

# 铁路最优路线问题

## 摘要

本文解决的是如何给出任意两站点的最优铁路路线问题，并在直达列票售罄的情况下给出最佳换车方案以及最佳旅游路线问题，通过建立多目标优化模型，采用熵权法计算各目标权重综合评价得到最优路线。

对于问题一：首先建立以换乘次数最少、出行时间最短、票价费用最少为目标，以最大换乘次数、起始站有路线为约束条件的多目标优化模型；然后通过熵权法来确定各目标的权重，将多个指标化为一个综合指标来评价；最终，分别得到了丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛的最优路线如下表：

起始站	丹东→宜昌	天津→拉萨	白城→青岛
最优路线	乘 K28 在北京西换乘 K49	乘 G213 在南京南换乘 T164/T165	乘 2262 在天津西换乘 D341

对于问题二：为求得整个行程的最优旅游线路，通过初步分析可知，南京、苏州、无锡、上海均在同一旅游线路上。即旅游先后顺序为宜昌→南京→无锡→苏州→上海→杭州→宜昌，或是其返程。通过建立与问题一类似的多目标规划模型，以换乘次数最少、出行时间最短、票价费用最少为目标函数，得到各站点的乘车方案如下表：

站点	起点	站点 1	站点 2	站点 3	站点 4	站点 5
城市	宜昌	杭州	上海	苏州	无锡	南京
车次	K254/ K251	T112/ T113	K696/ K697	K696/ K697	K696/ K697	D3006/ D3007

关键词：多目标最优规划    熵权法    铁路路线

## 1.问题重述

### 1.1 问题背景

铁路既是社会经济发展的重要载体之一，同时又为社会经济发展创造了前提条件。近几年来，在全社会客运量稳步上升的同时，长期以来铁路承运了大量旅客。相对于其他的运输方式铁路具有时间准确性高、运输能力大、运行比较平稳、安全性高等优点。同时火车也成为了旅途的首选交通运输工具。虽然目前铁路网络已经比较发达，但是仍然有很多地方之间并没有直接到达的铁路。并且在节假日期间，一些热门路线的火车票总是一票难求。在这种情况下，需要考虑换乘，即先从乘车站到换乘站，再从换乘站到目的站，需要从中选择最优的路线进行乘车。

### 1.2 需要解决的问题

问题一：给出任意两个站点之间的最优铁路路线问题的一般数学模型和算法。如果两个站点之间有直达列车，在考虑直达列车票已售罄的情况下给出最优的换乘方案。根据附录数据，利用建立的模型和算法求出以下起点到终点的最优路线：丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛。

问题二：假设打算从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌，建立相关数学模型，给出整个行程的最优路线。

## 2.问题分析

### 2.1 问题一的分析

本题可分解为 3 小问：

第 1 问要求给出任意两个站点之间的最优铁路路线问题的一般数学模型和算法。在实际生活中，由于出行者考虑的角度不同，对最优铁路路线问题的理解就不同，所以选择换乘次数、出行时间、票价费用等因素，建立多目标铁路路线优化模型。由于多目标优化问题的目标函数彼此之间都是相互矛盾的，采用传统的最短路算法无法直接求得一条多目标最优路线。为了求解方便，先进行可行路径集合的求解即从一个站点到达另一站点的全部路线（包括直达、一次换乘或两次换乘可以到达的路线），然后通过确定各目标的权重，对各条可行路径进行综合目标值计算找出最优路线。

第 2 问，若两个站点之间有直达列车，需要考虑直达列车票已售罄情况下最优的换乘方案。首先在可行路径集合中剔除直达列车的路线，从剩下的路线中选出最优换乘方案路线。

第 3 问是对具体问题的求解，在直达列车票没有售罄和已售罄两种情况下，利用前面建立的模型分别进行求解，最终得到丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛起点到终点在两种情况下的最优路线。

### 2.2 问题二的分析

问题要求从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌，整个线路是环形的即从宜昌出发遍历各个景点一次，最终回到起点宜昌。

需要合理的设计旅行线路使得换乘次数最少、出行时间最短（仅指乘车时间）、票价费用最小。分析可知，苏州位于南京和上海之间，且无锡只能在南京到上海的路线上，即南京、苏州、无锡、上海在一条线上。

### 3.模型假设及符号说明

#### 3.1 模型假设

假设 1：费用主要指列车票价的叠加，不包括换乘过程中的费用；且票价均选用各种类型列车的最低票价（如：普通列车选用硬座票价）进行计算；

假设 2：同一城市的不同车站都记为一个车站，如：北京站与北京西站均记为北京站；

假设 3：考虑到换乘较多次数, 将会失去优化本身的意义, 假设两站点之间的路线最多是进行两次换乘到达的；

#### 3.2 符号说明

符号	符号说明
$S$	经过任意结点 A 的所有线路集合
$E$	经过任意结点 B 的所有线路集合
$S_i$	线路集合 $S$ 的所有站点的线路集
$E_j$	线路集合 $E$ 的所有站点
$S_{iu}$	线路 $S_i$ 的所有站点的线路集
$E_{jv}$	线路 $E_j$ 的所有站点
$r_{ij}$	第 $i$ 条可行路线的第 $j$ 个指标的原始值
$r_j$	第 $j$ 项指标的均值
$s_j$	第 $j$ 项指标的标准差
$r'_{ij}$	第 $i$ 条可行路线的第 $j$ 个指标的无量纲值
$p_{ij}$	第 $j$ 个指标下第 $i$ 条可行线路的比重
$e_j$	第 $j$ 个指标的熵值
$w_j$	第 $j$ 个指标的权重
$z_i$	可行路线 $i$ 的综合目标值
$x_{ij}^{l_i}$	从 $i$ 站到 $j$ 站是否乘坐了 $l_j$ 次列车
$t_{ij}(l_1, l_2)$	乘坐 $l_1$ 次列车从 $i$ 站到 $j$ 站换乘 $l_2$ 次列车等待的时间
$p_{ij}(l_i)$	乘 $l_i$ 次列车从 $i$ 站到 $j$ 站所用的票价费用
$N_{\max}$	最大换乘次数

## 4.数据分析及处理

### 4.1 票价费用的处理

由于附件中每个站点对应的票价是从初始点到该站的费用。考虑到乘客可能从中途的某一站上车，现分三种情况来计算票价费用，且由假设 1 知：票价均选用各种类列车的最低票价（如：普通列车选用硬座票价）进行计算：

(1) 高速动车、动车组、城际高速：采用

(下车站对应的票价-上车站对应的票价)

计算票价费用，如：一列列车路线为：上海虹桥→昆山南→苏州→无锡→常州→南京如表 1，乘客从昆山南上车到南京下车，则此时的票价费用为（140-24）元；

表 1：某一车次列车途经的站点及相应的票价

车次	列车类型	站序	车站	里程	最低票价
G7150	高速动车	1	上海虹桥	0	0
G7150	高速动车	2	昆山南	50	24
.....	.....	.....	.....	.....	.....
G7150	高速动车	6	南京	301	140

(2) 除高速动车、动车组、城际高速以外的其他类型列车：从初始站上车，中途任一站下车，则票价费用即为下车站对应的费用；

(3) 除高速动车、动车组、城际高速以外的其他类型列车：从中途站上车采用(下车站对应的票价-上车站对应的票价)+(下车站对应的里程-上车站对应的里程)×0.05816 计算票价费用。

### 4.2 换乘次数的分析及处理

由于任意两点之间不可能全有直达列车可以到达目的地，且在节假日期间，一些热门路线的火车票（直达列车票）总是一票难求。在这种情况下，需要考虑换乘，即先从乘车站到换乘站，再从换乘站到目的站。通常乘客乘坐列车是要到达某一城市，考虑到一个城市可能有两个或多个火车站。本文为了简化问题，将每个城市的多个火车站均视为一个车站，如：北京站与北京西站均记为北京站。即同一城市不同火车站间的换乘不记为一次换乘，如乘客要从大连→广州，乘车路线是从大连乘车到北京，在北京西换乘到广州，该乘车方案只换乘一次，其中从北京站到换乘站北京西站不记为一次换乘。

## 5.问题一的解答

### 5.1 模型建立

#### 5.1.1 目标函数的确定

##### 0-1 整性规划：

设  $x_{ij}^l$  表示从  $i$  站到  $j$  站是否乘坐了  $l_j$  次列车，

$$x_{ij}^{l_i} = \begin{cases} 1, & \text{乘} l_i \text{次列车从} i \text{站到} j \text{站} \\ 0, & \text{不乘} l_i \text{次列车从} i \text{站到} j \text{站} \end{cases}$$

其中：  $i, j \in V_{l_i}, l_i \in L, L$  为列车集合,  $V_{l_i}$  为列车经过的站点集合

### 目标一：换乘次数最少

考虑到乘客在出行时往往希望较少次数换乘，由假设 2，记同一城市的多个火车站视为一个车站，则最少换乘次数的目标函数为：

$$\min z_1 = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} x_{ij}^{l_i} - 1$$

### 目标二：出行时间最短

出行时间由乘车时间和换乘的等待时间组成，其中乘车时间  $t_{ij}(l_i) = t_{l_i}^1(j) - t_{l_i}^2(i)$ ，换乘等待时间为：

$$t_{ij}(l_1, l_2) = \begin{cases} t_{l_2}^2(i) - t_{l_1}^1(j), & t_{l_2}^2(i) - t_{l_1}^1(j) \geq T_0 \\ t_{l_2}^2(i) - t_{l_1}^1(j) + 1440, & t_{l_2}^2(i) - t_{l_1}^1(j) < T_0 \end{cases}$$

其中：  $t_{ij}(l_1, l_2)$  为乘坐  $l_1$  次列车从  $i$  站到  $j$  站换乘  $l_2$  次列车等待的时间  
则出行时间最短的目标函数为：

$$\min z_2 = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} [t_{l_i}^1(j) - t_{l_i}^2(i)] x_{ij}^{l_i} + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{m \in V} \sum_{l_1, l_2 \in L} x_{ij}^{l_i} x_{jm}^{l_j} t_{ij}(l_1, l_2)$$

### 目标三：票价费用最小

铁路票价因列车等级、席座的不同而各异，为了简化问题由假设 1，票价选用各种类的最低票价进行计算，则最少票价费用的目标函数为：

$$\min z_3 = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} p_{ij}(l_i) x_{ij}^{l_i}$$

其中：  $p_{ij}(l_i)$  为乘  $l_i$  次列车从  $i$  站到  $j$  站所用的票价费用。

#### 5.1.2 约束条件的确定

始发站至中转站、中转站至终点站乘某一列车可以到达则：

$$\sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} x_{oj}^{l_i} = 1$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{l_i \in L} x_{id}^{l_i} = 1$$

其中：  $o, d$  分别为始发站、终点站。

由假设 3，最大换乘次数为  $N_{\max} = 2$ ，则

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} x_{ij}^{l_i} - 1 \leq N_{\max}$$

### 5.1.3 综上所述，建立的多目标规划模型为

$$(U) \begin{cases} \min z_1 = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} x_{ij}^{l_i} - 1 \\ \min z_2 = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} [t_{l_i}^1(j) - t_{l_i}^2(i)] x_{ij}^{l_i} + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{m \in V} \sum_{l_1, l_2 \in L} x_{ij}^{l_1} x_{jm}^{l_2} t_{ij}(l_1, l_2) \\ \min z_3 = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} p_{ij}(l_i) x_{ij}^{l_i} \end{cases}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i \in V} \sum_{l_i \in L} x_{id}^{l_i} = 1 \\ \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} x_{ij}^{l_i} - 1 \leq N_{\max} \\ x_{ij}^{l_i} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

## 5.2 模型求解

由于多目标优化问题的目标函数彼此之间通常都是相互矛盾的，采用传统最短路算法无法直接求得一条多目标最优路径。为求解方便，将模型求解分为两个阶段：第一阶段进行可行路径集合的求解；第二阶段利用熵权法确定各目标的权重，并对各条可行路径进行综合目标值得计算，找出最优路线。

### 5.2.1 可行路径的搜索

#### 算法步骤：

- (1) 输入起始点 A 与终点 B；
- (2) 求经过结点 A 的所有线路集合  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ ， $i$  为正整数，再求出经过结点 B 的所有线路集合  $E = \{b_1, b_2, \dots, b_j\}$ ， $j$  为正整数。判断是否存在  $a_i = b_j$ ，若存在，满足此条件的线路  $S$ 、 $E$  (可能不只一条) 即为 A 到 B 的直达车线路，选出最优结果，结束运算。若没有则继续往下执行；
- (3) 求线路集合  $S$  的所有站点的线路集  $S_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iu}\}$ ，其中  $u$  为正整数，以及线路集合  $E$  的所有站点  $E_j = \{b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jv}\}$ ， $v$  为正整数。判断是否存在  $a_{iu} = b_{jv}$ ，若存在，则满足此条件的线路  $S_i$ 、 $E_j$  (可能不止一种) 即为一次换乘的线路。求出转车地点，建立路网有向图结构，转 (5)，若不存在则继续往下执行；
- (4) 求线路  $S_i$  的所有站点的线路集  $S_{iu} = \{a_{iu1}, a_{iu2}, \dots, a_{iuk}\}$ ， $k$  为正整数，以及线路  $E_j$  的所有站点  $E_{jv} = \{b_{jv1}, b_{jv2}, \dots, b_{jvl}\}$ ， $l$  为正整数。判断是否存在  $a_{iuk} = b_{jvl}$ ，若存在，则满足此条件的线路  $S_{iu}$ 、 $E_{jv}$  (可能不止一种) 即为两次换乘的线路，求出转车地点，建立路网有向图结构，转 (5)，若不存在即认为两站点之间没有路线，则退出；
- (5) 用路径搜索算法确定一条最短路径。<sup>[1]</sup>

#### 求解结果：

由上述算法，利用 MATLAB 编程 (见附录 1) 分别得到丹东→宜昌、天津→

拉萨、白城→青岛两个站点之间的可行路径集合。如表 2:

表 2: 丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛的可行路线

	丹东→宜昌	天津→拉萨	白城→青岛
可行路线	乘 2258/2255/2254/2252 在北京西换乘 K619	乘 K190/K187 在南京 换乘 K1512/K1513	乘 1052 在四平换乘 K1056/K1053
	乘 2258/2255/2254/2252 在北京西换乘 Z3	乘 K190/K187 在南京 换乘 K696/K697	乘 1052 在四平换乘 K704/K701
	乘 K190/K187 在南京南 换乘 D3006/D3007	乘 K190/K187 在镇江 换乘 D3006/D3007	乘 1052 在开原换乘 K1056/K1053
	乘 K190/K187 在南京南 换乘 D3081	乘 K190/K187 在镇江 换乘 D3072/D3073	乘 1052 在开原换乘 K704/K701
	.....	.....	.....
	乘 K190/K187 在镇江换 乘 D3006/D3007	乘 K190/K187 在镇江 换乘 K1512/K1513	乘 1052 在沈阳北换 乘 K704/K701
	乘 K28 在北京西换乘 K49	乘 G213 在南京南换 乘 T164/T165	乘 2262 在天津西换 乘 D341

表 2 只是丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛两个站点之间的部分路线，其中丹东→宜昌有 34 条可行线路、天津→拉萨有 225 条可行线路、白城→青岛有 140 条可行线路。

### 5.2.2 可行路径的综合目标值计算

从 A 站到 B 站的可行路径集合的优选为多目标决策问题，熵权法是一种常用的确定多目标权重的方法，该方法基于“差异驱动”原理，突出局部差异，由各个样本的实际数据求得最优权重，反映了指标信息熵值得效用价值，避免了人为的影响因数，给出的指标权重更具客观性，具有较高的再现性和可信度；另外，熵权法采用归一化方法对数据进行无量纲处理，消除指标体系之间单位量纲、含义和量级不同带来的影响。<sup>[2]</sup>

#### 计算步骤:

(1) 假设现有  $m$  条可行路线，则  $m$  条可行路线及  $n$  个指标就构成了一个决策矩阵，原始指标数据矩阵  $R = (r_{ij})_{m \times n}$ ，其中  $r_{ij}$  为第  $i$  条可行路线的第  $j$  个指标的原始值；

(2)，因为各目标均是越小越优，采用越小越优的方法对原始指标数据进行归一化处理：

$$r'_{ij} = \frac{\min r_{ij}}{r_{ij}}$$

其中： $r'_{ij}$  为第  $i$  条可行路线的第  $j$  个指标的无量纲值， $r_{ij}$  为第  $i$  条可行路线的第  $j$  个指标的有量纲值。为了方便，仍记  $r'_{ij}$  为  $r_{ij}$ ，即后文的  $r_{ij}$  均指经无量纲化处理过的。

(3) 计算第  $j$  个指标下第  $i$  条可行线路的比重  $p_{ij}$ ：

$$p_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^m r_{ij}}$$

(4) 计算第  $j$  个指标的熵值  $e_j$ :

$$e_j = -k \sum_{i=1}^m (p_{ij} \times \ln p_{ij})$$

其中:  $k = \frac{1}{\ln m}$

(5) 计算第  $j$  个指标的权重  $w_j$ :

$$w_j = \frac{1 - e_j}{\sum_{j=1}^n (1 - e_j)}$$

其中:  $\sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \in [0, 1]$

(6) 计算可行路线  $i$  的综合目标值  $z_i$ :

$$z_i = \sum_{j=1}^n (w_j \times r_{ij})$$

根据计算得到的综合目标值,按照从大到小对可行路径进行排序,排在前面的路径即为最优路径。

### 求解结果:

利用熵权法确定了各目标的权重如表 3, 对各条可行路径进行综合目标值的计算, 最终得到如表 4、5、6 (注: 表 3 及表 4 仅列出从丹东→宜昌各目标的权重值和部分乘车方案以及对应的综合目标值), 从天津→拉萨、白城→青岛各目标权重、综合目标值的计算及分析与丹东→宜昌的类似。

### 丹东→宜昌:

表 3: 最优路线评价指标权重

指标	换乘次数	出行时间	票价费用
权重	0	0.56	0.44

从表 3 可知, 由于各乘车路线均采用一次换乘, 所以换乘次数的权重 0, 对综合目标值得评价没有影响。出行时间所占权重大于票价所占权重, 在选择乘车方案时, 除考虑换乘次数外, 首先注重的是出行时间的长短。

表 4: 从丹东→宜昌乘车方案及综合目标值

乘车方案	综合目标值 $z$	换乘次数 $z_1$	出行时间 $z_2$	票价费用 $z_3$
2258/2255/2254/2252 在北京西换乘 K619	0.7620	1	2670	304
2258/2255/2254/2252 在北京西换乘 Z3	0.6782	1	3360	310
K190/K187 在南京南换乘 D3006/D3007	0.6539	1	2631	412
K190/K187 在南京南换乘 D3081	0.6316	1	2229	325.75
.....	.....	.....	.....	.....
K28 在北京西换乘 K49	0.7621	1	2349	316



从表 4 中可看出乘车方案“K28 在北京西换乘 K49”的综合得分最高，进一步分析发现该乘车方案虽然出行时间不是最短、票价费用不是最小的，但是综合评价这几个因素，它的综合目标是最优的。所以，在实际中乘客并不会因为某一指标而选择一种乘车路线，而是会综合考虑多个因素的影响，从中选出最优路线。

**天津→拉萨：**

最优路线评价指标权值：换乘次数：0、出行时间：0.53、票价费用：0.47。与丹东→宜昌的分析类似，出行时间占的权重较大。

表 5：从天津→拉萨乘车方案及综合目标值

乘车方案	综合目标值 $z$	换乘次数 $z_1$	出行时间 $z_2$	票价费用 $z_3$
K190/K187 在南京 换乘 K1512/K1513	0.4399	1	4293	751.68
K190/K187 在南京 换乘 K696/K697	0.4212	1	4276	811.19
K190/K187 在镇江 换乘 D3006/D3007	0.4037	1	5723	730.68
K190/K187 在镇江 换乘 D3072/D3073	0.3822	1	5726	793.19
.....	.....	.....	.....	.....
G213 在南京南换 乘 T164/T165	0.8468	1	3130	679.67

分析表 5，乘车方案“G213 在南京南换乘 T164/T165”的综合目标值最大。  
**白城→青岛：**

最优路线评价指标权值：换乘次数：0、出行时间：0.31、票价费用：0.69。票价费用所占权重远远大于出行时间占的权重。

表 6：从白城→青岛乘车方案及综合目标值

乘车方案	综合目标值 $z$	换乘次数 $z_1$	出行时间 $z_2$	票价费用 $z_3$
1052 在四平换乘 K1056/K1053	0.6500	1	2488	222
1052 在四平换乘 K704/K701	0.6424	1	2496	152
1052 在开原换乘 K1056/K1053	0.6510	1	2487	251
1052 在开原换乘 K704/K701	0.6416	1	2496	176
.....	.....	.....	.....	.....
2262 在天津西换 乘 D341	0.8971	1	1399	342.76

**5.3 结果分析**

由表 4、5、6 可知，综合考虑换乘次数、出行时间、票价费用，选择综合目标值最大的乘车方案即最优路线。丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛起点到终点在两种情况下的最优路线如表 7：

表 7：起点到终点在两种情况下的最优路线

	直达列车票没有售罄		直达列车票已售罄	
起始点	换乘次数	乘车路线	换乘次数	乘车路线
丹东→宜昌	1	乘 K28 在北京西换乘 K49	1	乘 K28 在北京西换乘 K49
天津→拉萨	1	乘 G213 在南京南换乘 T164/T165	1	乘 G213 在南京南换乘 T164/T165
白城→青岛	1	乘 2262 在天津西换乘 D341	1	乘 2262 在天津西换乘 D341

由于丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛之间均没有直达列车，所以在直达列车票没有售罄和已售罄两种情况下的最优乘车方案是相同的。

## 6.问题二的解答

### 6.1 模型建立

#### 6.1.1 目标函数的确定

##### 0-1 整数规划：

设  $x_{ij}^{l_i}$  表示从  $i$  站到  $j$  站是否乘坐了  $l_i$  次列车，

$$x_{ij}^{l_i} = \begin{cases} 1, & \text{乘 } l_i \text{ 次列车从 } i \text{ 站到 } j \text{ 站} \\ 0, & \text{不乘 } l_i \text{ 次列车从 } i \text{ 站到 } j \text{ 站} \end{cases}$$

其中：  $i, j \in V_{l_i}, l_i \in L, L$  为列车集合,  $V_{l_i}$  为列车经过的站点集合

##### 目标一：换乘次数最少

考虑到乘客在出行时往往希望较少次数换乘，由假设 2，记同一城市的多个火车站视为一个车站，则最少换乘次数的目标函数为：

$$\min z_1 = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} x_{ij}^{l_i} - 1$$

##### 目标二：出行时间最短

由于该问为最优旅行线路的求解，所以出行时间只考虑由乘车时间：

$$t_{ij}(l_i) = t_{l_i}^1(j) - t_{l_i}^2(i),$$

则出行时间最短的目标函数为：

$$\min z_2 = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} [t_{l_i}^1(j) - t_{l_i}^2(i)] x_{ij}^{l_i}$$

##### 目标三：票价费用最小

铁路票价因列车等级、席座的不同而各异，为了简化问题由假设 1，票价选用各种类的最低票价进行计算，则最少票价费用的目标函数为：

$$\min z_3 = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{l_i \in L} p_{ij}(l_i) x_{ij}^{l_i}$$

其中： $p_{ij}(l_i)$  为乘  $l_i$  次列车从  $i$  站到  $j$  站所用的票价费用。

6.1.2 约束条件的确定

始发站至中转站、中转站至终点站乘某一列车可以到达则：

$$\sum_{j \in V'} \sum_{l_i \in L} x_{oj}^{l_i} = 1$$
$$\sum_{i \in V'} \sum_{l_i \in L} x_{id}^{l_i} = 1$$

其中： $o, d$  分别为始发站、终点站。  
由假设 3，最大换乘次数为  $N_{\max} = 2$ ，则

$$\sum_{i \in V'} \sum_{j \in V'} \sum_{l_i \in L} x_{ij}^{l_i} - 1 \leq N_{\max}$$

6.1.3 综上所述，建立的多目标规划模型为

$$(U) \begin{cases} \min z_1 = \sum_{i \in V'} \sum_{j \in V'} \sum_{l_i \in L} x_{ij}^{l_i} - 1 \\ \min z_2 = \sum_{i \in V'} \sum_{j \in V'} \sum_{l_i \in L} [t_{l_i}^1(j) - t_{l_i}^2(i)] x_{ij}^{l_i} \\ \min z_3 = \sum_{i \in V'} \sum_{j \in V'} \sum_{l_i \in L} p_{ij}(l_i) x_{ij}^{l_i} \end{cases}$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_{i \in V'} \sum_{l_i \in L} x_{id}^{l_i} = 1 \\ \sum_{i \in V'} \sum_{j \in V'} \sum_{l_i \in L} x_{ij}^{l_i} - 1 \leq N_{\max} \\ x_{ij}^{l_i} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

6.2 模型求解

宜昌→ 杭州	杭州→ 上海	上海→ 苏州	苏州→ 无锡	无锡→ 南京	南京→ 宜昌
G585/G588	1342/1343	D3006/D3007	D3006/D3007	D3006/D3007	D3006/D3007
8	3	7	7	7	7
K254/K251	2002	D3072/D3073	D3072/D3073	D3072/D3073	D3072/D3073
1		3	3	3	3
.....	.....	.....	.....	.....	
K530/ K531	D107/ D106	K696/ K697	K696/ K697	K696/ K697	K1512/ K1513

6.3 结果分析

从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌，整个线路的乘车方案如表一

站	起点	站点 1	站点 2	站点 3	站点 4	站点 5
---	----	------	------	------	------	------

点						
城市	宜昌	杭州	上海	苏州	无锡	南京
车次	K254/ K251	T112/ T113	K696/ K697	K696/ K697	K696/ K697	D3006/ D3007

## 7.模型的评价、改进及推广

### 7.1 模型评价

优点：

(1) 模型为多目标规划，从换乘次数、出行时间、票价费用三个方面来评价最优路线，而不是简单的抽象为最短路问题。从不同出行者考虑问题，给出最佳乘车路线。

(2) 在处理换乘次数问题上，将同一城市的不同车站视为同一车站，从而减少换乘节点，简化了算法和运算复杂度。

(3) 解决了多目标模型的不可公度性，采用熵权法进行权重的确定，将各指标无量纲化，利于各指标的比较。

缺点：

(1) 建立的多目标优化模型，所求解出来的不是最优解，而仅仅是有效解，各个目标可能是相互冲突的，一个子目标的改善有可能引起另一个人子目标性能的降低，在一定程度上影响最终的结果。

### 7.2 模型改进

本文在求解多目标模型上，是将多个目标通过熵权法转换为一个目标的优化问题，虽然计算量小，计算速度快，设计简单、容易理解，但是这样求解出来的最优解仅是一个可以接受的“不坏”的解。在今后的求解中可考虑采用多目标遗传算法，相比传统算法，遗传算法具有适应性和通用性、隐并行性、扩展性

### 7.3 模型推广

本模型解决了基于换乘次数最少的铁路最优线路问题，为多目标优化模型，可推广到其他多目标问题上，如：项目调度优化问题。另外，模型求解采用的熵权法是一种常用的确定多目标权重的方法，避免了人为的影响因数，给出的指标权重更具客观性，具有较高的再现性和可信度；熵权法采用的归一化方法对数据进行无量纲处理，消除指标体系之间单位量纲、含义和量级不同带来的影响，可将该算法推广到企业绩效综合评价中。

## 8.参考文献

- [1]薛明昊.列车旅行路线规划问询系统的研究与实现.沈阳工业大学.2010年1月.  
[2]杨信丰，刘兰芬，李引珍，何瑞春.多目标铁路旅客乘车方案优化模型及算法研究.交通运输系统工程与信息.2013年8月.

- [3]宋来忠、王志明.《数学建模与实验》.北京科学出版社.2005 年.
- [4]朱旭、李换琴、籍万新.《MATLAB 软件与基础数学实验》.西安交通大学出版社.2010 年 7 月.
- [5]薛毅.《数学建模基础》.北京工业大学出版社.2005 年 1 月.

## 附录

### 附录一

```
function p=Time_judge(y1,y2)
% y1 = '7:50:00';
% y2 = '8:50:00';
t1=datevec(y1);
t2=datevec(y2);
t1=datenum(t1);
t2=datenum(t2);
if t2>t1
    t = t2-t1;
    t = datevec(t);
    t = t(4:end);
    p = t(1)*60+t(2);
elseif t1==t2
    p = 0;
    pp = -1;
else
    t=t2-t1;
    t=datevec(t);
    t=t(4:end);
    p = t(1)*60+t(2)-24*60;
end

p;

end
```

### 附录二

```
function [v k6]=myfun622(num,text,raw,strname,endname)
b=[];c=[];
nz=length(raw);
for i=1:nz
    if strncmp(endname,text(i,4),2)
        a= text(i,1);
        b=[b;a] ;
    end
end
```

```

elseif strcmp(strname,text(i,4),2)
    a= text(i,1);
    c=[c;a] ;
    end
end
b1=length(b);
c1=length(c);
v=[];
for i=1:b1
    for j=1:c1
        if strcmp(b(i,1),c(j,1))
            b(i,1);
            v=[v b(i,1)];
        end
    end
end
v
str_z2=[];end_z2=[];
for j=1:b1
    for i=1:nz
        if strcmp(b(j),text(i,1))
            a=text(i,4);
            end_z2=[end_z2;a];
        end
    end
end
for k=1:c1
    for i=1:nz
        if strcmp(c(k),text(i,1))
            a=text(i,4);
            str_z2=[str_z2;a];
        end
    end
end
end_z2=unique(end_z2);
str_z2=unique(str_z2);
b2=length(end_z2);
c2=length(str_z2);
a1=[];d1=[];
for i=1:nz
    for j=1:b2
        if strcmp(end_z2(j),text(i,4),2)
            a= text(i,1);
            a1=[a1 a] ;

```

```

        end
    end
end
a2=unique(a1);
for i=1:nz
    for k=1:c2
        if strcmp(str_z2(k),text(i,4),2)
            a= text(i,1);
            d1=[d1 a] ;
        end
    end
end
d2 =unique(d1);
v1=[];v2=[];
b3=length(a2);
c3=length(d2)
for i=1:b3
    for j=1:c1
        if strcmp(a2(i),c(j))
            a2(i);
            v1=[v1 a2(i)];
        end
    end
end
v1;
for i=1:b1
    for j=1:c3
        if strcmp(b(i),d2(j))
            d2(j);
            v2=[v2 d2(j)];
        end
    end
end
v2;
q1=length(v1);
q2=length(v2);
n1=[];n2=[];
for i=1:q1
    for j=1:nz
        if strcmp(v1(i),raw(j,1))
            n=raw(j,:);
            n1=[n1;n];
        end
    end
end
end

```

```

end
for i=1:q2
    for j=1:nz
        if strcmp(v2(i),raw(j,1))
            n=[raw(j,:)];
            n2=[n2;n];
        end
    end
end
w1=length(n1);
w2=length(n2);

x5=[];
for i=1:w1
    for j=1:w2
        if (strcmp(n1(i,4),n2(j,4),2))
            a=[n1(i,:) n2(j,:)];
            x5=[x5;a];
        end
    end
end
z11=length(x5);
k41=[];
for i =1:w1
    for j=1:z11
        if ((strcmp(x5(j,1),n1(i,1)))&&((strcmp(n1(i,4),strname,2))&& ...
            (cell2mat(n1(i,3))<=cell2mat(x5(j,3)))))
            a=x5(j,:);
            k41=[k41;a];
        end
    end
end
z1=length(k41);
k4=[];
for j=1:z1
    for k=1:w2
        if
            ((strcmp(k41(j,13),n2(k,1)))&&((strcmp(n2(k,4),endname,2))&& ...
                (cell2mat(n2(k,3))>=cell2mat(k41(j,15)))))
            a=k41(j,:);
            k4=[k4;a];
        end
    end
end
end

```



```

end_zp=[];
for i=1:nz
    if(strncmp(raw(i,4),endname,2))
        a=raw(i,:);
        end_zp=[end_zp;a];
    end
end

k6=[];
end_zp1=length(end_zp(:,1));
kk1=length(k4(:,1));
for i=1:kk1
    for j=1:end_zp1
        if (max(cell2mat(k4(i,[9:12])))>0)&& ...

((strcmp(k4(i,13),end_zp(j,1)))&&((strncmp(end_zp(j,4),endname,2))&&.
..
(max(cell2mat(end_zp(j,[9:12]))>0)))
        a=k4(i,:);
        k6=[k6;a];
    end
end
end
k6
save k6

% clc;
% clear;
load k6.mat;
pk2=length(k6(:,1));
pp=[];
t_jiange=[];
for i=1:pk2
    p=[];
    p=Time_judge(k6(i,6),k6(i,19));
    if p>=120
        a=p;
    else
        a=inf;
    end
    t_jiange=[t_jiange a];
end

for i=1:pk2

```

```

        for j=1:w1
            if (strcmp(k6(i,1),n1(j,1)))&&(strncmp(n1(j,4),'Ììò',2))
                a=n1(j,:);
                pp=[pp;a];
            end
        end
    end
    pp1=[];
    for i=1:pk2
        for j=1:w2
            if (strcmp(k6(i,13),n2(j,1)))&&(strncmp(n2(j,4),'À-È',2))
                a=n2(j,:);
                pp1=[pp1;a];
            end
        end
    end
    t_str=[];t_end=[];
    for i=1:pk2
        p=[];
        p=Time_judge(pp(i,7),k6(i,6));
        p=p+(cell2mat(k6(i,5))-cell2mat(pp(i,5)))*24*60;
        t_str=[t_str p];
        p=[];
        p=Time_judge(k6(i,18),pp1(i,6));
        p=p+(cell2mat(pp1(i,5))-cell2mat(k6(i,17)))*24*60;
        t_end=[t_end p];
    end
    tz=[];
    for i=1:pk2
        a=t_str(i)+t_end(i)+t_jiange(i);
        tz=[tz a];
    end
    k7=[];
    for i=1:pk2
        if tz(i)~=inf
            a=[k6(i,:) tz(i)];
            k7=[k7;a];
        end
    end
    pl=length(k7(:,1));
    K=[];L=[];
    for i=1:pl
        for j=2:nz

```

```

if(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'iìò',2)))&& ...

((strcmp(k7(i,1),'D',1))|| (strcmp(k7(i,1),'G',1))|| (strcmp(k7(i,1),
,'C',1)))
    a= min((cell2mat(k7(i,[9:12]))-cell2mat(raw(j,[9:12]))));
    K=[K;a];
    b=raw(j,1);
    L=[L b];
elseif
(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'iìò',2)))&& ...
    (cell2mat(raw(j,3))==1);
    a= min(cell2mat(k7(i,[9:12])));
    K=[K;a];
    b=raw(j,1);
    L=[L b];
elseif
(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'iìò',2)))&& ...

((strcmp(k7(i,1),'T',1))&&(cell2mat(raw(j,3))~=1))&& ...
    ((cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))<=1000)
    a =
    (cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))*0.1457;
    K=[K;a];

elseif(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'iìò',2)))&& ..
.
    ((strcmp(k7(i,1),'Z',1))&&(cell2mat(raw(j,3))~=1))
&& ...
    ((cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))<=1000)
    a
    =(cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))*0.2329;
    K=[K;a];

elseif(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'iìò',2)))&& ..
.
    (cell2mat(raw(j,3))~=1)&&((cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))<=100
0)
    a =(cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))*0.1108;
    K=[K;a];
    b=raw(j,1);
    L=[L b];

elseif(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'iìò',2)))&& ..

```

```

.

((strcmp(k7(i,1),'T',1))&&(cell2mat(raw(j,3))~=1))&& ...
    ((cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))>1000)
    a =
(cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))*0.1093;
    K=[K;a];

elseif(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'iikò',2)))&& ..
.
    ((strcmp(k7(i,1),'Z',1))&&(cell2mat(raw(j,3))~=1))
&& ...
    ((cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))>1000)
    a
=(cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))*0.1747;
    K=[K;a];

elseif(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'iikò',2)))&& ..
.

(cell2mat(raw(j,3))~=1)&&((cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))>1000
)
    a =(cell2mat(k7(i,8))-cell2mat(raw(j,8)))*0.0831;
    K=[K;a];
    b=raw(j,1);
    L=[L b];
end
end
end
K1=[];
for i=1:pl
    for j=2:nz

if(strcmp(k7(i,13),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'À-Èø',2)))&& ...

    ((strcmp(k7(i,1),'D',1))||(strcmp(k7(i,1),'G',1))||(strcmp(k7(i,1)
,'C',1)))
        a= min((cell2mat(raw(j,[9:12])))-cell2mat(k7(i,[21:24])));
        K1=[K1;a];
        elseif
(strcmp(k7(i,13),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'À-Èø',2)))&& ...
            (cell2mat(k7(i,15))==1);
        a= min(cell2mat(raw(j,[9:12])));
        K1=[K1;a];

```

```

elseif(strcmp(k7(i,13),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'À-Èø',2)))&& .
..

((strcmp(k7(i,1),'T',1))&&(cell2mat(raw(j,3))~=1))&& ...
    ((cell2mat(raw(j,8))-cell2mat(k7(i,20)))<=1000) ...
    a =
(cell2mat(raw(i,8))-cell2mat(k7(i,20)))*0.1457;
    K1=[K1;a];

elseif(strcmp(k7(i,13),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'À-Èø',2)))&& .
..

((strcmp(k7(i,13),'Z',1))&&(cell2mat(raw(j,3))~=1))&& ...
    ((cell2mat(raw(j,8))-cell2mat(k7(i,20)))<=1000)
    a
=(cell2mat(raw(j,8))-cell2mat(k7(i,20)))*0.2329;
    K1=[K1;a];

elseif(strcmp(k7(i,13),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'À-Èø',2)))&& .
..

(cell2mat(raw(j,3))~=1)&&((cell2mat(raw(j,8))-cell2mat(k7(i,20)))<=10
00) ...
    a =(cell2mat(raw(j,8))-cell2mat(k7(i,20)))*0.1108;
    K1=[K1;a];

elseif(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'À-Èø',2)))&& ..
.

((strcmp(k7(i,1),'T',1))&&(cell2mat(raw(j,3))~=1))&& ...
    ((cell2mat(raw(j,8))-cell2mat(k7(i,20)))>=1000)
    a =
(cell2mat(raw(i,8))-cell2mat(k7(j,20)))*0.1093;
    K1=[K1;a];

elseif(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'À-Èø',2)))&& ..
.

((strcmp(k7(i,1),'Z',1))&&(cell2mat(raw(j,3))~=1))&& ...
    ((cell2mat(raw(j,8))-cell2mat(k7(i,20)))>=1000)
    a
=(cell2mat(raw(i,8))-cell2mat(k7(j,20)))*0.1747;
    K1=[K1;a];

```

```

elseif(strcmp(k7(i,1),raw(j,1)))&&((strcmp(raw(j,4),'À-Èø',2)))&& ..
.
        (cell2mat(raw(j,3))~=1)&& ...
        ((cell2mat(raw(j,8))-cell2mat(k7(i,20)))>=1000)
        a =(cell2mat(raw(i,8))-cell2mat(k7(j,20)))*0.0831;
        K1=[K1;a];
    end
end
end
    C_fei=[];
for i=1:pl
    a=K(i)+K1(i);
    C_fei=[C_fei a];
end

```

### 附录三

```

clc;
clear;
[num,text,row]=xlsread('¼pÒ.xls');
% [k4 k6]=myfun64(num,text,row,'µ¶«', 'ÒË²ý')
[v k6]=myfun622(num,text,row,'ÒË²ý¶«, 'ÄŒ«');
% [k4 k5]=myfun64(num,text,row,'°×³Ç', 'Çàµ°')

```

### 附录四

```

pk2=length(ww2(:,1));
pp=[];
t_str=[];
for i=1:pk2
    for j=1:pk2
        p=[];
        if
            (strcmp(ww2(i,1),ww2(j,1)))&&((strcmp(ww2(i,4),'ÒË²ý',2)))&&(strcmp(
ww2(j,4),'°¼ÖÝ',2)))
            p=[];
            p=Time_judge(ww2(i,7),ww2(j,6));
            p=p+(cell2mat(ww2(j,5))-cell2mat(ww2(i,5)))*24*60
            t_str=[t_str;[p ww2(i,1)]];
        end
    end
end
K=[];L=[];
for i=1:pk2
    for j=1:pk2

```

```

        if
        (strcmp(ww2(i,1),ww2(j,1)))&&((strncmp(ww2(i,4),'òĚ²ý',2))&&(strncmp(
ww2(j,4),'¼ÖÝ',2)))&& ...

        ((strncmp(ww2(i,1),'D',1))|| (strncmp(ww2(i,1),'G',1))|| (strncmp(ww2(i
,1),'C',1)))
            a= min((cell2mat(ww2(i,[9:12]))-cell2mat(ww2(j,[9:12]))));
            K=[K;a];
            b=ww2(j,1);
            L=[L b];
        elseif
        (strcmp(ww2(i,1),ww2(j,1)))&&((strncmp(ww2(i,4),'òĚ²ý',2))&&(strncmp(
ww2(j,4),'¼ÖÝ',2)))&& ...
            (cell2mat(ww2(j,3))==1);
            a= min(cell2mat(ww2(i,[9:12])));
            K=[K;a];
            b=ww2(j,1);
            L=[L b];
        elseif
        (strcmp(ww2(i,1),ww2(j,1)))&&((strncmp(ww2(i,4),'òĚ²ý',2))&&(strncmp(
ww2(j,4),'¼ÖÝ',2)))&& ...

        ((strncmp(ww2(i,1),'T',1))&&(cell2mat(ww2(j,3))~=1))&& ...
            ((cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))<=1000)
            a =
            (cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))*0.1457;
            K=[K;a];

elseif(strcmp(ww2(i,1),ww2(j,1)))&&((strncmp(ww2(i,4),'òĚ²ý',2))&&(st
rncmp(ww2(j,4),'¼ÖÝ',2)))&& ...
            ((strncmp(ww2(i,1),'Z',1))&&(cell2mat(ww2(j,3))~=1))
&& ...
            ((cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))<=1000)
            a
            =(cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))*0.2329;
            K=[K;a];

elseif(strcmp(ww2(i,1),ww2(j,1)))&&((strncmp(ww2(i,4),'òĚ²ý',2))&&(st
rncmp(ww2(j,4),'¼ÖÝ',2)))&& ...

        (cell2mat(ww2(j,3))~=1)&&((cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))<=10
00)
            a =(cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))*0.1108;
            K=[K;a];

```

```

        b=ww2(j,1);
        L=[L b];

    elseif
        (strcmp(ww2(i,1),ww2(j,1)))&&((strcmp(ww2(i,4),'ÒĚ²Ý',2))&&(strcmp(
ww2(j,4),'ÒĚ²Ý',2)))&& ...

        ((strcmp(ww2(i,1),'T',1))&&(cell2mat(ww2(j,3))~=1))&& ...
            ((cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))>1000)
            a =
        (cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))*0.1093;
            K=[K;a];

    elseif
        (strcmp(ww2(i,1),ww2(j,1)))&&((strcmp(ww2(i,4),'ÒĚ²Ý',2))&&(strcmp(
ww2(j,4),'ÒĚ²Ý',2)))&& ...
            ((strcmp(ww2(i,1),'Z',1))&&(cell2mat(ww2(j,3))~=1))
&& ...
            ((cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))>1000)
            a
        =(cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))*0.1747;
            K=[K;a];

    elseif
        (strcmp(ww2(i,1),ww2(j,1)))&&((strcmp(ww2(i,4),'ÒĚ²Ý',2))&&(strcmp(
ww2(j,4),'ÒĚ²Ý',2)))&& ...

        (cell2mat(ww2(j,3))~=1)&&((cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))>100
0)
            a =(cell2mat(ww2(i,8))-cell2mat(ww2(j,8)))*0.0831;
            K=[K;a];
            b=ww2(j,1);
            L=[L b];
        end
    end
end
end
end

```

## 附录五

```

clc;
clear;
A=xlsread('ĤÄ.xls','A1:C6');
B=xlsread('ĤÄ.xls','D1:F281');
C=xlsread('ĤÄ.xls','G1:I5');
D=xlsread('ĤÄ.xls','J1:L14');
ck=[];ck1=[];ck2=[];

```



```

for i=1:length(A)
    for j=1:length(B)
        for k=1:length(C)
            for h=1:length(D)
                if (A(i,1)>0) && (B(j,1)<0) && (C(k,1)>0) && (D(h,1)<0)
                    a=A(i,1)-B(j,1)+C(k,1)-D(h,1);
                    ck=[ck a];
                    b= -A(i,3)+B(j,3)-C(k,3)-D(h,3);
                    ck1=[ck1 b];
                    ck2=[ck2;[i j k h]];
                elseif (A(i,1)<0) && (B(j,1)>0) && (C(k,1)<0) && (D(h,1)>0)
                    a=- (A(i,1)-B(j,1)+C(k,1)-D(h,1));
                    ck=[ck a];
                    b= -(-A(i,3)+B(j,3)-C(k,3)-D(h,3));
                    ck1=[ck1 b];
                    ck2=[ck2;[i j k h]];
                end
            end
        end
    end
end
aa=ck1';
bb=ck';
A=[bb aa];
m=length(A(:,1));
n1=min(A(:,1));
n2=min(A(:,2));
a=zeros(length(A),1);
b=zeros(length(A),1);

    for i=1:length(A)
        a(i)= n1/A(i,1);
        b(i)= n2/A(i,2);
    end
    r12=[a b]
    p=zeros(length(A),2);
    for i=1:length(A)
        p(i,1)=a(i)/sum(a);
        p(i,2)=b(i)/sum(b);
    end

    e=zeros(2,1);v=zeros(2,1);
    for i=1:m
        v(1)=v(1)+p(i,1)*log(p(i,1));

```

```

        v(2)=v(2)+p(i,2)*log(p(i,2));

    end
    for i=1:2
        e(i)=(-1/(log(m)))*v(i);
    end

    e1=2-e(1)-e(2)
    w=zeros(2,1);
    for i=1:2
        w(i)=(1-e(i))/e1
    end
    z=zeros(m,1);
    for i=1:m
        z(i)=w(1)*r12(i,1)+w(2)*r12(i,2);
    end
    z
    [i,j]=find(z==max(z))
    max(z)

```