

群论考试试题

艾鑫

2016 年 1 月 1 日

1 有限群：非循环六阶群 G_6^2

六阶群有两种结构，其中一个为循环群

$$G_6^1 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\} \quad (1)$$

另外一个就是非循环六阶群 $G_6^2 = \{e, a, b, c, d, f\}$ ，其满足下列关系

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad d^2 = f, \quad f^2 = d, \quad fd = df = e \quad (2)$$

G_6^2 的乘法表如下：

G_6^2	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

(3)

1.1 G_6^2 的构造

G_6^2 可以通过保持正三角形不变的所有转动对称变换构成，也就是点群 D_3 。正三角形一共有 6 个对称操作：

- e 恒等变换
- c_3^1, c_3^2 分别绕中心点 O 逆时针旋转 $2\pi/3$ 和 $4\pi/3$ 角

- c_{2x}, c_{2y}, c_{2z} 分别绕 x, y, z 轴旋转 π 角

在这种构造中, c_{2x}, c_{2y}, c_{2z} 对应于 a, b, c ; c_3^1, c_3^2 对应于 d, f .

G_6^2 还可以通过置换群 S_3 来构造。置换群的群元有：

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} = e, \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} = (12), \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} = (23) \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = (31), \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = (123), \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} = (132) \quad (5)$$

其中 $(12), (23), (31)$ 对应于 a, b, c ; $(123), (132)$ 对应于 d, f .

1.2 G_6^2 的子群

群 G 的子集 H 如果在和群 G 相同的乘法规则下也构成群, 则称 H 为群 G 的子群. 对于任意一个群 G , 群 $\{e\}$ 和群 G 本身一定是 G 的子群. 其他的子群, 叫做真子群或固有子群. 对于六阶非循环群 G_6^2 的真子群有 4 个:

$$H_1 = \{e, a\}, \quad H_2 = \{e, b\}, \quad H_3 = \{e, c\}, \quad H_4 = \{e, d, f\} \quad (6)$$

要判断一个子集 H 是否是子群, 关键要看三个地方: 一是要看是否有单位元; 二是看是否有逆; 三是看是否满足封闭性. 结合性的满足是自然的, 因为 H 是群 G 的子集, 群 G 满足结合律, H 必然满足结合律. 很容易验证, 上面列出的 4 个子群都满足上述条件.

1.3 G_6^2 的分解

群 G 的元素可以按照共轭类或者陪集进行分解. 对于群 G 中的两个元素 g_i, g_j , 如果存在另一个元素 $g \in G$ 使 $g_i = gg_jg^{-1}$ 成立, 则称 g_i, g_j 是相互共轭的, 用符号 \sim 表示, 记为 $g_i \sim g_j$. 共轭具有下列的性质:

- 每个元素都与自身共轭, $g_i \sim g_i$; (反身性)
- 如果 $g_i \sim g_j$, 则有 $g_j \sim g_i$; (对称性)
- 如果 $g_i \sim g_j, g_j \sim g_k$, 则有 $g_i \sim g_k$. (传递性)

群 G 内彼此共轭的元素集合构成共轭类, 简称类. 群中的每个元素仅属于一个类, 因为如果一个元素同时属于两个类, 那么由于共轭的传递性, 这

两个类就可以合并为一个类. 由于单位元仅与自己共轭, 所以单位元自成一类. 通常用记号 $[g]$ 表示群元 g 所在类的元素集合. 对于 G_6^2 有三个类:

$$[e] = \{e\}, \quad [a] = \{a, b, c\}, \quad [d] = \{d, f\} \quad (7)$$

故可以将 G_6^2 按类分解为:

$$G_6^2 = [e] \oplus [a] \oplus [d]. \quad (8)$$

群还可以按照陪集进行分解, 下面来对陪集定义. 设 $H \subset G$ 为群 G 的子群, 令 $g_i \in G, g_i \notin H$, 则集合 $g_i H = \{g_i h | h \in H\}$ 称为子群 H 的左陪集. 类似的可以定义子群 H 的右陪集 $H g_i$. 一般来说, 左陪集不一定和右陪集相等. 对于 G_6^2 , 考虑子群 $H_1 = \{e, a\}$, 则有

$$bH_1 = \{b, f\}, \quad cH_1 = \{c, d\}, \quad H_1 b = \{b, d\}, \quad H_1 c = \{c, f\} \quad (9)$$

如果考虑子群 $H_2 = \{e, d, f\}$, 则有

$$aH_2 = H_2 a = \{a, b, c\} \quad (10)$$

因此有陪集分解

$$\begin{aligned} G_6^2 &= H_1 \oplus bH_1 \oplus cH_1 = H_2 \oplus aH_2 \\ &= H_1 \oplus H_1 b \oplus H_1 c = H_2 \oplus H_2 a. \end{aligned} \quad (11)$$

1.4 G_6^2 的不变子群

首先给出不变子群的定义. 设 H 是群 G 的一个子群, 如果对任意的 $g \in G$ 都有 $gHg^{-1} = H$ 或 $gH = Hg$, 即 H 的每个左陪集和与其对应的右陪集完全相同, 则子群 H 称为群 G 的不变子群或正规子群.

$$a \quad (12)$$

1.5 商群 G_6^2/H

2 李群与李代数：SO(3)

测试 2