群论考试试题

艾鑫

2016 年 1 月 15 日

1 有限群：非循环六阶群 G_6^2

六阶群有两种结构，其中一个是循环群

$$G_6^1 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\} \tag{1}$$

另外一个就是非循环六阶群 $G_6^2 = \{e, a, b, c, d, f\}$，它是最小的非阿贝尔群. 其满足下列关系

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad d^2 = f, \quad f^2 = d, \quad fd = df = e \tag{2}$$

G_6^2 的乘法表如下：

G_6^2	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

(3)

1.1 G_6^2 的构造

G_6^2 可以通过保持正三角形不变的所有转动对称变换构成，也就是点群 D_3. 正三角形一共有 6 个对称操作：

- e 恒等变换
- c_3^1,c_3^2 分别绕中心点 O 逆时针旋转 $2\pi/3$ 和 $4\pi/3$ 角
- c_{2x},c_{2y},c_{2z} 分别绕 x,y,z 轴旋转 π 角

在这种构造中,c_{2x},c_{2y},c_{2z} 对应于 a,b,c;c_3^1,c_3^2 对应于 d,f.

G_6^2 还可以通过置换群 S_3 来构造。置换群的群元有：

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}=e,\quad \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}=(12),\quad \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}=(23) \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}=(31),\quad \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}=(123),\quad \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}=(132) \tag{5}$$

其中 $(12),(23),(31)$ 对应于 a,b,c; $(123),(132)$ 对应于 d,f.

1.2 G_6^2 的子群

定义 1 (子群) *群 G 的子集 H 如果在和群 G 相同的乘法规则下也构成群, 则称 H 为群 G 的子群.*

对于任意一个群 G，群 $\{e\}$ 和群 G 本身一定是 G 的子群. 其他的子群, 叫做真子群或固有子群. 对于六阶非循环群 G_6^2 的真子群有 4 个：

$$H_1=\{e,a\},\quad H_2=\{e,b\},\quad H_3=\{e,c\},\quad H_4=\{e,d,f\} \tag{6}$$

要判断一个子集 H 是否是子群，关键要看三个地方：一是要看是否有单位元；二是看是否有逆；三是看是否满足封闭性。结合性的满足是自然的，因为 H 是群 G 的子集，群 G 满足结合律，H 必然满足结合律。很容易验证，上面列出的 4 个子群都满足上述条件。

1.3 G_6^2 的分解

群 G 的元素可以按照共轭类或者陪集进行分解. 下面给出共轭的定义.

定义 2 (共轭) *对于群 G 中的两个元素 g_i,g_j, 如果存在另一个元素 $g\in G$ 使 $g_i=gg_ig^{-1}$ 成立, 则称 g_i,g_j 是相互共轭的, 用符号 $\sim$ 表示, 记为 $g_i\sim g_j$.*

共轭具有下列的性质:

- 每个元素都与自身共轭, $g_i\sim g_i$; (反身性)
- 如果 $g_i\sim g_j$, 则有 $g_j\sim g_i$; (对称性)
- 如果 $g_i\sim g_j$, $g_j\sim g_k$, 则有 $g_i\sim g_k$. (传递性)

定义 3 (共轭类) *群 G 内彼此共轭的元素集合构成共轭类, 简称类.*

群中的每个元素仅属于一个类, 因为如果一个元素同时属于两个类, 那么由于共轭的传递性, 这两个类就可以合并为一个类. 由于单位元仅与自己共轭, 所以单位元自成一类. 通常用记号 $[g]$ 表示群元 g 所在类的元素集合. 对于 G_6^2 有三个类:

$$[e]=\{e\},\quad [a]=\{a,b,c\},\quad [d]=\{d,f\} \tag{7}$$

故可以将 G_6^2 按类分解为:

$$G_6^2=[e]\oplus[a]\oplus[d]. \tag{8}$$

群还可以按照陪集进行分解, 下面来对陪集进行定义.

定义 4 (陪集) *设 $H\subset G$ 为群 G 的子群, 令 $g_i\in G, g_i\notin H$, 则集合 $g_iH=\{g_ih|h\in H\}$ 称为子群 H 的左陪集. 类似的可以定义子群 H 的右陪集 Hg_i.*

一般来说, 左陪集不一定和右陪集相等. 对于 G_6^2, 考虑子群 $H_1=\{e,a\}$, 则有

$$bH_1=\{b,f\},\quad cH_1=\{c,d\},\quad H_1b=\{b,d\},\quad H_1c=\{c,f\} \tag{9}$$

如果考虑子群 $H_2=\{e,d,f\}$, 则有

$$aH_2=H_2a=\{a,b,c\} \tag{10}$$

因此有陪集分解

$$\begin{aligned} G_6^2&=H_1\oplus bH_1\oplus cH_1=H_2\oplus aH_2\\ &=H_1\oplus H_1b\oplus H_1c=H_2\oplus H_2a. \end{aligned} \tag{11}$$

1.4 G_6^2 的不变子群

首先给出不变子群的定义.

定义 5 (不变子群) *设 H 是群 G 的一个子群, 如果对任意的 $g\in G$ 都有 $gHg^{-1}=H$ 或 $gH=Hg$, 即 H 的每个左陪集和与其对应的右陪集完全相同, 则子群 H 称为群 G 的不变子群或正规子群.*

关于不变子群有如下定理:

定理 1 (不变子群) *如果 H 是群 G 的不变子群, 则 H 一定包含群 G 的一些完整的类. 反之, 如果子群 H 包含了群 G 的完整的类, 则 H 一定是群 G 的不变子群.*

由这个定理知, G_6^2 的子群中, 子群 $H_4=\{e,d,f\}$ 完整的包含了群 G 的类 $\{e\},\{d,f\}$, 因此 G_6^2 的不变子群为 $H_4=\{e,d,f\}$.

1.5 商群 G_6^2/H

如果群 H 是群 G 的不变子群, 则可将群 G 分解为下列陪集的直和:

$$G = H \oplus g_1 H \oplus g_2 H \oplus \cdots \oplus g_{l-1} H, \tag{12}$$

其中 $g_i H = H g_i$. 由此可以定义陪集之间的乘法

$$(g_i H)(g_j H) = g_i H g_j H = g_i g_j H H = g_k H. \tag{13}$$

可以证明, 这样定义的乘法是自洽的. 这样商集

$$G/H = \{H, g_1 H, g_2 H, \cdots, g_{l-1} H\} \tag{14}$$

构成阶数为 $l = n/n_H$ 的群, 其中 n_H 为不变子群 H 的阶, 这个群就称为群 G 的商群.

对于群 G_6^2, 它有不变子群 $H = \{e, d, f\}$, 陪集 $M = aH = \{a, b, c\}$, 商群为

$$G_6^2/H = \{H, M\} \tag{15}$$

1.6 G_6^2 的二维表示矩阵

首先给出表示的定义:

定义 6 (群的表示) *如果存在从群 G 到作用在线性向量空间 V 上的算符群 $\mathit{\Gamma}_G$ 的一个同态, 即*

$$g \in G \mapsto \mathit{\Gamma}_g \in \mathit{\Gamma}_G, \tag{16}$$

其中 $\mathit{\Gamma}_g$ 是与群元对应的算符, 满足

$$\mathit{\Gamma}_{g_1} \mathit{\Gamma}_{g_2} = \mathit{\Gamma}_{g_1 g_2} \tag{17}$$

则算符群 $\mathit{\Gamma}_G$ 称为群 G 的一个表示, 线性向量空间 V 的维数称为表示的维数. 如果这个同态同时也是同构的, 则该表示称为忠实表示.

如果在 d 维向量空间 V 中选择一组基 $\{e_i, i = 1, 2, \cdots, d\}$, 则 $\mathit{\Gamma}_g$ 可以用 $d \times d$ 的矩阵来实现, 具体为

$$\mathit{\Gamma}_g e_i = \sum_{j=1}^{d} e_j D_{ji}(g) \equiv e_j D_{ji}(g), \quad g \in G, i = 1, 2, \cdots, d. \tag{18}$$

下面通过 D_3 来构造 G_6^2 的二维表示矩阵. 考虑由 e_1, e_2 张成的二维空间, 由 D_3 的 6 个操作导出相应的矩阵表示.

设等边三角形的边长为 1, 三个顶角 A, B, C 在所取的二维空间中的坐标为

$$A(0, \frac{1}{\sqrt{3}}), \quad B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}), \quad C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}) \tag{19}$$

- 恒元: $D(e)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

- c_3^1: 操作为 $A\to C\to B$, 设 $D(c_3^1)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

  由

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix} \tag{21}$$

  导出 $a=-\frac{1}{2},b=-\frac{\sqrt{3}}{2},c=\frac{\sqrt{3}}{2},d=-\frac{1}{2}$, 所以

$$D(c_3^1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix} \tag{22}$$

- c_3^2: 操作为 $A\to B\to C$, 同理有

$$D(c_3^2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix} \tag{23}$$

- c_{2x}: 操作为 $A\to A, C\to B$,

$$D(c_{2x})=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{24}$$

- c_{2y}: 操作为 $B\to B, A\to C$,

$$D(c_{2y})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix} \tag{25}$$

- c_{2z}: 操作为 $C\to C, A\to B$,

$$D(c_{2z})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix} \tag{26}$$

以上即为 G_6^2 的二维表示, 各个元素的特征标为

$$\chi(e)=2,\quad \chi(c_3^1)=-1,\quad \chi(c_3^2)=-1 \tag{27}$$

$$\chi(c_{2x})=0,\quad \chi(c_{2y})=0,\quad \chi(c_{2z})=0. \tag{28}$$

其满足表达式

$$\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2=n \tag{29}$$

其中 n 为群的阶, 因此这个表示为 G_6^2 的不可约表示.

1.7 G_6^2 的不可约表示的正交性

下面给出广义正交定理:

定理 2 (广义正交定理) *设 $D^{(p)}(G)$ 和 $D^{(q)}(G)$ 是 n 阶群 G 的两个不等价不可约幺正表示, 维数分别为 d_p 和 d_q. 则下列正交关系成立:*

$$\sum_{g\in G} D^{(p)*}_{\mu\nu}(g)D^{(q)}_{\mu'\nu'}(g)=\frac{n}{d_p}\delta_{pq}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} \tag{30}$$

令 $p=q,\mu=\mu',\nu=\nu'$, 得到

$$\sum_{g\in G}|D^{(p)}_{\mu\nu}(g)|^2=\frac{n}{d_p}. \tag{31}$$

对于固定的 (p,μ,ν) 值, 我们可以将 $\left\{\sqrt{\frac{d_p}{n}}D^{(p)}_{\mu\nu}(g)\right\}$ 看成是具有 n 个分量的向量 $\boldsymbol{r}^{(p,\mu,\nu)}$, 其中不同的群元依次对应了向量的不同分量, 不同的 (p,μ,ν) 就代表了不同的向量. 则上述方程可以写成向量的正交归一关系

$$\boldsymbol{r}^{p,\mu,\nu*}\cdot\boldsymbol{r}^{p,\alpha,\beta}=\delta_{pq}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}, \tag{32}$$

即向量族 $\boldsymbol{r}^{(p,\mu,\nu)}$ 彼此是相互正交的.

下面来验证 G_6^2 的不可约表示的正交性. G_6^2 总共有三个不可约表示, 分别是恒等表示, 非平凡一维表示 $\{e,d,f\}\mapsto 1,\{a,b,c\}\mapsto -1$ 和上一节提到的二维表示. 各元素的矩阵为

	e	a	b	c	d	f
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	-1	-1	-1	1	1
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\frac12\begin{pmatrix}1&-\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{pmatrix}$	$\frac12\begin{pmatrix}1&\sqrt3\\\sqrt3&-1\end{pmatrix}$	$\frac12\begin{pmatrix}-1&-\sqrt3\\\sqrt3&-1\end{pmatrix}$	$\frac12\begin{pmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{pmatrix}$

(33)

广义正交定理表达式为:

$$\sum_{g\in G} D^{(p)*}_{\mu\nu}(g)D^{(q)}_{\mu'\nu'}(g)=\frac{n}{d_p}\delta_{pq}\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu'\nu'} \tag{34}$$

由上表直接计算

$$\sum_{g\in G}D^{(1)*}(g)D^{(2)}(g)=0,\quad \sum_{g\in G}D^{(3)*}_{\mu\nu}(g)D^{(2)}(g)=0,\quad \sum_{g\in G}D^{(3)*}_{\mu\nu}(g)D^{(1)}(g)=0, \tag{35}$$

$$\sum_{g\in G}|D^{(1)}|^2=6/1=6,\quad \sum_{g\in G}|D^{(2)}|^2=6/1=6,\quad \sum_{g\in G}|D^{(3)}_{\mu\nu}|^2=6/2=3, \tag{36}$$

结果与广义正交定理一致.

1.8 G_6^2 的特征标的正交性

下面给出特征标正交定理:

定理 3 (特征标正交定理) *群 G 的不等价不可约表示的特征标满足正交关系*

$$\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^{(p)^*}(g)\chi^{(q)}(g)=\delta_{pq}. \tag{37}$$

由于同类元素的特征标相同, 可以将求和改为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}k_i\chi^{(p)^*}([g_i])\chi^{(q)}([g_i])=\delta_{pq}, \tag{38}$$

其中 $[g_i]$ 表示群元 g_i 所在的类, k_i 是该类所包含的元素数.

如果群 G 有 k 个类, 则对固定的 p, 可以将 $\left\{\sqrt{k_i/n}\chi^{(p)}([g_i])\right\}$ 看成是一个 k 维向量 $\boldsymbol{r}^{(p)}$, 其中不同的类对应了向量的不同分量, 而不同的不可约表示则代表了不同的向量. 这样, 特征标的正交关系就变成了 k 维空间向量中的正交关系

$$\boldsymbol{r}^{(p)^*}\cdot\boldsymbol{r}^{(q)}=\delta_{pq}. \tag{39}$$

下面来验证 G_6^2 的特征标的正交性. G_6^2 的特征标表为

G_6^2	e	$3a$	$2d$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	-1	1
$\Gamma^{(3)}$	2	0	-1

(40)

将特征标带入上式有:

$$(\chi^{(1)},\chi^{(2)}):\frac{1}{6}[1\times1\times1+3\times1\times(-1)+2\times1\times1]=0, \tag{41}$$

$$(\chi^{(1)},\chi^{(3)}):\frac{1}{6}[1\times1\times2+3\times1\times0+2\times1\times(-1)]=0, \tag{42}$$

$$(\chi^{(2)},\chi^{(3)}):\frac{1}{6}[1\times1\times2+3\times(-1)\times0+2\times1\times(-1)]=0, \tag{43}$$

$$(\chi^{(1)},\chi^{(1)}):1^2+3\times1^2+2\times1^2=6, \tag{44}$$

$$(\chi^{(2)},\chi^{(2)}):1^2+3\times(-1)^2+2\times1^2=6, \tag{45}$$

$$(\chi^{(3)},\chi^{(3)}):2^2+0+2\times(-1)^2=6. \tag{46}$$

1.9 G_6^2 的正则表示

由群的封闭性可知, 如果将群 G 的 n 个群元看成是 n 维向量空间的基, 即 $e_i=g_i\,(i=1,2,\cdots,n)$, 同时将群元 g 看成作用在这个向量空间上的算符, 即 $\Gamma_g=g(g\in G)$, 则算符对基

的作用可以写成

$$\Gamma_g e_i = g g_i = g_j, \quad \{g_i\} \overset{g}{\mapsto} \{g_j\}. \tag{47}$$

上市表明这组基 $\{g_i\}$ 张成的向量空间在算符 $g(g \in G)$ 的作用下不变, 因此可以负载群 G 的一个表示. 这个表示称为正则表示. 为了得出正则表示矩阵, 将上式改写为

$$g g_i = \sum_{k=1}^{n} g_k D_{ki}^{(c)}(g), \quad \forall g \in G, \tag{48}$$

其中正则表示矩阵 $D^{(c)}(g)$ 的定义为

$$D_{ki}^{(c)}(g) = \begin{cases} 1, & k = j,\, g g_i = g_j, \\ 0, & k \neq j, g g_i \neq g_j. \end{cases} \tag{49}$$

可以利用乘法表来构造正则表示的表示矩阵. 有正则表示的定义, 仅当 $g g_i = g_j$ 或 $g = g_j g_i^{-1}$ 时, $D_{ji}^{c}(g) = 1$. 这意味着当 $g_j g_i^{-1}$ 等于 g 时, 表示矩阵 $D^{(c)}(g)$ 的第 j 行, 第 i 列的矩阵元为 1, 其余矩阵元为 0.

因此可以构造一个 $g_j \sim g_j^{-1}$ 的乘法表, 然后按照下列规则很容易写出正则表示矩阵 $D^{(c)}(g)$: 每当群元 g 在表中某个位置出现时, 就在表示矩阵的相应位置填上 1, 其余位置则全部填 0.

下面来构造 G_6^2 的正则表示. 首先来构造 $g \sim g^{-1}$ 的乘法表:

	e	a	b	c	f	d
e	e	a	b	c	f	d
a	a	e	d	f	c	b
b	b	f	e	d	a	c
c	c	d	f	e	b	a
d	d	c	a	b	e	f
f	f	b	c	a	d	e

(50)

从上表可以得到 G_6^2 的正则表示为

$$D^{(c)}(e)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad D^{(c}(a)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix},\tag{51}$$

$$D^{(c)}(b)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad D^{(c}(c)=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix},\tag{52}$$

$$D^{(c)}(d)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},\quad D^{(c}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.\tag{53}$$

1.10 G_6^2 的基础表示

前面的正则表示中负载表示的是群元本身. 实际上也可以用子群 H 的陪集 g_iH 作为基来负载群 G 的表示, 这样得到的表示称为基础表示. 设群 G 可以按子群 H 分解为陪集的直和

$$G=H\oplus g_2H\oplus\cdots\oplus g_lH=\sum_{i=1}^{l}g_iH,\tag{54}$$

其中 $g_1=e$. 由 $g(g_iH)=gg_iH=g_jH\in\{g_iH\}$, 可以看到, 陪集 $\{g_iH\}$ 张成的向量空间在群 G 的作用下是不变的, 因而可以负载群 G 的表示. 将上式改写为

$$g(g_iH)=\sum_{k=1}^{l}(g_kH)D_{ki}^{(d)}(g),\quad i=1,2,\cdots,l,g\in G,\tag{55}$$

其中矩阵 $D^{(d)}(g)$ 定义为

$$D_{ki}^{(d)}(g)=\begin{cases}1, & k=j,gg_i\in g_jH,\\0, & k\neq j,\end{cases}\tag{56}$$

可以用类似正则表示的方法来构造基础表示的表示矩阵. 将 $gg_i \in g_jH$ 改写为

$$g \in g_jHg_i^{-1} = g_jHHg_i^{-1}, \tag{57}$$

可以构造乘法表 $g_jH \sim Hg_i^{-1}$, 则当

$$g \in g_jHHg_i^{-1} \tag{58}$$

时, 有

$$D_{ji}^{(d)}(g) = 1; \tag{59}$$

否则

$$D_{ji}^{(d)}(g) = 0. \tag{60}$$

考虑群 G_6^2 的子群 $H = \{e, a\}$, 容易计算得到

$$aH = \{e, a\}, \quad bH = \{b, f\}, \quad cH = \{c, d\}, \tag{61}$$

$$Ha^{-1} = \{e, a\}, \quad Hb^{-1} = \{b, d\}, \quad Hc^{-1} = \{c, f\}. \tag{62}$$

构造乘法表如下:

	Ha^{-1}	Hb^{-1}	Hc^{-1}
aH	$\{e,a\}$	$\{b,d\}$	$\{c,f\}$
bH	$\{b,f\}$	$\{e,c\}$	$\{a,d\}$
cH	$\{c,d\}$	$\{a,f\}$	$\{e,b\}$

(63)

则很容易从表中得到群 G_6^2 的基础表示矩阵

$$D^{(d)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{(d)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(d)}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

$$D^{(d)}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(d)}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(d)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

1.11 G_6^2 的特征标表

前面已经给出了特征标正交关系 (行的正交性关系):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} k_i \chi^{(p)^*}([g_i])\chi^{(q)}([g_i]) = \delta_{pq} \tag{66}$$

它实质上反映的是不等价不可约表示的特征标是正交的. 事实上, 特征标又有另外一个正交定理 (列的正交性关系), 即

$$\frac{1}{n}\sum_{p} k_i \chi^{(p)^*}([g_i])\chi^{(p)}([g_j]) = \delta_{ij}. \tag{67}$$

它实质上反映的是不同共轭类的特征标同样是正交的. 因此我们可以通过这两个定理来确定特征标表.

群 G_6^2 有 3 类, 由 $d_1^2+d_2^2+d_3^2=6$, 唯一解是 $1^2+1^2+2^2=6$, 即 G_6^2 有两个一维表示, 一个二维表示. 两个一维表示中其中一个是恒等表示, 另外一个是非平凡一维表示 $\{e,d,f\}\mapsto 1, \{a,b,c\}\mapsto -1$, 二维表示就是之前几节提到的二维表示. 由此我们可以写出特征标表的第一行和第一列:

G_6^2	$\{e\}$	$\{e,d,f\}$	$\{e,a\}$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(1)}$	1	x	y
$\Gamma^{(1)}$	2	z	w

(68)

其余的特征标可以有正交关系得到. 对 G_6^2 有

$$k=3,\quad k_1=1,\quad k_2=3,\quad k_3=2. \tag{69}$$

由行的正交关系:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}k_i\chi^{(1)^*}([g_i])\chi^{(2)}([g_i])=\frac{1}{6}[1\times(1\times 1)+3\times(1\times x)+2\times(1\times y)]=0, \tag{70}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}k_i\chi^{(1)^*}([g_i])\chi^{(3)}([g_i])=\frac{1}{6}[1\times(1\times 2)+3\times(1\times z)+2\times(1\times w)]=0. \tag{71}$$

由列的正交关系:

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{3}k_i\chi^{(p)^*}(\{e\})\chi^{(p)}(\{e,d,f\})=\frac{1}{6}[1\times(1\times 1+1\times x+2\times z)]=0, \tag{72}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{1}k_i\chi^{(p)^*}(\{e\})\chi^{(p)}(\{e,a\})=\frac{1}{6}[1\times(1\times 1+1\times y+2\times w)]=0. \tag{73}$$

由此给出 4 个方程

$$1+3x+2y=0,\quad 2+3z+2w=0, \tag{74}$$

$$1+x+2z=0,\quad 1+y+2w=0. \tag{75}$$

联立求解发现这个 4 个方程不完全独立, 无法求解. 再考虑行归一化关系

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}k_i\chi^{(2)^*}([g_i])\chi^{(2)}([g_i])=\frac{1}{6}[1\times(1\times 1)+3\times(x\times x)+2\times(y\times y)]=1, \tag{76}$$

即有

$$1+3x^2+2y^2=6. \tag{77}$$

结合前面的方程, 联立求解得

$$x = -1, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad w = -1. \tag{78}$$

最后得到 G_6^2 的特征标表:

G_6^2	$\{e\}$	$\{e, d, f\}$	$\{e, a\}$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1
$\Gamma^{(1)}$	1	-1	1
$\Gamma^{(1)}$	2	0	-1

(79)

2 李群与李代数：SO(3)

2.1 SO(3) 的定义

首先我们定义实正交群 $\mathrm{O}(n, \mathbf{R}) = \mathrm{O}(n)$. 这是所有 $n \times n$ 构成的群, 即

$$X' = \alpha X, \quad \alpha^T \alpha = I. \tag{80}$$

对正交条件 $\alpha^T \alpha = I$, 取行列式后得

$$\det(\alpha^T \alpha) = (\det \alpha)^2 = 1, \tag{81}$$

即

$$\det \alpha = \pm 1. \tag{82}$$

因此正交群 $\mathrm{O}(n)$ 有两个不连通的分支, 一个分支满足 $\det \alpha = 1$, 另一个分支满足 $\det \alpha = -1$. 满足条件 $\det \alpha = 1$ 的分支记为 $\mathrm{SO}(n)$, 这是 $\mathrm{O}(n)$ 群的子群. SO(3) 群实际上就是我们熟悉的三维空间转动群.

2.2 SO(3) 的参数化

SO(3) 有 3 个独立参数, 有多种参数化选择. 下面介绍三个参数化方法.

2.2.1 方法一: 三个平面转动的组合

可以将一个转动按如下方式分解, 先绕 x 轴转动 α_1 角, 然后绕 y 轴转动 α_2 角, 最后绕 z 轴转动 α_3 角. 因此有

$$\begin{aligned}
&R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\\
&=R_z(\alpha_3)R_y(\alpha_2)R_x(\alpha_1)\\
&=\begin{pmatrix}\cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0\\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\alpha_2\cos\alpha_3 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_3+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 & \sin\alpha_1\sin\alpha_3+\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3\\ \cos\alpha_2\sin\alpha_3 & \cos\alpha_1\cos\alpha_3+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 & -\sin\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\\ -\sin\alpha_2 & \sin\alpha_1\cos\alpha_2 & \cos\alpha_1\cos\alpha_2\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{83}$$

其中 $-\pi\le\alpha_1,\alpha_2<\pi,-\pi/2\le\alpha_3<\pi/2$.

2.2.2 方法二: 三个独立转动的组合

还可以用 3 个 Euler 角 α,β,γ 来参数化 SO(3) 群, 这可以用如下方法进行. 首先绕 z 轴转动 α 角, 将 (x,y,z) 转到 (x',y',z'), 然后绕 y' 轴转动 β 角, 将 (x',y',z') 转到 (x'',y'',z''), 最后绕 z'' 轴转动 γ 角将 (x'',y'',z'') 转到最终位置完成转动. 因此我们有

$$\begin{aligned}
R(\alpha,\beta,\gamma)&=R_{z''}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)\\
&=R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}(\beta)^{-1}R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)=R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_z(\alpha)\\
&=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\alpha)^{-1}R_z(\gamma)R_z(\alpha)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma).
\end{aligned} \tag{84}$$

以上用到了 $R_z(\gamma)$ 和 $R_z(\alpha)$ 对易的事实. 因此, 利用 Euler 角可以将转动表示为

$$\begin{aligned}
R(\alpha,\beta,\gamma)&=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)\\
&=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\\ -\sin\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{85}$$

其中 $0\le\alpha,\gamma<2\pi,0\le\beta<\pi$.

2.2.3 方法三: 绕一动轴的" 定轴" 转动

一个转动也可以用转轴 $\boldsymbol{n}$ 以及绕转轴转过的角度 ϕ 来描写, 而转轴 $\boldsymbol{n}$ 可以用两个方向如极角和方位角 (θ,ψ) 来确定, 因此一个转动也可以用参数 (θ,ψ,ϕ) 来描述, 可以表示为 $R_n(\phi)$.

如果 R 是将转轴 $\boldsymbol{n}$ 转到 $\boldsymbol{n}'$ 的一个转动, 即

$$\boldsymbol{n}'=R\boldsymbol{n}, \tag{86}$$

则有

$$R_{n'}(\phi) = RR_n(\phi)R^{-1}. \tag{87}$$

这意味着 SO(3) 群中凡是绕某一个轴转动相同角度 ϕ 的操作都属于同一类, 这为计算 SO(3) 群的特征标提供了很大的方便.

2.3 SO(3) 的无穷小生成元

对于 SO(3) 群, 可以将无穷小形式写成

$$g = I + \varepsilon, \tag{88}$$

由正交条件 $g^T g = I$ 即得

$$\varepsilon^T = -\varepsilon, \tag{89}$$

其中 ε 是 3×3 的 3 参数反对称矩阵, 因而可以写为

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3. \tag{90}$$

由此可以得到无穷小生成元

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{91}$$

直接计算给出对易关系

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1 = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \, [X_3, X_1] = X_2. \tag{92}$$

上式可以统一写成

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, \tag{93}$$

其中 ε_{ijk} 是三阶全反对称张量, 满足 $\varepsilon_{123} = 1$.

SO(3) 群的一般群元可以表示为

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3). \tag{94}$$

2.4 SO(3) 的无穷小算符

下面来求 SO(3) 群的无穷小算符. 对 SO(3) 群, 由

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{95}$$

可得

$$\begin{cases} dx_1 = -\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 = U_{\lambda,1}(x)\alpha_\lambda, \\ dx_2 = \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 = U_{\lambda,2}(x)\alpha_\lambda, \\ dx_3 = -\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 = U_{\lambda,3}(x)\alpha_\lambda. \end{cases} \tag{96}$$

容易得到无穷小算符

$$\hat{X}_1 = U_{1,i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} = x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} = i\hat{L}_1, \tag{97}$$

$$\hat{X}_2 = U_{2,i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} = x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} = i\hat{L}_2, \tag{98}$$

$$\hat{X}_3 = U_{3,i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1} = i\hat{L}_3, \tag{99}$$

$$\tag{100}$$

满足对易关系

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = -\hat{X}_3, \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = -\hat{X}_1, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_1] = -\hat{X}_2. \tag{101}$$

算符 $\hat{L}_i$ 正是角动量算符, 满足

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k. \tag{102}$$

2.5 Lie 代数

每个 Lie 群都对应一个 Lie 代数, 而 Lie 代数则决定了 Lie 群单位元附近的局部性质. 因此, 研究 Lie 代数的结构及其表示对研究 Lie 群的结构及表示是非常重要的. 下面我们来研究 SO(3) 的 Lie 代数.

首先我们给出 Lie 代数的定义:

定义 7 (Lie 代数) *设 $\mathcal{L}$ 是域 K(实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$) 上的有限线性向量空间, 定义映射*

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}, \tag{103}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \mapsto [x, y], \tag{104}$$

其中方括号运算 $[\cdot,\cdot]$ 称为 Lie 括号或 Lie 乘积, 它满足下列条件:

1. *封闭性　在向量空间中取一组基 $\{\boldsymbol{x}_i, i = 1, 2, \cdots\}$, 对任意的 $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j \in \mathcal{L}$, 有*

$$[\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j] = c_{ij}^k \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{L}, \tag{105}$$

其中 $c_{ij}^k \in K$ 称为结构常数;

2. *线性　对任意向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, 有*

$$[\boldsymbol{x}, \lambda_1\boldsymbol{y}_1 + \lambda_1\boldsymbol{y}_2] = \lambda_1[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1] + \lambda_2[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2]; \tag{106}$$

3. 反对称 对任意向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$, 有

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = -[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]; \tag{107}$$

4. Jacobi 恒等式 对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$, 有

$$[\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]] + [\boldsymbol{y}, [\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}]] + [\boldsymbol{z}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]] = 0, \tag{108}$$

则称 $\mathcal{L}$ 是一个 Lie 代数. $\mathcal{L}$ 的维数就称为 Lie 代数的维数, 记为 $\dim \mathcal{L}$. 若 $\mathcal{L}$ 定义在实数域 $\mathbf{R}$ 上, 则称为实 Lie 代数; 若 $\mathcal{L}$ 定义在复数域 $\mathbf{C}$ 上, 则称为复 Lie 代数.

SO(3) 群的三个无穷小生成元

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{109}$$

在对易子的运算下构成 Lie 代数:

$$[x_1, x_2] = -x_3, \quad [x_2, x_3] = -x_1, \quad [x_3, x_1] = -x_2. \tag{110}$$

这个 Lie 代数记为 so(3), 其结构常数为

$$c_{ij}^k = -\varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{123} = 1. \tag{111}$$

同理, SO(3) 群的三个无穷小算符

$$\boldsymbol{x}_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \boldsymbol{x}_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \boldsymbol{x}_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{112}$$

也构成实 Lie 代数 so(3).

2.6 伴随表示

利用结构常数可以构造 Lie 代数的一个表示, 即伴随表示. 定义

$$(\mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_k))_{ij} = c_{kj}^i, \tag{113}$$

可以证明

$$\mathrm{ad}([\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k]) = [\mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_j), \mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_k)]. \tag{114}$$

因此 $\mathrm{ad}(\boldsymbol{x})$ 构成 Lie 代数的一个表示, 即伴随表示.

考虑 Lie 代数 so(3), 有

$$(\mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_k))_{ij} = c_{kj}^i = -\varepsilon_{kji}. \tag{115}$$

写成矩阵形式有

$$\mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}(\boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{116}$$

2.7 Killing 形式

李群的生成元和结构常数随参数的选择而改变, 不代表李代数的本质, 不能用来对李代数分类. 为此定义 Killing 形式.

定义 8 (Killing 形式) *Lie 代数 $\mathcal{L}$ 的任意两个元素 $x, y \in \mathcal{L}$ 的 Killing 形式 $g(x, y)$ 定义为*

$$g(x, y) = \mathrm{Tr}[\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)], \tag{117}$$

其中 $\mathrm{ad}(x)$ 为 $x \in \mathcal{L}$ 的伴随表示矩阵. 取定一组基 $\{x_i\}$ 后, 可得

$$g_{ij} = g(x_i, x_j) = (\mathrm{ad}(x_i))_{kl}(\mathrm{ad}(x_j))_{lk} = c^k_{il} c^l_{jk}. \tag{118}$$

g_{ij} 称为 Lie 代数 $\mathcal{L}$ 的度规张量.

根据定义, 我们将 so(3)Lie 代数的伴随表示代入上式可得

$$g_{ij} = -2\delta_{ij}. \tag{119}$$

关于半单 Lie 代数, 有如下定理.

定理 4 (Cartan 判据) *Lie 代数 $\mathcal{L}$ 是半单的, 当且仅当其 Killing 形式为非退化的, 即* $\det(g_{ij}) \neq 0$.

对于 so(3), $\det g = -8 \neq 0$, 因此 so(3) 是半单的. 又由于单 Lie 代数的维数必须等于或大于 2, so(3) 是 3 维的, 不可能分解为两个单 Lie 代数的直和, 因此是单 Lie 代数.

2.8 单根与 Dynkin 图

为了找出所有的半单李代数, 需要把无穷小算符之间的对易关系写成一种标准形式, 以便分类, 即下面所谓的 Cartan 分解.

Cartan 考虑了本征值问题

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}] = \rho \boldsymbol{X}, \tag{120}$$

其中 ρ 为相应的本征值. 而 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 都是 Lie 代数基 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 的线性组合, 具体写为

$$\boldsymbol{A} = a^i \boldsymbol{x}_i, \quad \boldsymbol{X} = b^i \boldsymbol{x}_i. \tag{121}$$

将上式带入本征方程后得

$$a^i b^j c^k_{ij} \boldsymbol{x}_k = \rho b^k \boldsymbol{x}_k. \tag{122}$$

由于基 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 是一组线性无关的向量, 因此得

$$(a^i c^k_{ij} - \rho \delta^k_j) b^j = 0. \tag{123}$$

这一方程有非零解的条件为

$$\det(|a^i c_{ij}^k - \rho\delta_j^k|) = 0. \tag{124}$$

对于 r 维 Lie 代数 $\mathcal{L}$, 久期方程(124)是 ρ 的 r 次方程, 在复数域上有 r 个解, 每个解称为 Lie 代数 $\mathcal{L}$ 的一个根. 因此 r 维 Lie 代数有 r 个根. 但是可能有重根. Cartan 证明, 可以选择 $\boldsymbol{A}$, 使重根数最少, 并且对半单 Lie 代数来说, 重根只发生在 $\rho = 0$ 的情形. 下面我们给出秩的定义.

定义 9 (秩) *如果 $\rho = 0$ 的根是 l 重简并的, 则 l 称为半单 Lie 代数 $\mathcal{L}$ 的秩.*

对应根 $\rho = 0$, 有 l 个线性无关的本证向量 $\boldsymbol{H}_i$, 满足

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}_i] = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l, \tag{125}$$

其余的 $r - l$ 个向量 $\boldsymbol{E}_\alpha$ 都对应不同的根, 即

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}_\alpha] = \alpha\boldsymbol{E}_\alpha. \tag{126}$$

由于 $\boldsymbol{H}_i$ 彼此对易, 即

$$[\boldsymbol{H}_i, \boldsymbol{H}_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, l, \tag{127}$$

则集合 $\{\boldsymbol{H}_i, i = 1, 2, \cdots, l\}$ 构成 Lie 代数 $\mathcal{L}$ 的一个 l 维 Abel 子代数, 通常称为 $\mathcal{L}$ 的 Cartan 子代数, 记为 $\mathcal{H}$.

对于 so(3) 代数, 结构常数为 $c_{ij}^k = -\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ikj}$, 取 $\boldsymbol{A} = a^i\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{X} = b^i\boldsymbol{x}_i$. 久期方程为

$$\begin{vmatrix} -\rho & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & -\rho & a^1 \\ a^2 & -a^1 & -\rho \end{vmatrix} = 0. \tag{128}$$

解得:

$$\rho = 0, \quad \rho = \pm i\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \tag{129}$$

若选择

$$a^1 = a^2 = 0, \quad a^3 = i\alpha, \tag{130}$$

则根 $\rho = 0, \pm\alpha$. 将各值带入本征值方程, 可得

$$\rho = 0: \quad b^1 = b^2 = 0, \quad \boldsymbol{H} = b^3\boldsymbol{x}_3 \tag{131}$$

$$\rho = \pm\alpha: \quad b^3 = 0, b^2 = \pm ib^1, \quad \boldsymbol{E}_{\pm\alpha} = b^1(x_1 \pm ix_2) \tag{132}$$

式中 b^1, b^3 是任意常数. 显然有 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}_{\pm\alpha}] = \pm\boldsymbol{E}_{\pm\alpha}$.

2.9 正则基

可以将半单 Lie 代数 $\mathcal{L}$ 的对易关系写成如下标准形式:

$$\begin{cases} [\boldsymbol{H}_i, \boldsymbol{H}_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, l, \\ [\boldsymbol{H}_i, \boldsymbol{E}_\alpha] = \alpha_i \boldsymbol{E}_\alpha, \\ [\boldsymbol{E}_\alpha, \boldsymbol{E}_\alpha] = N_{\alpha,\beta} = N_{\alpha,\beta} \boldsymbol{E}_{\alpha+\beta}, \quad \alpha + \beta \neq 0. \\ [\boldsymbol{E}_\alpha, \boldsymbol{E}_{-\alpha}] = \alpha^i \boldsymbol{H}_i. \end{cases} \tag{133}$$

这组基通常称为 Cartan-Weyl 基, 或称为正则基. 对 so(3) 和 su(2) 代数, 它们的秩为 1, 若一个根向量为 $\alpha = \rho e_1$, 则另一个根向量为 $-\rho e_1$ 选择适当的归一化条件, 使得 $g_{\alpha,-\alpha} = 1$, 即取

$$\rho\rho + (-\rho)(-\rho) = 1 \tag{134}$$

所以 $\rho = 1/\sqrt{2}$, 故标准基为

$$\boldsymbol{E}_{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1, \quad \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{E}_{-1/\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_1 \tag{135}$$

正则对易关系为

$$[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}_{\pm 1/\sqrt{2}}] = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{E}_{\pm 1/\sqrt{2}}, \quad [\boldsymbol{E}_{1/\sqrt{2}}, \boldsymbol{E}_{-1/\sqrt{2}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{H} \tag{136}$$