

铁路最优路线问题

摘要

本题为铁路优化问题，根据题设，可以考虑采用多目标最优化或主要目标优化两种解题思路。为针对包含不同群体的整体对象，且尽可能缩减优化路线，最终建立多目标最优化模型。

对于问题一中路线最优化问题，主要考虑三个方面：换乘次数最少，价钱最低以及时间最短。另外为保证乘客乘车舒适度，通过时间长短决定席别选择。综合三个方面的最优化函数式，建立最优路线的多目标规划模型，进而求出问题一中所给路线的最优化解。

问题二可以采用问题一中模型，参照旅行商问题的图论解法，规定每一城市只有单个出入口，再分别求出六个城市两两城市间的最优路线，采用主目标法通过比较某一城市与其他五个城市间最优路线的时间、价钱两方面情况，确定出不同目标下的最佳循环旅游路线。

关键词：多目标最优化 图论法 主目标法

一、 问题重述

1.1 问题背景

铁路既是社会经济发展的重要载体之一，同时又为社会经济发展创造了前提条件。近几年来，在全社会客运量稳步上升的同时，长期以来铁路承运了大量旅客。相对于其他的运输方式铁路具有时间准确性高、运输能力大、运行比较平稳、安全性高等优点。同时火车也成为了旅途的首选交通运输工具。

虽然目前铁路网络已经比较发达，但是仍然有很多地方之间并没有直接到达的铁路。并且在节假日期间，一些热门路线的火车票总是一票难求。在这种情况下，需要考虑换乘，即先从乘车站到换乘站，再从换乘站到目的站。

1.2 题设信息

附录 1 给出 2013 年全国列车时刻表数据含以下信息：

列车车次、列车类型（普快，空调快速，动车…）、站序、车站、日期（当天，第 2 天，第 3 天）、到达时间、离开时间、里程、硬座/一等座票价、硬卧/二等座票价、软座/特等座票价、软卧票价。

1.3 问题求解

根据以上信息解决下列问题：

（1）给出任意两个站点之间的最优铁路路线问题的一般数学模型和算法。若两个站点之间有直达列车，需要考虑直达列车票已售罄情况下最优的换乘方案。根据附录数据，利用你们的模型和算法求出一下起点到终点的最优路线：丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛。

（2）假设你打算从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌，请建立相关数学模型，给出整个行程的最优路线。

二、 模型假设

假设 1：假设考虑乘客乘车舒适度的情况。

假设 2：不考虑突发事件造成的车次晚点早到情况以及换乘期间买票检票时间。

假设 3：不考虑换乘车站车票售罄的情况。

假设 4：最大换乘次数为一次，且换乘站台即为上一车次的到站站台。

假设 5：换乘期间等候下一车次的时间不超过 30 分钟。

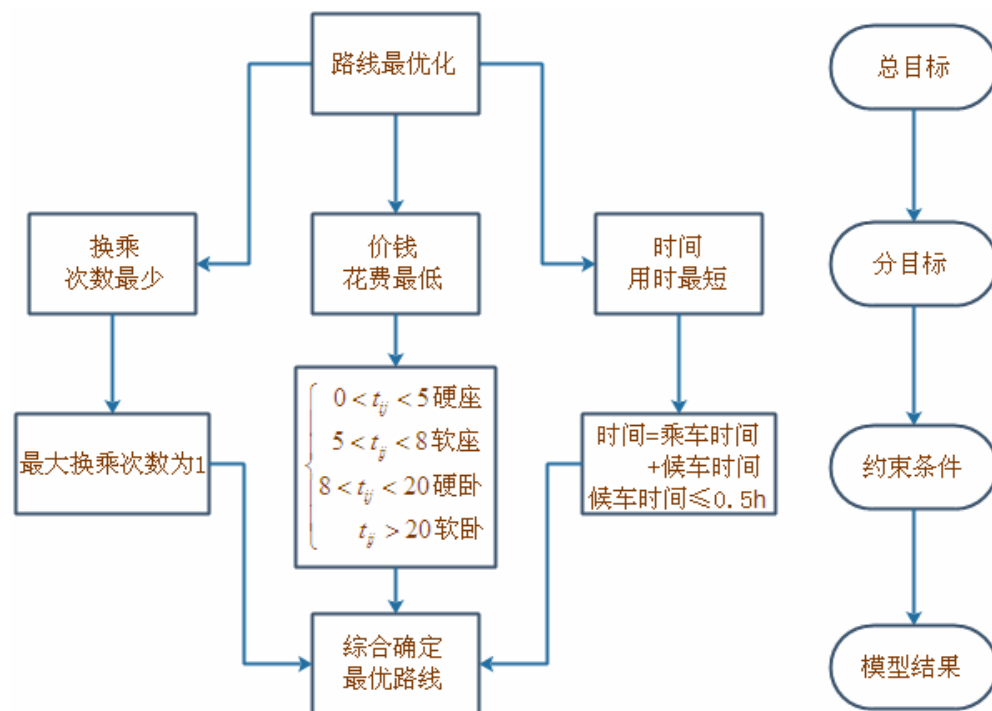
三、 符号说明

符号	符号说明
n	表示换乘次数
x_{ik}	表示第 i 次换乘买 k 型票
t_{ij}	表示第 i 次换乘乘坐 j 型车
Δt_i	表示第 i 次换乘的等候时间
Y_{ij}	$\begin{cases} 0 & \text{表示不选择这条路线} \\ 1 & \text{表示经过城市 } i \text{ 到城市 } j \text{ 的路线} \end{cases}$
T_{ij}	表示城市 i 到城市 j 的时间
X_{ij}	表示城市 i 到城市 j 的费用
$ s $	表示城市个数

四、 问题分析

4.1 问题一

本题考虑最优路线问题，主要从三个方面着手：换乘，价钱，时间。因此建立多目标最优化函数尽可能在保证换乘次数最少，价钱最低以及时间最短的情况下使三方达到平衡。其中，考虑到人们的心理因素对换乘次数有一个最大的承受上限，因此限定最大换乘次数为 1。同时价钱在一定程度上由席别因素决定，而席别的选择则根据乘车时间的长短来决定。则根据实际生活经验，拟定乘车时间小于 5h 时，选择硬座；5-8h 选择软座；8-20h 选择硬卧；大于 20h 时，选择软卧。该方案设定是基于对乘客乘车舒适度的考虑。而时间方面，包含换乘期间等待下一车次的候车时间以及乘车时间，考虑舒适度因素，规定换乘期间等候下一列车的时间不超过 30 分钟。综合三方面的函数求解决定最优路线方案。思路流程如下：



4.2 问题二

为确定从宜昌出发经过上海、南京、杭州、苏州、无锡最后回到宜昌的最优

化路线，可以采用问题一的模型。先求出六个城市两两城市间的最优路线，通过比较某一城市与其他五个城市间最优路线的换乘、时间、价钱三方面情况，确定换乘次数最少，时间最短，价钱最少的城市为这一城市的下一旅游地点。且在建模过程中，规定每一城市只有单个出入口，以此确定出最佳循环旅游路线。

五、 模型建立与求解

5.1 问题一

5.1.1 模型建立

题设求解最优路线模型，主要从换乘，价钱，时间三方面着手，即保证从起点到终点的换乘次数最少，价钱最低以及时间最短。并根据生活实际对三方面进行约束，因此对三个条件逐个建立优化模型^[1]：

① 换乘次数最少，由于数据样本容量过大，为方便计算规定最大换乘次数为 1：

$$\min n$$

其中 n 表示换乘次数

② 价钱最低，同时考虑乘客乘车舒适度（见假设 1），根据乘车时间长短决定席别选择，由实际生活经验拟定席别选择方案如下：

$$\min f_1 = \sum_{i=0}^{n+1} x_{ik}$$

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 < t_{ij} < 5 & \text{硬座} \\ 5 < t_{ij} < 8 & \text{软座} \\ 8 < t_{ij} < 20 & \text{硬卧} \\ t_{ij} > 20 & \text{软卧} \end{array} \right. \\ n = 1 \\ \Delta t_i \leq 0.5 \end{array} \right.$$

其中

f_1 表示价格

n 表示换乘次数

x_{ik} 表示第 i 次换乘买 k 型票

t_{ij} 表示第 i 次换乘乘坐 j 型车

③ 时间最短，不考虑列车晚点以及换乘买票时间（见假设 2），包含换乘期间等待下一车次的候车时间以及乘车时间：

$$\min f_2 = \sum_{i=1}^n \Delta t_i + \sum_{i=0}^n t_{ij}$$

其中

f_2 表示时间

n 表示换乘次数

Δt_i 表示第 i 次换乘的等候时间

t_{ij} 表示第 i 次换乘乘坐 j 型车

综合以上三个方面，建立路线最优化模型：

$$\left\{ \begin{array}{l} \min n \\ \min f_1 = \sum_{i=0}^{n+1} x_{ik} \\ \min f_2 = \sum_{i=1}^n \Delta t_i + \sum_{i=0}^n t_{ij} \end{array} \right. \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < t_{ij} < 5 \quad \text{硬座} \\ 5 < t_{ij} < 8 \quad \text{软座} \\ 8 < t_{ij} < 20 \quad \text{硬卧} \\ t_{ij} > 20 \quad \text{软卧} \\ n = 1 \\ \Delta t_i \leq 0.5 \end{array} \right.$$

5.1.2 模型求解

根据问题一中模型，通过三个目标的优化限制，分别编程求出丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛的最优乘车路线。对换乘次数进行限制，得到所求起止点换乘次数为 1 的所有路线（程序见附录 1），各起止点路线情况如表 1，2，3 所示：

表 1：

丹东-宜昌路线				
首趟车次	K190/K187	K190/K187	K190/K187	K190/K187

换乘站台	南京	常州	常州	无锡
换乘车次	K696/K697	D3006/D3007	K1512/K1513	D3006/D3007
用时	37.67h	47.15h	37.67	37.67h
首趟车次不同席位价格				
硬座	236 元	243 元	243 元	243 元
硬卧	399 元	414 元	414 元	414 元
软座				
软卧	629 元	654 元	654 元	654 元
换乘车次不同席位价格				
硬座	374 元	110 元	411 元	374 元
硬卧	256 元	250 元	293 元	310 元
软座				
软卧				

表 2:

白城-青岛路线					
首趟列车	K1302	K7304	K2082/K2083	T122/T123	T238/T235
换乘站台	黄村	长春	上海	武昌	武昌
换乘列车	K712/K709	K704/K701	T164/T165	T264/T265	T264/T265
用时	32.18h	3.03h	88.48h	43.42h	65.95h
首趟车次不同席位价格					
硬座	157 元	24 元	201 元	71 元	136 元
硬卧	255 元		335 元	116 元	226 元
软座					
软卧	403 元		535 元	185 元	362 元
换乘车次不同席位价格					
硬座	112 元	152 元	447 元	264 元	264 元
硬卧	187 元	242 元	865 元	556 元	556 元
软座					
软卧	297 元	385 元	1468 元	836 元	836 元

表 3:

天津-拉萨路线					
首趟车次	1230/1227	4310/0000	K2082/K2083	T122/T123	T238/T235
换乘站台	上海	上海	上海	武昌	武昌
后趟车次	T164/T165	T164/T165	T164/T165	T264/T265	T264/T265
用时	67.10h	60.13h	88.48h	43.42h	65.95h
首趟车次不同席位价格					
硬座		59 元	201 元	71 元	136 元
硬卧	181 元	117 元	335 元	116 元	226 元
软座					
软卧	308 元	201 元	535 元	185 元	362 元
换乘车次不同席位价格					

硬座	447 元	447 元	447 元	264 元	264 元
硬卧	865 元	865 元	865 元	556 元	556 元
软座					
软卧	1468 元	1468 元	1468 元	836 元	836 元

5.1.3 结果分析

对问题一所建模型进行方法分析，整体运用常规规划模型，主要根据换乘次数最少，价钱花费最低以及时间用时最短三个方面构建函数表达式，实现多目标最优化目的。其次考虑乘客乘车舒适度问题，并在三个方面进行范围假设限制，虽然使模型趋于理论化，但也便于模型结果的计算，提高结果的精确度。

由以上三个路线情况表可以看出，通过模型中的三方面约束，将原本的大容量数据筛检到了一个极小范围，而在这个范围内的所有路线，均可作为最优路线。另外可以发现模型结果并不唯一，不同结果侧重点不同，有些路线用时短花费高，有些则用时长花费低。多样的选择路线更适用于实际生活，面向群体也更广泛。

5.2 问题二

5.2.1 模型建立

为确定从宜昌出发经过上海、南京、杭州、苏州、无锡最后回到宜昌的最优化路线，可以采用问题一的模型。先求出六个城市两两间的最优路线，采用主要目标法通过比较某一城市与其他五个城市最优路线的时间、金钱两方面情况，确定不同目标下这一城市的下一旅游地点。以此建立最佳循环旅游路线。

价钱的最优路线：

$$\min f_3 = \sum_{i \neq j} Y_{ij} T_{ij} \quad \text{其中 } i, j = 1, 2, \dots, 6$$

时间的最优路线：

$$\min f_4 = \sum_{i \neq j} Y_{ij} X_{ij} \quad \text{其中 } i, j = 1, 2, \dots, 6$$

每个城市只有一条路线进入，则：

$$\sum_{j=1}^6 X_{ij} = 1 \text{ 其中 } i=1,2,\dots,6$$

每个城市只有一条路线出去，则：

$$\sum_{i=1}^6 X_{ij} = 1 \text{ 其中 } j=1,2,\dots,6$$

综上所述，建立以时间最短，花费最少的多目标优化模型：

$$\begin{aligned} \min f_3 &= \sum_{i \neq j} Y_{ij} T_{ij} \\ \min f_4 &= \sum_{i \neq j} Y_{ij} X_{ij} \text{ 其中 } i, j=1,2,\dots,6 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \sum_{j=1}^6 X_{ij} = 1 & \text{其中 } i=1,2,\dots,6 \\ \sum_{i=1}^6 X_{ij} = 1 & \text{其中 } j=1,2,\dots,6 \\ \sum_{i,j \in s} x_{ij} \leq |s|-1, 2 \leq |s| \leq 5 & \text{其中 } s \subset \{1,2,\dots,6\} \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \text{其中 } i, j=1,2,\dots,6, i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

其中

$$Y_{ij} \begin{cases} 0 & \text{表示不选择这条路线} \\ 1 & \text{表示经过城市 } i \text{ 到城市 } j \text{ 的路线} \end{cases}$$

T_{ij} 表示城市 i 到城市 j 的时间

X_{ij} 表示城市 i 到城市 j 的费用

$|s|$ 表示城市个数

5.2.1 模型求解

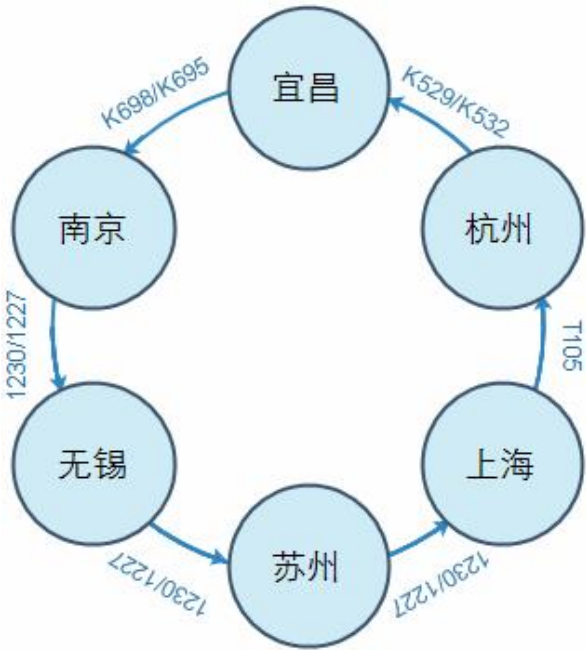
问题二考虑采用主目标法，分别以价格最低与时间最短为目标进行模型求解。根据问题一模型求解 6 个城市两两城市间的最优路线。

① 在所有最优路线中确定最低价格的路线为最终问题二中的最优路线，则该路线的价格结果如下：

6 个城市两两城市间的路线价格（元）						
	宜昌	上海	南京	杭州	苏州	无锡
宜昌	0	309.5	252	470.5	291.5	282.5

上海	309.5	0	40.5	24.5	12.5	17.5
南京	252	40.5	0	109.5	29.5	25.25
杭州	470.5	24.5	109.5	0	90.5	40.5
苏州	291.5	12.5	29.5	90.5	0	9
无锡	282.5	17.5	25.5	40.5	9	0

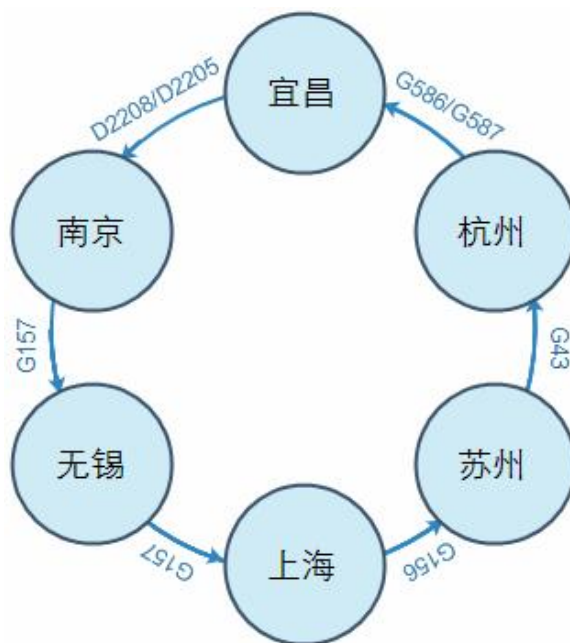
为保证最优旅游路线，规定以与城市 A 相通路线价格最低的城市为城市 A 的下一旅游点，则从宜昌出发，途经上海，南京，杭州，苏州，无锡，最后回到宜昌的最优旅游路线为：



② 在所有最优路线中确定最短时间的路线为最终问题二中的最优路线，则该路线的用时结果如下：

6 个城市两两城市间的路线用时						
	宜昌	上海	南京	杭州	苏州	无锡
宜昌	0	7h46min	5h40min	7h20min	7h16min	6h38min
上海	7h46min	0	1h7min	45min	23min	28min
南京	5h40min	1h7min	0	1h15min	49min	44min
杭州	7h20min	45min	1h15min	0	1h38min	1h31min
苏州	7h16min	23min	49min	1h38min	0	10min
无锡	6h58min	2min	44min	1h31min	10min	0

为保证最优旅游路线，规定以与城市 A 相通路线用时最短的城市为城市 A 的下一旅游点，则从宜昌出发，途经上海，南京，杭州，苏州，无锡，最后回到宜昌的最优旅游路线为：



5.2.2 结果分析

该模型采用主目标法求解出不同侧重点下的两种旅游路线，为出游群体提供了多样的选择方案。通过两种情况——价钱最少，时间最短的最优路线比较，可以发现两者的最优路线大部分相同，如宜昌→南京→无锡，杭州→宜昌。且要求价钱最少的情况下基本乘坐快车，如 K698, K695, K532，要求时间最短情况下基本乘坐动车，如：G156, G43, G186, G157。

六、 模型评价

6.1 优点

- (1) 问题一模型不仅考虑了换乘、价钱和时间，同时基于时间长短考虑了乘客乘车舒适度，在最大范围保证了路线最优化。
- (2) 问题二模型采用主目标法，分别以价钱，时间为侧重点确定最优旅游路线，为出游人群提供了多样选择方案。

6.2 缺点

- (1) 由于考虑乘车舒适度与价钱的优化存在相互矛盾，使得模型更加复杂，结果可能存在偏差。
- (2) 限定最大换乘次数为 1，即缩小了情况考虑范围，可能造成优化路线缺失。

七、模型的改进与推广

7.1 模型改进

(1) 在不同问题中，人们对各个分目标的优化需求度可能存在差异，因此在建立模型时可以引入权系数，以考虑不同分目标的相对重要性以及量纲上的差异，使模型结果更加符合实际情况。

(2) 在许多优化问题中，优化目标不可能是完全一致的，如问题一中乘车舒适度与价钱存在相互矛盾，因此要得到一个性能良好的解决方案，还应分析相互联系的目标间的矛盾程度，确定优化过程中各矛盾目标间的折衷原则^[2]。

7.2 模型推广

由于实际生活中存在大量类似多目标规划问题，因此该模型可推广到社会许多领域，如投资生产问题，区域经济规划问题，工程设计问题以及管理问题等。

八、参考文献

- [1]杨启帆. 数学建模. 北京：高等教育出版社[M], 2005:119-146.
- [2]罗刚，陈春俊，李治. 多目标优化问题中目标间矛盾性关系的研究[D/OL]. 西南大学学报. 1999.

九、附录

附录 1

```

clear

clc

[m,n,data]=xlsread('附件一.xls','A2:L49370');

clear m;

clear n;

a1=input('请输入起始站: ');

a2=input('请输入终点站: ');

a3=input('请输入转站等待时间: ');

a=cat(2,data(:,1:2),data(:,4));

b=cell2mat(cat(2,data(:,3),data(:,5:end)));

%%%%%%%%%%%%统计宜昌东与丹东的列车号 %%%%%%%%%%%%%%

g=0;

h=0;

for i=1:49369

if strcmp(a(i,3),a2)==1

g=g+1;

c(g,:)=cat(2,a(i,1),i);

else if strcmp(a(i,3),a1)==1

h=h+1;

d(h,:)=cat(2,a(i,1),i);

end

end

end

xlswrite('宜昌东的车列号',c);

xlswrite('丹东的车列号',d);

%%%%%%%%%%%%宜昌东%%%%%%%%%%%%

e=0;

for i=1:49369

for j=1:length(c)

if strcmp(a(i,1),c(j,1))==1

```

```

e=e+1;
l(e,:)=cat(2,a(i,:),i);
end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%丹东%%%%%%%%%%%%%%

k=0;
for i=1:49369
for j=1:length(d)
if strcmp(a(i,1),d(j,1))==1
k=k+1;
J(k,:)=cat(2,a(i,:),i);
end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%换乘一次的车次%%%%%%%%%%%%%%

s=0;
for i=1:size(l,1)
for j=1:size(J,1)
if strcmp(l(i,3),J(j,3))==1
s=s+1;
z(s,:)=cat(1,J(j,1),J(j,4),l(i,1),l(i,4),l(i,3));
end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%时间优化换乘一次的车次%%%%%%%%%%%%%%

A=cell2mat(z(:,2:2:4));
for i=1:length(z)
if b(A(i,1),3)>1-0.5/24
if b(A(i,1),3)+0.5/24-1>b(A(i,2),4)||b(A(i,1),3)+a3/24-1<b(A(i,2),4)

```

```

z(i,:)=[];
end
else if b(A(i,1),3)+0.5/24>b(A(i,2),4)||b(A(i,1),3)+a3/24<b(A(i,2),4)
z(i,:)=[];
end
end
end
%%%%%%%%顺序优化换乘一次的车次%%%%%%%%
f1=cell2mat(z(:,2:2:4));
v=0;
k1=0;
for i=1:length(z)
for j=1:49369
if strcmp(data(f1(i,1),1),data(j,1))==1
k1=k1+1;
g1(k1,:)=cat(2,j,data(j,:));
end
end
f2=cell2mat(g1(:,4));
for i1=1:length(g1)
if strcmp(g1(i1,5),a1)==1
if f2(i1)>b(f1(i,1),1)
z(i,:)=[];
else
v=v+1;
s1(v,:)=cat(2,g1(i1,6:2:8),g1(i1,10:13));
end
end
end
end
end

```

```

f3=cell2mat(z(:,4));
v=0;
k1=0;
for i=1:length(z)
for j=1:49369
if strcmp(data(f3(i),1),data(j,1))==1
k1=k1+1;
h(k1,:)=cat(2,j,data(j,:));
end
end
f4=cell2mat(h1(:,4));
for i2=1:length(h1)
if strcmp(h1(i2,5),a2)==1
if f4(i2)<b(f3(i,1),1)
z(i,:)=[];
s1(i,:)=[];
else
v=v+1;
s2(v,:)=cat(2,h1(i2,6:2:8),h1(i2,10:13));
end
end
end
end
%%%%%%%%%%%%时间的计算%%%%%%%%%%%%
f5=cell2mat(z(:,2:2:4));
for i=1:length(z)
y(i,:)=cat(2,b(f5(i,1),2:3),b(f5(i,1),6:9),b(f5(i,2),2:2:4),b(f5(i,2),6:9));
end
s1=cell2mat(s1);
s2=cell2mat(s2);

```



```

for i=1:length(z)

t(i)=y(i,1)+s2(i,2)+s2(i,1)-s1(i,1)-s1(i,2)-y(i,7);

end

T1=floor(t.*24);

T2=(t.*24-T1)*60;

T=cat(1,T1,T2);

%%%%%%%%%%%%%%票价的计算%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:length(z)

Y1(i,:)=y(i,3:6)-s1(i,3:6);

Y2(i,:)=s2(i,3:6)-y(i,9:12);

end

w={'小时';'分钟';'一次硬座';'一次硬卧';'一次软座';'一次软卧';'二次硬座';'二次硬卧';'二次软座';'二次软卧'};

p=e(:,1:2:5)

q=cat(1,T,Y1',Y2')

xlswrite('乘车方案',p)

xlswrite('时间价格',w)

xlswrite('时间价格',q,1,'B1')

```

（此程序求解的是丹东→宜昌的路线，若要求解天津→拉萨、白城→青岛的路线，需将程序中丹东改为天津、白城，宜昌改为拉萨、青岛）