

# 铁路最优路线问题

## 摘要

本文通过题目给出数据建立一个一般的数学模型，根据该模型并通过算法来解决任意两个站点之间的最优化铁路路线问题。

对于问题一，在以时间消耗、经济花费作为目标的同时，还考虑人们对乘车时需要做换乘调整的接受能力。采用 Floyd 算法计算出起点站到终点站的时间，通过分层排序法求解出经济的花费，最后根据侧重的目标不同建立多个优化方案，最终结果为：

若侧重考虑花费最少最优化方案如下表

起点站	车次	转乘站	转乘车次	终点站	花费
丹东	K190/K187	常州	D3006/D3007	宜昌	353
天津	T122/T123	武昌	T264/T265	拉萨	335
白城	K1302	黄村	K712/K709	青岛	269

若侧重考虑时间最短则从丹东到宜昌有三个方案可选：一是从丹东乘坐 K190/K187 次列车在南京转乘 K696/K697 次列车最终到达宜昌，二是从丹东乘坐 K190/K187 次列车在常州转乘 D3006/D3007 次列车最终到达宜昌，三是从丹东乘坐 K190/K187 次列车在常州转乘 K1512/K1513 次列车最终到达宜昌。从天津到拉萨有一个优化方案，从天津乘坐 T122/T123 次列车在武昌转乘 T264/T265 次列车最终到拉萨。从白城到青岛的优化方案也有一个，从白城乘坐 K1302 次列车在黄村转乘 K712/K709 次列车最终到青岛

对于问题二，以两站点间的最短距离为目标，通过 Dijkstra 算法分别求解出距离宜昌的最短路线，根据路线的大小将南京、苏州、上海、杭州和无锡依次由近及远排序，由此顺序建立最优化路线。得到最终结果为：

关键字：最优化路线    重点目标    分层排序    多目标规划

# 1. 问题重述

## 1.1 问题背景

铁路既是社会经济发展的重要载体之一，同时又为社会经济发展创造了前提条件。近几年来，在全社会客运量稳步上升的同时，长期以来铁路承运了大量旅客。相对于其他的运输方式铁路具有时间准确性高、运输能力大、运行比较平稳、安全性高等优点。同时火车也成为了旅途的首选交通运输工具。

虽然目前铁路网络已经比较发达，但是仍然有很多地方之间并没有直接到达的铁路。并且在节假日期间，一些热门路线的火车票总是一票难求。在这种情况下，需要考虑换乘，即先从乘车站到换乘站，再从换乘站到目的站。

## 1.2 2013 年全国列车时刻表数据

详细数据见附录一，包含以下信息：列车车次、列车类型（普快，空调快速，动车…）、站序、车站、日期（当天，第2天，第3天）、到达时间、离开时间、里程、硬座/一等座票价、硬卧/二等座票价、软座/特等座票价、软卧票价。

## 1.3 需要解决的问题

根据以上信息解决以下问题：

1) 给出任意两个站点之间的最优铁路路线问题的一般数学模型和算法。若两个站点之间有直达列车，需要考虑直达列车票已售罄情况下最优的换乘方案。根据附录数据，利用你们的模型和算法求出以下起点到终点的最优路线：丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛。

2) 假设你打算从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌，请建立相关数学模型，给出整个行程的最优路线。

# 2. 模型假设

假设一：只考虑时间，距离，费用，换乘次数四个因素，其他因素影响不计。

假设二：考虑人们心理承受能力，换乘次数不超过一次，换乘等车的时间不超过两个小时。

### 3. 符号说明

符号	符号意义
$A$	起始站
$B$	终点站
$T_1$	列车到站时间
$T_2$	列车离站时间
$t$	列车从起点站出发后的日期
$t_1$	乘客换乘时的等车时间
$Y_{ij}$	起始点 A 和终点站 B 所组成的二维数组
$P_i$	所有经过终点站 A 的铁路路线
$Q_j$	所有经过终点站 B 的铁路路线
$O_{iu}$	$P_i$ 所包含的站点
$D_{iv}$	$Q_i$ 所包含的站点个数
$F_{ai}$	站点 $j$ 的 $a$ 型车票的单价
$F_{aj}$	站点 $i$ 的 $a$ 型车票的单价
$X_{ij}$	站点 $i$ 和站点 $j$ 是否包含于同一天路线。若是则 $X_{ij} = 1$ ，否则 $X_{ij} = 0$
$L_{ij}$	站点 $i$ 和站点 $j$ 间的距离

$m$	$P_{(i)}$ 与 $Q_{(j)}$ 相交的路线
$n$	路线 $m$ 包含的站点数
$R_k$	经过站点 $O_{iu}$ 的路线
$G_{iu}$	路线 $R_k$ 包含的站点
$a$	各类型的车座

## 4. 问题分析

### 4.1 问题一的分析

根据题目的要求，给出任意两点，求出这两点的最优化路线。首先搜索题目附录提供的数据建立一个二维数组，查询站点 A 和站点 B 之间是否有直达的列车路线，若有一条或多一条路线满足要求，通过比较分析时间，费用等主要因素得出最优化路线；若两个站点之间有直达列车，需要考虑换乘方案<sup>[1]</sup>。假设乘客所能承受的最大换乘次数不能超过一次，因此得出所用的时间最短或者所用的费用最少两种优化模型，乘客可以根据自己的实际要求选择适合自己的路线搭乘。

### 4.2 问题二的分析

在问题一的基础上，应用问题一的求解方法，先求解出满足从宜昌到南京、无锡、苏州、杭州和上海的所有路线，然后求解出这些路线中距离最短的路线为优化路线，易得南京距离宜昌最近，取宜昌到南京的最短距离路线为优化路线；然后从无锡、苏州、杭州和上海四个站点中计算出与南京距离最短的站点，链接这两站点路线为优化路线；以此类推，求得的这些优化路线链接得到的路线为最优化路线

## 5. 问题一的解答

针对问题一，我们建立了问题一

### 5.1 模型的建立

乘客选择乘车路线时主要考虑三个方面的因素：时间、费用和换乘次数。三者之间是既有联系又有区别的，一般情况下，换乘次数比较少时所用的时间也比较少，同时花费的费用也比较少；换乘次数比较多时所用的时间也比较多，同时花费的费用也比较多。但也不排除换乘次数多时花费的时间反而比较少少的情况。假设换乘次数不超过一次。建立模型找出换乘次数不超过 1 次的所有可行路线。

输入起点  $A$  和终点  $B$  所建立的二维数组  $Y(i, j)$ ，找出经过  $A$  点的铁路线路  $P_{(i)} (i=1, 2L \ \alpha)$  和经过目的站点  $B$  的铁路线路  $Q_{(j)} (j=1, 2L \ \beta)$ ：

判断是否有：

$$P_{(i)} = Q_{(j)}$$

满足条件的路线设为  $Z$ ，若  $Z=1$ ，则该条路线为最优线路。若  $Z>1$ ，则分别计算这些路线的列车行驶的时间、花费，根据花费少、时间短的原则选出最优路线。若  $Z=0$ ，则求出这些路线的交点作为转乘点。经过  $A$  点的路线所包含的站点为  $O_{iu} (u=1, 2L \ g)$ ，经过  $B$  点的路线所包含的站点为  $D_{iv}$

判断是否有：

$$O_{iu} = D_{iv}$$

满足条件的站点设为  $W$ ，若  $W=1$ ，则该点为  $A$  到  $B$  的一次换乘点；若  $W>1$  或  $W=0$ ，则需多次换乘才能到达终点站，没有最优化路线。

列车从起点站到终点站的总时间包括列车行驶的时间、列车等候时间和乘客换乘等车时间三部分，其中：

$$\text{列车行驶时间: } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} (T_{1j} - T_{2i})$$

$$\text{列车等候时间: } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} (T_{2j} - T_{2i})$$

$$\text{乘客换乘时间: } t_1$$

综合上述得到时间的最优化模型:

$$\begin{aligned} \min T = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \left[ (T_{1j} - T_{2i}) + (T_{2j} - T_{1j}) + (t-1)24 + t_1 \right] \\ \text{s.t. } & \begin{cases} X_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \\ t \in [0, 4] \\ t_1 \in [0, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

列车从站点  $i$  到站点  $j$  的花费主要包含各类不同车座的单价, 总花费的多少与乘客购买的车座的类型相关, 车座类型分为硬座/一等座票价、硬卧/二等座票价、软座/特等座票价、软卧票价。因此得到从站点  $i$  到站点  $j$  的花费最优化模型:

$$\begin{aligned} \min \beta = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{a=1}^4 X_{ij} (F_{aj} - F_{ai}) \\ \text{s.t. } & \begin{cases} X_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

其中  $a$  为不同类车座。

$$\begin{cases} 0 < T \leq 5, a \text{ 为一等座硬座} \\ 5 < T \leq 10, a \text{ 为二等座硬卧} \\ 10 < T, a \text{ 为软卧} \end{cases}$$

## 5.2 模型的求解与结果分析

以下路线是根据模型利用 MATLAB 语言编程运算得出的结果：

1. 丹东 → 宜昌转乘一次列车可供选择的路线如下表

表 2

路线	起始站	车次 1	中转站	车次 2	终点站	乘车时间	最少乘车费用
路线一	丹东	K190/K187	南京	K696/K697	宜昌	37 小时 40 分钟	495
路线二		K190/K187	常州	D3006/D3007		37 小时 40 分钟	353
路线三		K190/K187	常州	K1512/K1513		37 小时 40 分钟	553
路线四		K190/K187	无锡	D3006/D3007		47 小时 9 分钟	536

从丹东 → 宜昌转乘 1 次时，有 73 条路线可供选择，假设火车无晚点情况且等车时间不超过 2 小时，考虑到火车的方向性，最终筛选出 4 条可供选择的乘车路线。其中有 3 条路线的乘车时间均为 37 小时 40 分钟，在乘车时间最少的情况下路线二：从丹东乘 K190/K187 到常州转车 D3006/D3007 到终点站宜昌所用的乘车费用最少，路线四所用的时间相较其他路线所用的时间长乘车费用贵，综上所述路线二更容易被大多数乘客接受。

2. 天津 → 拉萨转乘一次列车可供选择的路线如下表

表 3

路线	起始站	车次 1	中转站	车次 2	终点站	乘车时间	最少乘车费用
路线一	天津	1230/1227	上海	T164/T165	拉萨	67 小时 6 分钟	628
路线二		4310/0000	上海	T164/T165		60 小时 8 分钟	506
路线三		K2082/K2083	上海	T164/T165		88 小时 29 分钟	648
路线四		T122/T123	武昌	T264/T265		43 小时 25 分钟	335
路线五		T238/T235	武昌	T264/T265		65 小时 57 分钟	400

从天津 → 拉萨有 5 条路线可供乘客选择，其中路线一，路线二，路线三的中转站均为上海，路线四和路线五的中转站是武昌。由表中数据分析出了相对优化的乘车方式：从天津乘 T122/T123 到武昌转车 T264/T265 到终点站拉萨。

从起点站到终点站所花的时间最少，乘车费用也最少，所以路线四是天津→拉萨最理想的乘车路线。

3. 白城→青岛转乘一次列车可供选择的路线如下表

表 4

路线	起始站	车次 1	中转站	车次 2	终点站	乘车时间	最少乘车费用
路线一	白城	K1302	黄村	K712/K709	青岛	32 小时 11 分钟	269
路线二		K2082/K2083	上海	T164/T165		88 小时 29 分钟	648
路线三		T122/T123	武昌	T264/T265		43 小时 25 分钟	335
路线四		T238/T235	武昌	T264/T265		65 小时 57 分钟	400

从白城→青岛有 4 条路线可供选择，其中路线一的乘车时间和乘车费用最少：从白城乘 K1302 到黄村转车 K712/K709 到终点站青岛。综上所述白城→黄村→青岛路线更加受乘客欢迎。

6. 问题二的解答

针对问题二，我们建立了问题二

6.1 模型的建立

乘客选择乘车路线时主要考虑三个方面的因素：时间、费用和换乘次数。三者之间是既有联系又有区别的，一般情况下，换乘次数比较少时所用的时间也比较少，同时花费的费用也比较少；换乘次数比较多时所用的时间也比较多，同时花费的费用也比较多。但也不排除换乘次数多时花费的时间反而比较少的情況。假设换乘次数不超过一次。建立模型找出换乘次数不超过 1 次的所有可行路线。

输入起点  $A$  和终点  $B$  所建立的二维数组  $Y(i, j)$ ，找出经过  $A$  点的铁路线路  $P_{(i)} (i=1, 2L \alpha)$  和经过目的站点  $B$  的铁路线路  $Q_{(j)} (j=1, 2L \beta)$ ：

判断是否有：

$$P_{(i)} = Q_{(j)}$$

满足条件的路线设为  $Z$ ，若  $Z = 1$ ，则该条路线为最优线路。若  $Z > 1$ ，则分别



计算这些路线的列车行驶的时间、花费，根据花费少、时间短的原则选出最优路线。若  $Z = 0$ ，则求出这些路线的交点作为转乘点。经过  $A$  点的路线所包含的站点为  $O_{iu} (u=1, 2, \dots, g)$ ，经过  $B$  点的路线所包含的站点为  $D_{iv}$

判断是否有：

$$O_{iu} = D_{iv}$$

满足条件的站点设为  $W$ ，若  $W = 1$ ，则该点为  $A$  到  $B$  的一次换乘点；若  $W > 1$  或  $W = 0$ ，则需多次换乘才能到达终点站，没有最优化路线。

根据以上算法求解出的路线，然后通过 Dijkstra 算法求出各条路线的最短距离，得到最优化模型为：

$$\begin{aligned} \min S &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} L_{ij} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} X_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

## 6.2 模型的求解与结果分析

第一步：先求解出从宜昌到南京、无锡、苏州、杭州和上海这五个城市距离最短的路线，得到南京距离宜昌最近，所以路线一确定为宜昌 → 南京。

第二步：以南京为圆心，从上海，杭州，苏州，无锡这四个城市中找出距离南京最近的城市，得到无锡距离南京最近，所以路线二确定为南京 → 无锡。

第三步：以无锡为圆心，从苏州，上海，杭州三个城市中找出距离无锡最近的城市，得到苏州距离无锡最近，所以路线三确定为无锡 → 苏州。

第四步：以苏州为圆心，从上海，杭州两个城市中找出距离苏州最近的城市，得到上海距离苏州最近，所以路线四确定为苏州 → 上海。

第五步：确定路线五，上海 → 杭州 → 宜昌

综上所述，给出整个行程的最优路线为：

宜昌 → 南京 → 无锡 → 苏州 → 上海 → 杭州 → 宜昌

## 7. 模型的评价

优点:

1. 模型最终的结果根据侧重的影响因素的不同给出了多个优化的方案，可根据实际情况或个人爱好选择最优方案。
2. 模型采用 Floyd 算法计算任意两点间的最短距离，模型具有普遍性，每次查询只需提取相关的数据，而无需重新进行运算。

缺点: 本题所建立的模型只能解决任意两站点间有直达的列车路线或经过一次换乘到达终点站的优化路线，不能解决两次换乘或更多次数换乘的优化路线，有一定的局限性。

## 8. 模型的改进及推广

### 8.1 模型的改进

因为原模型只能解决任意两站点间有直达的列车路线或经过一次换乘到达终点站的优化路线，故在模型的改进上，以问题一的模型为基础，经过如下改变，使改进后模型能解决多次换乘后到达终点站得优化路线。

输入起点  $A$  和终点  $B$  所建立的二维数组  $Y(i, j)$ ，找出经过  $A$  点的铁路线路  $P_{(i)} (i=1, 2L \ \alpha)$  和经过目的站点  $B$  的铁路线路  $Q_{(j)} (j=1, 2L \ \beta)$ ：

判断是否有：

$$P_{(i)} = Q_{(j)}$$

满足条件的路线设为  $Z$ ，若  $Z=1$ ，则该条路线为最优线路。若  $Z>1$ ，则分别计算这些路线的列车行驶的时间、花费，根据花费少、时间短的原则选出最优路线。若  $Z=0$ ，则求出这些路线的交点作为转乘点。经过  $A$  点的路线所包含的站点为  $O_{iu} (u=1, 2L \ g)$ ，经过  $B$  点的路线所包含的站点为  $D_{iv}$

判断是否有：

$$O_{iu} = D_{iv}$$

满足条件的站点设为  $W$ ，若  $W=1$ ，则该点为  $A$  到  $B$  的一次换乘点；若  $W>1$ ，分别计算出每条换乘路线的距离，选取距离最短的一条路线为优化路线。

若  $W=0$ ，求解经过站点  $O_{iu}$  的公交路线为  $R(k)$ ，铁路线路  $R(k)$  包含的站点为  $G_{kt}$ 。

判断是否有：

$$G_{kt} = D_{iv}$$

满足条件站点设为  $s$ ，若  $s=1$ ，则站点  $G_{kt}$  为从站点  $A$  到  $B$  的二次换乘点，公交路线  $x_i$ ， $y_j$ ， $R(k)$  为二次换乘的最优路线。若  $s>1$  分别计算每条二次换乘路线的距离，乘客可以根据自己的实际要求选择适合自己的路线搭乘。

## 8.2 模型的推广

该模型可以推广到服务行业，比如中国移动，联通的流量包办理选择。该模型也可以在各大商场促销活动中得到运用，具有一定的实际意义。

## 9. 参考文献

- 【1】 尹景本，石东洋，赵颜创，孙新利，苏少红，焦红伟，选择最佳公交线路的数学模型，数学的实践与认识，2010 年.
- 【2】 刘佳壮，王建方，网络最优化[M]，武汉：华中工学院出版社，1985.
- 【3】 卓金武. Matlab 在数学中的应用[M]. 清华大学出版社，2009, 12.

## 10. 附录

附录一：

```
clear
clc
while(1)
    clear
    [n,vaw,data]=xlsread('附件一.xls','A2:L49370');
    clear n;
    clear vaw;
    plt1=input('请输入起始站：');
    plt2=input('请输入终点站：');
    plt3=input('请输入转站等待时间：');
    a=cat(2,data(:,1:2),data(:,4));
    b=cell2mat(cat(2,data(:,3),data(:,5:end))));
    j=0;
    k=0;
    for i=1:49369
        if strcmp(a(i,3),plt2)==1
            j=j+1;
            m(j,:)=cat(2,a(i,1),i);
        else if strcmp(a(i,3),plt1)==1
```

```

        k=k+1;

        n(k,:)=cat(2,a(i,1),i);

    end

end

end

%%%%%%%%%% 丹东 %%%%%%%%%%%

r=0;

for j=1:size(n,1)

    for i=1:49369

        if strcmp(a(i,1),n(j,1))==1

            r=r+1;

            c(r,:)=cat(2,a(i,:),i);

        end

    end

end

%%%%%%%%%% 宜昌东 %%%%%%%%%%%

o=0;

for j=1:size(m,1)

    for i=1:49369

        if strcmp(a(i,1),m(j,1))==1

            o=o+1;

            d(o,:)=cat(2,a(i,:),i);

        end

    end

end

%%%%%%%%%% 转一站的车次 %%%%%%%%%%%

r=0;

for i=1:size(c,1)

    for j=1:length(d)

```

```

        if strcmp(c(i,3),d(j,3))==1
            r=r+1;
            e(r,:)=cat(1,c(i,1),c(i,4),d(j,1),d(j,4),c(i,3));
        end
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 时 间 判 断
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=cell2mat(e(:,2:2:4));
for i=size(e,1):-1:1
    if b(f(i,1),3)>1-0.5/24
        if
b(f(i,1),3)+0.5/24-1>b(f(i,2),4) || b(f(i,1),3)+p1t3/24-1<b(f(i,2),4)
            e(i,:)=[];
        end
    else
        if
b(f(i,1),3)+0.5/24>b(f(i,2),4) || b(f(i,1),3)+p1t3/24<b(f(i,2),4)
            e(i,:)=[];
        end
    end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 顺 序 判 断
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f1=cell2mat(e(:,2:2:4));
v=0;
for i=size(e,1):-1:1
    k=0;
    for j=1:49369
        if strcmp(data(f1(i,1),1),data(j,1))==1

```

```

        k=k+1;
        g(k,:)=cat(2,j,data(j,:));
    end
end
f2=cell2mat(g(:,4));
for il=1:size(g,1)
    if strcmp(g(il,5),plt1)==1
        if f2(il)>b(f1(i,1),1)
            e(i,:)=[];
        else
            v=v+1;
            s1(v,:)=cat(2,g(il,6:2:8),g(il,10:13));
        end
    end
end
end
end
f3=cell2mat(e(:,4));
v=0;
for i=size(e,1):-1:1
    k=0;
    for j=1:49369
        if strcmp(data(f3(i),1),data(j,1))==1
            k=k+1;
            h(k,:)=cat(2,j,data(j,:));
        end
    end
end
f4=cell2mat(h(:,4));
for i2=1:size(h,1)
    if strcmp(h(i2,5),plt2)==1

```

```

        if f4(i2)<b(f3(i,1),1)

            e(i,:)=[];

            s1(i,:)=[];

        else

            v=v+1;

            s2(v,:)=cat(2,h(i2,6:2:8),h(i2,10:13));

        end

    end

end

%计算时间

f5=cell2mat(e(:,2:2:4));

for i=1:size(e,1)

y(i,:)=cat(2,b(f5(i,1),2:3),b(f5(i,1),6:9),b(f5(i,2),2:2:4),b(f5(i,2),6:9));

end

s1=cell2mat(s1);

s2=cell2mat(s2);


for i=1:size(e,1)

    t(i)=y(i,1)+s2(i,2)+s2(i,1)-s1(i,1)-s1(i,2)-y(i,7);

end

T1=floor(t*24);

T2=(t*24-T1)*60;

T=cat(1,T1,T2);

%票价

for i=1:size(e,1)

```



```

        Y1(i,:)=y(i,3:6)-s1(i,3:6);
        Y2(i,:)=s2(i,3:6)-y(i,9:12);
    end
    qwe={' 小时';' 分钟';' 一次硬座';' 一次硬卧';' 一次软座';' 一次软卧';'
二次硬座';' 二次硬卧';'
二次软座';' 二次软卧'};
    checi=e(:,1:2:5)'
    q=cat(1,T,Y1',Y2')
    xlswrite(' 乘车方案',checi)
    xlswrite(' 时间价格',qwe)
    xlswrite(' 时间价格',q,1,'B1')
    clear
end

```