铁路最优线路问题

摘要

本文研究的是最优铁路路线问题。根据乘客对出行费用低、时间短以及换乘 次数少的需求,利用多目标优化的方法建立铁路最优路线模型,找到适合乘客的 最优铁路出行线路。

针对问题一: 首先考虑到乘客希望出行时间短、费用低以及换乘次数少。基于这样的心理,可以将出行时间短、费用低以及换乘次数少作为影响乘客选择出行线路的重要因素。并将此最优铁路出行线路问题转换成一个多目标优化的数学模型,利用 MATLAB 软件进行计算机编程最终求出最优铁路出行路线。(1) 从丹东到达宜昌,可以坐 K190 次列车的硬座到达南京,再坐 D3077 次列车的硬卧到达宜昌东,总费用最少为 489 元。或者从丹东乘坐 K190 次列车到达常州,再坐 D3006 次列车到达宜昌东,总时间最短为 13 小时 40 分钟。(2) 从天津到拉萨,考虑到行程较远,采用时间最短模型进行求解得,首先从天津坐 T31 次列车到徐州,之后坐 T165 次列车,总时间最短为 48 小时 50 分钟。(3) 从白城到青岛:同时要满足费用最少和时间最,首先在白城乘 K1302 次列车的硬座到达黄村,再乘坐 K709 次列车到达青岛,总时间为 31 小时 43 分钟,总费用为 320 元。

针对问题二:首先将旅游视为是对生活的享受,在问题一乘客需求的前提下,还需要考虑旅行的舒适度,即认为游客车乘超过 12 小时,优先考虑软卧。对于行程的最优路线问题,先可以建立 TSP 模型,确定旅行城市的先后顺序即为:

宜昌 $\xrightarrow{1}$ 南京 $\xrightarrow{2}$ 无锡 $\xrightarrow{3}$ 苏州 $\xrightarrow{4}$ 上海 $\xrightarrow{5}$ 杭州 $\xrightarrow{6}$ 宜昌 将旅行的路线分为 6 段,建立类似问题一的多目标优化模型,通过 MATLAB 软件 进行计算机编程求出每一段的最优铁路出行路线。

路线如下: 从宜昌出发乘坐 K698/K695 列车达到南京,再乘坐 G7027 到无锡, 然后乘 G7075 到达苏州,再坐 G7051 列车到上海,接着乘坐 K8556 前往杭州,最终乘坐 K529/K532 列车返回宜昌。此路线为最优路线。

关键字: 多目标优化模型 0-1 判别法 TSP 算法

一、问题重述

1.1 问题背景

铁路以"为人民服务"为宗旨,把服务、方便人民群众摆在首要位置,作为最为核心的任务。使群众利益最大化,即花少的金钱、用短的时间去达到自己的目的地。铁路是服务性、公益性很强的行业,这一属性决定了铁路的发展必须服从国家利益、全局利益和人民利益。

1.2 问题相关信息

铁路既是社会经济发展的重要载体之一,同时又为社会经济发展创造了前提 条件。近几年来,在全社会客运量稳步上升的同时,长期以来铁路承运了大量旅 客。相对于其他的运输方式铁路具有时间准确性高、运输能力大、运行比较平稳、 安全性高等优点。同时火车也成为了旅途的首选交通运输工具。

虽然目前铁路网络已经比较发达,但是仍然有很多地方之间并没有直接到达的铁路。并且在节假日期间,一些热门路线的火车票总是一票难求。在这种情况下,需要考虑换乘,即先从乘车站到换乘站,再从换乘站到目的站。

1.3 需要解决的问题

问题一:给出任意两个站点之间的最优铁路路线问题的一般数学模型和算法。若两个站点之间有直达列车,需要考虑直达列车票已售罄情况下最优的换乘方案。根据附录数据,利用你们的模型和算法求出一下起点到终点的最优路线:丹东→宜昌、天津→拉萨、白城→青岛。

问题二:假设你从打算从宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡旅游最后回到宜昌,请建立相关数学模型,给出整个行程的最优路线。

二、模型假设与符号说明

2.1 模型假设

假设一: 各个铁路路线不受春运等节假日影响而有新的调整和变化。

假设二: 乘客选择铁路路线仅仅考虑三个因素,即时间、换乘次数和费用。

假设三:乘客换乘次数最多不超过两次。

假设四:在运行过程中行驶时间不变,即不受特殊情况影响,如错车、恶劣 天气、交通意外等。

假设五:乘客花费时间从第一次上车车开时开始计时,到最终达到目的地下车为止,不考虑上车前的等车时间。

2.2 符号说明

符号	含义						
i	乘坐火车的座位类型						
j	乘坐火车的车次						
t ₁	火车的出发时间						
t ₂	火车的达到时间						
n	换乘的次数						
Δt	火车换乘时消耗的时间						
$M_{\rm ij}$	火车票价						
T	从始发地到目的地的总时间						
W	选择的路线所花费的总费用						
p,q	不同城市						
$D_{ m pq}$	两个城市 p 与 q 之间的距离						
k	城市的个数						
S	路线的条数						
X_{pq}	0或 1 (1 表示选择城市 p 到城市 q 这条路, 0 表示没有选择这条路)						

三、问题分析

铁路的运行方便优化了人们的出行,由于乘客的出行需求在数据、费用上表现出较大的差异性,使得列车在不同站点、时间和不同路线上运行特征的差异较大。所以应该为乘客提供科学可行便捷的方案。^[1]

3.1 问题一的分析

本问题只考虑乘坐火车,则要求给出任意两个站点之间的最优铁路路线问题的一般数学模型和算法。由于从起点站到终点站的路线可能并不是唯一的,所以若两个站点之间有直达列车,需要考虑直达列车票已售罄情况下最优的换乘方案。并且要在换乘次数、乘车的花费时间和费用上作出考虑和权衡。可能费用会随换乘次数的增加而消耗更大,而且换乘次数越多,乘客一般也不会接受和赞同。因此,可以考虑分别以乘车时间最短、换乘次数最少和乘车所花费的费用最低为目标函数,给出不同的乘车路线,让乘车自主选择心怡的乘车方案。

3.2 问题二的分析

本问题研究的是宜昌出发乘火车到上海、南京、杭州、苏州、无锡等地方旅游,最后回到宜昌的整个行程的最优路线问题。首先需要解决的是出行达到各个旅游城市的先后顺序问题,然后考虑如何乘车以实现省时、省钱还便捷的目的。对于顺序问题,可以类似像旅行社问题,通过建立 TSP 模型,利用 MATLAB 软件进行计算机编程求出旅游城市的先后顺序。在求出旅游城市顺序的前提下,可以将先后旅游的每两个城市的路线作为一段,将整个行程的旅游路线分成 6 段。然后用类似于问题一的模型,以花费低、费时短、换乘次数少等游客的需求,通过构建多目标优化模型,利用 MATLAB 软件进行计算机编程分别求出每一段铁路出行的最优路线,最后综合 6 段的最优路线即可得到整个行程的最优路线。

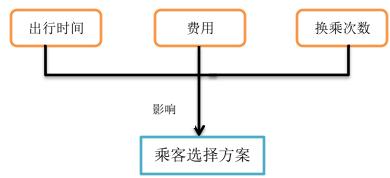
四、数据分析与处理

4.1 数据的分析

先对数据进行处理和分析,我们可通过题目中所给的数据,求出任意两站之间的所有路径、花费的时间和费用、换乘的次数、乘坐的车次和座位的类型等。

五、问题一的解答

5.1 模型的建立



(1) 出门在外,为了方便乘客旅行便捷要求乘车次数要少^[3],其表达式为:

$$\min f_1 = n$$

(2) 再考虑到消耗时间的问题, 使得乘车的时间最短, 其表达式为:

$$\min T = \sum_{i=1}^{n} t_{2j} - t_{1j} + \Delta t$$

其中, 耽误的时间 Δt 的表达式为:

$$\Delta t = \begin{cases} 0, j = 1 \\ t_{1j} - t_{2(j-1)}, j > 1 \end{cases}$$

(3) 最后考虑到出行的花费问题, 所花的费用的表达式为:

$$\min W = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}$$

综上所述,目标函数为

$$\min f_1 = n$$

$$\min T = \sum_{i=1}^n t_{2j} - t_{1j} + \Delta t$$

$$\min W = \sum_{i=1}^n M_{ij}$$

约束条件为

$$s.t \begin{cases} n > 0 \\ t_{ij} > t_{2(j-1)} \end{cases}$$

5.2 模型的求解

(1) 从丹东→宜昌的乘车路线, 共 4 条路线:

路线	起始站	车次 1	中转站	车次 2	终点站	乘车时间
路线一	· 丹东	K190/K187	南京	K696/K697		37 小时 40 分钟
路线二		K190/K187	常州	D3006/D3007	宜昌	37 小时 40 分钟
路线三		K190/K187	常州	K1512/K1513	上日	37 小时 40 分钟
路线四		K190/K187	无锡	D3006/D3007		47 小时 9 分钟

(2) 从天津→拉萨的乘车路线, 共 4 条路线:

路线	起始站	车次1	中转站	车次 2	终点站	乘车时间
路线一	天津	1230/1227	上海	T164/T165		67 小时 6 分钟
路线二		4310/0000	上海	T164/T165	拉萨	60 小时 8 分钟
路线三		K2082/K2083	上海	T164/T165	177 192	88 小时 29 分钟
路线四		T31/T32	徐州	T165/T166		48 小时 50 分钟

(3) 从白城→青岛的乘车路线, 共 4 条路线:

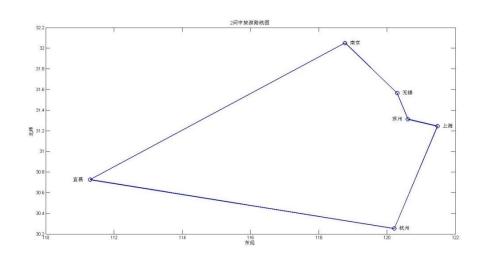
-								
	路线	起始站	车次 1	中转站	车次 2	终点站	乘车时间	
	路线一		K1302	黄村	K712/K709		31 小时 43 分钟	
	路线二	白城	K2082/K2083	上海	T164/T165	青岛	88 小时 29 分钟	
	路线三		T122/T123	武昌	T264/T265	月珂	43 小时 25 分钟	
	路线四		T238/T235	武昌	T264/T265		65 小时 57 分钟	

5.3 结果分析

- (1) 从丹东到达宜昌,有两种选择:
- 1、价格最低: 从丹东乘坐 K190 次列车的硬座到达南京, 然后乘坐 D3077 次列车的硬卧达到宜昌东,总费用最少为 489 元。
- 2、时间最短: 从丹东乘坐 K190 次列车到达常州, 然后乘坐 D3006 次列车到达宜昌东, 总时间最短为 37 小时 40 分钟。
- (2) 从天津到拉萨:考虑到行程较远,采用时间最短模型进行求解得,首先从天津坐 T31 次列车到徐州,之后乘坐 T165 次列车,时间最短,总时间为 48 小时50 分钟。
- (3)从白城到青岛:同时满足费用最少和时间最短的路径,首先在白城乘坐 K1302次列车的硬座到达黄村,再乘坐 K709次列车到达青岛。总时间和总费用分别为31小时43分钟和320元。

六、问题二的解答

6.1 模型的建立



(1) 记城市的个数为 k; 记城市为 p,q; 由此引入 0-1 变量 X_{pq} ,若选择城市 p 到 城市 q 这条路,则 $X_{pq}=1$,反之,若没有选择这条路,则记 $X_{pq}=0$ 。 [3]

$$\begin{cases} X_{pq} = 1, 选择城市到城市这条路 \\ X_{pq} = 0, 没有选择这条路 \end{cases}$$

(2) 整个出行过程中旅游城市的先后顺序为:

$$\min \sum_{p\neq q} D_{pq} X_{pq}$$

(3) 其中经过的城市只有一条路进入和一条路出去,其表达式为:

$$\sum_{p=1}^{k} X_{pq} = 1, \quad \sum_{q=1}^{k} X_{pq} = 1(p, q = 1, 2, ..., k)$$

(4)除了始发站和目的地,其他城市之间无需考虑路线问题,其表达式为:

$$\begin{cases} \sum_{p,q \in s} X_{pq} \le |s| - 1 \\ 2 \le |s| \le k - 1, s \subset \{1, 2, ..., k\} \end{cases}$$

(5) 出门在外,为了方便乘客旅行便捷要求乘车次数要少^[3],其表达式为:

$$\min f_1 = n$$

(6) 再考虑到消耗时间的问题, 使得乘车的时间最短, 其表达式为:

$$\min T = \sum_{j=1}^{n} t_{2j} - t_{1j} + \Delta t$$

其中, 耽误的时间 Δt 的表达式为:

$$\Delta t = \begin{cases} 0, j = 1 \\ t_{1j} - t_{2(j-1)}, j > 1 \end{cases}$$

(7) 最后考虑到出行的花费问题,所花的费用的表达式为:

$$\min W = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}$$

综上所述,目标函数为

$$\min f_1 = n$$

$$\min T = \sum_{i=1}^n t_{2j} - t_{1j} + \Delta t$$

$$\min W = \sum_{i=1}^n M_{ij}$$

$$\min \sum_{p \neq q} D_{pq} X_{pq}$$

约束条件为

加東条件为
$$\sum_{p=1}^{k} X_{pq} = 1(p,q=1,2,...,k)$$

$$\sum_{q=1}^{k} X_{pq} = 1(p,q=1,2,...,k)$$

$$\sum_{q=1}^{k} X_{pq} = 1(p,q=1,2,...,k)$$

$$\sum_{p,q\in s} X_{pq} \le |s| - 1$$

$$2 \le |s| \le k - 1, s \subset \{1,2,...,k\}$$

$$X_{pq} \in \{0,1\} (p,q=1,2,...,k; p \ne q)$$

$$n > 0$$

$$t_{ij} > t_{2(j-1)}$$

6.2 模型的求解

出发站→终站	火车型号	硬座(元)	硬卧 (元)	软卧 (元)	所花时间
宜昌→南京	K698/K695	152	270	426	13 小时 28 分
且日一用尔	K698/K695	108	189	304	12 小时 46 分钟
南京→无锡	G7027	130	80	0	54 分钟
无锡→苏州	G7075	30	20	0	14 分钟
苏州 →上海	G7051	60	40	0	24 分钟
上海→杭州	K8556	148	92	0	1 小时 32 分钟
杭州→宜昌	K529/K532	168	288	450	19 小时 19 分钟

通过 MATLAB 软件编程可得到最优路线,即从宜昌出发,城市的旅游顺序为南京、无锡、苏州、上海、杭州,最终返回宜昌。

6.3 结果分析

模型求解得到,由宜昌乘坐 K698/K695 列车达到南京,再乘坐 G7027 到无锡,然后乘 G7075 到达苏州,再坐 G7051 列车到上海,接着乘坐 K8556 前往杭州,最终乘坐 K529/K532 列车返回宜昌,在此乘车路途上最短耗时为 35 小时 9分钟,并且此路线上无需换乘,因路途上讲究舒适,则据此乘车最小的花费为709 元。

七、模型的评价、改进及推广

7.1 模型的评价

7. 1. 1 模型的优点

优点一:本模型分析全面,考虑问题充分,从三个各方面考虑乘车的最优路线,通过编程最终得出合理的答案。

优点二:本模型思路清晰,假设合理使原本复杂的实际问题转换成数学问题。 优点三:本模型使用了大量的数据,尽可能的减少了误差。

7.1.2 模型的缺点

缺点一:本模型只考虑了换乘一次列车,即中转一次的情况,没有考虑到转 多次中转站的情况,虽然可以解决题目的问题,但是可能会存在其他的方案。

缺点二:本模型只是综合的考虑花费少、时间短、转乘次数少的问题,没有根据不同人群进行分类考虑,所以得出的结果有一定的局限性。

7.2 模型的改进

改进一:对于不同人群在出行时间、费用和换乘次数有不同需求,需要不同的解决方案。

改进二:在实际生活中,应根据实际情况可适当的调整换乘次数,然后在找出最优路线。

7.3 模型的推广

本文建立的模型及算法适用于确定的起始点和终止点,然后选择最优路线的问题。在建立的以所需时间短、费用低、换乘次数少为目标函数的模型中,所赋权值的大小可根据乘客的需要而定,可以满足查询者的各种不同需求。并且可以推广到地铁运行中。

八、参考文献

- [1]朱海清,《城市常规公交线路优化方法研究》,东南大学,2006.3
- [2]常玉林,胡启洲,《城市公交线网优化的线性模型》,中国公路大学,2005.6
- [3]于滨、《城市公交系统模型与算法研究》,大连理工大学,2006.4

九、附录

附录 1: 第一问

```
[n, vaw, data]=x1sread('附件一. x1s', 'A2:L49370');
clear n:
clear vaw;
plt1=input('请输入起始站:');
plt2=input('请输入终点站:');
plt3=input('请输入转站等待时间:');
a=cat(2, data(:, 1:2), data(:, 4));
b=cell2mat(cat(2, data(:, 3), data(:, 5:end)));
j=0;
k=0;
for i=1:49369
       if strcmp(a(i, 3), p1t2) == 1
               j=j+1;
               m(j, :) = cat(2, a(i, 1), i);
       else if strcmp(a(i, 3), plt1) == 1
                       k=k+1:
                       n(k, :) = cat(2, a(i, 1), i);
               end
       end
end
%xlswrite('宜昌东',m)
%xlswrite('丹东',n)
r=0:
for j=1:size(n, 1)
       for i=1:49369
               if strcmp(a(i, 1), n(j, 1)) == 1
                       r=r+1:
                       c(r, :) = cat(2, a(i, :), i);
               end
       end
end
```

```
0=0:
for j=1:size(m, 1)
       for i=1:49369
               if strcmp(a(i, 1), m(j, 1)) == 1
                      o = o + 1;
                      d(0, :) = cat(2, a(i, :), i);
               end
       end
end
                      r=0;
for i=1:size(c, 1)
       for j=1:length(d)
               if strcmp(c(i, 3), d(j, 3)) == 1
                      r=r+1:
                      e(r, :) = cat(1, c(i, 1), c(i, 4), d(j, 1), d(j, 4), c(i, 4))
3));
               end
       end
附录 2: 第二问(宜昌到南京)
clear
c1c
%%%%%%%从宜昌到南京%%%%%%%%%
[a,b,y]=xlsread('宜昌');
[f,g,n]=xlsread('南京');
format
for i=2:length(y)
       a=y(i, 1); e=ce112mat(y(i, 3)); h=ce112mat(y(i, 5));
            j=2:1ength(n);
               b=n(j, 1); k=cel12mat(n(j, 3)); p=cel12mat(n(j, 5));
       c=strcmp(a, b);
            c=1\&\&(e) <= (k)\&\&(h) <= (p)
         if
               i, i
costhardseat = cell2mat(n(j, 9)) - cell2mat(y(i, 9))
costhardbed=cell2mat(n(j, 10))-cell2mat(y(i, 10))
costsoftbed=cell2mat(n(j, 12))-cell2mat(y(i, 12))
t=cell2mat(n(j, 6))-cell2mat(y(i, 7));
hour=floor (24*(t))+24*(cell2mat(n(j,5))-cell2mat(y(i,5)))
```

min=floor(60*(24*t-floor(24*t)))

end

end

附录 3: 第二问(南京到无锡)

```
clear
c1c
%%%%%%%从南京到无锡%%%%%%%%%
[a, b, y]=xlsread('南京');
[f,g,n]=x1sread('无锡');
for i=2:length(y)
        a=y(i, 1); e=ce112mat(y(i, 3)); h=ce112mat(y(i, 5));
        for j=2:1ength(n);
                 b=n(j, 1); k=cell2mat(n(j, 3)); p=cell2mat(n(j, 5));
        c=strcmp(a, b);
          if c==1\&\&(e) <= (k)\&\&(h) <= (p)
                 i, j
costhardseat = cel12mat(n(j, 9)) - cel12mat(y(i, 9))
costhardbed=cell2mat(n(j, 10))-cell2mat(y(i, 10))
costsoftbed=cell2mat(n(j, 12))-cell2mat(y(i, 12))
t=cell2mat(n(j, 6))-cell2mat(y(i, 7));
hour = floor(24*(t)) + 24*(cell2mat(n(j, 5)) - cell2mat(y(i, 5)))
min=floor(60*(24*t-floor(24*t)))
          end
        end
end
附录 4: 第二问 (无锡到苏州)
clear
c1c
%%%%%%%从无锡到苏州%%%%%%%%
[a, b, y]=x1sread('无锡');
[f,g,n]=xlsread('苏州');
for i=2:length(y)
        a=y(i, 1); e=ce112mat(y(i, 3)); h=ce112mat(y(i, 5));
        for j=2:1ength(n);
                 b=n(j, 1); k=cel12mat(n(j, 3)); p=cel12mat(n(j, 5));
        c=strcmp(a, b);
          if c==1\&\&(e) <= (k)\&\&(h) <= (p)
                 i, j
costhardseat = cell2mat(n(j, 9)) - cell2mat(y(i, 9))
costhardbed=cell2mat(n(j, 10))-cell2mat(y(i, 10))
```

```
costsoftbed=cell2mat(n(j, 12))-cell2mat(y(i, 12))
t=cell2mat(n(j, 6))-cell2mat(y(i, 7));
hour=floor (24*(t))+24*(cell2mat(n(j,5))-cell2mat(y(i,5)))
min=floor(60*(24*t-floor(24*t)))
          end
        end
end
附录 5: 第二问(苏州到上海)
clear
c1c
%%%%%%%从苏州到上海%%%%%%%%%
[a, b, y]=x1sread('苏州');
[f,g,n]=xlsread('上海');
for i=2:length(y)
        a=y(i, 1); e=ce112mat(y(i, 3)); h=ce112mat(y(i, 5));
        for j=2:1ength(n);
                b=n(j, 1); k=cel12mat(n(j, 3)); p=cel12mat(n(j, 5));
        c=strcmp(a, b);
          if c==1\&\&(e) <= (k)\&\&(h) <= (p)
                  i, j
costhardseat = cell2mat(n(j, 9)) - cell2mat(y(i, 9))
costhardbed=cell2mat(n(j, 10))-cell2mat(y(i, 10))
costsoftbed=cell2mat(n(j, 12))-cell2mat(y(i, 12))
t=cell2mat(n(j, 6))-cell2mat(y(i, 7));
hour=floor (24*(t))+24*(cell2mat(n(j,5))-cell2mat(y(i,5)))
min=floor(60*(24*t-floor(24*t)))
          end
        end
end
附录 6: 第二问(上海到杭州)
clear
c1c
%%%%%%%从上海到杭州%%%%%%%%%
[a, b, y]=x1sread('上海');
[f,g,n]=x1sread('杭州');
for i=2:length(y)
        a=y(i, 1); e=cell2mat(y(i, 3)); h=cell2mat(y(i, 5));
        for j=2:1ength(n);
                b=n(j, 1); k=cell2mat(n(j, 3)); p=cell2mat(n(j, 5));
```

```
c=strcmp(a, b);
          if c==1\&\&(e) <= (k)\&\&(h) <= (p)
                   i, j
costhardseat = cell2mat(n(j, 9)) - cell2mat(y(i, 9))
costhardbed=cell2mat(n(j, 10))-cell2mat(y(i, 10))
costsoftbed=cell2mat(n(j, 12))-cell2mat(y(i, 12))
t=cell2mat(n(j, 6))-cell2mat(y(i, 7));
hour = floor(24*(t)) + 24*(cell2mat(n(j, 5)) - cell2mat(y(i, 5)))
min=floor(60*(24*t-floor(24*t)))
          end
        end
end
附录 7: 第二问(杭州到宜昌)
clear
c1c
%%%%%%%从杭州海到宜昌%%%%%%%%%
[a, b, y]=x1sread('杭州');
[f,g,n]=xlsread('宜昌');
for i=2:length(y)
        a=y(i, 1); e=ce112mat(y(i, 3)); h=ce112mat(y(i, 5));
        for j=2:length(n);
                 b=n(j, 1); k=cel12mat(n(j, 3)); p=cel12mat(n(j, 5));
        c=strcmp(a, b);
          if c=1\&\&(e) <= (k)\&\&(h) <= (p)
                   i, j
costhardseat = cell2mat(n(j, 9)) - cell2mat(y(i, 9))
costhardbed=cell2mat(n(j, 10))-cell2mat(y(i, 10))
costsoftbed=cell2mat(n(j, 12))-cell2mat(y(i, 12))
t=cell2mat(n(j, 6))-cell2mat(y(i, 7));
hour = floor(24*(t)) + 24*(cell2mat(n(j, 5)) - cell2mat(y(i, 5)))
min=floor(60*(24*t-floor(24*t)))
          end
```

end

end