

铁路最优路线问题

摘要

铁路是社会经济发展的重要载体之一，火车也成为了旅途的首选交通运输之一。本文要解决的是铁路最优路线问题，为快速地为乘客快速地寻找一条经济、合理、方便的最优乘车路线。首先分别以换乘次数、乘车时间和乘车费用作为目标函数，然后以换乘次数为重要约束条件，最后根据题目所给信息，建立了两个多目标规划模型。

针对问题一：在对题目中所给数据进行分析和整理，本问认为转乘次数超过两次的路线没有实际意义，所以只考虑转乘不超过两次的情况；同时考虑多目标综合最优，用了多目标规划模型以及遍历算法，得出推荐路线结果如下表（详细参数见附录）：

丹东到宜昌最优选线

	出发站	中转站		终点站
换乘一次	丹东（K28）	北京（K49）		宜昌
换乘两次	丹东			宜昌

天津到拉萨最优选线

	出发站	中转站		终点站
换乘一次	天津（T238/235）	石家庄（T27）		拉萨
换乘两次	天津			拉萨

白城到青岛最优选线

	出发站	中转站		终点站
换乘一次	白城（1468）	大虎山（K1056/K1053）		青岛
换乘两次	白城			青岛

针对问题二：和问题一不同，问题二中任意两个城市之间都有较多的直达车，并且城市与城市间相隔不远，因此本问只考虑直达的情况，在此之下结合模拟退火算法建立了多目标规划模型，最后得到了适应不同人群的不同路线，得出的环游路线为：宜昌东—南京—无锡—苏州—上海—杭州—宜昌东

详细的车程信息见下表：

	经济型（最省型）			舒适型（最快型）		
	车次	车票	乘车时段	车次	车票	乘车时段
宜昌-南京	K698	131	00:15-14:20	D3082	253	08:30-14:49
南京-无锡	T166	28.5	08:55-10:13	G7011	29.5	12:00-12:55
无锡-苏州	T7788	10.5	13:59-14:24	G7203	19.5	10:36-10:50
苏州-上海	T109	14.5	09:52-10:44	G7017	39.5	16:15-16:40
上海-杭州	T284	28.5	10:51-12:48	D3209	46.5	12:15-13:25
杭州-宜昌	K529	168.5	09:58-08:17	G586	370.5	07:13-14:15

关键词： 铁路最优路 多目标规划模型 模拟退火法

一. 问题重述

1.1 问题背景

铁路既是社会经济发展的重要载体之一，同时又为社会经济发展创造了前提条件。近几年来，在全社会客运量稳步上升的同时，长期以来铁路承运了大量旅客。相对于其他的运输方式铁路具有时间准确性高、运输能力大、运行比较平稳、安全性高等优点。同时火车也成为了旅途的首选交通运输工具。

虽然目前铁路网络已经比较发达，但是仍然有很多地方之间并没有直接到达的铁路。并且在节假日期间，一些热门路线的火车票总是一票难求。在这种情况下，需要考虑换乘，即先从乘车站到换乘站，再从换乘站到目的站。

1.2 需要解决的问题：

1) 给出任意两个站点之间的最优铁路路线问题的一般数学模型和算法。若两个站点之间有直达列车，需要考虑直达列车票已售罄情况下最优的换乘方案。根据附录数据，利用你们的模型和算法求出一下起点到终点的最优路线：丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛。

2) 假设你打算从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌，请建立相关数学模型，给出整个行程的最优路线。

二. 模型假设

假设 1 任意次换乘时算法复杂度高难以处理并且没有实际意义，所以本文只考虑不超过两次换乘

假设 2 列车（包括快车、特快车、直达车、动车、高铁）正点出发正点到

假设 3 换乘平均耗时间隙为 1 小时，且换乘之间不需要费用

假设 4 任何时候，乘客不会因为满载而无法上车

三. 符号说明

为了便于描述问题和表达我们对文中的变量符号进行解释说明：

问题一变量	
i	城市编号
F	乘车总费用
T	乘车总时间
n	换乘次数 ($n=0,1,2$)
f_{ij}	从 i 城市去 j 城市的乘车费用
t_{ij}	从 i 城市去 j 城市的乘车时间
$t_{\text{损}}$	换乘间隙
S	站点
C_i	中转站点
问题二变量	
c_i	城市编号为 i 的城市
S	问题二的解空间
Δc	差值
f_{ij}	从 i 城市去 j 城市的乘车费用
t_{ij}	从 i 城市去 j 城市的乘车时间
A	出发站点
B	目的站点
S^*	问题二中的最优解
p	接受准则中的概率

四. 问题分析

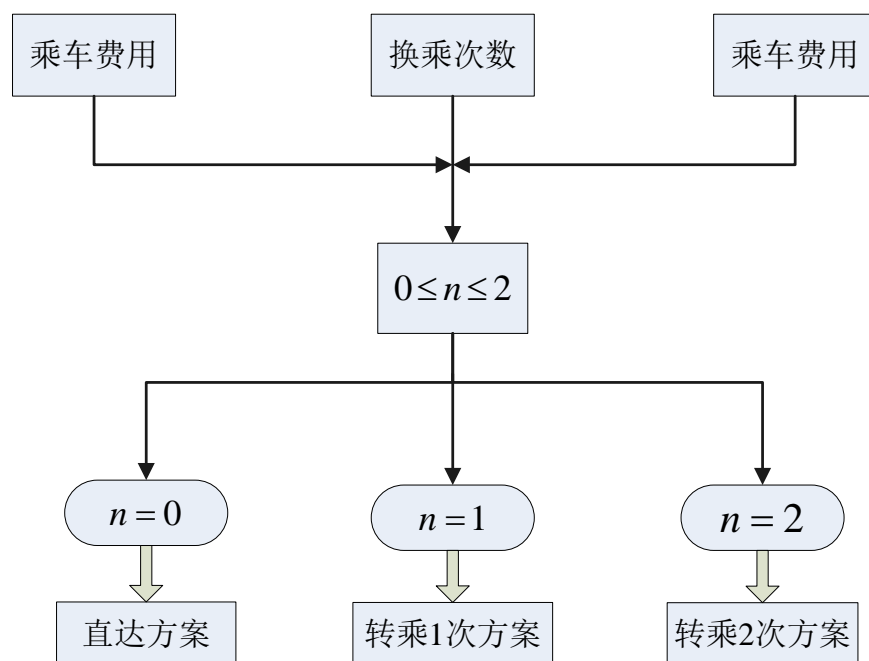
铁路是社会经济发展的重要载体之一，火车也成为了旅途的首选交通运输。铁路选线最优路线问题属于带约束多目标最优化问题，其最终方案的确定既要考虑科学技术因素、又要考虑社会经济因素，还要考虑自然环境因素，因此，我们用多目标规划模型。多目标优化至少要考虑三方面：换乘次数最少(n)，费用最省(M)，时间最短(T)。从实际出发，认为转乘次数超过两次的路线没有实际意义，所以只考虑转乘不超过两次的情况。

4.1 针对问题一的分析：

题目要求给出任意两个站点之间的最优铁路问题的一般数学模型和算法。并用建好的模型选出丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛的最优路线。本问属于考虑换乘的最优路线问题。

首先，将建立以换乘次数、乘车时间、乘车费用为目标的多目标函数模型。外地游客对异地的乘车设施不熟悉，因此为了减少旅客的颠沛感，换乘次数将作为最重要的因素。一般来说，旅客的乘车次数不超过两次，超过两次就会影响旅行的质量，在此基础上，本问决定分别在换乘次数分别为0次、1次和2次的情况下将乘车费用和乘车时间作为目标函数并进行求解。然后，将问题一中的三个具体实例带入上述多目标函数模型中进行求解，最后，分别得出在考虑直达车票售罄的情况下各旅游区间的最优乘车路线。

大致流程图如下：

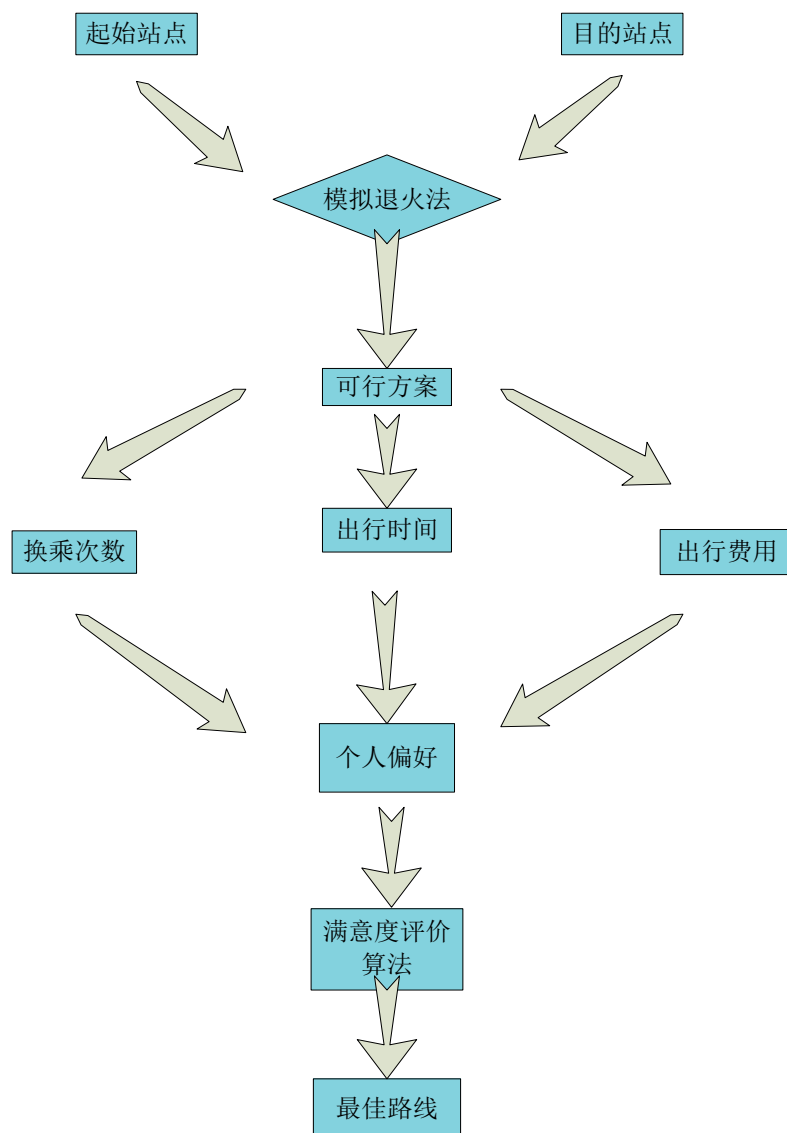


图一：问题一流程图

4.2 针对问题二的分析：

本问属于环游中的最优旅游路线的设计问题，将在模拟退火算法的基础上建立以乘车费用和乘车时间为目标的多目标函数模型。

在问题二中，任意两城市之间每天都有很多趟直达车，并且任意两城市间的距离不远，因此不必像问题一中一样考虑转乘问题。在此基础上，最优环游路线的设计方案只需确定旅游时城市的顺序问题和车种的选择问题。首先，将乘车费用作为目标函数，再利用模拟退火算法得到一条经济型路线（即为最省型）；然后，将乘车时间作为目标函数并运用模拟退火算法得到了一条舒适型路线（即为最快型）；最后，将乘车费用和乘车时间作为多目标函数再利用模拟退火算法即可的到一条推荐型路线（即为较快较省型）。本问大致流程图如下所示：



图二：问题二流程图

五. 问题一的解答

5.1 模型分析:

本问采取了提取主要因素和分类讨论思想,并在此基础上建立了三个目标的多目标函数模型。在从出发站 A 到终点站 B 的旅途中,乘客主要关心的因素有三个:换乘次数、乘车费用、乘车时间。因此本问考虑建立以这三个因素为目标的多目标函数,而在这三个因素中,换乘次数 n 是最重要的,显然若换乘次数超过两次乘客就会有严重的颠沛感,所以本问提取换乘次数这一主要因素,并保证在换乘次数不超过两次的情况下对其他两个目标做逐一地进行分类讨论,具体模型见如下的表达式中。

5.2 模型建立:

将出发站到终点站依次设为 $\{S_0, S_1, \dots, S_n, S_{n+1}\}$, 其中出发站为 S_0 , 终点站为 S_{n+1} , 中转站为 $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, 在考虑换乘次数 $0 \leq n \leq 2$ 时, 乘车总费用为旅途中两个车站之间的票价总和, 即为:

$$F = \sum_{i=0}^{n+1} f(S_i, S_{i+1})$$

而在行车过程中,如果考虑换乘的话,换乘时必须有换乘间隙来使旅客缓和时间的紧张,在此,本文假设换乘间隙为1小时/次,显然,换乘次数越多,总换乘间隙就会越长,具体的表达式如下:

$$T = t_{\text{损}} \times n + \sum_{i=0}^{n+1} t(S_i, S_{i+1})$$

考虑到实际生活中各类人的消费水平和紧张因素不同,本问为不同的人群建立了不同的模型,分为最省模型,最快模型,较快较省模型(推荐模型),分别对这三种模型进行求解,具体的表达式如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min F = \sum_{i=0}^{n+1} f(S_i, S_{i+1}) \quad (\text{最省型}) \\ \min T = t_{\text{损}} \times n + \sum_{i=0}^{n+1} t(S_i, S_{i+1}) \quad (\text{最快型}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \min F = \sum_{i=0}^{n+1} f(S_i, S_{i+1}) \\ \min T = t_{\text{损}} \times n + \sum_{i=0}^{n+1} t(S_i, S_{i+1}) \end{array} \right. \quad (\text{较快较省型 (推荐型)}) \\ 0 \leq n \leq 2 \\ n \in N^+ \end{array} \right.$$

其中, s_i 表示第 i 个站点。

六. 问题二的解答

6.1 模型分析:

本问属于环游中的最优化问题,运用模拟退火算法结合多目标函数建立了模型二。考虑到任意两个城市之间每天都有很多直达车,并且两城市间相隔不远,因此在本问中只考虑乘车总费用和乘车总时间两个因素,并以这两个因素建立了两个目标的多目标函数,再结合模拟退火算法对环游问题进行了求解,得出了全局中的最优解,具体模型如下。

6.2 模型建立:

步骤一: 建立目标函数:

问题二的解空间 S 是访遍每个城市恰好一次的所有回路,是所有城市排列的集合,问题二的解空间 S 可表示为 $(1, 2, \dots)$ 的所有排列的集合,即 $S = \{c_1, c_2, \dots, c_6\}$, 其中, S 为六个城市的乱序排列,每个排列 S_i 表示访遍 n 个城市的一个路径, $c_i = j$ 表示在第 i 次访问城市 j , 模拟退火算法的最优解与初始状态无关,故初始解为随机函数生成一个 $\{1, 2, \dots, 6\}$ 的随机排列作为 S_0 . 问题二的目标函数即为访问所有城市的乘车总费用和乘车总时间,成为两个代价函数,具体表达式设计如下:

$$\begin{cases} \min F = \sum_{i=0}^6 f_{ij} \\ \min T = \sum_{i=0}^6 t_{ij} \end{cases}$$

步骤二: 得到新解:

由初时解通过二变换法(任选序号 u, v (设 $u < v < 6$), 交换 u 和 v 之间的访问顺序。)和三变换法(任选序号 u, v 和 ω ($u \leq v < \omega$), 将 u 和 v 之间的路径插到 ω 之后访问。)得到新解。

步骤三: 产生目标函数差:

计算变换前的解和变换后的目标函数的差值:

$$\Delta c = c(S'_i) - c(S_i)$$

步骤四: 接收准则:

根据目标函数的差值和概率 $\exp(-\Delta c' / T)$ 接受 S'_i 为当前的新解 S_i , 接受准则为:

$$p = \begin{cases} 1, & -\Delta c' < 0 \\ \exp(-\Delta c' / T), & -\Delta c' > 0 \end{cases}$$

接下来问题二的求解就是通过模拟退火算法求出目标函数的最小值,相应地, $S^* = (c_1^*, c_2^*, \dots, c_6^*)$ 即为问题二的最优解。

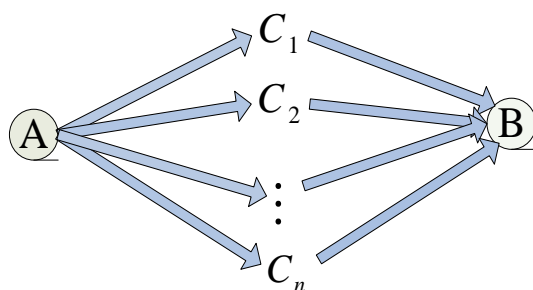
七. 模型求解

7.1 问题一的求解

7.1.1 基本思路

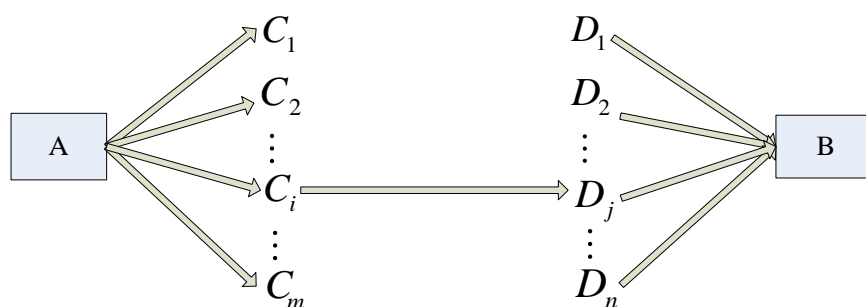
当换乘次数 $n=0$ 时，列车直达。

当换乘次数 $n=1$ 时，列车转车示意图如下：



图三：转乘一次示意图

当换乘次数 $n=2$ 时，列车转车示意图如下：



图四：转乘两次示意图

7.1.2 具体实现过程：

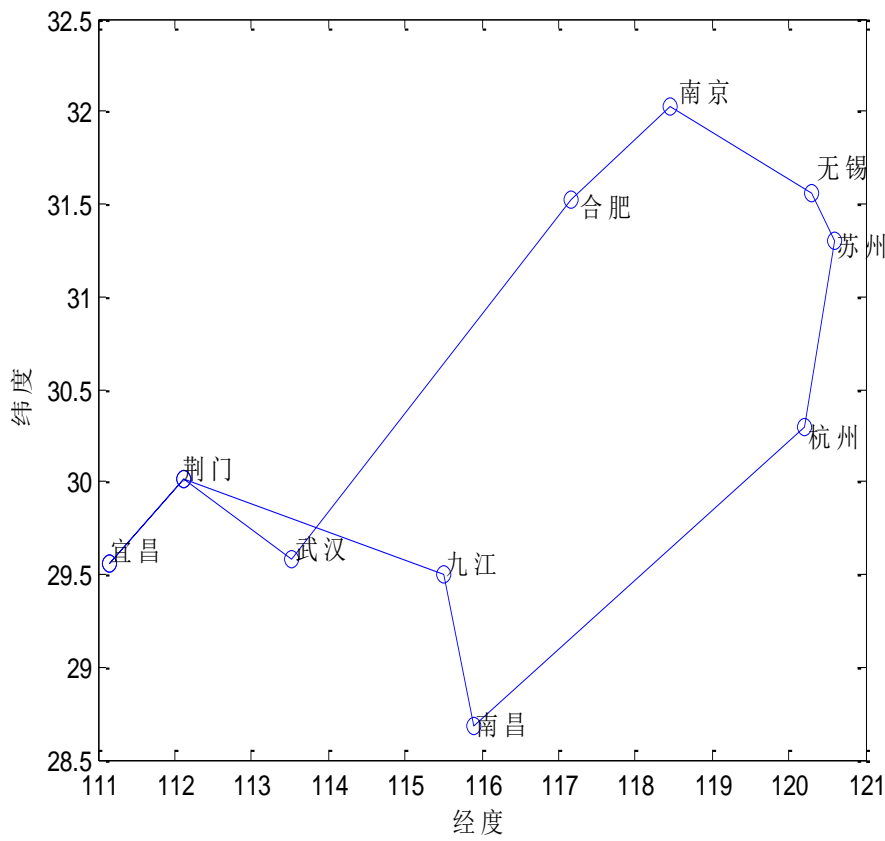
用 MATLAB 编写多目标规划模型程序，得出下表

表一：转乘一次的结果

出发站	车次	乘车时段	票价	中转站	车次	票价	乘车时段	终点站
丹东	K28	18:31-08:31	141.5	北京	T49	173.5	16:29-11:48	宜昌
天津	K548/K545	11:50-17:58	37	石家庄	T27	341	22:39-14:42	拉萨
白城	1468	06:10-12:50	51	大虎山	K1056/K1053	163.5	21:56-14:29	青岛

7.2 问题二的求解

根据模拟退火算法可以得出环游时的路线，运用 MATLAB 可得出环游路线图，如下所示：宜昌—南京—无锡—苏州—上海—杭州—宜昌



图五：环游路线图

运用 MATLAB 软件编写多目标规划模型程序得到如下结果：

表二：经济型环游路线表

	车次	票价	乘车时段
宜昌-南京	K698/K695	131	00:15-14:20
南京-无锡	T166/T163	28.5	08:55-10:13
无锡-苏州	T7788/T7785	10.5	13:59-14:24
苏州-上海	T109	14.5	09:52-10:44
上海-杭州	T284/T281	28.5	10:51-12:48
杭州-宜昌	K529/K532	168.5	09:58-08:17

表三：舒适型环游路线表

	车次	票价	乘车时段
宜昌-南京	D3082	253	08:30-14:49
南京-无锡	G7011	29.5	12:00-12:55
无锡-苏州	G7203	19.5	10:36-10:50
苏州-上海	G7017	39.5	16:15-16:40
上海-杭州	D3209	46.5	12:15-13:25
杭州-宜昌	G586/G587	370.5	07:13-14:15

八. 结果分析

8.1 问题一的结果分析：

利用多目标规划模型得出了换乘次数分别为 1 和 2 时的最优路线，将二者进行比较可知，随着换乘次数的增多，乘车费用和乘车时间均会增加，因此，我们推荐游客在旅游时首先选择直达车，在没有直达车或者直达车票售罄的情况下尽量减小转乘的次数以减少旅途中人力和财力的损失。

8.2 问题二的结果分析：

在利用模拟退火算法得到了环游时城市的先后顺序后，我们在网上搜索了相关的信息，发现各位旅游及各旅行社在旅游城市的顺序问题上和本问的结果一模一样，因此，基于模拟退火算法的多目标规划模型有较高的可信度。不仅如此，我们通过模型二还得到了针对不同人群的不同旅游路线，从而迎合了不同人群的需求，更加符合实际。

九. 模型的评价与推广

9.1 模型的优点：

- (1) 对换乘次数进行分类讨论，从实际出发排除了因换乘次数过多对旅途造成的不便，在很大程度上简化了求解模型。
- (2) 较单目标函数而言，本问建立的多目标函数模型能够更全面地解决问题。
- (3) 在模型建立中，本文根据个人的偏好设计了三个最优路线，能够迎合各类游客的不同需求。
- (4) 本文提出的算法可以较好地解决对出行者进行路径的诱导的问题，合理引导出游以减轻城市交通压力有一定的积极意义。

9.2 模型的缺点:

- (1) 利用模拟退火算法得到的结果可能是局部的最优解而不是全局的最优解,但是这种可能性很小,数值约为为 0.1 的指数。
- (2) 在对问题二进行求解时未考虑转乘的情况,而在节假日期间往往一票难求,因此问题二的模型仅仅是比较理想的一中情况。

9.3 模型的改进:

因为数据庞大,时间有限,针对现有铁线最佳路径算法有不完善的地方。我们还可以更细化地根据乘客心理,取更合理的数据。合理的数据可以少站存储空间进而提高算法效率,实验证明邻接表可用于存贮此稀疏铁线网络可提高搜索最佳路径的效率。

9.4 模型的推广:

得到该模型的启发,该模型也适用于局域交通网中多目标规划的最优路线问题(如乘公交,航班);也可以应用于高速铁路新线、客运专线的建立考虑以最短路径通过尽可能多的站点等等。

十. 参考文献

- 【1】乘坐公交优化方案设计 苏峰 2011 年 4 月 4 日;
- 【2】数学建模最佳旅游路径的选择模型 张亭、任雪雪、卜范范 2010 年 8 月 2 日;
- 【3】旅游线路设计和对比 韦哲、丁俊飞、唐超;

十一. 附录

问题一程序

```
clc;
clear;
[num,txt,raw]=xlsread('附件一.xls');
a=raw(2:end,1:4);
n=length(a);
b=unique(a(:,1));
n1=length(b);
c=strcmp('宜昌东',raw(2:end,4));
d=[];
for i=1:n
    if c(i,1)==1
        d=[d;a(i,:)];
    end
end
e1=[];
for j=1:116
    c1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
    e1=[e1 c1];
end
d1=[];
for i=1:n
    for j=1:116
        if e1(i,j)==1
            d1=[d1;a(i,:)];
        end
    end
end
d1;
cc=strcmp('丹东',raw(2:end,4));
dd=[];
for i=1:n
    if cc(i,1)==1
        dd=[dd;a(i,:)];
    end
end
dd1=[];
ee1=[];
for j=1:26
    cc1=strcmp(dd(j,1),raw(2:end,1));
    ee1=[ee1 cc1];
end
```

```

for i=1:n
    for j=1:26
        if ee1(i,j)==1
            dd1=[dd1;a(i,:)];
        end
    end
end
dd1;
X=intersect(d1(:,4),dd1(:,4));

```

问题二程序

```

clc;
clear;
[num txt raw]=xlsread('附件一.xls');
a=raw(2:end,1:12);
A={'宜昌东','南京','无锡','苏州','上海','杭州'};
% A=unique(raw(2:end,4));
m=length(A);
n=length(a);
c=[];
for i=1:m
    c(:,i)=strcmp(A(i),raw(2:end,4));
end
c=c(:,1:6);
d=[];
for j=1:6
    for i=1:n
        if c(i,j)==ones(j,1)
            d=[d;a(i,:)];
        end
    end
end
end
%以上是六市所有车次

%下求宜昌到南京
% e1=[];
% for j=1:116 %宜昌东
%     c1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
%     e1=[e1 c1];
% end
% d1=[];
% for i=1:n
%     for j=1:116
%         if e1(i,j)==1

```

```

%             d1=[d1;a(i,:)];
%             end
%         end
%     end
%     d1;
%     ee1=[];
%     for j=117:680         %南京
%         cc1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
%         ee1=[ee1 cc1];
%     end
%     dd1=[];
%     for i=1:n
%         for j=1:564
%             if ee1(i,j)==1
%                 dd1=[dd1;a(i,:)];
%             end
%         end
%     end
%     dd1;
%     X=intersect(d1(:,4),dd1(:,4));%宜昌东-南京所有路线(直达、转乘一次)
% 下求南京到无锡
%     ee1=[];
%     for j=117:680         %南京
%         cc1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
%         ee1=[ee1 cc1];
%     end
%     dd1=[];
%     for i=1:n
%         for j=1:564
%             if ee1(i,j)==1
%                 dd1=[dd1;a(i,:)];
%             end
%         end
%     end
%     dd1;
%     e1=[];
%     for j=681:1051         %无锡
%         c1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
%         e1=[e1 c1];
%     end
%     d1=[];
%     for i=1:n
%         for j=1:371
%             if e1(i,j)==1

```

```

%             d1=[d1;a(i,:)];
%             end
%         end
%     end
%     d1;
%     X=intersect(d1(:,4),dd1(:,4));

%无锡到苏州
%     e1=[];
%     for j=681:1051         %无锡
%         c1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
%         e1=[e1 c1];
%     end
%     d1=[];
%     for i=1:n
%         for j=1:371
%             if e1(i,j)==1
%                 d1=[d1;a(i,:)];
%             end
%         end
%     end
%     d1;
%     ee1=[];
%     for j=1052:1461         %苏州
%         cc1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
%         ee1=[ee1 cc1];
%     end
%     dd1=[];
%     for i=1:n
%         for j=1:410
%             if ee1(i,j)==1
%                 dd1=[dd1;a(i,:)];
%             end
%         end
%     end
%     dd1;
%     e1=[];
%     X=intersect(d1(:,4),dd1(:,4));

%苏州到上海
%     ee1=[];
%     for j=1052:1461         %苏州
%         cc1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
%         ee1=[ee1 cc1];

```

```

% end
% dd1=[];
% for i=1:n
%     for j=1:410
%         if ee1(i,j)==1
%             dd1=[dd1;a(i,:)];
%         end
%     end
% end
% dd1;
% e1=[];
% for j=1462:2260 %上海
%     c1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
%     e1=[e1 c1];
% end
% d1=[];
% for i=1:n
%     for j=1:799
%         if e1(i,j)==1
%             d1=[d1;a(i,:)];
%         end
%     end
% end
% d1;
% X=intersect(d1(:,4),dd1(:,4));

%上海到杭州
% e1=[];
% for j=1462:2260 %上海
%     c1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
%     e1=[e1 c1];
% end
% d1=[];
% for i=1:n
%     for j=1:799
%         if e1(i,j)==1
%             d1=[d1;a(i,:)];
%         end
%     end
% end
% d1;
% ee1=[];
% for j=2261:2668 %杭州
%     cc1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));

```



```

%         ee1=[ee1  cc1];
%     end
%     dd1=[];
%     for i=1:n
%         for j=1:408
%             if ee1(i,j)==1
%                 dd1=[dd1;a(i,:)];
%             end
%         end
%     end
%     dd1;
%     X=intersect(d1(:,4),dd1(:,4));

```

```

%杭州到宜昌东
ee1=[];
for j=2261:2668 %杭州
    cc1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
    ee1=[ee1  cc1];
end
dd1=[];
for i=1:n
    for j=1:408
        if ee1(i,j)==1
            dd1=[dd1;a(i,:)];
        end
    end
end
dd1;
e1=[];
for j=1:116 %宜昌东
    c1=strcmp(d(j,1),raw(2:end,1));
    e1=[e1  c1];
end
d1=[];
for i=1:n
    for j=1:116
        if e1(i,j)==1
            d1=[d1;a(i,:)];
        end
    end
end
d1;
%求以上各站点的车次
d_1=[];dd_1=[];

```

```
for i=1:length(d1)
    for j=1:length(dd1)
        if(strcmp(d1(i,4),dd1(j,4)))
            d_1=[d_1;[d1(i,1),d1(i,4)]];
            dd_1=[dd_1;[dd1(j,1),dd1(j,4)]];
        end
    end
end
end
```