$$g \in G \mapsto \Gamma_g \in \Gamma_G, \quad (16)$$

其中  $\Gamma_g$  是与群元对应的算符, 满足

$$\Gamma_{g_1} \Gamma_{g_2} = \Gamma_{g_1 g_2} \quad (17)$$

则算符群  $\Gamma_G$  称为群  $G$  的一个表示, 线性向量空间  $V$  的维数称为表示的维数. 如果这个同态同时也是同构的, 则该表示称为忠实表示.

如果在  $d$  维向量空间  $V$  中选择一组基  $\{e_i, i = 1, 2, \cdots, d\}$ , 则  $\Gamma_g$  可以用  $d \times d$  的矩阵来实现, 具体为

$$\Gamma_g e_i = \sum_{j=1}^d e_j D_{ji}(g) \equiv e_j D_{ji}(g), \quad g \in G, i = 1, 2, \cdots, d. \quad (18)$$

下面通过  $D_3$  来构造  $G_6^2$  的二维表示矩阵. 考虑由  $e_1, e_2$  张成的二维空间, 由  $D_3$  的 6 个操作导出相应的矩阵表示.

设等边三角形的边长为 1, 三个顶角  $A, B, C$  在所取的二维空间中的坐标为

$$A(0, \frac{1}{\sqrt{3}}), \quad B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}), \quad C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}) \quad (19)$$

- 恒元:  $D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $c_3^1$ : 操作为  $A \rightarrow C \rightarrow B$ , 设  $D(c_3^1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

由

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (21)$$

导出  $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{2}, c = \frac{\sqrt{3}}{2}, d = -\frac{1}{2}$ , 所以

$$D(c_3^1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

- $c_3^2$ : 操作为  $A \rightarrow B \rightarrow C$ , 同理有

$$D(c_3^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

- $c_{2x}$ : 操作为  $A \rightarrow A, C \rightarrow B$ ,

$$D(c_{2x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

- $c_{2y}$ : 操作为  $B \rightarrow B, A \rightarrow C$ ,

$$D(c_{2y}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

- $c_{2z}$ : 操作为  $C \rightarrow C, A \rightarrow B$ ,

$$D(c_{2z}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

以上即为  $G_6^2$  的二维表示, 各个元素的特征标为

$$\chi(e) = 2, \quad \chi(c_3^1) = -1, \quad \chi(c_3^2) = -1 \quad (27)$$

$$\chi(c_{2x}) = 0, \quad \chi(c_{2y}) = 0, \quad \chi(c_{2z}) = 0. \quad (28)$$

其满足表达式

$$\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = n \quad (29)$$

其中  $n$  为群的阶, 因此这个表示为  $G_6^2$  的不可约表示.

### 1.7 $G_6^2$ 的不可约表示的正交性

下面给出广义正交定理:

**定理 2 (广义正交定理)** 设  $D^{(p)}(G)$  和  $D^{(q)}(G)$  是  $n$  阶群  $G$  的两个不等价不可约么正表示, 维数分别为  $d_p$  和  $d_q$ . 则下列正交关系成立:

$$\sum_{g \in G} D_{\mu\nu}^{(p)*}(g) D_{\mu'\nu'}^{(q)}(g) = \frac{n}{d_p} \delta_{pq} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \quad (30)$$

令  $p = q, \mu = \mu', \nu = \nu'$ , 得到

$$\sum_{g \in G} |D_{\mu\nu}^{(p)}(g)|^2 = \frac{n}{d_p}. \quad (31)$$

对于固定的  $(p, \mu, \nu)$  值, 我们可以将  $\left\{ \sqrt{\frac{d_p}{n}} D_{\mu\nu}^{(p)}(g) \right\}$  看成是具有  $n$  个分量的向量  $\mathbf{r}^{(p, \mu, \nu)}$ , 其中不同的群元依次对应了向量的不同分量, 不同的  $(p, \mu, \nu)$  就代表了不同的向量. 则上述方程可以写成向量的正交归一关系

$$\mathbf{r}^{p, \mu, \nu*} \cdot \mathbf{r}^{p, \alpha, \beta} = \delta_{pq} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}, \quad (32)$$

即向量族  $\mathbf{r}^{(p, \mu, \nu)}$  彼此是相互正交的.

下面来验证  $G_6^2$  的不可约表示的正交性.  $G_6^2$  总共有三个不可约表示, 分别是恒等表示, 非平凡一维表示  $\{e, d, f\} \mapsto 1, \{a, b, c\} \mapsto -1$  和上一节提到的二维表示. 各元素的矩阵为

	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	-1	-1	-1	1	1
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

(33)

广义正交定理表达式为:

$$\sum_{g \in G} D_{\mu\nu}^{(p)*}(g) D_{\mu'\nu'}^{(q)}(g) = \frac{n}{d_p} \delta_{pq} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu'\nu'} \quad (34)$$

由上表直接计算

$$\sum_{g \in G} D^{(1)*}(g) D^{(2)}(g) = 0, \quad \sum_{g \in G} D_{\mu\nu}^{(3)*}(g) D^{(2)}(g) = 0, \quad \sum_{g \in G} D_{\mu\nu}^{(3)*}(g) D^{(1)}(g) = 0, \quad (35)$$

$$\sum_{g \in G} |D^{(1)}|^2 = 6/1 = 6, \quad \sum_{g \in G} |D^{(2)}|^2 = 6/1 = 6, \quad \sum_{g \in G} |D_{\mu\nu}^{(3)}|^2 = 6/2 = 3, \quad (36)$$

结果与广义正交定理一致.

## 1.8 $G_6^2$ 的特征标的正交性

下面给出特征标正交定理:

**定理 3 (特征标正交定理)** 群  $G$  的不等价不可约表示的特征标满足正交关系

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^{(p)*}(g) \chi^{(q)}(g) = \delta_{pq}. \quad (37)$$

由于同类元素的特征标相同, 可以将求和改为

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k k_i \chi^{(p)*}([g_i]) \chi^{(q)}([g_i]) = \delta_{pq}, \quad (38)$$

其中  $[g_i]$  表示群元  $g_i$  所在的类,  $k_i$  是该类所包含的元素数.

如果群  $G$  有  $k$  个类, 则对固定的  $p$ , 可以将  $\left\{ \sqrt{k_i/n} \chi^{(p)}([g_i]) \right\}$  看成是一个  $k$  维向量  $\mathbf{r}^{(p)}$ , 其中不同的类对应了向量的不同分量, 而不同的不可约表示则代表了不同的向量. 这样, 特征标的正交关系就变成了  $k$  维空间向量中的正交关系

$$\mathbf{r}^{(p)*} \cdot \mathbf{r}^{(q)} = \delta_{pq}. \quad (39)$$

下面来验证  $G_6^2$  的特征标的正交性.  $G_6^2$  的特征标表为

$G_6^2$	$e$	$3a$	$2d$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	-1	1
$\Gamma^{(3)}$	2	0	-1

(40)

将特征标带入上式有:

$$(\chi^{(1)}, \chi^{(2)}) : \frac{1}{6} [1 \times 1 \times 1 + 3 \times 1 \times (-1) + 2 \times 1 \times 1] = 0, \quad (41)$$

$$(\chi^{(1)}, \chi^{(3)}) : \frac{1}{6} [1 \times 1 \times 2 + 3 \times 1 \times 0 + 2 \times 1 \times (-1)] = 0, \quad (42)$$

$$(\chi^{(2)}, \chi^{(3)}) : \frac{1}{6} [1 \times 1 \times 2 + 3 \times (-1) \times 0 + 2 \times 1 \times (-1)] = 0, \quad (43)$$

$$(\chi^{(1)}, \chi^{(1)}) : 1^2 + 3 \times 1^2 + 2 \times 1^2 = 6, \quad (44)$$

$$(\chi^{(2)}, \chi^{(2)}) : 1^2 + 3 \times (-1)^2 + 2 \times 1^2 = 6, \quad (45)$$

$$(\chi^{(3)}, \chi^{(3)}) : 2^2 + 0 + 2 \times (-1)^2 = 6. \quad (46)$$

## 1.9 $G_6^2$ 的正则表示

由群的封闭性可知, 如果将群  $G$  的  $n$  个群元看成是  $n$  维向量空间的基, 即  $e_i = g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 同时将群元  $g$  看成作用在这个向量空间上的算符, 即  $\Gamma_g = g(g \in G)$ , 则算符对基

的作用可以写成

$$\Gamma_g e_i = gg_i = g_j, \quad \{g_i\} \xrightarrow{g} \{g_j\}. \quad (47)$$

上式表明这组基  $\{g_i\}$  张成的向量空间在算符  $g (g \in G)$  的作用下不变, 因此可以负载群  $G$  的一个表示. 这个表示称为正则表示. 为了得出正则表示矩阵, 将上式改写为

$$gg_i = \sum_{k=1}^n g_k D_{ki}^{(c)}(g), \quad \forall g \in G, \quad (48)$$

其中正则表示矩阵  $D^{(c)}(g)$  的定义为

$$D_{ki}^{(c)}(g) = \begin{cases} 1, & k = j, gg_i = g_j, \\ 0, & k \neq j, gg_i \neq g_j. \end{cases} \quad (49)$$

可以利用乘法表来构造正则表示的表示矩阵. 有正则表示的定义, 仅当  $gg_i = g_j$  或  $g = g_j g_i^{-1}$  时,  $D_{ji}^{(c)}(g) = 1$ . 这意味着当  $g_j g_i^{-1}$  等于  $g$  时, 表示矩阵  $D^{(c)}(g)$  的第  $j$  行, 第  $i$  列的矩阵元为 1, 其余矩阵元为 0.

因此可以构造一个  $g_j \sim g_j^{-1}$  的乘法表, 然后按照下列规则很容易写出正则表示矩阵  $D^{(c)}(g)$ : 每当群元  $g$  在表中某个位置出现时, 就在表示矩阵的相应位置填上 1, 其余位置则全部填 0.

### 1.10 $G_6^2$ 的基础表示

### 1.11 $G_6^2$ 的特征标表

## 2 李群与李代数: $\text{SO}(3)$

### 测试 2