

Breve introdução Sistemas Dinâmicos e suas principais métricas

Mauricio A. Ribeiro

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Ponta Grossa

21 de fevereiro de 2022

1 Breve introdução Sistemas Dinâmicos

2 Oscilador de Duffing

- Diagrama de Bifurcação
- Seção de Poincaré
- Expoente de Lyapunov
- Teste 0-1

3 Outro exemplo

- Microscopia de força atômica

Ferramental mais utilizado para análise

- Sistemas dinâmicos são sistemas fora do equilíbrio, caracterizados por estados que mudam com o tempo. São usados para modelar e fazer previsões de sistemas físicos, biológicos, financeiros, etc.
- Para definir um sistema dinâmico precisamos de três ingredientes:
 - Espaço de estados
 - Equações de movimento
 - Medida de distância

Discreto:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Contínuos:

$$\dot{x} = f(x)$$

Campos:

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = D[\phi(x, t)] + \psi(x, t)$$

Autômato Celular:

$$a_{n+1}^i = F[\{a_n^i\}_{j \in U_i}]$$

Redes Complexas:

$$a_{n+1}^i = F[\{a_n^j\}_{j \in V_i}]$$

Sistemas Lineares e Não Lineares

Conservativos e Não Conservativos

Determinísticos e Probabilísticos

Autômantos e não autômatos

Com retardo e não retardo

Explorar dois exemplos

Oscilador de Duffing

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = f_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

- $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\delta = 0.3$, $\omega = 1.0$ e $f_0 \in [0, 5.0]$

Análise

- Analisar o máximo das séries temporais (Diagrama de Bifurcação)
- Comportamento de duas condições iniciais próximas (Expoente de Lyapunov)
- Comportamento quando a interseção de planos ($h_p = \frac{2\pi n}{\omega}$)

Diagrama de Bifurcação

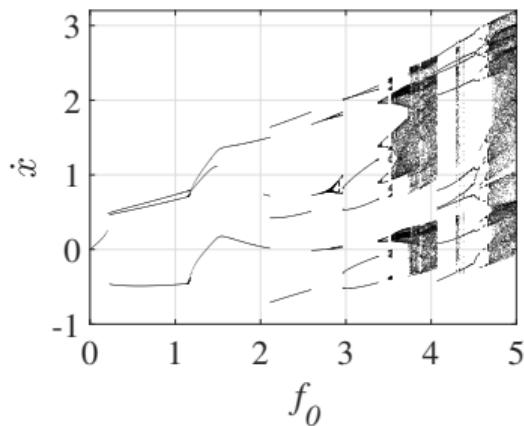
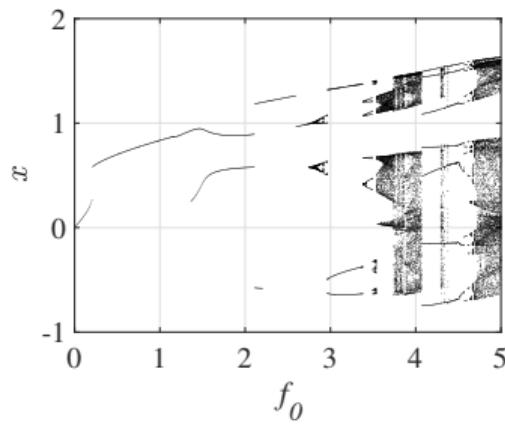


Figura: Diagrama de Bifurcação

Diagrama de Bifurcação

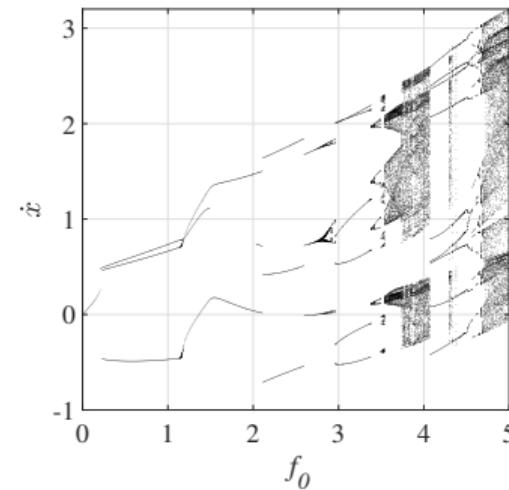
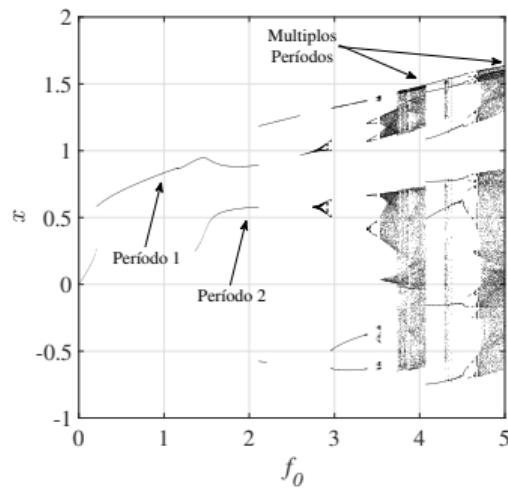


Figura: Diagrama de Bifurcação

Seção de Poincaré

- Técnica permite transformar um sistema dinâmico contínuo no tempo em um sistema discreto.
- Dado um sistema de dimensão n com órbitas periódicas em seu espaço de fase, a seção de Poincaré diminui a dimensão em $n - 1$
- Sendo determinada realizando cortes perpendiculares as trajetórias ao espaço de fase e tomando somente os pontos que interceptam essa seção.

Seção de Poincaré

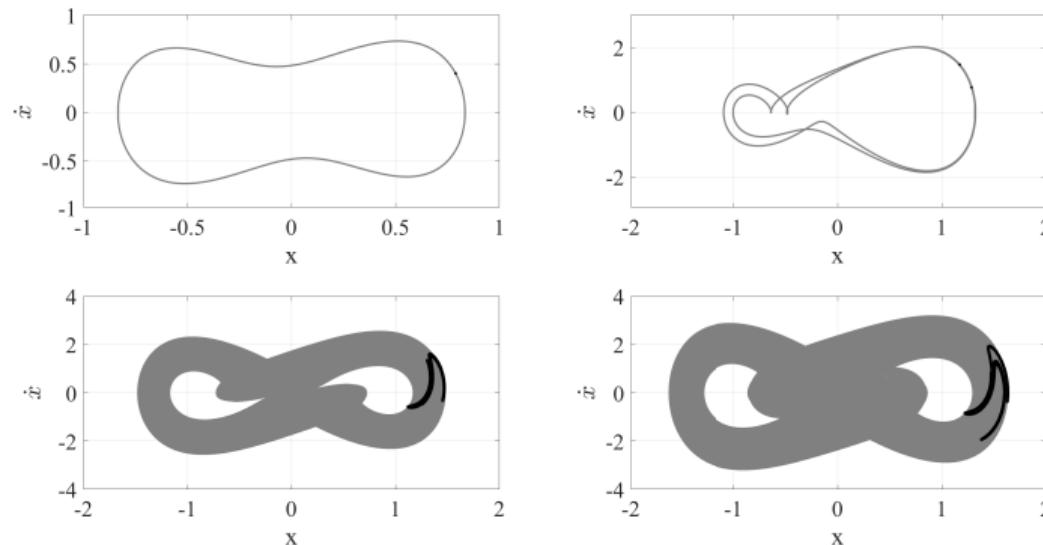


Figura: Mapas de Fase e Seção de Poincaré

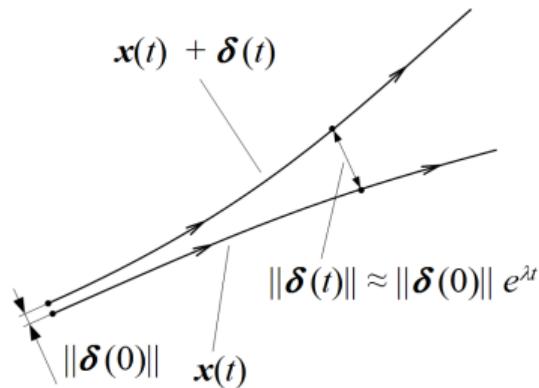


Figura: Distancia entre trajetórias

$$\lambda = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{i=1}^n \ln \left[\frac{\delta(t_i)}{\delta_0} \right] \quad (2)$$

Se dois pontos iniciais

- Próximos convergem para um atrator ($\lambda < 0$)
- Se a distância entre eles se mantém constante ($\lambda = 0$)
- Se a distância se afastam exponencialmente ($\lambda > 0$) o sistema é sensível.

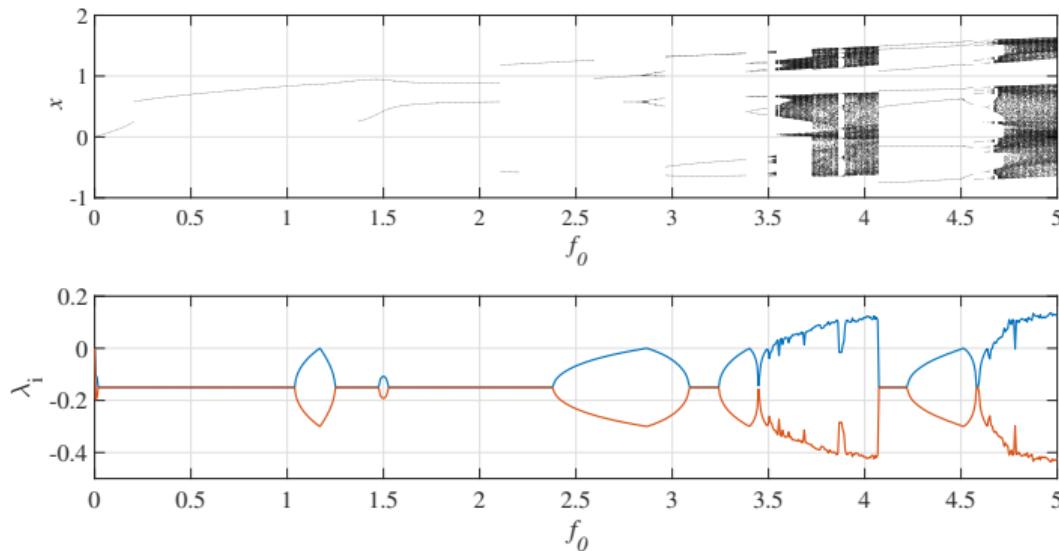


Figura: Mapas de Fase e Seção de Poincaré

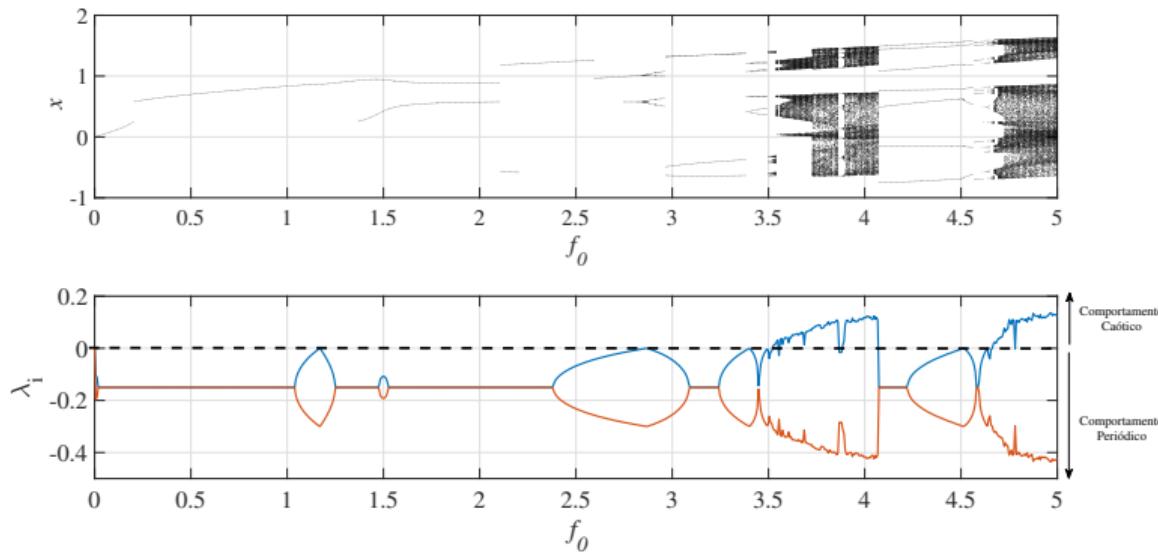


Figura: Mapas de Fase e Seção de Poincaré

- O teste 01 é aplicado em uma série temporal;
- Estima o parâmetro K_c

$$p(n, \bar{c}) = \sum_{j=0}^n x(j) \cos(j\bar{c}) \quad (3)$$

$$q(n, \bar{c}) = \sum_{j=0}^n x(j) \sin(j\bar{c}) \quad (4)$$

onde $\hat{c} \in (0, \pi)$ são constantes. E $p(n, \hat{c})$ e $q(n, \hat{c})$ é descrito por:

$$M(n, c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[(p(j + n, \bar{c}) - p(j, \bar{c}))^2 + (q(j + n, \bar{c}) - q(j, \bar{c}))^2 \right]$$

onde $n = 1, 2, \dots, N$ e definimos o K_c em um tempo longo:

$$K_c = \frac{\text{cov}(Y, M(\bar{c}))}{\sqrt{\text{var}(Y)\text{var}(M(\bar{c}))}} \quad (6)$$

logo $M(\bar{c}) = [M(1, \bar{c}), M(2, \bar{c}), \dots, M(n_{\max}, \bar{c})]$ and $Y = [1, 2, \dots, n_{\max}]$. Dado dos valores x e y , a covariância $\text{cov}(x, y)$ e variancia $\text{var}(x)$, of n_{\max} elementos, são definidos:

$$\begin{aligned} \text{cov}(x, y) &= \frac{1}{n_{\max}} \sum_{n=1}^{n_{\max}} (x(n) - \bar{x})(y(n) - \bar{y}) \\ \text{var}(x) &= \text{cov}(x, x) \end{aligned} \quad (7)$$

- Os valores dos parâmetro K_c é obtido por Eq.6.
 - Se $K_c = 0$ o sistema é periódico.
 - Se $K_c = 1$ o sistema é caótico.

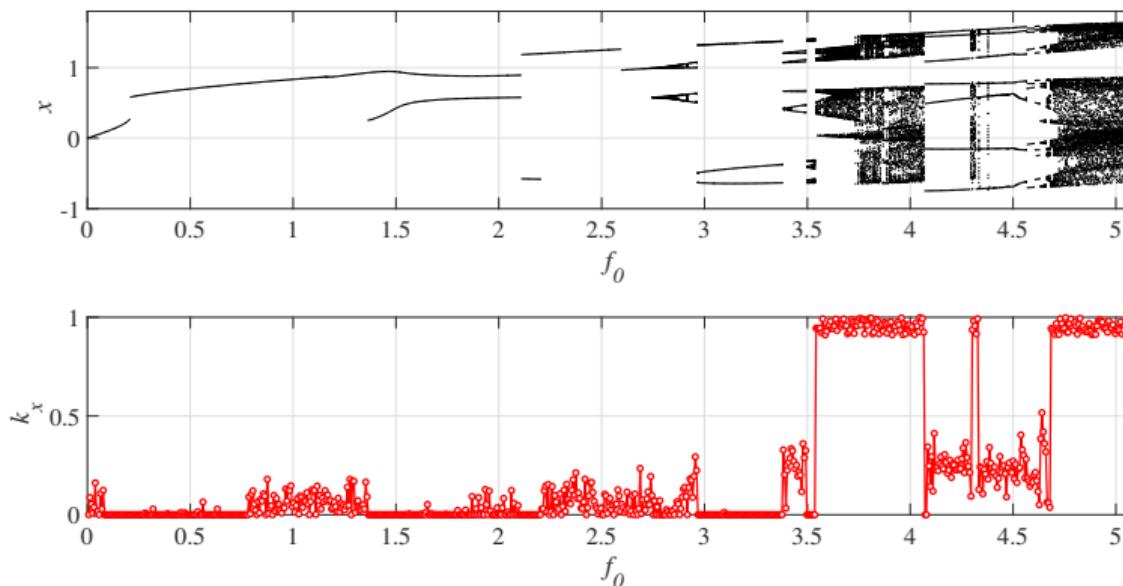
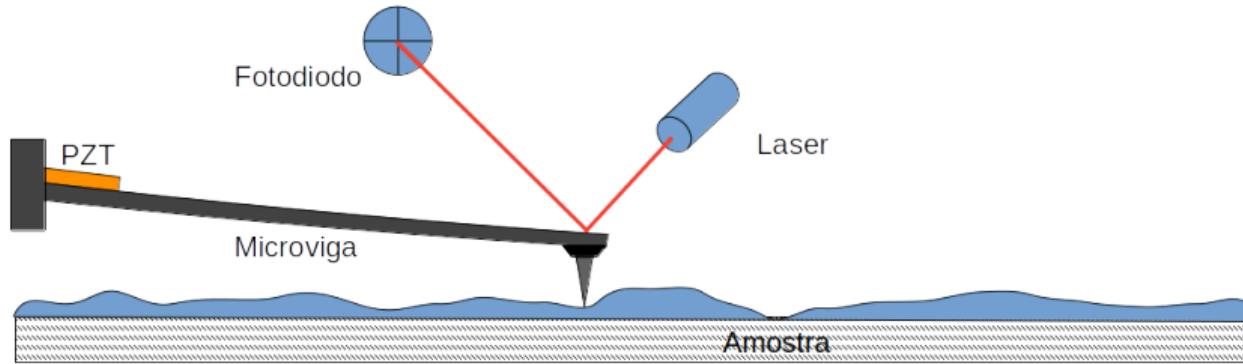


Figura: Diagrama de Bifurcação e Teste 01



[Figura:](#) Representação do esquema da Microscopia de Força Atômica. Click aqui para o exemplo 1. Clique aqui para o exemplo 2

Equações diferenciais fracionárias

$$\mathcal{D}^{q_1}x_1(\tau) = x_2 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{q_2}x_2(\tau) &= -x_1 - d_1 x_2 + B_1 + \frac{C_1}{(1 - x_1 - \zeta \sin(\Omega\tau))^8} + \frac{C_2}{(1 - x_1 - \zeta \sin(\Omega\tau))^2} \\ &\quad - \frac{p}{(1 - x_1 - \zeta \sin(\Omega\tau))^8} \mathcal{D}^{q_3}x_3(\tau) + \zeta \Omega^2 E_1 \sin(\Omega\tau) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}^{q_3}x_3(\tau) = x_2$$

$$0 < q = (q_1, q_2, q_3) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < q_3 \leq 1$$

Resultados Numéricos- Ordem inteira - $q_3 = 1$

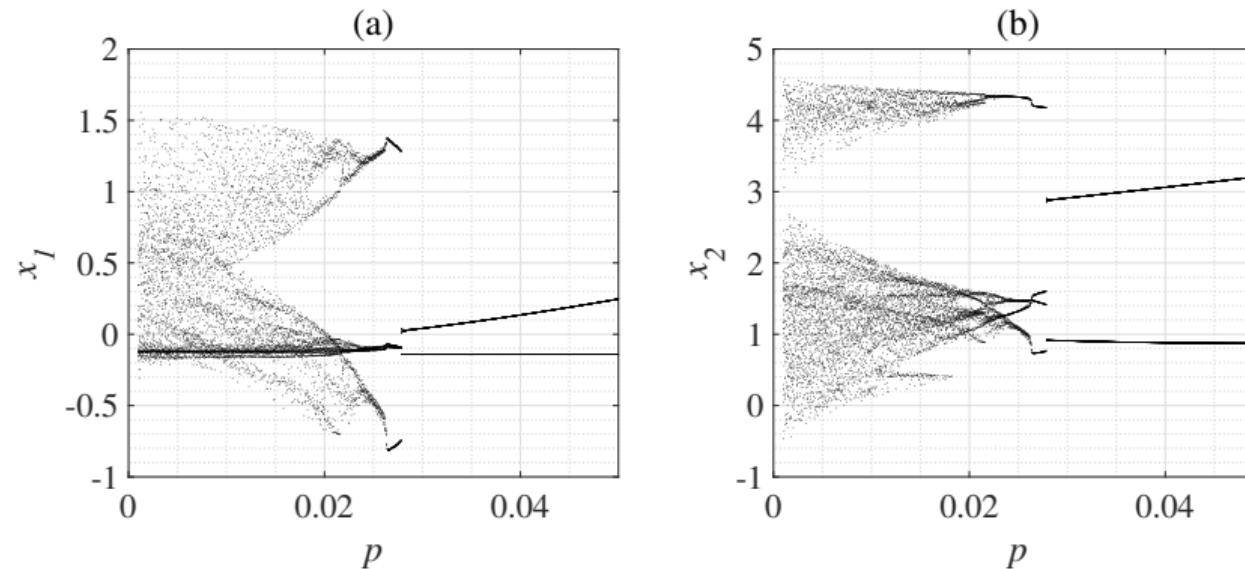


Figura: Diagramas de Bifurcação para $q = (1, 1, 1)$ e $p \in [0.001, 0.05]$. (a) x_1 e (b) x_2

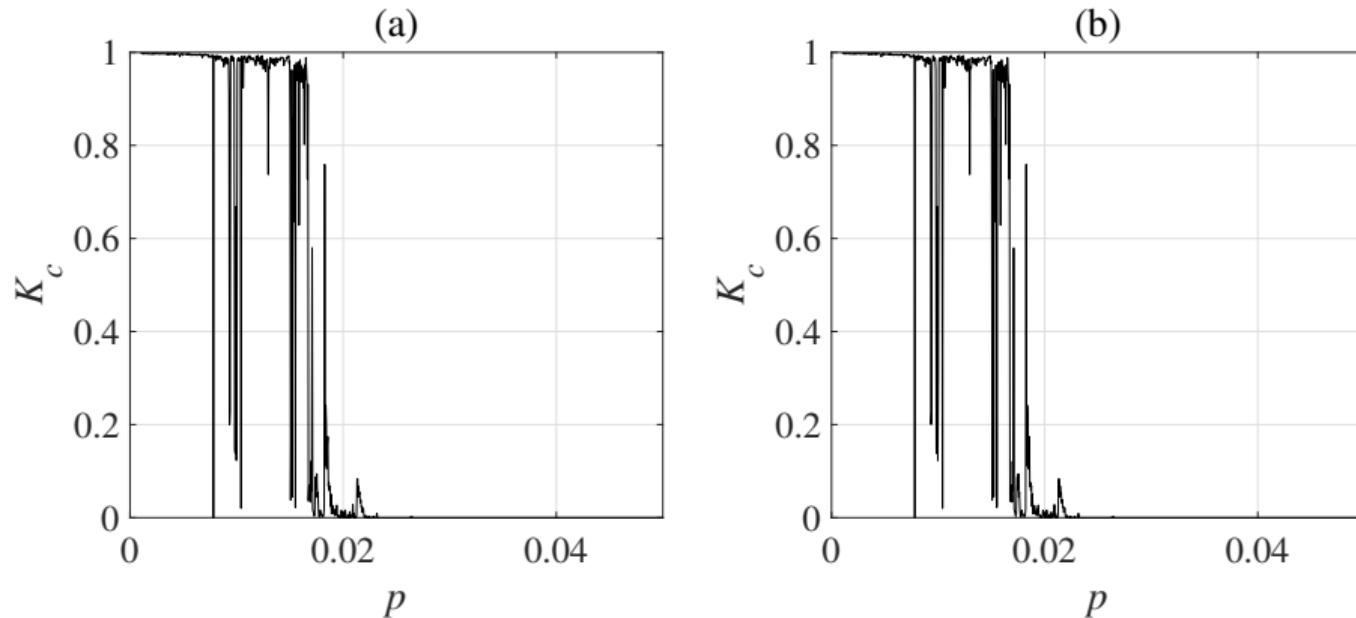


Figura: Teste 0-1.(a) é K_c do deslocamento x_1 e (b) é K_c da \dot{x} .

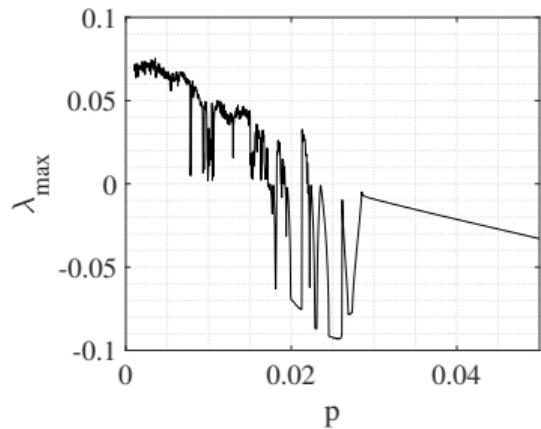


Figura: Expoente de Lyapunov

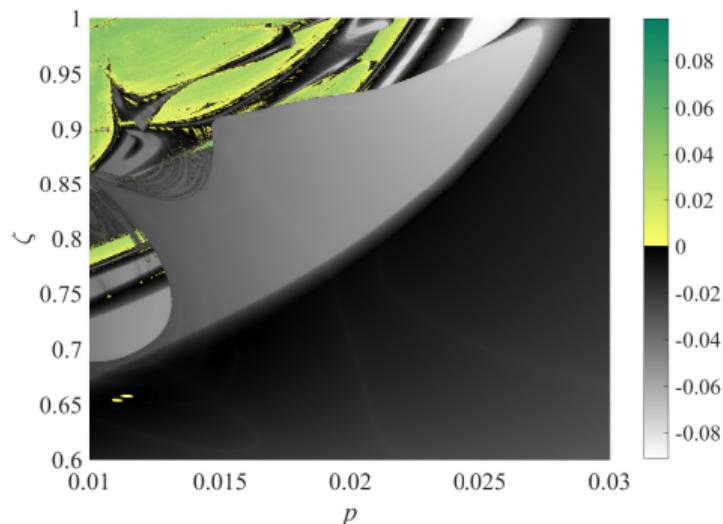


Figura: Expoente de Lyapunov
considerando $\eta \times p$

- ① Ribeiro, M. A., Tusset, A. M., Lenz, W. B., Kirrou, I., Balthazar, J. M. (2021). Numerical analysis of fractional dynamical behavior of Atomic Force Microscopy. *The European Physical Journal Special Topics*, 230(18), 3655-3661.
- ② Ribeiro, M. A., Balthazar, J. M., Lenz, W. B., Rocha, R. T., Tusset, A. M. (2020). Numerical exploratory analysis of dynamics and control of an atomic force microscopy in tapping mode with fractional order. *Shock and Vibration*, 2020.
- ③ Balthazar, J. M., Tusset, A. M., Ribeiro, M. A., et. al, (2021). *Sistemas dinâmicos e mecatrônicos-Volume 1: Teoria e aplicação de controle*. Editora Blucher.