

铁路最优路线问题

摘要

本文是确定铁路最优路线的问题。针对两点之间的最优路线和环游整个行程的最优路线，建立了多目标优化模型和搜索算法，并用分层求解法进行求解。

问题一：

本题是确定任意两站之间最优铁路路线的问题，针对这个问题，首先进行数据处理和准备，即对火车车次和火车站点进行统一编号。其次建立了多目标优化问题，考虑了换乘次数、乘车时间、乘车经费这三个方面，并利用分层求解法进行求解。最后将此模型和搜索算法运用到丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛这三条线路中，得到它们的最优路线。结果如下表：

起点站	列车号	换乘站	列车号	终点站	用时	费用
丹东	K190/K187	镇江	D3006/D3007	宜昌	37 小时 40 分钟	420 元
天津	K548/K545	太原	T27	拉萨	51 小时 30 分钟	221 元
白城	2082/2084	四平	K1056/K1053	青岛	32 小时 02 分钟	143 元

问题二：

本题要解决一个从起点出发又回到起点的环游最优路线问题。针对这个问题，首先，建立包含换乘次数、乘车时间、乘车经费三个目标函数的多目标规划模型，并且运用层次序列法求解多目标函数。然后，设计搜索系统，搜索系统以起点、终点以及中途要旅游的地点作为输入，输出不同旅游路线和对应路线的换车总次数、乘车总时间以及乘车总费用。最后，基于目标函数再筛选出整个行程的最优路线。结果如下表：

最优路线	总用时	总费用
宜昌→苏州→杭州→上海→南京→无锡→宜昌	20 小时 08 分钟	1137 元

关键字：多目标规划 分层求解法 搜索算法

问题重述

1.1、问题背景

铁路既是社会经济发展的重要载体之一，同时又为社会经济发展创造了前提条件。近几年来，在全社会客运量稳步上升的同时，长期以来铁路承运了大量旅客。相对于其他的运输方式铁路具有时间准确性高、运输能力大、运行比较平稳、安全性高等优点。同时火车也成为了旅途的首选交通运输工具。虽然目前铁路网络已经比较发达，但是仍然有很多地方之间并没有直接到达的铁路。并且在节假日期间，一些热门路线的火车票总是一票难求。在这种情况下，需要考虑换乘，即先从乘车站到换乘站，再从换乘站到目的站。.

1.2、问题所给数据

附表给出 2013 年全国列车时刻表数据。包含以下信息：

列车车次、列车类型（普快，空调快速，动车...）、站序、车站、日期（当天，第 2 天，第 3 天）、到达时间、离开时间、里程、硬座/一等座票价、硬卧/二等座票价、软座/特等座票价、软卧票价

1.3、需要解决的问题

（1）给出任意两个站点之间的最优铁路路线问题的一般数学模型和算法。若两个站点之间有直达列车，需要考虑直达列车票已售罄情况下最优的换乘方案。根据附录数据，利用你们的模型和算法求出一下起点到终点的最优路线：丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛。

（2）假设你打算从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌，请建立相关数学模型，给出整个行程的最优路线。

2、符号说明

符号	符号说明
i	换乘站对应的序号
j	车站对应的序号
y_i, y_j	第 i 个换乘点和第 j 个站点对应的车站编号
t_i	第 i 个换乘站对应的停留时间
d_i	第 i 个换乘点与第 $i-1$ 个换乘点之间车行驶时间
w_j	在第 j 个车站是否换乘的决策变量
G	换乘站的个数
N	终点站的序号
p_{y_i}	在编号为 y_i 的换乘站买票的花费
V_l	l 号车子经过的车站组成的集合
L_v	在通过 v 车站的车子构成的集合
$t_l^2(v)$	表示 l 车从 v 站的出发时间
$t_l^1(v)$	表示 l 车到 v 站的时间
k	环游中旅游城市序号
g	旅游城市之间路段序号

3、模型假设

假设 1：每次购票时，乘客购买的都是最低价格的车票；

假设 2：到车站时，所有车次都能准时到达；

假设 3：所有的车次在每一天都会发车，且发车时间和题目附录中对应；

4、数据处理

1、车站的编号

由于附录所给数据的量很大，火车站点分布的很杂乱，使用起来很复杂。所

以先对表中的火车站点进行筛选，用 MATLAB 软件剔除重复出现的站点，最后得出总共有 2867 个站点。然后为表示和计算起来方便，将这些站点按顺序进行编号，编为 1-2867 号；例如西安是 1 号，咸阳是 2 号，罗江是 2867 号。

2、票价的计算

由网上查的资料，火车票价是由基本票价和旅客意外伤害强制保险费两部分组成的。基本票价以每人每公里的票价率为基础，按照旅客旅行的距离和不同的列车设备条件，采取递减的办法确定。保险费按基本票价的 2% 计算。由于票价是用递减的办法确定的，旅客旅行的距离越远，减价越多，每人每公里票价越便宜。

买票费用的公式：

$$\text{火车票价} = (1 + 2\%) (1 - x_i) (\text{全程参考价} \times \text{实际里程数}) / \text{总里程数}$$

其中 2% 是算进去的保险费用， x_i 指的减价的百分比，具体如下：

里程	0-200	201-500	501-1000	1001-1500	1501-2500	2500 以上
x_i	0	10%	20%	30%	40%	50%

5、问题分析

针对问题一：

本题是确定两个站点之间的最优铁路路线问题。首先对于最优的路线，经过查资料和经验判断可以得出以下三个标准。如下：

- 1、换乘次数最小
- 2、总的花费的时间最小
- 3、总的花的经费最少

在这三个标准的基础上，建立了多目标优化模型^[1]，找出目标函数和约束条件，下面是对它们的分析。

对目标函数的分析：为确立最优路线，根据实际情况可以确定三个目标函数。通过查阅资料得知，乘客在选择出行路线时第一考虑的是换乘次数最少，其次是所用时间最少，最后是费用最少。所以，第一目标函数是换乘的次数最小，第二目标函数是使用总时间最小，第三目标是总费用最少。

对约束条件的分析：根据铁路交通的实际情况，解决此问题共确定了三个约束条件。首先，换乘时要花费一定时间，根据查的资料显示，火车在开动之前 5 分钟停止检票，还有换乘过程中要花费一定时间，根据实际情况定这个时间至少

15 分钟，所以定的约束条件换乘花费时间大于等于 20 分钟。然后依据题意，换乘次数大于等于 0，并且小于车站数。

再用分层求解法进行模型的求解，首先只考虑第一目标即换乘次数最少，求出换乘次数最少的路线，及对应的的时间和花费，然后在这个基础上依次去考虑第二目标和第三目标，进而求出此模型的有效解，得出最好的行车路线。

最后将所建立的模型运用到题目要求的丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛三条线路中去，分别求出三个的最优路线。

针对问题二：

这是一个环游最佳路线选择的问题。要从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌，建立数学模型，给出整个行程的最优路线。需要考虑的问题是怎样安排五个地点的先后顺序和两地之间怎么选择乘车路线。

要得到最优环行路线，还是以第一问的模型和算法为基础得到任意两个站点之间的最优乘车路线。这条环游路线被划分为六段，每段又是两个站点之间的路线，这就需要对六条路线分别用第一问的模型和算法^[2]进行求解，再以里程、时间、乘车次数、乘车费用标准去确定整个环游最优路线。由于人们在购买车票时，要尽量买直通车票，如果直达里有多种乘坐方式再考虑时间和费用，到一个方向的几个地方去旅游，巧妙地安排乘车和旅行计划，也可以节约一些乘车费用、乘车时间以及减少一些换乘带来的麻烦。

6、问题一的求解

本题是确定两个站点之间的最优铁路路线问题。针对此问题，要建立多目标优化模型，同时考虑转乘次数、总的用时和总的费用，再用分层求解法对模型进行求解。

6.1 模型建立

1、约束条件的确定

(1)、用 w_j 表示在第 j 个车站是否换乘的决策变量^[3]，其中表示为：

$$w_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

当 $w_j = 1$ 时，在第 j 个站点处车辆换乘；当 $w_j = 0$ 时，在第 j 个站点处车辆不换乘。 $N-1$ 表示起点到终点之间车站的个数。

(2)、换乘站处从下车到上车所经历的时间大于 20 分钟。即：

$$t_i \geq 20$$

其中 t_i 表示在第 i 个换乘站处的时间。这 20 分钟^[4]是由实际情况定的，首先火车开动之前 5 分钟停止检票，换乘过程中花费至少 15 分钟。

(3)、从起点到终点，中间换乘的次数是大于等于 0 的，且是小于车站数的。

即：

$$0 \leq \sum_{j=1}^{N-1} w_j \leq N-1$$

2、目标函数的确定

目标 1：以换乘次数最小为目标，即：

$$\min z_1 = \sum_{j=1}^{N-1} w_j$$

其中 z_1 表示起点到终点的换乘次数；

目标 2：以总花费时间最小为目标，其中总时间=车上时间+换乘时间，即：

$$\min z_2 = \sum_{i=0}^G d_i + \sum_{i=1}^{G-1} t_i$$

其中 d_i 表示第 i 个换乘点与第 $i-1$ 个换乘点之间车行驶时间， t_j 为站点换乘的时间；

目标 3：以总的花费为目标。即：

$$\min z_3 = \sum_{i=0}^G p_{y_i}$$

其中 G 表示换乘的次数， p_{y_i} 表示编号为 y_i 换乘站买车票的钱。

3、多目标模型的建立

$$\begin{aligned}
\min z_1 &= \sum_{j=1}^{N-1} w_j \\
\min z_2 &= \sum_{i=0}^G d_i + \sum_{i=1}^{G-1} t_i \\
\min z_3 &= \sum_{i=1}^G p_{y_i} \\
s.t. &= \begin{cases} w_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} & j=1,2,\dots,N-1 \\ 0 \leq \sum_{j=1}^N w_j \leq N-1 \\ t_i \geq 20 \\ j=1,2,\dots,N, i=1,2,\dots,G \end{cases} \quad (1)
\end{aligned}$$

6.2 模型的算法

以站点 o, d 为例，来求出这两个点之间的直达路线和转一次车的路线，并求出对应的花费时间和费用。

对于一次出行需求 o, d 而言，首先在列车集合 $L = \{l_i | i=1,2,\dots,N\}$ 中，分别找出 o 站及 d 站的列车集合，并分别记为 L_o, L_d 。

- 1、令最大换乘次数 $G_{\max} = 1$ ， $L_o = \{l | o \in V_l, l \in L\}, L_d = \{l | d \in V_l, l \in L\}$ ；
- 2、如果 $L_o \in \emptyset$ 或 $L_d \in \emptyset$ ，则停止计算，否则令 $L_i \in L_o \cap L_d$ ；
- 3、直达列车路径计算，如果 $L_i \in \emptyset$ ，转至第 4 步，否则，对于所有的 $l_i \in L_i$ ，

若 $t_{l_i}^2(o) < t_{l_i}^1(d)$ ，则输出 l_i 列车从 o 站到 d 站的路径，计算总乘车时间

$z_2 = t_{l_i}^2(o) - t_{l_i}^1(d)$ ，总的票价费用 $z_3 = p_o$ ，转至第 4 步。

其中 $t_{l_i}^2(o)$ 表示 l_i 次列车从 o 站的发车时间； $t_{l_i}^1(d)$ 表示 l_i 次列车到 d 站的时间； p_o 表示在站点 o 买票的花费。

- 4、一次换乘路径计算， $L_m = L_o - L_d, L_k = L_d - L_o$ ，若 $L_m = \emptyset$ 或 $L_k = \emptyset$ ，则停止计算，否则令

$V_{l_m}^o = \{v_{l_m} | v_{l_m} \in V_{l_m}, t_{l_m}^2(o) < t_{l_i}^1(v_{l_m})\}, V_{l_k}^d = \{v_{l_k} | v_{l_k} \in V_{l_k}, t_{l_k}^2(v_{l_k}) < t_{l_i}^1(d)\}$ ，如果，

$v_{l_m} = v_{l_k}, \forall v_{l_m} \in V_{l_m}, \forall v_{l_k} \in V_{l_k}$ ，转至第 5 步，否则结束。

其中 V_{l_m}, V_{l_k} 分别表示 l_m, l_k 列车经过的车站集合; $t_{l_m}^2(o), t_{l_m}^1(v_{l_m}), t_{l_k}^2(v_{l_k}), t_{l_k}^1(d)$

分别表示 l_m 列车在 o 站点的出发时间和到 v_{l_m} 站点的时间; l_k 列车在 v_{l_k} 站的出发时间和到 d 站的时间

5、输出 l_m 列车从 o 站到 v_{l_m} 的站点及 l_k 列车从 v_{l_k} 到 d 站的站点, 构成一次换成路

径, 计算总乘车时间 $z_2 = t_{l_i}^1(v_{l_m}) - t_{l_m}^2(o) + t_{l_i}^1(d) - t_{l_k}^2(v_{l_k})$ 。购票费用为:

$$p_o + p_{v_{l_m}}。$$

$p_o, p_{v_{l_m}}$ 分别表示在 o 站点和 v_{l_m} 站出买票的花费; $t_{l_m}^2(o), t_{l_m}^1(v_{l_m}), t_{l_k}^2(v_{l_k}), t_{l_k}^1(d)$ 表示的意思同步骤 4。

6.3 模型的求解

这是一个多目标优化模型, 为求解此模型, 要将多目标转化为单目标求解, 使用分层求解法。

分层求解法的思想: 将所有目标按其重要性依次排序, 先求出第一个最重要的目标的最优解, 然后使得在前一个目标最优解的前提下一次求出下一个目标的最优解, 一直到最后一个目标为止。最后可以得出此问题的满意解。

6.3.1 第一路线: 丹东→宜昌

1、先求第一目标函数换乘次数最小时的最优解, 这时模型的目标函数只有第一目标这一个, 约束条件还是一样。则模型为:

$$\begin{aligned} \min z_1 &= \sum_{j=1}^{N-1} w_j \\ s.t. &= \begin{cases} w_j = \begin{cases} 1 & j=1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \end{cases} \\ 0 \leq \sum_{j=1}^{N-1} w_j \leq N \\ t_i \geq 20 \\ j=1, 2, \dots, N, i=1, 2, \dots, G \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

对于模型 (2), 用 MATLAB 软件编程 (具体程序见附录 1) 得到结果, 最小换乘次数为 1 次, 并可以得到 18 条行车路线。具体结果见表 6.3.1。

表 6.3.1： 丹东→宜昌的换乘一次路线表

起点站	车次一	换乘站	车次二	终点站
丹东	K190/K187	南京	K1512/K1513	宜昌东
丹东	K190/K187	南京	K696/K697	宜昌东
丹东	K190/K187	镇江	D3006/D3007	宜昌东
丹东	K190/K187	镇江	D3072/D3073	宜昌东
丹东	K190/K187	镇江	K1512/K1513	宜昌东
丹东	K190/K187	镇江	K696/K697	宜昌东
丹东	K190/K187	常州	D3006/D3007	宜昌东
丹东	K190/K187	常州	D3072/D3073	宜昌东
丹东	K190/K187	常州	K1512/K1513	宜昌东
丹东	K190/K187	常州	K696/K697	宜昌东
丹东	K190/K187	无锡	D3006/D3007	宜昌东
丹东	K190/K187	无锡	D3072/D3073	宜昌东
丹东	K190/K187	无锡	K1512/K1513	宜昌东
丹东	K190/K187	无锡	K696/K697	宜昌东
丹东	K190/K187	苏州	D3006/D3007	宜昌东
丹东	K190/K187	苏州	D3072/D3073	宜昌东
丹东	K190/K187	苏州	K696/K697	宜昌东
丹东	K190/K187	上海	K696/K697	宜昌东

2、第 1 步中已经得出了目标函数为转乘最少的结果，共有 18 线路，现在以最小时间为目标目标函数，将第一目标换成约束条件，则得到模型为：

$$\begin{aligned}
 \min z_2 &= \sum_{i=0}^G d_i + \sum_{i=0}^{G-1} t_i \\
 s.t. &= \begin{cases} w_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} & j=1,2,\dots,N-1 \\ \sum_{j=1}^{N-1} w_j = 1 \\ t_i \geq 20 \\ j=1,2,\dots,N, i=1,2,\dots,G \end{cases} \quad (3)
 \end{aligned}$$

对于（3）模型，用 MATLAB 软件编程（具体程序见附录 1）得到结果，得到目标为最小花费时间下的最优解。最小花费时间为 37 小时 40 分钟，共有三条路线满足条件。具体结果见表 6.3。

表 6.3.2： 丹东→宜昌的最小用时路线统计表

起点	车次 1	换乘站	车次 2	终点站	费时
丹东	K190/K187	镇江	D3006/D3007	宜昌	37 时 40 分
丹东	K190/K187	常州	D3006/D3007	宜昌	37 时 40 分
丹东	K190/K187	无锡	D3006/D3007	宜昌	37 时 40 分

- 3、 第 2 步已经得出了花费时间最少的最优解，结果是，路线有 3 条。现在将第三目标费用最少当成目标函数，将第二目标换乘约束条件。模型如下：

$$\begin{aligned}
 \min z_3 &= \sum_{i=1}^G p_{y_i} \\
 s.t. &= \begin{cases} w_j = \begin{cases} 1 & j=1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \end{cases} \\ \sum_{j=1}^{N-1} w_j = 1 \\ t_i \geq 20 \\ j=1, 2, \dots, N, i=1, 2, \dots, G \\ \sum_{i=0}^G d_i + \sum_{i=1}^{G-1} t_i \leq z_{2\min} + \delta \end{cases} \quad (4)
 \end{aligned}$$

其中 δ 表示的是最小费用放宽后的值

对于（4）模型，用 MATLAB 软件编程（具体程序见附录 1）得到结果，得到目标为最小费用下的最优解。得到最小费用为：420 元。具体路线如下：



6.3.2 第二路线：天津→拉萨

类比 6.3.1，还是运用分层求解法进行求解。

- 1、 先来求第一目标函数换乘次数最小时的最优解，模型见模型（2）。利用 MATLAB 软件进行求解。得到换成次数最少也为 1 次，并得到了 130 条线路。
- 2、 在第一步的基础上求第二目标花费时间最少时的最优解，模型见模型（3）。利用 MATLAB 软件编程进行求解，得到用时最少的 3 条线路，具体线路如表 6.3.3：

表 6.3.3: 天津→拉萨最小用时路线表

起点	车次 1	换乘站	车次 2	终点站	用时
天津	T5684/T5681	北京西	T27	拉萨	49 时 54 分
天津	K548/K545	石家庄北	T27	拉萨	51 时 30 分
天津	K548/K545	太原	T27	拉萨	51 时 30 分

有表可得，得到最小花费时间为：49 小时 54 分钟。具体路线为：

天津（T5684/T5681）→北京西（T27）→拉萨

- 3、第 2 步已经得出了花费时间最少的最优解，结果是路线只有一条。现在将第三目标费用最少当成目标函数，将第二目标换乘约束条件，但是因为时间最少的路线只有一条，所以将时间这个约束条件放宽，设取 $\delta = 2$ （以小时记）利用模型（4）和 MATLAB 软件编程求解。得到最小费用为 192 元，最优路线为：



6.3.3 第三路线：白城→青岛

类比 6.3.1，还是运用分层求解法进行求解。

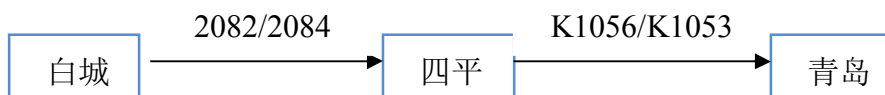
- 1、先来求第一目标函数换乘次数最小时的最优解，模型见模型（2）。利用 MATLAB 软件编程进行求解。得到换成次数最少也为 1 次，并得到了 178 条线路。
- 2、在第一步的基础上求第二目标花费时间最少时的最优解，模型见模型（3）。利用 MATLAB 软件编程进行求解，得到了用时最小的 5 条线路。具体路线：

表 6.3.4: 白城→青岛的时间最少路线表

起点站	乘次 1	换乘站	乘次 2	终点站	用时
白城	K7304	长春	K1056/K1053	青岛	28 时 4 分
白城	K7304	长春	K704/K701	青岛	28 时 56 分
白城	K1302	黄村	K712/K709	青岛	31 时 39 分
白城	K7310	长春	K1056/K1053	青岛	32 时 0 分
白城	2082/2084	四平	K1056/K1053	青岛	32 时 2 分

由表可知，得到最小花费时间为：28 小时 48 分钟，具体路线为：白城（K7304）→长春（K1056/K1053）→青岛

- 2、第 2 步已经得出了花费时间最少的最优解，结果是，路线只有一条。现在将第三目标费用最少当成目标函数，将第二目标换乘约束条件，但是因为路线只有一条，所以将花费时间这个条件放松，取 $\delta = 2$ （以小时记）。利用模型（4）和 MATLAB 软件编程求解，得到最小费用为 143 元，最优路线为：



6.4 结果分析

1、有这个模型求得到“丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛”这三条路的最优路线，得到了其时间和费用，这个是2013年的数据，现在在网上搜索得到2014年的数据进行对比，结果如

表6.4.1：线路部分数据13和14年对比表

路线	13 年时间	14 年时间	13 年费用	14 年费用
丹东→宜昌	37 时 40 分	37 时 47 分	420 元	510 元
天津→拉萨	51 时 30 分	51 时 15 分	211 元	409 元
白城→青岛	32 时 2 分	31 时 9 分	143 元	237 元

由表中可以看到，13 年和 14 年的用时变化不大，但是费用都涨了 100 多，这和因为 2014 年的铁路价格大涨价的实际符合。

3、有效解的定义为：可行域为 D ， $x^* \in D$ ，如果不存在 $x \in D$ ，使 $F(x) \leq F(x^*)$ ，

则称 x^* 为有效解。

本题中求得的最优路线中换乘次数是最少的，虽然时间和费用不是最小的，但是和最小相差不大，所以这里的解是有效解。

问题二的求解

这是一个确定环游最佳路线问题。将其看作是宜昌到宜昌的直线问题，中间必须经过上海、南京、杭州、苏州、无锡五个城市，将这五个看作转乘站。然后类比问题一，建立多目标优化模型，最后用分层求解法进行求解。

7.1 模型建立

将确定环游最优路线转化为确定两个站点之间的最优路线问题，建立多目标优化模型，类比问题一确定三个目标函数，分别是最小换乘、最小用时和最小费用。

1、约束条件的确定

(1)、用 w_j 表示在第 j 个车站是否换乘的决策变量，其中表示为：

$$w_j = \begin{cases} 1 & j = 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \end{cases}$$

(2)、两个旅游城市车站之间路段的换乘站处从下车到上车所经历的时间大于 20 分钟和旅游后换乘的时间都大于 20 即：

$$t_i \geq 20$$

其中 t_i 表示两个旅游城市车站之间路段的第 i 个换乘站处的时间；这 20 分钟是由实际情况定的，首先火车开动之前 5 分钟停止检票，换乘过程中花费至少 15 分钟，总共 20 分钟。

(3)、在两个旅游城市车站之间的路段，中间换乘的次数是大于等于 0 的，且是小于车站数的。即：

$$0 \leq \sum_{j=1}^{N-1} w_j \leq N-1$$

2、目标函数的确定

目标 1： 以整个环游路线的换乘次数最小为目标，即：

$$\min z_1 = \sum_{g=1}^6 \sum_{j=1}^{N-1} w_j + 5$$

其中 z_1 表示整个环游的换乘次数； g 表示的是两城市之间的路段，共有 6 段；

$\sum_{j=1}^{N-1} w_j$ 表示的是两城市之间的路段的换乘次数；5 是表示旅游城处的换乘次数。

目标 2： 以总花费时间为目标，其的换乘次数。其中总时间=车上时间+换乘时间，即：

$$\min z_2 = \sum_{g=1}^6 \left(\sum_{i=0}^G d_i + \sum_{i=1}^{G-1} t_i \right) + \sum_{k=1}^5 t_k$$

其中 d_i 表示第 i 个换乘点与第 $i-1$ 个换乘点之间车行驶时间； t_j 为站点换乘的时间； t_k 表示旅游城市站点的换乘时间； k 表示的旅游城市站点，共有 5 个。

目标 3： 以总的花费为目标。即：

$$\min z_3 = \sum_{g=1}^6 \sum_{i=1}^G p_{y_i}$$

其中 G 表示换乘的次数， p_{y_i} 表示编号为 y_i 换乘站买车票的钱

3、模型的建立

$$\begin{aligned}
 \min z_1 &= \sum_{g=1}^6 \sum_{j=1}^{N-1} w_j + 5 \\
 \min z_2 &= \sum_{g=1}^6 \left(\sum_{i=0}^G d_i + \sum_{i=1}^{G-1} t_i \right) \\
 \min z_3 &= \sum_{g=1}^6 \sum_{i=1}^G p_{y_i} \\
 s.t. &= \begin{cases} w_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} & j = 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 \leq \sum_{g=1}^6 \sum_{j=1}^{N-1} w_j + 5 \leq N-1 \\ t_i \geq 20, t_k \geq 20 \\ j = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2, \dots, G \\ g = 1, 2, \dots, 6 \\ k = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

7.2 模型求解

1、先来求第一目标函数换乘次数最小时的最优解，这时模型的目标函数只有第一目标这一个，约束条件还是一样。则模型为：

$$\begin{aligned}
 \min z_1 &= \sum_{g=1}^6 \sum_{j=1}^{N-1} w_j + 5 \\
 s.t. &= \begin{cases} w_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} & j = 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 \leq \sum_{j=1}^N w_j \leq N-1 \\ t_i \geq 20, t_k \geq 20 \\ j = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2, \dots, G \\ g = 1, 2, \dots, 6 \\ k = 1, 2, \dots, 5 \end{cases} \quad (6)
 \end{aligned}$$

经过软件 MATLAB 编程（具体程序见附录 4）得出，每两个城市之间的最小转乘次数为 1，所以环游的最小转乘次数为 5 次，分别是在旅游地转乘，这个环游的路线种类共有 120 条。

2、第 1 步中已经得出了目标函数为转乘最少的结果，共有 128 线路，现在以最小时间为目标目标函数，将第一目标换成约束条件，则得到模型为：

$$\min z_2 = \sum_{g=1}^6 \left(\sum_{i=0}^G d_i + \sum_{i=1}^{G-1} t_i \right) + \sum_{k=1}^5 (t_k + 24)$$

$$s.t. = \begin{cases} w_j = \begin{cases} 1 & j=1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \end{cases} \\ \sum_{g=1}^6 \sum_{j=1}^{N-1} w_j + 5 = 5 \\ t_i \geq 20, t_k \geq 20 \\ j=1, 2, \dots, N, i=1, 2, \dots, G \\ g=1, 2, \dots, 6 \\ k=1, 2, \dots, 5 \end{cases} \quad (7)$$

对于 (7) 模型, 用 MATLAB 软件编程进行求解, 得到目标为最小花费时间下的最优解。得到了车上花费时间最少的 3 条路线。具体结果见表 7.2.1。

表 7.2.1: 时间最少路线统计表

路线	车上用时
宜昌(D3008)→苏州(D5680)→杭州(G7362)→上海(G7022)→ 南京(G7011)→无锡(D3006)→宜昌	20 时 8 分
宜昌(D3008)→无锡(G7002)→南京(G7001)→上海(G7361)→ 杭州(G7382)→苏州(D3006)→宜昌	20 时 13 分
宜昌(D3008)→无锡(1344)→杭州(G7362)→上海(G7002)→南 京(G7013)→苏州(D3006)→宜昌	20 时 42 分

4、第 2 步已经得出了花费时间最少的最优解, 现在将第三目标费用最少当成目标函数, 将第二目标换乘约束条件, 但是因为路线只有一条, 所以将花费时间这个条件放松, 取 $\delta = 1$ (以小时记)。建立模型为:

$$\min z_3 = \sum_{g=1}^6 \sum_{i=1}^G p_{y_i}$$

$$s.t. = \begin{cases} w_j = \begin{cases} 1 & j=1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \end{cases} \\ \sum_{g=1}^6 \sum_{j=1}^{N-1} w_j + 5 = 5 \\ t_i \geq 20, t_k \geq 20 \\ j=1, 2, \dots, N, i=1, 2, \dots, G \\ g=1, 2, \dots, 6, k=1, 2, \dots, 5 \\ \sum_{g=1}^6 \left(\sum_{i=0}^G d_i + \sum_{i=1}^{G-1} t_i \right) + \sum_{k=1}^5 t_k \leq 21 \end{cases} \quad (8)$$

对于 (8) 模型, 用 MATLAB 软件编程得到结果, 得到目标为最小费用下的最优解。得到了三条路线的费用如图 7.2.2:

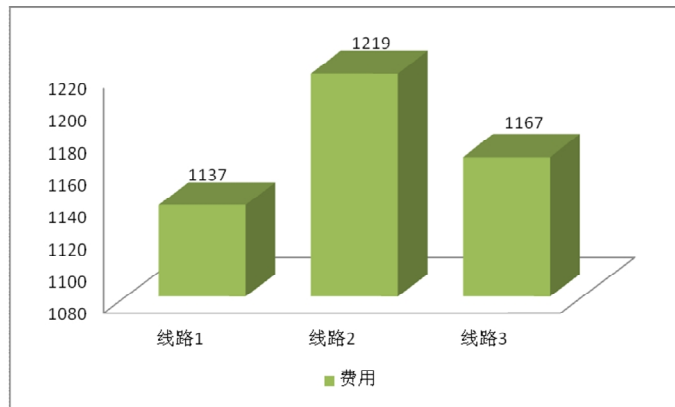


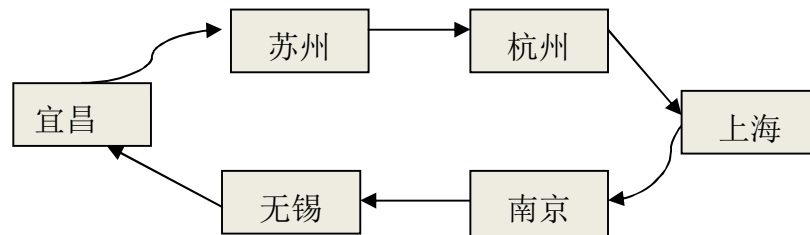
图 7.2.2: 三条线路费用对比图

其中：线路 1：宜昌→苏州→杭州→上海→南京→无锡→宜昌

线路 2：宜昌→无锡→南京→上海→杭州→苏州→宜昌

线路 3：宜昌→无锡→杭州→上海→南京→苏州→宜昌

所以由图得最小费用为 1137 元，路线为：



7.3 结果分析

整个行程中最优的环游路线为：宜昌 (D3008) → 苏州 (D5680) → 杭州 (G7362) → 上海 (G7022) → 南京 (G7011) → 无锡 (D3006) → 宜昌、换车次数 0、总乘车时间 20 时 8 分、总费用 1137，两地之间由于直达的车次比较多，所以只考虑直达的，除了下车旅游外中途无换车。如果在节假日期间，一些热门路线的火车票难求时，可以改变得车次，但是环游路线顺序可以定为：宜昌→苏州→杭州→上海→南京→无锡→宜昌，同时两地之间还是选择直达，这是由于在建立搜索系统和现实铁路官网中查到的各两地之间直达路线比较多，同时两地直达车次行驶的时间和费用基本相近，很多还是相同的，如果遇到某段卖不到票的情况，可以变动这段的车次，基于搜索系统和现实铁路官网分析可以找到费用和时间基本不变的车次作为补充，而且在各两地之间满足补充地车次还是比较多。所有得到环游的路线还是贴近实际情况。

模型的评价、改进及推广

8.1 模型的评价

1、模型的优点：

- (1)、多目标优化模型可以考虑多方面的优化问题，使确定的最佳路线更好，更符合实际
- (2)、分层求解法求解多目标优化模型很简便，能很快又容易的求出多目标的满意解。
- (3)、搜索算法更快的解决像铁路交通系统这样数据量大的大型复杂的网络。

2、模型的缺点：

由于时间有限，对问题进行了一些简化，需要更加深入地思考实际问题，做出更符合实际情况以及模型。

8.2 模型的改进

模型改进：需要更加深入地思考实际问题，做出更符合实际情况以及模型，可以考虑

选择乘车时间、票价费用、换乘次数、换乘距离、换乘等候时间及舒适度等因数，建立模型，求解出更适合实际情况的结果，能满足不同乘客选择到适合自己的方案。所要实现这些，需要更多的目标函数，在求解时同时对目标函数进行不同方法的排序，每种排序方法求出对于的结果，是乘客根据自己的情况可以选到适合自己的方案。由于数据量大，铁路系统又复杂，要实现这个改进的模型需要很多的时间，在竞赛的时间里是基本不能完成，之后可以作为一个课题来解决。

8.3 模型的推广

此题用了多目标规划模型确定铁路最优路线，但是问题中的模型和算法不止用于铁路路线问题，可以推广到管道网维护查询、所有交通网选择路线和大型指派问题中得到应用中。

参考文献

- [1]谭永基，蔡志杰，数学模型，上海市国权路 579 号：复旦大学出版社，2011 年第二版。
- [2]叶其孝，大学生数学建模竞赛辅导教材，湖南省：湖南教育出版社，1997 年第一版。
- [3]彭放，杨瑞琰，肖海军，何永明，数学建模方法，北京东黄城根北街 16 号：科学出版社，2012 年第二版。
- [4]杨信丰，刘兰芬，李引珍，何瑞春，多目标铁路旅客乘车方案优化模型及算法研究，交通运输系统工程与信息，第 13 卷第 5 期：73 页到 78 页，2013 年。

附录

附录 1、火车站点查询系统主程序

```
clear
clc
fprintf('\t\t\t\t\t欢迎来到火车站点查询系统！\n');
pause(1);
fprintf('数据正在加载中,请稍等！ ');
for i=1:38
    fprintf('>');
    pause(0.02);
end
load lieche
load zhandian

fprintf('数据加载完毕！\n');
pause(1);
fprintf('注意事项：接下来输入的起止站点以英文状态下的引号加汉字组成。\\n')
pause(1.5);
%%
%用来输入站点
while 1
while 1
start=0;
ends=0;
start_string=input('请输入起始站点： ');
ends_string=input('请输入终止站点： ');

for i=1:2867

if strcmp(zhandian(i,1),start_string)==1
start=i;
end
if strcmp(zhandian(i,1),ends_string)==1
ends=i;
```

```

        end
    end
    if start>0&&ends>0
        break;
    else
        fprintf('输入错误，请重新输入！\n');
    end
end

output(start,ends)
clear global

work=input('输入"continue"继续查询，输入"over"结束查询:');
fprintf('\n');
if strcmp('continue',work)==1
    1;
elseif strcmp('over',work)==1
    fprintf('本次查询到此结束！\n');
    break;
else
    fprintf('不要恶搞，查询到此结束！\n');
    break;
end
end
end

```

附录 2、直达情形

```

function []=zhida(start,ends)
load checi_chezhan
load chezhan_checi
load lieche
load zhandian
load time
load time_xuhao
load distance
load riqidate

```

```

load jiage
load zonglicheng
time_end=raw(:,1);
time_leave=raw(:,2);

%%
%直达
i=1;
flag=0;
zhi_daan_xuhao=1;
time_min_xuhao=1;
while a(start,i)~=0
    j=1;
    while a(ends,j)~=0

        if a(start,i)==a(ends,j)
            k=1;
            while b(a(start,i),k)~=0
                m=0;
                if b(a(start,i),k)==start;
                    m=k;
                    break;
                end
                k=k+1;
            end
            k=1;
            while b(a(start,i),k)~=0
                n=0;
                if b(a(start,i),k)==ends;
                    n=k;
                    break;
                end
                k=k+1;
            end
            if m<n

```

[illegible]

```
time_min_xuhao=time_min_xuhao+1;
```

```
s1=s(zhida_daan(i),ends)-s(zhida_daan(i),start);
```

```
switch fix(s1/100)
```

```
case {0,1}
```

```
rate1=0;
```

```
case {2,3,4}
```

```
rate1=0.1;
```

```
case {5,6,7,8,9}
```

```
rate1=0.2;
```

```
case{10,11,12,13,14}
```

```
rate1=0.3;
```

```
case{15,16,17,18,19,20,21,22,23,24}
```

```
rate1=0.4;
```

```
otherwise
```

```
rate1=0.5;
```

```
end
```

```
j=1:4;
```

```
jiage1(j)=jiage(zhida_daan(i),j)*s1*(1-rate1)*(1+0.02)/zonglicheng(zhida_daan(i),1);
```

```
fprintf('%d\t\t%10s\t\t%20s\t\t\t\t%10s\t\t%10s\t\t%20s\t\t\t\t%5d\t\t\t\t%d 小时%d 分钟  
\t\t\t\t\t%5.0f\t\t\t\t\t%5.0f\t\t\t\t\t%5.0f\t\t\t\t\t%5.0f\n',i,t1{1,1},zhandian{start,1},lieche{z  
hida_daan(i),1},t2{1,1},zhandian{ends,1},s1,fix(minute1/60),rem(minute1,60),jiage1  
(1),jiage1(2),jiage1(3),jiage1(4));
```

```
end
```

```
pause(1)
```

```
%%
```

```
%用来筛选
```

```

if l>3
    fprintf('直达线路超过 3 条，下面将为您筛选出花费时间最短的 3 条线路
\n');
    pause(1)
    fprintf('线路号\t 出发时间\t\t\t\t\t 起始地点\t\t\t 直达车号\t\t\t 下车时间
\t\t\t\t\t 终点站\t\t 车程（千米）\t\t\t 用时\t\t\t\t\t 硬座/一等座(元)\t\t\t 硬座/二等座
(元)\t 软座/特等座(元)\t\t\t 软卧(元) \n');
    pause(1)
    time_shaixuan=1;
    while 1
        [suibian i]=min(time_min);
        time_min(i)=inf;
        t1=time_leave(time_xuhao(zhida_daan(i),start));
        t2=time_end(time_xuhao(zhida_daan(i),ends));

        time1=str_to_num(t1);
        time2=str_to_num(t2);

        riqi1=riqide(zhida_daan(i),ends)-riqide(zhida_daan(i),start);

        minute1=riqi1*24*60+(time2(1)-time1(1))*60+time2(2)-time1(2);

        s1=s(zhida_daan(i),ends)-s(zhida_daan(i),start);

switch fix(s1/100)
    case {0,1}
        rate1=0;
    case {2,3,4}
        rate1=0.1;
    case {5,6,7,8,9}
        rate1=0.2;
    case {10,11,12,13,14}
        rate1=0.3;

```

```

        case{15,16,17,18,19,20,21,22,23,24}
            rate1=0.4;
        otherwise
            rate1=0.5;
    end

    j=1:4;

    jiage1(j)=jiage(zhida_daan(i),j)*s1*(1-rate1)*(1+0.02)/zonglicheng(zhida_daan(i),1);

    fprintf('%d\t\t%10s\t%20s\t\t%10s\t\t%10s\t%20s\t\t%5d\t\t%5d 小时%d 分钟\n',i,t1{1,1},zhandian{start,1},lieche{zhida_daan(i),1},t2{1,1},zhandian{ends,1},s1,fix(minute1/60),rem(minute1,60),jiage1(1),jiage1(2),jiage1(3),jiage1(4));
    time_shaixuan=time_shaixuan+1;
    if time_shaixuan>3
        break;
    end
    end
    else
        pause(1)
        fprintf('直达路线不超过 3 条，不用筛选。\\n');
    end
end

end
附录 3、转一次情形
function []=zhuanyci(start,ends)
load checi_chezhan
load chezhan_checi
global daan
%%
%转一次

```



```

%%
%输入部分
q_z=input('\n 请输入您的所在地: ');
for j=1:2867
    if strcmp(zhandian(j,1),q_z)
        jingdian(1)=j;
        break;
    end
end

i=2;
while 1
    jd=input('请输入您想去旅游的地方，输入"over"结束输入: ');
    if strcmp('over',jd)==1
        break;
    end
    for j=1:2867
        if strcmp(zhandian(j,1),jd)==1
            jingdian(i)=j;
            i=i+1;
            break;
        end
    end
end

end
fprintf('输入结束，青瓜系统正在奋笔疾书，请稍等! ')
n=length(jingdian);
for i=1:n
    for j=1:n
        suibian=zhida(jingdian(i),jingdian(j));
        quanzhi(i,j)=suibian;
    end
end

end

[result1,result2]=shaixuan(quanzhi,n);
if result1(1)==0

```

```
fprintf('我要罢工! \n');
else
fprintf('下面为您输出在车上所待时间最短的 3 种顺序: \n');
fprintf('序号\t\t 所费时间\t\t\t\t\t 顺序\n');
for i=1:3
    fprintf('%3d\t\t%d 小时%d 分钟\t\t\t',i,fix(result1(i)/60),rem(result1(i),60));
    for j=1:length(result2(1,:))-1
        fprintf('%s-->',zhandian{jingdian(result2(i,j)),1});
    end
    fprintf('%s\n',zhandian{jingdian(result2(i,length(result2(1,:))))},1});
end
end
```