群论考试试题

艾鑫

2016 年 1 月 1 日

1 有限群：非循环六阶群 G_6^2

六阶群有两种结构，其中一个是循环群

$$G_6^1 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\} \tag{1}$$

另外一个就是非循环六阶群 $G_6^2 = \{e, a, b, c, d, f\}$，其满足下列关系

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad d^2 = f, \quad f^2 = d, \quad fd = df = e \tag{2}$$

G_6^2 的乘法表如下：

G_6^2	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

(3)

1.1 G_6^2 的构造

G_6^2 可以通过保持正三角形不变的所有转动对称变换构成，也就是点群 D_3. 正三角形一共有 6 个对称操作：

- e 恒等变换
- c_3^1,c_3^2 分别绕中心点 O 逆时针旋转 $2\pi/3$ 和 $4\pi/3$ 角

- c_{2x},c_{2y},c_{2z} 分别绕 x,y,z 轴旋转 π 角

在这种构造中,c_{2x},c_{2y},c_{2z} 对应于 a,b,c;c_3^1,c_3^2 对应于 d,f.

G_6^2 还可以通过置换群 S_3 来构造。置换群的群元有：

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}=e,\quad \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}=(12),\quad \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}=(23) \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}=(31),\quad \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}=(123),\quad \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}=(132) \tag{5}$$

其中 $(12),(23),(31)$ 对应于 a,b,c; $(123),(132)$ 对应于 d,f.

1.2 G_6^2 的子群

群 G 的子集 H 如果在和群 G 相同的乘法规则下也构成群, 则称 H 为群 G 的子群. 对于任意一个群 G，群 $\{e\}$ 和群 G 本身一定是 G 的子群. 其他的子群, 叫做真子群或固有子群. 对于六阶非循环群 G_6^2 的真子群有 4 个：

$$H_1=\{e,a\},\quad H_2=\{e,b\},\quad H_3=\{e,c\},\quad H_4=\{e,d,f\} \tag{6}$$

要判断一个子集 H 是否是子群，关键要看三个地方：一是要看是否有单位元；二是看是否有逆；三是看是否满足封闭性。结合性的满足是自然的，因为 H 是群 G 的子集，群 G 满足结合律，H 必然满足结合律。

1.3 G_6^2 的分解

1.4 G_6^2 的不变子群

1.5 商群 G_6^2/H

2 李群与李代数：SO(3)

测试 2