# 相对论重离子碰撞作业

艾鑫

2016 年 1 月 14 日

1. 证明 $x_+, x_-$ 是洛伦兹不变量, 证明快度是洛伦兹变换可加量.

**解**: 考虑参考系 $F$ 和 $F'$, $F'$ 系相对于 $F$ 系以速度 $\beta$ 沿着 $x$ 轴匀速运动. 在 $F$ 系中的四矢量 $c = (c_0, \boldsymbol{c}_T, c_z)$, 在 $F'$ 系中变为 $c' = (c'_0, \boldsymbol{c}'_T, c'_z)$. 它们两者由洛伦兹变换联系起来:

$$c'_0 = \gamma(c_0 - \beta c_z), \tag{1}$$

$$c'_z = \gamma(c_z - \beta c_0), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{c}'_T = \boldsymbol{c}_T. \tag{3}$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4}$$

将(1)和(2)相加得到:

$$c'_0 + c'_z = \gamma(1-\beta)(c_0 + c_z). \tag{5}$$

因此 $c'_0 + c'_z$ 与 $c_0 + c_z$ 直相差一个因子 $\gamma(1-\beta)$. 类似的, 另外一个粒子 $b$ 在 $F$ 系的前向光锥动量 $b_0 + b_z$ 与在 $F'$ 系中前向光锥动量 $b'_0 + b'_z$ 的关系为:

$$b'_0 + b'_z = \gamma(1-\beta)(b_0 + b_z). \tag{6}$$

由 $x_+$ 的定义有

$$x_+ = \frac{c_0 + c_z}{b_0 + b_z} \tag{7}$$

$$x'_+ = \frac{c'_0 + c'_z}{b'_0 + b'_z} \tag{8}$$

由(5)和(6)很容易得到:

$$x_+ = x'_+ \tag{9}$$

因此, 光锥变量 $x_+$ 是洛伦兹不变量. 同理可证, $x_-$ 也是洛伦兹不变量.

下面证明快度是洛伦兹可加量. 首先在 $F$ 系中的快度有:

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z}\right). \tag{10}$$

在 $F'$ 系中有:

$$y' = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_0' + p_z'}{p_0' - p_z'}\right). \tag{11}$$

由洛伦兹变换有:

$$p_0' = \gamma(p_0 - \beta p_z) \tag{12}$$

$$p_z' = \gamma(p_z - \beta p_0). \tag{13}$$

因此

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\gamma(1-\beta)(p_0+p_z)}{\gamma(1+\beta)(p_0-p_z)}\right] \\ &= y + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \\ &= y - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

由上式可知, $y'$ 与 $y$ 只相差一个因子 $\frac{1}{2}\ln((1+\beta)/(1-\beta))$, 因此快度是洛伦兹不变量.

2. 在无限大动量参照系中, 讨论相对论硬散射过程, $A+B \to C+X$. 证明:

(1) $b^2 = [x_b(1-x_b)B^2 - x_b\beta^2 - b_T^2]/(1-x_b)$

(2) $a^2 = [x_a(1-x_a)A^2 - x_a\alpha^2 - a_T^2]/(1-x_a)$

**解**: 考虑入射粒子 $B$ 和靶核 $A$, 在无限大动量参考系中 $A$ 和 $B$ 的动量可写为:

$$B = (B_0, \boldsymbol{B}_T, B_z) = (P_1 + \frac{B^2+B_T^2}{4P_1}, \boldsymbol{B}_T, P_1 - \frac{B^2+B_T^2}{4P_1}) \tag{15}$$

$$A = (A_0, \boldsymbol{A}_T, A_z) = (P_2 + \frac{A^2+A_T^2}{4P_2}, \boldsymbol{A}_T, -P_2 + \frac{A^2+A_T^2}{4P_2}) \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

对于反应 $A+B \to C+X$, 我们可以认为 $C$ 是由 $A$ 的部分子 $a$ 和 $B$ 的部分子 $b$ 作用形成的 $c$, 然后进一步反应形成的. 我们引入 $b$ 相对于 $B$ 的前向光锥动量比 $x_b$:

$$x_b = \frac{b_0 + b_z}{B_0 + B_z}, \tag{18}$$

同样, 我们定义 $a$ 相对于 $A$ 的后向光锥动量比 $x_a$:

$$x_a = \frac{a_0 - a_z}{A_0 - A_z}. \tag{19}$$

利用公式(15)和(18), 我们可以写出 $b$ 的动量:

$$b = \left(x_b P_1 + \frac{b^2+b_T^2}{4x_b P_1}, \boldsymbol{b}_T, x_b P_1 - \frac{b^2+b_T^2}{4x_b P_1}\right). \tag{20}$$

类似的, 我们可以写出 $a$ 的动量:

$$a=\left(x_aP_2+\frac{a^2+a_T^2}{4x_aP_2},\boldsymbol{a}_T,-x_aP_2+\frac{a^2+a_T^2}{4x_aP_2}\right). \tag{21}$$

因此动量 $\beta=(B-b)$ 和 $\alpha=(A-a)$ 可以写为:

$$\beta=\left((1-x_b)P_1+\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)P_1},-\boldsymbol{b}_T,(1-x_b)P_1-\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)P_1}\right), \tag{22}$$

$$\alpha=\left((1-x_a)P_2+\frac{\alpha^2+\alpha_T^2}{4(1-x_a)P_2},-\boldsymbol{a}_T,-(1-x_a)P_2+\frac{\alpha^2+\alpha_T^2}{4(1-x_a)P_2}\right). \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

由于 $b=B-\beta$, 我们可以得到:

$$b^2=B^2-2B\cdot\beta+\beta^2. \tag{25}$$

利用公式(15)和(22)我们可以得到:

$$\begin{aligned}B\cdot\beta=&\left(P_1+\frac{B^2}{4P_1})((1-x_b)P_1+\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)P_1}\right)-\left(P_1-\frac{B^2}{4P_1})((1-x_b)P_1-\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)P_1}\right)\\
=&\left[(1-x_b)P_1^2+\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)}+\frac{(1-x_b)B^2}{4}+\frac{B^2(\beta^2+\beta_T^2)}{16(1-x_b)P_1^2}\right]-\\
&\left[(1-x_b)P_1^2-\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)}-\frac{(1-x_b)B^2}{4}+\frac{B^2(\beta^2+\beta_T^2)}{16(1-x_b)P_1^2}\right]\\
=&\frac{\beta^2+\beta_T^2}{2(1-x_b)}+\frac{(1-x_b)B^2}{2}\\
=&\frac{\beta^2+\beta_T^2+(1-x_b)^2B^2}{2(1-x_b)}.\end{aligned} \tag{26}$$

因此,

$$\begin{aligned}b^2&=B^2+\beta^2-2B\cdot\beta\\
&=B^2+\beta^2-\frac{\beta^2+\beta_T^2+(1-x_b)^2B^2}{1-x_b}\\
&=\frac{B^2(1-x_b)+\beta^2(1-x_b)-[\beta^2+\beta_T^2+(1-x_b)^2B^2]}{1-x_b}\\
&=\frac{x_b(1-x_b)B^2-x_b\beta^2-\beta_T^2}{1-x_b}\\
&=\frac{x_b(1-x_b)B^2-x_b\beta^2-b_T^2}{1-x_b}.\end{aligned} \tag{27}$$

同理可证, 对 $a$ 有

$$a^2=\frac{x_a(1-x_a)A^2-x_a\alpha^2-a_T^2}{1-x_a}. \tag{28}$$

3. 在 QED 理论中, 有一个费米场 $\psi$ 和电磁场 $A^\mu$, $A^\mu$ 又称为规范场, 试证明无质量费米子的电磁相互作用, 等同于一个质量 $m = e/\sqrt{\pi}$ 的自由玻色场 $\phi$, $e$ 为电磁耦合常数.

**解**: 我们从充满电子的狄拉克负能海出发, 如果在某个空间区间内有一个电荷密度或电流的扰动, 将会产生一个电磁规范场 $A^\mu$, 它将影响费米子场算符, 结果费米子场的变化将使所有的电子处于各种运动和激发状态. 显然, 这种运动和激发会产生电荷密度 $j^0$ 和电流 $j^1$. 下面我们来求产生的电流 $j^\mu$ 和扰动源 —规范场 $A^\mu$ 的依赖关系.

首先, 我们注意到这两个量在规范变换下是不一样的. 在量子点动力学中, 流 $j^\mu$ 这样的物理量是规范不变量, 即它们在规范场从 $A^\mu$ 到 $\bar{A}^\mu$ 按如下规范变换时保持不变,

$$\bar{A}^\mu(x) = A^\mu(x) - \partial^\mu \lambda(x), \tag{29}$$

而费米子场算符 $\psi(A)$ 的变换为,

$$\psi(x, \bar{A}(x)) = e^{ie\lambda(x)} \psi(x, A(x)), \tag{30}$$

其中 $\lambda(x)$ 是一个 $x$ 的任意函数. 对任意函数 $\lambda(x)$ 的不同选择代表不同的规范, 而物理量必须与规范的选择无关.

尽管产生的流 $j^\mu(x)$ 依赖于它的规范场源 $A^\mu(x)$, 但是 $j^\mu(x)$ 和 $A^\mu(x)$ 在规范变换下的行为又是不同的, 流是规范不变的, 而规范场却依赖于规范的选择. 当考虑了流的规范不变性后, 产生的流 $j^\mu(x)$ 与局域电磁扰动 $A^\mu(x)$ 的关系为

$$j^\mu(x) = -\frac{e^2}{\pi}[A^\mu(x) - \partial^\mu \frac{1}{\partial^\lambda \partial_\lambda} \partial_\nu A^\nu(x)]. \tag{31}$$

由规范场 $A^\mu$ 产生的流 $j^\mu$ 反过来又是规范场 $A^\mu$ 的源, $j^\mu$ 确定的规范场 $A^\mu$ 满足麦克斯韦方程:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -j^\mu. \tag{32}$$

当由 $j^\mu$ 产生的规范场 $A^\mu$ 和由(31)式引入的电磁场 $A^\mu$ 是自洽一致的时候, 我们可以得到这个系统的动力学. 利用这个条件, 我们得到一个描述规范场 $A^\mu$ 动力学的运动方程:

$$\partial_\nu \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{e^2}{\pi}[A^\mu - \partial^\mu \frac{1}{\partial^\lambda \partial_\lambda} \partial_\nu A^\nu], \tag{33}$$

该方程成立的条件是

$$-\Box A^\mu - \frac{e^2}{\pi} A^\mu = 0. \tag{34}$$

这里, 算符 $\Box$ 代表 $\partial_\nu \partial^\nu$, 它在坐标表象中等于算符 $-p^2$.

用 $p^2$ 来表示, 上式可以被写做:

$$p^2 A^\mu - \frac{e^2}{\pi} A^\mu = 0. \tag{35}$$

我们可以将上式与 Klein-Gordon 方程比较, 如果 $A^\mu$ 是一个质量为 $m$ 的自由玻色子场, 有

$$p^2 A^\mu - m^2 A^\mu = 0. \tag{36}$$

可以得到, 规范场 $A^\mu$ 满足 Klein-Gordon 方程就像是一个自由的玻色子, 其具有质量

$$m = \frac{e}{\sqrt{\pi}}. \tag{37}$$

因此, 包含无质量费米子的 $\mathrm{QED}_2$ 等效于一个具有质量 $e/\sqrt{\pi}$ 的自由玻色子场.

4. 利用 $1+1$ 维相对论理想流体力学方程, 导出 QGP 物质熵随时间的变化关系, 以及发生 QGP 到强子物质相变, 发生相变时间.

**解**: 我们用 Bjorken 的流体力学模型来概括在演化的流体动力学相中的等离子体动力学, 其中等离子体被理想地描述为一种相对论气体. 在初始 $\tau = \tau_0$ 时, 等离子体达到局域热平衡, 且初始能量密度为 $\epsilon_0$, 初始温度 $T(\tau_0)$ 正比于 $\epsilon_0^{1/4}$. 随后, 能量密度及压力随固有时以 $\tau^{-4/3}$ 下降, 而温度以 $\tau^{-1/3}$ 下降.

下面我们来求熵密度与固有时的关系. 在不变的温度和压力下, 能量的变化与体积和熵的变化关系为

$$\mathrm{d}E = -P\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S. \tag{38}$$

这样可以写出用 $\epsilon$ 和 $P$ 表示熵密度 $s = \mathrm{d}S/\,\mathrm{d}V$ 的关系式为

$$s \equiv \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V} = \frac{\epsilon + P}{T}. \tag{39}$$

因而, 熵密度与固有时的关系为

$$\frac{s(\tau)}{s(\tau_0)} = \frac{\epsilon(\tau) + P(\tau)}{\epsilon(\tau_0) + P(\tau_0)} \frac{T(\tau_0)}{T(\tau)} = \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{4/3} \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{1/3} = \frac{\tau_0}{\tau}. \tag{40}$$

因此, 熵密度反比与固有时.

下面我们来求从 QGP 物质到强子物质的相变时间. 随着 QGP 的演化, 它的温度按 $\tau^{-1/3}$ 下降, 当等离子体的温度降到 $T_c$ 时, 固有时 $\tau_c$ 为

$$\tau_c = \left(\frac{T(\tau_0)}{T_c}\right)^3 \tau_0. \tag{41}$$

随后将发生从 QGP 到强子物质的相变.

5. 试证明考虑 screening 效应后, $c$ 与 $\bar{c}$ 在 QGP 环境中, 对应的 Yukawa 势为 $V(r) = \frac{q}{4\pi}\frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}$.

**解**: 我们考虑在 $\boldsymbol{r} = 0$ 处的粲夸克 $c$. 由于强相互作用, 粲夸克的存在会吸引等离子体中的反夸克, 并排斥夸克. 因此使得周围的介质极化. 下面我们将证明, 对于无质量夸克和

反夸克气体的等离子体的理想情况, 在 $\boldsymbol{r}$ 探测夸克所感受到的势 $V(\boldsymbol{r})$ 将由库伦势被修正为 Yukawa 势.

在阿贝尔近似下, 在 $\boldsymbol{r}$ 的色屏蔽势 $V(\boldsymbol{r})$ 来自于以下三种贡献: (1) 在原点 $\boldsymbol{r}=0$ 的 $c$ 产生的势 $V_0(\boldsymbol{r})$, (2) 等离子体中的夸克产生的势 $V_q(\boldsymbol{r})$, (3) 等离子体中的反夸克产生的势 $V_{\bar{q}}(\boldsymbol{r})$, 因此

$$V(\boldsymbol{r})=V_0(\boldsymbol{r})+V_q(\boldsymbol{r})+V_{\bar{q}}(\boldsymbol{r}). \tag{42}$$

这样, 在 $\boldsymbol{r}$ 的一个夸克将受到一个力 $-q\nabla V(\boldsymbol{r})$, 而在 $\boldsymbol{r}$ 的一个反夸克将受到一个力 $-(-q)\nabla V(\boldsymbol{r})$.

我们考虑在 $\boldsymbol{r}$ 的一个流元, 它含有密度为 $n_q$ 的夸克和密度为 $n_{\bar{q}}$ 的反夸克, 并受到在 $\boldsymbol{r}$ 的势 $V(\boldsymbol{r})$ 的力. 因此这个流元的每单位体积将受到作用于其中夸克上的力 $-qn_q\nabla V(\boldsymbol{r})$ 和作用于其中反夸克上的力 $-(-q)n_{\bar{q}}\nabla V(\boldsymbol{r})$. 这个流元还将受到由于存在夸克 $c$ 而引起的夸克和反夸克空间再分布的每单位体积的力 $\nabla P$.

在 $\boldsymbol{r}$ 的流元处于平衡态的条件是作用在其上 (单位体积) 的合力为零,

$$\nabla P(n_q(\mu),n_{\bar{q}}(\mu))-qn_q(\mu)\nabla V-(-q)n_{\bar{q}}(\mu)\nabla V=0. \tag{43}$$

为了简单, 我们考虑夸克是极端相对论情况, 这时夸克和反夸克的静止质量可以忽略, 压力与能量密度 $\epsilon$ 的关系为

$$P(\mu)=\frac{1}{3}\epsilon(\mu)=\frac{1}{3}\left[\epsilon_q(\mu)+\epsilon_{\bar{q}}(\mu)\right]. \tag{44}$$

我们将(43)求化学势 $\mu(\boldsymbol{r})$ 和势能 $V(\boldsymbol{r})$ 的关系. 为此, 把等离子体中夸克和反夸克的数密度以及能量密度用化学势 $\mu$ 和温度 $T$ 具体写出来. 由于平衡态的密度由 $\mu=0$ 描述, 我们把密度展开到 $\mu$ 的一次项, 有

$$\begin{aligned}
n_q(\mu)&=\frac{g_q}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{p_0^2\,\mathrm{d}p_0}{1+e^{(p_0-\mu)/T}}\\
&=\frac{g_qT^3}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{1+e^{z-(\mu/T)}}\\
&=\frac{g_qT^3}{2\pi^2}\int_0^\infty z^2\,\mathrm{d}z\left[\frac{1}{1+e^z}-\frac{\mu}{T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1+e^z}\right]+\cdots\\
&=\frac{g_qT^3}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}z\left[\frac{z^2}{1+e^z}+\frac{\mu}{T}\frac{2z}{1+e^z}\right]+\cdots
\end{aligned} \tag{45}$$

可以证明

$$\int_0^\infty \mathrm{d}z\frac{z^{x-1}}{1+e^z}=(1-2^{1-x})\mathit{\Gamma}(x)\zeta(x), \tag{46}$$

其中 $\zeta(x)$ 是黎曼 $\zeta$ 函数.

从这些结果, 我们得到在等离子体中夸克的数密度为

$$n_q(\mu)=\frac{g_qT^3}{2\pi^2}\left[\frac{3}{2}\zeta(3)+\frac{\mu}{T}\frac{\pi^2}{6}\right]. \tag{47}$$

我们可以用同样的方式得到夸克的能量密度, 有

$$\begin{aligned}\epsilon_q(\mu) &= \frac{g_q}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{p_0^3\,\mathrm{d}p_0}{1+e^{(p_0-\mu)/T}} = \frac{g_q T^4}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{z^3\,\mathrm{d}z}{1+e^{z-(\mu/T)}} \\ &= \frac{g_q T^4}{2\pi^2}\int_0^\infty z^3\,\mathrm{d}z\left[\frac{1}{1+e^z} - \frac{\mu}{T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1+e^z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{1+e^z}\right]+\cdots \\ &= \frac{g_q T^4}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}z\left[\frac{z^3}{1+e^z} + \frac{\mu}{T}\frac{3z^2}{1+e^z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\frac{6z}{1+e^z}\right]+\cdots\end{aligned} \tag{48}$$

展开到化学势的第二项, 在等离子体中夸克的能量密度为

$$\epsilon_q(\mu) = \frac{g_q T^4}{2\pi^2}\left[\frac{7}{4}\frac{\pi^4}{30} + \frac{\mu}{T}\frac{9}{2}\zeta(3) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\frac{\pi^2}{2}\right]. \tag{49}$$

在给定化学势的情况下, 我们能够得到反夸克的能量密度. 由于存在反夸克对应于在负能态缺少夸克, 所以反夸克的数密度为

$$\begin{aligned}n_{\bar q}(\mu) &= \frac{g_q}{2\pi^2}\int_{-\infty}^0 p_0^2\,\mathrm{d}p_0\left[1-\frac{1}{1+e^{(p_0-\mu)/T}}\right] \\ &= \frac{g_q}{2\pi^2}\int_{-\infty}^0 p_0^2\,\mathrm{d}p_0\frac{e^{(p_0-\mu)/T}}{1+e^{(p_0-\mu)/T}} \\ &= \frac{g_q}{2\pi^2}\int_{-\infty}^0 p_0^2\,\mathrm{d}p_0\frac{1}{1+e^{-(p_0-\mu)/T}}.\end{aligned} \tag{50}$$

做变换 $p_0=-\bar p_0, \bar p_0 \geq 0$, 我们有

$$n_{\bar q}(\mu) = \frac{g_q}{2\pi^2}\int_0^\infty \bar p_0^2\,\mathrm{d}\bar p_0\frac{1}{1+e^{(\bar p_0+\mu)/T}}. \tag{51}$$

比较(51)式和(45),(47)式, 我们得到反夸克的数密度为

$$n_{\bar q}(\mu) = \frac{g_q T^3}{2\pi^2}\left[\frac{3}{2}\zeta(3) - \frac{\mu}{T}\frac{\pi^2}{6}\right]. \tag{52}$$

同样的反夸克的能量密度为

$$\begin{aligned}\epsilon_{\bar q}(\mu) &= \frac{g_q}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\bar p_0^3\,\mathrm{d}\bar p_0}{1+e^{(\bar p_0+\mu)/T}} \\ &= \frac{g_q T^4}{2\pi^2}\left[\frac{7}{4}\frac{\pi^4}{30} - \frac{\mu}{T}\frac{9}{2}\zeta(3) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\frac{\pi^2}{2}\right].\end{aligned} \tag{53}$$

从所有这些是化学势显函数的量, 我们可以得到关于 $\mu(r)$ 的方程. 将(44)式在 $\mu=0$ 展开, 并注意到 $\mu$ 的线性项为零, 我们有

$$P(\mu) = \frac{1}{3}\left[\epsilon(\mu=0) + \frac{1}{2}\mu^2\frac{\partial^2\epsilon}{\partial\mu^2}\right], \tag{54}$$

其中 $\partial^2\epsilon/\partial\mu^2$ 是在 $\mu=0$ 求值, 根据(49)和(53)式,

$$\frac{\partial^2\epsilon}{\partial\mu^2} = \frac{g_q T^4}{2\pi^2}\frac{\pi^2}{T^2}. \tag{55}$$

因此, (43)式变为

$$\nabla\frac{1}{6}\mu^2\frac{\partial^2\epsilon}{\partial\mu^2}-q\left[n_q(\mu)-n_{\bar{q}}(\mu)\right]\nabla V=0. \tag{56}$$

其中 $n_q(\mu)-n_{\bar{q}}(\mu)$ 是化学势 $\mu$ 的函数, 从(47)和(52)式, 我们有

$$n_q(\mu)-n_{\bar{q}}(\mu)=n_q(\mu=0)+\mu\frac{\partial n_q}{\partial\mu}-n_{\bar{q}}(\mu=0)-\mu\frac{\partial n_{\bar{q}}}{\partial\mu}=2\mu\frac{\partial n_q}{\partial\mu}, \tag{57}$$

其中的 $\partial n_q/\partial\mu$ 是在 $\mu=0$ 求值, 有(47)式给出

$$\frac{\partial n_q}{\partial\mu}=\frac{g_qT^3}{2\pi^2}\frac{\pi^2}{6T}. \tag{58}$$

在方程(57)中, 我们用到了 $n_q=n_{\bar{q}}$, 以及在 $\mu=0,\partial n_{\bar{q}}/\partial\mu=-\partial n_q/\partial\mu$. 平衡条件(56)变为

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2\epsilon}{\partial\mu^2}\mu\nabla\mu-2q\mu\frac{\partial n_q}{\partial\mu}\nabla V=0. \tag{59}$$

它在下式成立的情况下被满足,

$$\mu\frac{\partial^2\epsilon}{\partial\mu^2}-6q\frac{\partial n_q}{\partial\mu}V=(\text{与}r\text{有关的常数}). \tag{60}$$

当 $r\to\infty$ 时, $\mu$ 和 $V$ 趋于零, (60)式中的常数为零.

(60)给出的是化学势 $\mu$ 和势能 $V$ 之间的关系. 化学势与夸克和反夸克的数密度有关, 而数密度又通过泊松方程与势能 $V_q$ 和 $V_{\bar{q}}$ 有关. 因此, 我们可以把(60)重写为只是势能 $V$ 的函数. 由(57)式, 我们可以将 $\mu$ 表示为密度的函数

$$\mu=\frac{n_q(\mu)-n_{\bar{q}}(\mu)}{2\frac{\partial n_q}{\partial\mu}}, \tag{61}$$

根据泊松方程, 夸克的密度 $n_q(\mu)$ 和这些夸克产生的势能的关系为

$$\nabla^2V_q=-qn_q(\mu). \tag{62}$$

反夸克的密度 $n_{\bar{q}}(\mu)$ 和这些反夸克产生的势能关系为

$$\nabla^2V_{\bar{q}}=-(-q)n_{\bar{q}}(\mu). \tag{63}$$

因此, 化学势与 $V_q$ 和 $V_{\bar{q}}$ 的关系为

$$\mu=\frac{-\nabla^2V_q-\nabla^2V_{\bar{q}}}{2q\frac{\partial n_q}{\partial\mu}} \tag{64}$$

将上式带入(60)式, 我们得到

$$\nabla^2V_q+\nabla^2V_{\bar{q}}+12q^2\left(\frac{\partial n_q}{\partial\mu}\right)^2\left(\frac{\partial^2\epsilon}{\partial\mu^2}\right)^{-1}V=0, \tag{65}$$

或

$$\nabla^2(V_q + V_{\bar{q}}) + m_D^2 V = 0, \tag{66}$$

其中 $m_D$ 是德拜屏蔽质量, 定义为

$$\begin{aligned} m_D^2 &= 12q^2 \left(\frac{\partial n_q}{\partial \mu}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \mu^2}\right)^{-1} = \frac{g_q q^2 T^2}{6} \\ &= \frac{\pi^2}{9 \times 1.202} \frac{q^2(n_q + n_{\bar{q}})}{T}. \end{aligned} \tag{67}$$

利用(42)式, 我们可以将(66)式重新写为

$$\nabla^2(V - V_0) + m_D^2 V = 0. \tag{68}$$

势能 $V_0(\boldsymbol{r})$ 满足点源的泊松方程,

$$\nabla^2 V + m_D^2 V = -q\delta(\boldsymbol{r}). \tag{69}$$

由此给出 Yukawa 势

$$V(r) = \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-m_D r}}{r} = \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}, \tag{70}$$

其中德拜屏蔽长度 $\lambda_D$ 是德拜屏蔽质量的倒数,

$$\lambda_D^2 = 1/m_D^2 = \frac{6}{g_q} \frac{1}{q^2 T^2} = \frac{9 \times 1.202 T}{\pi^2 q^2 (n_q + n_{\bar{q}})}. \tag{71}$$