相对论重离子碰撞作业

艾鑫

2016 年 1 月 14 日

1. 证明 x_+, x_- 是洛伦兹不变量, 证明快度是洛伦兹变换可加量.

解: 考虑参考系 F 和 F', F' 系相对于 F 系以速度 β 沿着 x 轴匀速运动. 在 F 系中的四矢量 $c = (c_0, \boldsymbol{c}_T, c_z)$, 在 F' 系中变为 $c' = (c'_0, \boldsymbol{c}'_T, c'_z)$. 它们两者由洛伦兹变换联系起来:

$$c'_0 = \gamma(c_0 - \beta c_z), \tag{1}$$

$$c'_z = \gamma(c_z - \beta c_0), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{c}'_T = \boldsymbol{c}_T. \tag{3}$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4}$$

将(1)和(2)相加得到:

$$c'_0 + c'_z = \gamma(1-\beta)(c_0 + c_z). \tag{5}$$

因此 $c'_0 + c'_z$ 与 $c_0 + c_z$ 直相差一个因子 $\gamma(1-\beta)$. 类似的, 另外一个粒子 b 在 F 系的前向光锥动量 $b_0 + b_z$ 与在 F' 系中前向光锥动量 $b'_0 + b'_z$ 的关系为:

$$b'_0 + b'_z = \gamma(1-\beta)(b_0 + b_z). \tag{6}$$

由 x_+ 的定义有

$$x_+ = \frac{c_0 + c_z}{b_0 + b_z} \tag{7}$$

$$x'_+ = \frac{c'_0 + c'_z}{b'_0 + b'_z} \tag{8}$$

由(5)和(6)很容易得到:

$$x_+ = x'_+ \tag{9}$$

因此, 光锥变量 x_+ 是洛伦兹不变量. 同理可证, x_- 也是洛伦兹不变量.

下面证明快度是洛伦兹可加量. 首先在 F 系中的快度有:

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z}\right). \tag{10}$$

在 F' 系中有:

$$y' = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_0' + p_z'}{p_0' - p_z'}\right). \tag{11}$$

由洛伦兹变换有:

$$p_0' = \gamma(p_0 - \beta p_z) \tag{12}$$

$$p_z' = \gamma(p_z - \beta p_0). \tag{13}$$

因此

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\gamma(1-\beta)(p_0+p_z)}{\gamma(1+\beta)(p_0-p_z)}\right] \\ &= y + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \\ &= y - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

由上式可知, y' 与 y 只相差一个因子 $\frac{1}{2}\ln((1+\beta)/(1-\beta))$, 因此快度是洛伦兹不变量.

2. 在无限大动量参照系中, 讨论相对论硬散射过程, $A + B \to C + X$. 证明:

(1) $b^2 = [x_b(1-x_b)B^2 - x_b\beta^2 - b_T^2]/(1-x_b)$

(2) $a^2 = [x_a(1-x_a)A^2 - x_a\alpha^2 - a_T^2]/(1-x_a)$

解: 考虑入射粒子 B 和靶核 A, 在无限大动量参考系中 A 和 B 的动量可写为:

$$B = (B_0, \boldsymbol{B}_T, B_z) = (P_1 + \frac{B^2 + B_T^2}{4P_1}, \boldsymbol{B}_T, P_1 - \frac{B^2 + B_T^2}{4P_1}) \tag{15}$$

$$A = (A_0, \boldsymbol{A}_T, A_z) = (P_2 + \frac{A^2 + A_T^2}{4P_2}, \boldsymbol{A}_T, -P_2 + \frac{A^2 + A_T^2}{4P_2}) \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

对于反应 $A + B \to C + X$, 我们可以认为 C 是由 A 的部分子 a 和 B 的部分子 b 作用形成的 c, 然后进一步反应形成的. 我们引入 b 相对于 B 的前向光锥动量比 x_b:

$$x_b = \frac{b_0 + b_z}{B_0 + B_z}, \tag{18}$$

同样, 我们定义 a 相对于 A 的后向光锥动量比 x_a:

$$x_a = \frac{a_0 - a_z}{A_0 - A_z}. \tag{19}$$

利用公式(15)和(18), 我们可以写出 b 的动量:

$$b = \left(x_b P_1 + \frac{b^2 + b_T^2}{4x_b P_1}, \boldsymbol{b}_T, x_b P_1 - \frac{b^2 + b_T^2}{4x_b P_1}\right). \tag{20}$$

类似的, 我们可以写出 a 的动量:

$$a=\left(x_aP_2+\frac{a^2+a_T^2}{4x_aP_2},\boldsymbol{a}_T,-x_aP_2+\frac{a^2+a_T^2}{4x_aP_2}\right). \tag{21}$$

因此动量 $\beta=(B-b)$ 和 $\alpha=(A-a)$ 可以写为:

$$\beta=\left((1-x_b)P_1+\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)P_1},-\boldsymbol{b}_T,(1-x_b)P_1-\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)P_1}\right), \tag{22}$$

$$\alpha=\left((1-x_a)P_2+\frac{\alpha^2+\alpha_T^2}{4(1-x_a)P_2},-\boldsymbol{a}_T,-(1-x_a)P_2+\frac{\alpha^2+\alpha_T^2}{4(1-x_a)P_2}\right). \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

由于 $b=B-\beta$, 我们可以得到:

$$b^2=B^2-2B\cdot\beta+\beta^2. \tag{25}$$

利用公式(15)和(22)我们可以得到:

$$\begin{aligned}B\cdot\beta&=\left(P_1+\frac{B^2}{4P_1})((1-x_b)P_1+\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)P_1}\right)-\left(P_1-\frac{B^2}{4P_1})((1-x_b)P_1-\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)P_1}\right)\\&=\left[(1-x_b)P_1^2+\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)}+\frac{(1-x_b)B^2}{4}+\frac{B^2(\beta^2+\beta_T^2)}{16(1-x_b)P_1^2}\right]-\\&\left[(1-x_b)P_1^2-\frac{\beta^2+\beta_T^2}{4(1-x_b)}-\frac{(1-x_b)B^2}{4}+\frac{B^2(\beta^2+\beta_T^2)}{16(1-x_b)P_1^2}\right]\\&=\frac{\beta^2+\beta_T^2}{2(1-x_b)}+\frac{(1-x_b)B^2}{2}\\&=\frac{\beta^2+\beta_T^2+(1-x_b)^2B^2}{2(1-x_b)}.\end{aligned} \tag{26}$$

因此,

$$\begin{aligned}b^2&=B^2+\beta^2-2B\cdot\beta\\&=B^2+\beta^2-\frac{\beta^2+\beta_T^2+(1-x_b)^2B^2}{1-x_b}\\&=\frac{B^2(1-x_b)+\beta^2(1-x_b)-[\beta^2+\beta_T^2+(1-x_b)^2B^2]}{1-x_b}\\&=\frac{x_b(1-x_b)B^2-x_b\beta^2-\beta_T^2}{1-x_b}\\&=\frac{x_b(1-x_b)B^2-x_b\beta^2-b_T^2}{1-x_b}.\end{aligned} \tag{27}$$

同理可证, 对 a 有

$$a^2=\frac{x_a(1-x_a)A^2-x_a\alpha^2-a_T^2}{1-x_a}. \tag{28}$$

3. 在 QED 理论中, 有一个费米场 ψ 和电磁场 A^μ, A^μ 又称为规范场, 试证明无质量费米子的电磁相互作用, 等同于一个质量 $m=e/\sqrt{\pi}$ 的自由玻色场 ϕ, e 为电磁耦合常数.

解: 我们从充满电子的狄拉克负能海出发, 如果在某个空间区间内有一个电荷密度或电流的扰动, 将会产生一个电磁规范场 A^μ, 它将影响费米子场算符, 结果费米子场的变化将使所有的电子处于各种运动和激发状态. 显然, 这种运动和激发会产生电荷密度 j^0 和电流 j^1. 下面我们来求产生的电流 j^μ 和扰动源 —规范场 A^μ 的依赖关系.

首先, 我们注意到这两个量在规范变换下是不一样的. 在量子点动力学中, 流 j^μ 这样的物理量是规范不变量, 即它们在规范场从 A^μ 到 $\bar{A}^\mu$ 按如下规范变换时保持不变,

$$\bar{A}^\mu(x)=A^\mu(x)-\partial^\mu\lambda(x), \tag{29}$$

而费米子场算符 $\psi(A)$ 的变换为,

$$\psi(x,\bar{A}(x))=e^{ie\lambda(x)}\psi(x,A(x)), \tag{30}$$

其中 $\lambda(x)$ 是一个 x 的任意函数. 对任意函数 $\lambda(x)$ 的不同选择代表不同的规范, 而物理量必须与规范的选择无关.

尽管产生的流 $j^\mu(x)$ 依赖于它的规范场源 $A^\mu(x)$, 但是 $j^\mu(x)$ 和 $A^\mu(x)$ 在规范变换下的行为又是不同的, 流是规范不变的, 而规范场却依赖于规范的选择. 当考虑了流的规范不变性后, 产生的流 $j^\mu(x)$ 与局域电磁扰动 $A^\mu(x)$ 的关系为

$$j^\mu(x)=-\frac{e^2}{\pi}[A^\mu(x)-\partial^\mu\frac{1}{\partial^\lambda\partial_\lambda}\partial_\nu A^\nu(x)]. \tag{31}$$

由规范场 A^μ 产生的流 j^μ 反过来又是规范场 A^μ 的源, j^μ 确定的规范场 A^μ 满足麦克斯韦方程:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}=\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)=-j^\mu. \tag{32}$$

当由 j^μ 产生的规范场 A^μ 和由(31)式引入的电磁场 A^μ 是自洽一致的时候, 我们可以得到这个系统的动力学. 利用这个条件, 我们得到一个描述规范场 A^μ 动力学的运动方程:

$$\partial_\nu\partial_\mu A^\nu-\partial_\nu\partial^\nu A^\mu=\frac{e^2}{\pi}[A^\mu-\partial^\mu\frac{1}{\partial^\lambda\partial_\lambda}\partial_\nu A^\nu], \tag{33}$$

该方程成立的条件是

$$-\Box A^\mu-\frac{e^2}{\pi}A^\mu=0. \tag{34}$$

这里, 算符 $\Box$ 代表 $\partial_\nu\partial^\nu$, 它在坐标表象中等于算符 $-p^2$.

用 p^2 来表示, 上式可以被写做:

$$p^2A^\mu-\frac{e^2}{\pi}A^\mu=0. \tag{35}$$

我们可以将上式与 Klein-Gordon 方程比较, 如果 A^μ 是一个质量为 m 的自由玻色子场, 有

$$p^2 A^\mu - m^2 A^\mu = 0. \tag{36}$$

可以得到, 规范场 A^μ 满足 Klein-Gordon 方程就像是一个自由的玻色子, 其具有质量

$$m = \frac{e}{\sqrt{\pi}}. \tag{37}$$

因此, 包含无质量费米子的 QED_2 等效于一个具有质量 $e/\sqrt{\pi}$ 的自由玻色子场.

4. 利用 $1+1$ 维相对论理想流体力学方程, 导出 QGP 物质熵随时间的变化关系, 以及发生 QGP 到强子物质相变, 发生相变时间.

解: 我们用 Bjorken 的流体力学模型来概括在演化的流体动力学相中的等离子体动力学, 其中等离子体被理想地描述为一种相对论气体. 在初始 $\tau = \tau_0$ 时, 等离子体达到局域热平衡, 且初始能量密度为 ε_0, 初始温度 $T(\tau_0)$ 正比于 $\varepsilon_0^{1/4}$. 随后, 能量密度及压力随固有时以 $\tau^{-4/3}$ 下降, 而温度以 $\tau^{-1/3}$ 下降.

下面我们来求熵密度与固有时的关系. 在不变的温度和压力下, 能量的变化与体积和熵的变化关系为

$$\mathrm{d}E = -P\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S. \tag{38}$$

这样可以写出用 ε 和 P 表示熵密度 $s = \mathrm{d}S/\mathrm{d}V$ 的关系式为

$$s \equiv \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V} = \frac{\varepsilon + P}{T}. \tag{39}$$

因而, 熵密度与固有时的关系为

$$\frac{s(\tau)}{s(\tau_0)} = \frac{\varepsilon(\tau) + P(\tau)}{\varepsilon(\tau_0) + P(\tau_0)} \frac{T(\tau_0)}{T(\tau)} = \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{4/3} \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{1/3} = \frac{\tau_0}{\tau}. \tag{40}$$

因此, 熵密度反比与固有时.

下面我们来求从 QGP 物质到强子物质的相变时间. 随着 QGP 的演化, 它的温度按 $\tau^{-1/3}$ 下降, 当等离子体的温度降到 T_c 时, 固有时 τ_c 为

$$\tau_c = \left(\frac{T(\tau_0)}{T_c}\right)^3 \tau_0. \tag{41}$$

随后将发生从 QGP 到强子物质的相变.

5. 试证明考虑 screening 效应后, c 与 $\bar{c}$ 在 QGP 环境中, 对应的 Yukawa 势为 $V(r) = \frac{q}{4\pi}\frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}$.