铁路最优路线问题

摘 要

本文从多个角度对铁路旅客乘车方案进行了计算与验证。首先分析了旅客人群的分类，然后对乘车方案影响因素和条件进行分析，针对全国铁路网建立关于铁路旅客乘车的多目标规划模型，计算任意两个站点之间的最优乘车方案。

第一方面，研究铁路旅客乘车方案优化问题。首先分析了旅客乘车方案选择问题,给出径路约束条件,结合旅客列车开行方案,对狭义最短乘车时间、最短换乘时间、广义最短乘车时间、最小乘车费用、最短乘车径路等目标进行分析,分别得到其数学模型。最终建立旅客乘车多目标优化数学模型。根据列车开行方案构造有向网络,设计了相应算法,最后通过 MATLAB 编程计算从丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛的最优乘车方案验证上述算法。结果如下：

方案	起始站	首乘车次	中转站	转乘车次	终点站	总时间	总票价）
1	丹东	K190/K187	镇江	D3006/D3007	宜昌	2595	516
2	天津	Z194/Z191	石家庄	T27	拉萨	2778	391
3	白城	1468	锦州	K704/K701	青岛	1475	180

第二部分，从宜昌出发经过上海、南京、镇江、苏州、常州旅游最后返回宜昌。为给铁路旅客选择合理的旅行方案提供参考,考虑旅客从起点站出发、最终返回起点站，因为是旅游，不再考虑换乘间隔时间。分别给出旅行时间、换乘次数、票价、距离、到发时刻和综合指数6种目标的确定方法,提出最短路法的求解方法。最短路法是通过构造并简化旅客运输网络,求出网络上若干条次短路,再根据各条次短路上列车的接续,构造列车换乘方案网络图,得到最优换乘方案。最优方案为：乘坐$K698/K695$从宜昌出发先到达南京，然后到达无锡，苏州次之，最后到达上海然后从上海乘$D3203$到达杭州，再从杭州坐$K529$返回宜昌。乘车。总花费369元。

在文章最后对假设进行减少，对模型进行改进完善，虽然费用会有所增加，但是更符合现实情况，并且能够很好地推广到混合交通乘坐方案优化上来。

关键词： 多目标规划模型　弗洛伊德算法　分层求解

1、问题重述

1.1 问题背景

随着我国国民经济的发展，基础设施特别是道路交通设施建设成就辉煌。随着铁路六次大提速和客运专线的大量开通，旅客列车开行数量和种类越来越多，这些硬件设施的加强使得越来越多的旅客选择铁路出行。如今，旅客出行不再简单地追求自身位移的实现，而更看中出行的快捷经济、舒适的旅途、较少的转乘次数。同时由于旅客运输细分市场的形成，不同群体对出行费用、旅途时间、换乘等待时间等的要求也不尽相同，如何寻找最优的铁路路线方案，在实际生活中有着重要意义。

1.2 题目所给数据

附件1给出了2013年全国列车时刻表数据。包含以下信息：列车车次、列车类型（普快，空调快速，动车…）、站序、车站、日期（当天，第2天，第3天）、到达时间、离开时间、里程、硬座/一等座票价、硬卧/二等座票价、软座/特等座票价、软卧票价。如表1：

表1：全国列车时刻表（部分数据）

车次	列车类型	站序	车站	日期	到达时间	离开时间	里程	硬座/一等座	硬卧/二等座	软座/特等座	软卧
1043	普快	1	西安	1	21:13	21:13	0	0	0	0	0
1043	普快	2	咸阳	1	21:31	21:34	23	3	37		54
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
1043	普快	6	天水	2	1:21	1:24	328	24	58		96
…	…	…	…	…	…	….	…	…	…	…	
1043	普快	28	奎屯	3	11:33	11:33	2810	140	278		496

1.3 需要解决的问题

问题1：设计和建立任意两个站点之间的最优出行铁路路线的数学模型和算法。并考虑直达和换乘两种情况下的最优路线。

根据附录数据，利用上述得到的模型和算法求出起点到终点的最优路线：丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛。

问题2：设计一条最优旅行路线：从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌，建立相关数学模型，给出整个行程的最优路线。

2、模型假设

2.1 模型假设

假设1：在同站换乘；

假设2：所有列车票价取最低价。

3、符号说明

$G=(V,\mathrm{L})$	有向图
L	列车集合
l_i	车次
N	列车数量
V	列车站点集合
V_{l_i}	列车 l_i 的站点集合
$t_{l_i}^1(s)$	l_i 列车到达 s 站的时刻
$t_{l_i}^2(s)$	l_i 列车从 s 站的发车时刻
T_{l_i}	列车经过 s 站的时间集合
P	列车票价集合
$p_{ij}(l_i)$	l_i 列车从 i 站到 j 站所用票价
z_1	总乘车时间
z_2	总票价
z_3	换乘次数

4、问题分析

本文研究的是铁路出行最优路线的问题。要根据所获得的信息设计任意两个站点之间的最优铁路路线的数学模型和算法，并要设计和建立关于旅游路线设计的数学模型与算法。现对本题的两个问题进行以下分析：

4.1 针对问题 1

对于问题一中建立任意两个站之间的最优路线模型和算法问题，我们通过了解可知对于最优条件就是使得乘火车出行中的时间最短、价钱最少、是否直达、换乘间隔时间最短、火车类型与车票类型的选择等，使得这些条件同时满足或达到相对最优，很明显是一个多目标规划问题，对于不同类型的人对乘车要求的权重是不同的。对于我国居民的的经济现状和铁路票价状况，可知大部分旅客对时

间的要求的权重较高，票价和换乘次数次之。

对于换乘问题，首先考虑到换乘的最大次数，根据中国铁路现状，基本上换乘两次可以到达国内的大部分地区，所以我们将换乘的最大次数设为2次。其次对于换乘间隔时间，根据文献[1]将最小换乘间隔时间设为$T_0 = 20\min$。综上分析建立多目标规划模型，通过算法求解的到有效解，即相对最优解。

然后利用模型和算法对丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛求解最优路线。

4.2 针对问题 2

对于题目中对于如何安排乘车方案使得旅游路线中时间和费用达到最优，在根据问题一中的一些信息，可以了解到利用图论中的最短路问题可以解决，本文采用弗罗里达算法，将时间和票价作为权值，这样建立模型就可以很好地得出结果。

综合上述两个问题，总的来说，本文需要解决的是寻找最优的铁路转乘路线的问题。

5、数据处理

5.1 简化数据

观察数据通过用 MATLAB 程序进行筛选和分析知列车类型有10种，车次有4683趟，对应站点有2837个，共49370组数据。由于数据量庞大会导致计算量太大，从实际应用也没有必要。为提高效率，对路网数据进行适当简化。

本文以路网数据上的对客运径路和换乘计算有影响的车站作为网络节点,删除无列车停站及只有一个列车停战的车站（始发站及终点站除外），将路网数据简化后保留下来的数据作为计算数据。

5.2 修改数据

在简化数据后，我们利用 EXCEL 中的筛选工具对缺失票价进行筛选，并通过铁路官网对其进行查询补全。利用同样的方法对列车时刻表进行修正。得表2：

表2：修正数据（部分）

车站	日期	到达时间	离开时间	里程	硬座/一等座	硬卧/二等座	软座/特等座	软卧
双城堡	1	6:09	6:09	0	0		0	
五家	1	6:26	6:53	18	1			
王岗	1	7:11	7:35	38	2			
哈尔滨	1	7:54	8:13	51	3			
滨江	1	8:20	8:21	54	3			
哈尔滨东	1	8:32	8:32	60	3			

5.3 筛选出车次及其对应的路线

附件1包含的信息较多，不能直观的看出每车次列车的行驶路线。现筛选出车次及其对应的始发站、停靠站和终点站，可以构成列车经过站点的集合。

运用 MATLAB 编程实现（程序见附录1），得到全部车次和对应的始发站、停靠站、终点站。

表3：部分车次及其对应的路线

车次	路线
1043	西安→咸阳→杨陵镇→蔡家坡→宝鸡→天水→甘谷→陇西→定西→兰州→武威→金昌→山丹→张掖→清水→酒泉→嘉峪关→地窝铺→疏勒河→柳园→哈密南→鄯善→吐鲁番→乌鲁木齐→乌西→石河子→沙湾县→奎屯
…	…
6815	榆次→太谷→祁县→平遥→张兰→介休→孝南→孝西→白壁关→兑镇→阳泉曲
…	…
Z98/Z95	太原→石家庄北→南京→上海

6、问题一的模型建立与求解

6.1、模型目标

设计和建立任意两个站点之间的最优出行铁路路线的数学模型和算法。并考虑直达和换乘两种情况下的最优路线。然后求出从丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛的最优路线。

6.2 模型类型的确定

根据题目要求，要使得票价、乘车时间，换乘次数等达到相对最优，符合多目标优化条件，所以我们结合图论知识建立多目标规划模型。

6.3 模型准备

6.3.1 建立带权的有向图

参考文献[2]中关于多目标铁路旅客乘车方案优化模型计算法研究，根据实际情况选择列车始发站、停靠站、终点站作为网络节点，以两站间通过的列车作为有向弧，构建铁路客运换乘网络图，以列车信息（两站间列车运行时间）赋权，就可以得到带权的有向图。每次列车都有一条行驶路径，旅客只能在火车站上、下车或转乘其他车次。

设$G=(\mathrm{V},\mathrm{L})$为有向图，$V=\left\{V_{l_i}\middle|l_i\in L,i=1,2,\cdots N\right\}$为列车经过站点集合，其中，$V_{l_i}=\left\{v_{l_i}^1,v_{l_i}^2,\cdots,v_{l_i}^{ml_i}\right\}$为$l_i$次列车经过的站点集合；$L=\left\{l_i\middle|i=1,2\cdots N\right\}$为列车集合，$N$为列车数量；$T=\left\{t_{l_i}^1(i,j),t_{l_i}^2(i,j)\middle|i,j\in N\right\}$表示连接图上站点之间的时间集，用来刻画乘车时间，$t_{l_i}^1(i,j)$表示$l_i$次列车从$i$站到达$j$站的到达时刻，$t_{l_i}^2(i,j)$表示$l_i$次列车从$i$站去往$j$站的发车时刻；$T_{l_i}=\left\{\left(t_{l_i}^1(s),t_{l_i'}^2(s)\right)\middle|s\in V_{l_i},l_i,l_i'\in L\right\}$为列车在站点处$s$的时间集，用来刻画换乘等待时间，$t_{l_i}^1(s)$表示$l_i$次列车到达$s$站的时刻，$t_{l_i'}^2(s)$表示$l_i'$次列车从$s$站发车的时刻。

6.4 模型建立

6.4.1 换乘路径选择影响因素

旅客出行路径选择的主要影响因素包括时间、票价、换乘次数、换乘等候时间等。根据假设1，同城有多个车站时，只考虑原站换乘。

乘车时间：

铁路旅客乘车时间：

$$t_{ij}\left(l_i\right)=t_{l_i}^{1}\left(j\right)-t_{l_i}^{2}\left(i\right)$$

$t_{ij}\left(l_i\right)$为乘坐l_i次列车从i站到j站的乘车时间；$t_{l_i}^{1}\left(j\right)$为$l_i$次列车从$i$站到$j$站的到站时间；$t_{l_i}^{2}\left(i\right)$为$l_i$次列车从$i$站到$j$站的发车时间。

票价费用：

$$p_{ij}\left(l_i\right)=p_j\left(l_i\right)-p_i\left(l_i\right)$$

$p_{ij}\left(l_i\right)$乘坐l_i次列车从i站到j站的票价；$p_j\left(l_i\right)$为l_i次列车在j站的票价；$p_i\left(l_i\right)$ l_i次列车在i站的票价。

换乘次数：

换乘次数是指乘客在完成一次出行过程中所换列车的次数。根据我国铁路网的现有状况，基本上转乘两次后就可到达中国的每个地方，而且对于乘客来说换乘次数增加继而增加换乘等候时间，那么在转乘站点的消费而导致乘客出行费用增加，所以综合考虑把最大换乘次数取两次为宜。

换乘间隔时间：

换乘间隔时间为从l_1次列车换乘l_2次列车的时间，即l_2次列车发车时刻与l_1次列车到站时间的时间差，若差值小于一个标准T_0 $\left(一般取T_0=20\min\right)$[2]，则时差应加一天，即$1440\min$，那么乘坐$l_1$次列车换乘$l_2$次列车所需间隔时间$\mathrm{t}_{ij}\left(l_1,l_2\right)$为

$$\mathrm{t}_j\left(l_1,l_2\right)=\begin{cases}t_{l_2}^{2}\left(j\right)-t_{l_1}^{1}\left(j\right) & t_{l_2}^{2}\left(j\right)-t_{l_1}^{1}\left(j\right)\geq T_0\\ t_{l_2}^{2}\left(j\right)-t_{l_1}^{1}\left(j\right)+1440, & t_{l_2}^{2}\left(j\right)-t_{l_1}^{1}\left(j\right)<T_0\end{cases}$$

6.4.2 换乘模型的构建

$$\left(U\right)\quad\begin{cases}\min z_1=\sum_{i\in V}\sum_{j\in V}\sum_{l_i\in L}\left[t_{l_i}^{1}\left(j\right)-t_{l_i}^{2}\left(i\right)\right]x_{ij}^{l_i} & (1)\\ \min z_2=\sum_{i\in V}\sum_{j\in V}\sum_{l_i\in L}p_{ij}\left(l_i\right)x_{ij}^{l_i} & (2)\\ \min z_3=\sum_{i\in V}\sum_{j\in V}\sum_{l_i\in L}x_{ij}^{l_i}-1 & (3)\end{cases}$$

$$s.t.\quad\begin{cases}\sum_{j\in V}\sum_{l_i\in L}x_{oj}^{l_i}=1 & (4)\\ \sum_{i\in V}\sum_{l_i\in L}x_{im}^{l_i}-\sum_{j\in V}\sum_{l_i\in L}x_{mj}^{l_i}=0;\quad m\neq o,d; & (5)\\ \sum_{i\in V}\sum_{l_i\in L}x_{id}^{l_i}=1 & (6)\\ \sum_{i\in V}\sum_{j\in V}\sum_{l_i\in L}x_{ij}^{l_i}-1\leq N_{\max} & (7)\\ x_{ij}^{l_i}\in\left\{0,1\right\};\quad\forall i,j\in V,l_i\in L & (8)\end{cases}$$

目标函数式中的三个目标函数分别表示为总乘车z_1时间最小，总票价费用z_2最少，换乘次数z_3最少。在约束条件中，式$(4)\sim$式(6)保证从始发站o到终到站为一条路径，式(7)表示换乘次数满足最大换乘次数$N_{\max}$的限制，式(8)是$0-1$变

量约束。

6.5 模型求解

6.5.1 求解算法

多目标优化问题的目标函数（总乘车z_1时间最小、总票价费用z_2最少、换乘次数z_3最少）彼此之间是相互联系、相互制约的。为了求解方便，可以进行可行路径集合的求解。

可行路径的搜索：

在整个的铁路客运服务网络中，搜索任意两个站点之间的乘车路径，考虑到旅客出行的实际情况，本文在构建初始路径集合时最多换乘次数为两次。对于一次出行需求od，首先在列车集合$L=\{l_i \mid i=1,2\cdots N\}$中，分别找出$o$站及$d$站的列车集合，分别标记为$L_o$，$L_d$。有以下三种情况：

（1）直达

设$L_i=L_o\cap L_d$，则$l_i\in L_i$列车均经过o站及d站，如果l_i次列车从o站的发车时刻$t_{l_i}^2(o)$早于到达d站的时刻$t_{l_i}^1(d)$，即$t_{l_i}^2(o)<t_{l_i}^1(d)$，则表示从$o$站乘坐$l_i$次列车可以直接到达$d$站。

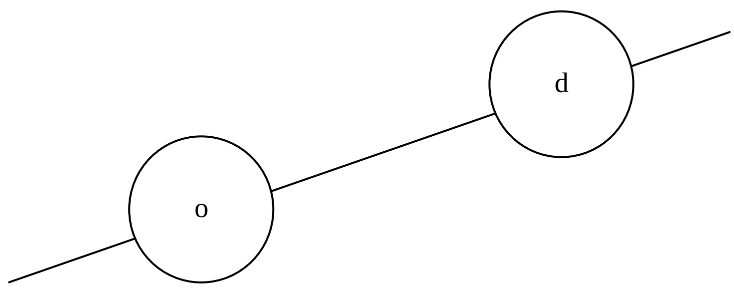

图1：直达示意图

（2）转乘一次

设$L_m=L_o-L_d$，$L_k=L_d-L_o$，则$l_m\in L_m$列车只经过o站，$l_k\in L_k$列车只经过d站。若l_m列车在o站以后的车站与l_k列车在d站以前的车站有交汇点s，则可以换乘，即$\left(v_{l_m},v_{l_k}\right)\in V^t,\forall v_{l_m}\in V_{l_m},v_{l_k}\in V_{l_k}$且$t_{l_m}^2(o)<t_{l_m}^1\left(v_{l_m}\right),t_{l_k}^2\left(v_{l_k}\right)<t_{l_k}^1(d)$，则表示从$o$站乘坐$l_m$次列车在$v_{l_m},v_{l_k}$站间可以换乘$l_k$列车到达$d$站，从而得到一条一次换乘一次的出行方案。

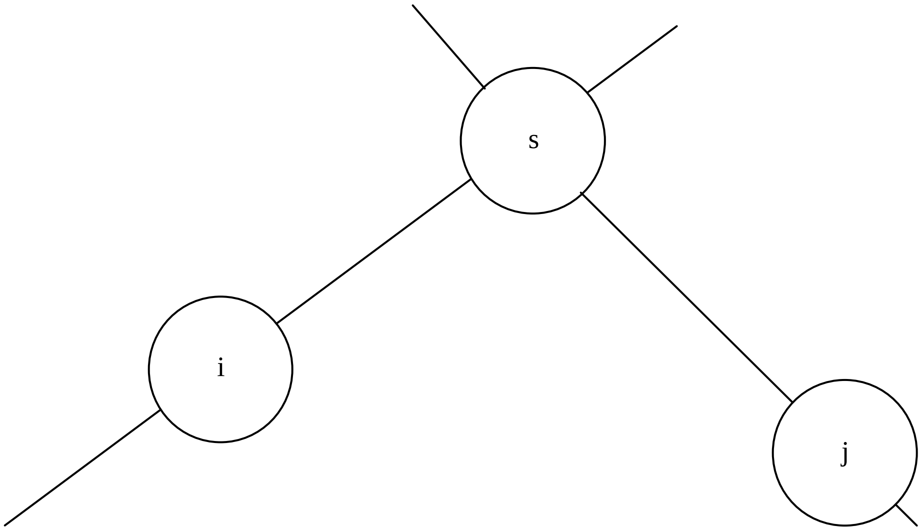

图 2：转乘一次示意图

（3）换乘两次

设 $L_m = L_o - L_d$，$L_k = L_d - L_o$，$L_q = L - L_o \cup L_d$，则 $l_q \in L_q$ 表示不经过 o 站和 d 站的列车，若 $l_m \in L_m$ 列车在 o 站以后的车站与 $l_q \in L_q$ 列车经过的车站可以换乘，即 $\left(v_{l_m}, v_{l_q}^1\right) \in V^t, \forall v_{l_m} \in V_{l_m}, v_{l_q}^1 \in V_{l_q}$ 且 $t_{l_m}^2\left(o\right) < t_{l_m}^1\left(v_{l_m}\right)$，则表示从 o 站乘坐 l_m 次列车在 $v_{l_m}, v_{l_q}^1$ 站间可以换乘 l_q 次列车；若 l_q 次列车在 $v_{l_q}^1$ 站以后的车站与 l_k 列车在 d 站以前的车站有交汇点，则可以换乘，即 $\left(v_{l_q}^2, v_{l_k}\right) \in V^t, \forall v_{l_q}^2 \in V_{l_q}, v_{l_k} \in V_{l_k}$ 且 $t_{l_q}^2\left(v_{l_q}^1\right) < t_{l_q}^1\left(v_{l_q}^2\right), t_{l_k}^2\left(v_{l_k}\right) < t_{l_k}^1\left(d\right)$，则表示从 $v_{l_q}^1$ 站乘坐 l_q 次列车在 $v_{l_q}^2, v_{l_k}$ 站间可以乘换 l_k 列车到达 d 站，从而得到一条换乘两次的出行方案。

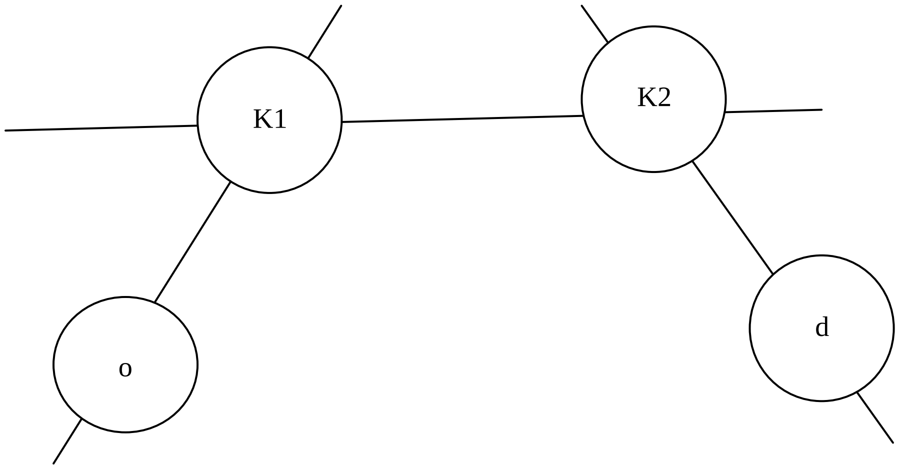

图 3：存在一条换乘路径

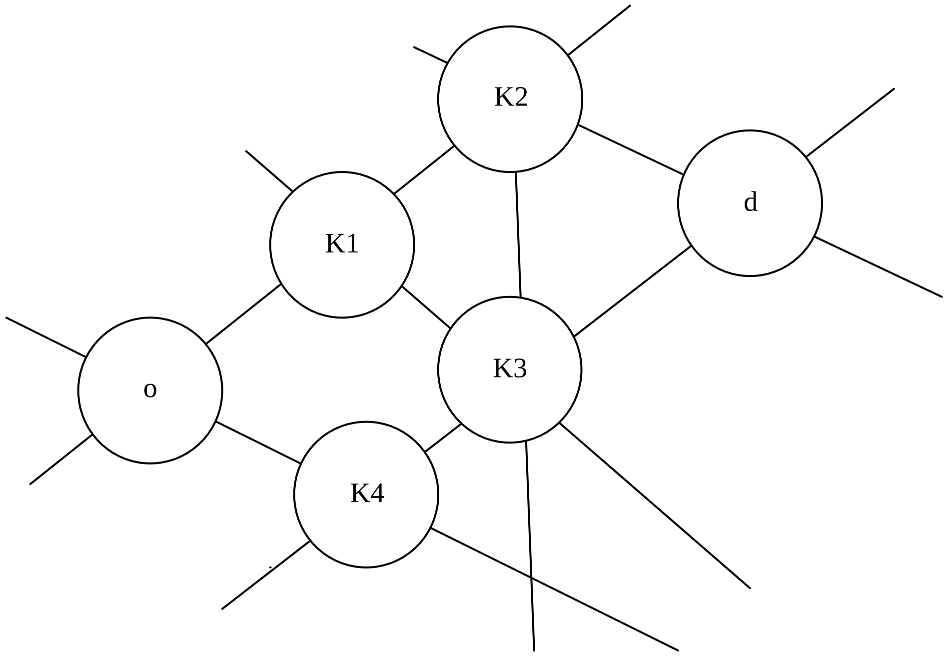

图 4：存在多条换乘路径

6.5.2 算法步骤

step 1：令最大换乘次数 $N_{\max}$=2，$L_o=\{l|o\in V_l,l\in L\}$，$L_d=\{l|d\in V_l,l\in L\}$；

step 2：如果 $L_o=\varnothing$ 或者 $L_d=\varnothing$，则停止计算，否则令 $L_i\in L_o\cap L_d$；

step 3：直达列车路径计算：如果 $L_i=\varnothing$，转折 *step* 4，否则，对于所有的 $l_i\in L_i$，若 $t_{l_i}^2(o)<t_{l_i}^1(d)$，则输出 l_i 列车从 o 站到 d 站的路径，计算总乘车时间 $z_1=t_{l_i}^1(d)-t_{l_i}^2(o)$，票价费用 $z_2=p_{od}(l_i)$，换乘次数 $z_3=0$，转至 *step* 4；

step 4：换乘一次路径计算：令 $L_m=L_o-L_d$，$L_k=L_d-L_o$，若 $L_m=\varnothing$ 或者 $L_k=\varnothing$，则停止计算，否则令 $V_{l_m}^o=\{v_{l_m}|v_{l_m}\in V_{l_m}$ 且 $t_{l_m}^2(o)<t_{l_m}^1(v_{l_m})\}$，$V_{l_k}^d=\{v_{l_k}|v_{l_k}\in V_{l_k}$ 且 $t_{l_k}^2(v_{l_k})<t_{l_k}^1(d)\}$，如果 $(v_{l_m}^2,v_{l_k})\in V^t,\forall v_{l_m}\in V_{l_m}^o,v_{l_k}\in V_{l_k}^d$，转至 *step* 5，否则，转至 *step* 6；

step 5：输出 l_m 次列车从 o 站到 v_{l_m} 的站点及 L_k 列车从 v_{l_k} 到 d 的站点，计算总乘车时间 $z_1=t_{l_m}^1(v_{l_m})-t_{l_m}^2(o)+t_{l_k}^1(d)$，票价费用 $z_2=p_{ov_{l_m}}+p_{v_{l_k}d}(l_k)$，换乘次数 z_3=1，转至 *step* 6；

step 6：换乘两次路径计算：令 $L_q=L-L_o\cup L_d$，若 $L_q=\varnothing$，则停止计算，否则，对于所有的 $l_q\in L_q$，如果 $(v_{l_m},v_{l_q}^1)\in V^t,\forall v_{l_m}\in V_{l_m}^o,v_{l_q}^1\in V_{l_q}$，$(v_{l_q}^2,v_{l_k})\in V^t$，$\forall v_{l_q}^2\in V_{l_q}$，$v_{l_k}\in V_{l_k}^d$ 且 $t_{l_q}^2(v_{l_q}^1)<t_{l_q}^1(v_{l_q}^2)$，转至 *step* 7，否则，停止计算；

step 7：输出 l_m 次列车从 o 站到 v_{l_m} 的站点、l_q 次列车从 $v_{l_q}^1$ 到 $v_{l_q}^2$ 的站点、L_k 列车从 v_{l_k} 到 d 的站点，构成两次换乘路径，计算总乘车时间 $z_1=t_{l_m}^1(v_{l_m})-t_{l_m}^2(o)+t_{l_m}^1(d)-t_{l_k}^2(v_{l_k})+t_{l_q}^1(v_{l_q}^2)-t_{l_q}^2(v_{l_q}^1)$，票价费用 $z_2=p_{ov_{l_m}}(l_m)+p_{v_{l_k}d}(l_k)+p_{v_{l_q}^1v_{l_q}^2}(l_q)$，换乘次数 $z_3=2$，停止计算。

6.5.3 搜索结果

运用 MATLAB 实现（程序见附录），可以得到任意两站点之间的

6.6 求解最优路线

通过搜索，发现丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛都不能直达，需要换乘。

针对当前的铁路运营情况，在初始路径的搜索过程中对于不同等级车站的搜索次数有如下的规定：

（1） 当始发站、终点站是特等或一等站时，换乘次数搜索到一次；

（2） 当始发站、终点站至少有一个等级低于一时，换乘次数搜索到两次；

由于丹东、宜昌、天津、拉萨、青岛均为一等站，白城为二等站，所以丹东→宜昌、天津→拉萨的换乘次数搜索到一次，白城→青岛的换乘次数搜索到两次。

6.6.1 丹东→宜昌

表 4：丹东→宜昌可行路线的搜索结果

方案	首乘车次	中转站	转乘车次	总乘车时间（分）	总票价费用（元）	换乘次数（次）
1	K190/K187	上海	K696/K697	3794	418	1
2	K190/K187	南京	K696/K697	3088	344	1
3	K190/K187	常州	D3006/D3007	2694	541	1
4	K190/K187	无锡	D3006/D3007	2761	553	1
5	K190/K187	苏州	D3006/D3007	2827	572	1
6	K190/K187	镇江	D3006/D3007	2595	516	1

结果分析：

通过上述表格呈现的换乘的可行路线中我们可以看到在上海和南京转乘票价相对最少，但是乘车时间比其他转乘点乘车总时间多将近 24 小时；而对于在镇江转乘时，车程时间最短，票价适中。如果考虑票价最优，则可以从丹东乘 *K*190 / *K*187 到南京转乘 *K*696 / *K*697 到宜昌，票价 344 元，如果考虑时间最优，则从丹东乘 *K*190 / *K*187 到镇江转乘 D3006/D3007 到宜昌。综合考虑，在时间最优的基础上票价相对较少，所以在镇江转乘为相对最优解

6.6.2 天津→拉萨

表 5：天津→拉萨可行路线的搜索结果

方案	首乘车次	中转站	转乘车次	总乘车时间（分）	总票价费用（元）	换乘次数（次）
1	'T131/T134'	'上海'	'T164/T165'	4008	645	1
2	'K7728/K7725'	'北京西'	'T27'	2959	422	1
3	'T131/T134'	'南京'	'T164/T165'	3480	573	1
4	'Z194/Z191'	'太原'	'T27'	4085	568	1
5	'K388/K385'	'宝鸡'	'T22/T23'	4061	384	1
6	'K388/K385'	'广元'	'T22/T23'	5392	529	1

7	'K1062/K1063'	'广安'	'T222/T223'	4510	509	1
8	'T253'	'广州'	'T264/T265'	5528	711	1
9	'T244/T241'	'徐州'	'T164/T165'	4323	376	1
10	'K388/K385'	'成都'	'T22/T23'	4834	529	1
11	'T131/T134'	'无锡'	'T164/T165'	3789	382	1
12	'T238/T235'	'武昌'	'T264/T265'	3580	309	1
13	'Z194/Z191'	'石家庄北'	'T27'	2778	391	1
14	'T131/T134'	'蚌埠'	'T164/T165'	4594	415	1
15	'K388/K385'	'西安'	'T264/T265'	3874	342	1
16	'K1062/K1063'	'达州'	'T222/T223'	4226	479	1
17	'T184/T181'	'郑州'	'T264/T265'	4069	332	1
18	'T238/T235'	'郴州'	'T264/T265'	4858	564	1
19	'K1062/K1063'	'重庆北'	'T222/T223'	4768	537	1
20	'T238/T235'	'长沙'	'T264/T265'	4212	497	1

结果分析：

通过上述表格呈现的换乘的可行路线中我们可以看到在武昌和郑州转乘票价相对最少，但是乘车时间比其他转乘点乘车总时间相对较多；而对于在石家庄北转乘时，车程时间最短，票价适中。如果考虑票价最优，则可以从天津乘$T238/T235$到武昌转乘$T264/T265$到拉萨，票价 309 元，如果考虑时间最优，则从天津东乘$Z194/Z191$到石家庄北转乘$T27$到拉萨。综合考虑，在时间最优的基础上票价相对较少，所以在石家庄北转乘为相对最优解。

6.6.3 白城→青岛

表 6：白城→青岛可行路线的搜索结果

方案	首乘车次	中转站	转乘车次	总乘车时间（分）	总票价费用（元）	换乘次数（次）
1	'K7392/K7393'	'三源浦'	'K972/K969'	2633	254	1
2	'2690/2688/2685'	'丹东'	'K958/K955'	2634	273	1
3	'2690/2688/2685'	'五龙背'	'K958/K955'	2552	264	1
4	'K7306'	'公主岭'	'K704/K701'	2108	233	1
5	'1468'	'兴城'	'K1056/K1053'	2894	173	1
6	'2690/2688/2685'	'凤凰城'	'K958/K955'	2428	359	1
7	'L1004/L1005'	'包头'	'K712/K709'	3784	269	1
8	'L1004/L1005'	'呼和浩特'	'K712/K709'	3399	237	1
9	'1820/1817'	'呼和浩特东'	'K712/K709'	3267	308	1
10	'2156/2157'	'哈尔滨'	'K704/K701'	2620	253	1

11	'2262'	'唐山'	'K704/K701'	2683	171	1
12	'K550'	'四平'	'K1056/K1053'	1931	208	1
13	'2262'	'塘沽'	'K1056/K1053'	2652	179	1
14	'1468'	'大虎山'	'K704/K701'	1554	181	1
15	'2262'	'天津'	'K704/K701'	2600	186	1
16	'K278/K276/K273'	'宣化'	'K712/K709'	2544	222	1
17	'1468'	'山海关'	'K704/K701'	2783	176	1
18	'K1302'	'开原'	'K1056/K1053'	1890	199	1
19	'K278/K276/K273'	'张家口南'	'K712/K709'	2617	237	1
20	'K1302'	'昌图'	'K1056/K1053'	1910	193	1
21	'2690/2688/2685'	'本溪'	'K958/K955'	2005	232	1
22	'K7392/K7393'	'柳河'	'K972/K969'	2489	295	1
23	'K7392/K7393'	'梅河口'	'K972/K969'	2339	285	1
24	'K550'	'沈阳'	'K958/K955'	1736	231	1
25	'K1302'	'沈阳北'	'K704/K701'	1764	208	1
26	'1468'	'沟帮子'	'K704/K701'	1525	180	1
27	'2262'	'葫芦岛'	'K704/K701'	2895	192	1
28	'K7392/K7393'	'通化'	'K972/K969'	2838	325	1
29	'K1302'	'铁岭'	'K704/K701'	1858	204	1
30	'1468'	'锦州'	'K704/K701'	1475	180	1
31	'K7310'	'长春'	'K704/K701'	2071	234	1
32	'1820/1817'	'集宁南'	'K712/K709'	2956	274	1
33	'K1302'	'黄村'	'K712/K709'	1863	208	1

结果分析：

通过上述表格呈现的换乘的可行路线中我们可以看到在兴城、唐山和山海关转乘票价相对最少；而对于在锦州转乘时，车程时间最短，票价也相对较低。如果考虑票价最优，则可以从白城乘2262到唐山转乘2683到宜昌，票价 171 元，如果考虑时间最优，则从白城乘1468到锦州转乘1465到宜昌。综合考虑，在时间最优的基础上票价相对较少，所以在锦州转乘为相对最优解

7、问题二的模型建立与求解

问题 2 要解决从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌的最优路线问题。

7.1 模型建立

根据对问题二的分析，对于设计从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏

州、无锡旅游最后回到宜昌的最优路线。将路线分为两部分，一部分是去旅游路线，一部分回程。通过分析知是类似于求最短路的问题，符合图论模型中求任意两点的最短路问题。

Dijkstra 算法是图论中确定最短路的基本方法，也是其他算法的基础。为了求出赋权图中任意两点之间的最短路径，通常采用两种方法。Floyd 算法，其时间复杂度为$o(n^3)$，虽然与重复执行 Dijkstra 算法n次的时间复杂度相同，但形势上略微简单。且实际元算效果要好于前者。所以采用 Floyd 算法。如下：

假设在u_0-v_0的最短路中只取一条，则从u_0到其余顶点的最短路将构成以u_0为根的树。因此，可采用树生长的过程来球指定顶点到其余顶点的最短路。

Floyd 算法：

$D_{(i,j)}$：i 到 j 直接按的插入点。

$R_{(i,j)}$：i 到 j 之间的插入点。

输入：带权邻接矩阵$w_{(i,j)}$

（1）赋初值：对所有$i,j,d(i,j)\leftarrow w(i,j),r(i,j)\leftarrow j,k\leftarrow 1;$

（2）更新$d(i,j),r(i,j)$对所有 i，j，若$d(i,k)+d(k,j)<d(i,j)$，则$d(i,j)\leftarrow d(i,k)+d(k,j),r(i,j)\leftarrow k$；

（3）若$k=v$，停止。否则$k\leftarrow k+1$，转（2）。

7.2 模型求解

针对弗洛伊德算法中，对路赋时间和票价为权值，利 MATLAB 编程调用函数对其单程进行最优路线规划得：

起始站	车次	乘车时间/分钟	票价	第一站
宜昌东	k698/k695	845	131	南京
第一站	车次	乘车时间	票价	第二站
南京	k698/k695	125	15	无锡
第二站	车次	乘车时间	票价	第三站
无锡	k698/k695	29	6	苏州
第三站	车次	乘车时间	票价	第四站
苏州	k698/k695	91	9	上海
第四站	车次	乘车时间	票价	第五站
上海	D3202	76	11	杭州
第五站	车次	乘车时间	票价	第六站
杭州	K529	1339	14.5	宜昌

7.3 结果分析

从上述结果可以看出，模型中的算法较好，便与编程，并且当输入两个站点后程序能偶很快的得出这两个站点间的最优乘车方案。上述方案是以票价最优所得，如果考虑时间最优时，时间缩短为 8 小时，票价增大两倍。对于普通旅客旅来说，此乘车方案相对最佳。

8、模型的改进

本模型的主要假设有：

① 假设在同一个车站换乘的距离为 0；

② 票价取最小值。

在现实生活中，对于不同的人群在同城换车，硬座，卧铺，座位等级的选择上是存在的。主要从换乘路径选择的影响因素和最大换乘间隔的设定这两个方面改进，将换乘距离（即同城有多个车站时，可以换站换乘）和舒适性考虑到影响因素当中，并设定最大换乘时间间隔作为换乘路径选择的约束条件。

换乘距离：

由于换乘可以在同城的不同车站进行，而换乘距离存在多变性，由假设①有，

$$d\left(v_{l_k}^i, v_{l_m}^i\right)=0$$

舒适性：

用旅行疲劳度来描述出行的舒适程度，旅客乘 l_i 次列车从 i 站到 j 站的疲劳恢复时间为：

$$g\left[t_{ij}\left(l_i\right)\right]=T_{\max}/\left\{1+\alpha_{cl_i}\exp\left[-\beta_{cl_i}t_{ij}\left(l_i\right)/60\right]\right\}$$

其中，$T_{\max}$ 表示恢复疲劳所需的最长时间参数，通常取 14～15 小时；α_{cl_i} 表示出行疲劳恢复的最短时间；β_{cl_i} 表示出行时间的疲劳恢复时间强度系数。

最大换乘时间的设定：

换乘时间过长，会新增许多费用：跨天的吃饭、住宿，一般而言，乘客会选择间隔在 3～5 小时之内的列车。现假定换乘间隔时间 $t_{ij}\left(l_1,l_2\right)$ 的损失评价函数为：

$$r\left[t_{ij}\left(l_1,l_2\right)\right]=\begin{cases}2-\dfrac{t_{ij}\left(l_1,l_2\right)-20}{180-20}, & 20\le t_{ij}\left(l_1,l_2\right)<180\\ 1, & 180\le t_{ij}\left(l_1,l_2\right)<300\\ 2-\dfrac{1460-t_{ij}\left(l_1,l_2\right)}{1460-300}, & 300\le \mathrm{t}_{ij}\left(l_1,l_2\right)<1460\\ 2, & \text{其他}\end{cases}$$

通过对其改进重新建立模型，此时为八目标最优化模型。如下

$$(U)\quad\begin{cases}\min\ z_1=\sum\limits_{i\in V}\sum\limits_{j\in V}\sum\limits_{l_i\in L}\left[t_{l_i}^1\left(j\right)-t_{l_i}^2\left(i\right)\right]x_{ij}^{l_i}\\ \min\ z_2=\sum\limits_{i\in V}\sum\limits_{j\in V}\sum\limits_{l_i\in L}p_{ij}\left(l_i\right)x_{ij}^{l_i}\\ \min\ z_3=\sum\limits_{i\in V}\sum\limits_{j\in V}\sum\limits_{l_i\in L}x_{ij}^{l_i}-1\\ \min\ z_4=\sum\limits_{i\in V}\sum\limits_{j\in V}\sum\limits_{m\in V}\sum\limits_{l_1,l_2\in L}x_{ij}^{l_i}x_{jm}^{l_i}r\left[t_{ij}\left(l_1,l_2\right)\right]\\ \min\ z_5=\sum\limits_{i\in V}\sum\limits_{j\in V}\sum\limits_{m\in V}\sum\limits_{l_1,l_2\in L}x_{ij}^{l_i}x_{jm}^{l_i}d\left(v_{l_1}^j,v_{l_2}^j\right)\\ \min\ z_3=\sum\limits_{i\in V}\sum\limits_{j\in V}\sum\limits_{l_i\in L}60x_{ij}^{l_i}T_{\max}/\left\{1+\alpha_{cl_i}\exp\left[-\beta_{cl_i}t_{ij}\left(l_i\right)\right]\right\}\end{cases}$$

$$
s.t.\begin{cases}
\sum_{j\in V}\sum_{l_i\in L}x_{oj}^{l_i}=1 & (4)\\
\sum_{i\in V}\sum_{l_i\in L}x_{im}^{l_i}-\sum_{j\in V}\sum_{l_i\in L}x_{mj}^{l_i}=0;\quad m\neq o,d; & (5)\\
\sum_{i\in V}\sum_{l_i\in L}x_{id}^{l_i}=1 & (6)\\
\sum_{i\in V}\sum_{j\in V}\sum_{l_i\in L}x_{ij}^{l_i}-1\leq N_{\max} & (7)\\
x_{ij}^{l_i}\in\{0,1\};\quad \forall i,j\in V,l_i\in L & (8)
\end{cases}
$$

9、模型评价与推广

9.1 模型评价

优点：

（1）我们的模型充分考虑了影响旅客乘车选择的所有因素，将抽象问题具体化，考虑更全面，解出来的结果更准确；

（2）针对不同的人群因素的考虑先后顺序发生变动更好的侧重和适应各种人群。

（3）针对全国铁路网络设计模型，可以的到任意两个站点之间乘坐火车的最优路线，使得查询更方便。

缺点：

在模型建立时对同城不同站换车进行回避，对票价选择也做简化处理，有一些不符合现实情况，通过改进模型对其进行改进。

9.2 模型推广

本文针对问题一建立多目标规划模型，研究的是对旅客乘坐火车出行方案的研究，如果对条件进行调增，就可以推广到公交乘车方案中，根据航班的实际情况也可已适用，针对本文模型的特点增加和改变条件就可以推广到所有交通工具的出行方案上，并且对于交叉适用交通工具也可以进行研究。

针对于问题二，建立弗洛伊德算法模型，如果我们对其有向图的路进行不同的加权我们可以推广到流水线生产，快递路线选择，货运路线指定，和自驾游路线的制定等。

10、参考文献

[1] 崔炳谋，马钧培，陈光伟，等。铁路旅客换乘方案优选算法[J]。中国铁道科学，2007,28（6）：122-127.

[1] 杨信丰，刘兰芳，李引珍，等。多目标旅客乘车方案优化模型及算法研究。兰州交通大学西北交通经济研究中心。

11、附录

附录 1：计算时间间隔

```
function [time,k] = date_judge(y1,y2)
%  y1 = '7:26:00';
%  y2 = '7:26:00';
t1=datevec(y1);
t2=datevec(y2);
t1=datenum(t1);
t2=datenum(t2);
if t2>t1
    t = t2-t1;
    k =t;
    t = datevec(t);
    t = t(4:end);
    time = t(1)*60+t(2);
elseif t1==t2
    time = 0;
    k = 0;
else
    t=t2-t1;
    k = t;
    t=datevec(t);
    t=t(4:end);
    time = t(1)*60+t(2);
end

end
```

附录 2：计算两个站点之间的最短时间

```
function [mint,train,date1,date2] = first1(starting,reduce)

starting = 'ÒË²ý¶«';
reduce = 'ÉÏº£';
[num1,txt1,raw1] = xlsread('date1.xls');
[num,txt,raw] = xlsread('³µ´ÎÕ¾µã.xls');


m = 4683;
for i = 1:m
    raw{i}=num2str(raw{i});
end
n2 = 49370;
```

```
for ij = 1:n2
    for jj = 1:12
        raw1{ij,jj}=num2str(raw1{ij,jj});
    end
end
[rows cols ss] = find(strcmp(raw,starting));
[rowr colr rr] = find(strcmp(raw,reduce));
str = raw(rows,1);
red = raw(rowr,1);
if size(str,1)==0 || size(red,1)==0
    if size(str,1)==0
        disp('ÆðµãÃ»ÓÐÁÐ³µµ½´ï');
    elseif size(red,1)==0
        disp('ÖÕµãÃ»ÓÐÁÐ³µµ½´ï');
    else
    disp('ÆðµãÓëÖÕµã¶¼Ã»ÓÐÁÐ³µµ½´ï');
    end
else
same1 = intersect(str,red);
n1 = size(same1,1);
dates1 = cell(1,n1);
dater1 = cell(1,n1);
dates2 = cell(1,n1);
dater2 = cell(1,n1);
datep1 = cell(1,n1);
datep2 = cell(1,n1);
dateq1 = cell(1,n1);
dateq2 = cell(1,n1);
t = ones(1,n1);
k = 1;
k1 = 1;
for ii = 1:n1
   for jj = 1:n2
       if strcmp(same1{ii},raw1{jj,1}) && strcmp(starting,raw1{jj,4})
          dates1{1,k1} = raw1{jj,6};
          dater1{1,k1} = raw1{jj,7};
          datep1{1,k1} = raw1{jj,5};
          dateq1{1,k1} = raw1{jj,3};
          k1 = k1+1;
       end
       if strcmp(same1{ii},raw1{jj,1}) && strcmp(reduce,raw1{jj,4})
          dates2{1,k} = raw1{jj,6};
          dater2{1,k} = raw1{jj,7};
          datep2{1,k} = raw1{jj,5};
```

```
            dateq2{1,k} = raw1{jj,3};
            k = k+1;
        end
    end
end
for i = 1:n1
    dq1 = str2num(dateq1{1,i});
    dq2 = str2num(dateq2{1,i});
    if dq2 > dq1
        y2 = dates2{1,i};
        y1 = dater1{1,i};
        [time,k] = date_judge(y1,y2);
        w = datep2{1,i}-datep1{1,i};
        if k == 0
            time1 =w*24*60;
        elseif k >0
            time1 = time+w*24*60;
        elseif k <0
            time1 = time+(w-1)*24*60;
        end
        t(1,i) = time1;
    end
end
end
for i = 1:n1
    if t(1,i) == 1
        t(1,i)=inf;
    end
end
[mint hc] = min(t);
train = same1{hc};
date1 = cell(2,1);
date1{1,1} = dates1{1,hc};
date1{2,1} = dater1{1,hc};
dat1 = [datep1{1,hc}];
date2 = cell(2,1);
date2{1,1} = dates2{1,hc};
date2{2,1} = dater2{1,hc};
dat2 = [datep2{1,hc}];
mint
train;
date1;
date2;
end
```

附录 3：转乘一次

```
clc;
clear all;
[num1,txt1,raw1] = xlsread('date1.xls');
[num,txt,raw] = xlsread('³µ´ÎÕ¾µã.xls');
st = '°×³Ç';
rd = 'Çàµº';
starting = st;
reduce = rd;
same = first202(starting,reduce);
n = size(same,2);
stime = cell(n,1);
strain = cell(n,1);
dt = cell(n,1);
for i = 1:n
    starting =st;
    reduce = same{1,i};
    [mint,train,date1,date2] = first1(starting,reduce);
    stime{i,1} = mint;
    strain{i,1} = train;
    dt2 = date2{1,:};
    dt{i,1} =dt2;
end
stime;
strain;
so =[stime strain same' dt]

rtime = cell(n,1);
rtrain = cell(n,1);
st = cell(n,1);
for j = 1:n
    starting = same{1,j};
    reduce = rd;
    [mint,train,date1,date2] = first1(starting,reduce);
    rtime{j,1} = mint;
    rtrain{j,1} = train;
    st2 = date1{2,:};
    st{j,1} = st2;
end
sd = [rtime rtrain same' st]

T0 = 20;
```

```
sp =[];
ss = cell(n,1);
for i = 1:n
    y1 = st{i,1};
    y2 = sd{i,1};
    [time,k] = date_judge(y1,y2);
    if k >0
        std = time;
    elseif k ==0
        std = 24*60;
    elseif k<0
        std = time;
    end
    if std >=T0
        sp = [sp;i];
        ss{i,1} = std;
    end
end
n2 = size(sp,1);
n3 = size(so,2);
for i = 1:n2
    for j =1:n3
    k = sp(i);
    so1{i,j} = so{k,j};
    sd1{i,j} = sd{k,j};
    stq1{i,j} = ss{k,1};
    end
end

n1 = size(sd1,1);
rs = cell(n1,1);
for i = 1:n1
    rs{i,1} = so1{i,1} + sd1{i,1} + ss{i,1};
end
for i = 1:n1
rs1(i,1) = rs{i,1};
end
[minss s1] = min(rs1);
for j = 1:n3
kt{1,j} = so1{s1,j};
kt{2,j} = sd1{s1,j};
end
kt
```