Алгебра и Теория чисел

Конспект по 2 семестру специальности «прикладная информатика»

(лектор Г. В. Матвеев)

Содержание

1 Прямая сумма подпространств **3**

2 Критерий совместности системы линейных уравнений **4**

3 Однородные системы линейных уравнений **5**

4 Линейные преобразования векторных пространств **7**

5 Операции над линейными преобразованиями **8**

6 Ранг и дефект линейного преобразования **9**

7 Матрица линейного преобразования **10**

8 Подобные матрицы **15**

9 Инвариантные подпространства **17**

10 Характеристическая матрица и характеристический многочлен **19**

11 Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования **20**

12 Основные свойства делимости в кольце целых чисел **22**

12.1 НОД 23

12.2 Алгоритм Евклида 23

1 Прямая сумма подпространств

Пусть W_1, W_2 — подпространства.

• $W_1 \oplus W_2$ — *сумма называется* ***прямой****, если* $W_1 \cap W_2 = \vec{0}$.

Справедливо и следующее: $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$ называется прямой, если $W_i \cap \sum\limits_{i \neq j} W_j = \vec{0}$

Теорема.

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

⧫ По теореме о сумме подпространств

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

А так как $W_1 \cap W_2 = \vec{0}$, то $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$. ⊠

Следствие.

$$\dim(W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k) = \dim W_1 + \dim W_2 + \ldots + \dim W_k$$

Теорема. *Если* $W \subset V_n \Rightarrow V_n = W \oplus U$*, где* U *— подпространство.*

⧫

1. $W = \vec{0} \Rightarrow U = V_n$, $V_n = \vec{0} \oplus V_n$
2. $W = V_n \Rightarrow U = \vec{0}$, $V_n = V_n + \vec{0}$
   Оба равенства справедливы, так как $\vec{0} \cap V_n = \vec{0}$
3. Рассмотрим нетривиальный случай:

$$W = L(v_1, v_2, ..., v_r), \quad 0 < r < n$$

$$U = L(v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n)$$

Возьмем произвольный вектор x, не нарушая общности:

$$x = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r) + (\alpha_{r+1} v_{r+1} + ... + \alpha_n v_n) \Rightarrow x = W + U$$

Докажем, что $W \cap U = \vec{0}$.
Пусть $x \in W \cap U$.

$$x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = \alpha_{r+1} v_{r+1} + ... + \alpha_n v_n \Rightarrow \forall \alpha_i = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow W \cap U = \vec{0}$$

⊠

Следствие. *Каждое пространство раскладывается в прямую сумму* n *одномерных подпространств.*

$$V_n = L(e_1) \oplus L(e_2) \oplus ... \oplus L(e_n)$$

$e_1, e_2, ..., e_n$-базис.
То есть любой вектор раскладываетя по базису:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$$

2 Критерий совместности системы линейных уравнений

Теорема. *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффицентов равен рангу расширенной матрицы.*

♦ Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{— матрица коэффицентов } A.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \widetilde{A} = (A|B) \text{ — расширенная матрица.}$$

Система совместна $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$.
$\Rightarrow$ Пусть система совместна с решением $(j_1, j_2, \dots, j_n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdot j_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdot j_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \cdot j_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Это значит, что при добавлении столбца свободных членов базис не изменился, так как новый столбец выражается через старый. Следовательно, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$.

$\Leftarrow$ Базисный минор матрицы A есть базисный минор матрицы $\widetilde{A}$, так как $rankA = rank\widetilde{A}$. Следовательно, столбец свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ выражается через базисные столбцы по принципу (1). Коэффиценты остальных столбцов равны 0. И тогда полученные коэффиценты будут являться решением системы. ⊠

Решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью критерия

1. Нахождение базисного минора матрицы A методом окаймления минора.
2. Проверяем условие $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$ методом окаймления миноров.
3. Отбрасываем все небазисные строки.
4. Базисные неизвестные оставляем слева, а свободные переносим вправо.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nr}x_r = b_n - a_{n,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{nn}x_n \end{cases}$$

Полученную систему рассматриваем как крамеровскую.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

3 Однородные системы линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — столбец нулей.}$$

Тогда систему (1) можно записать в матричном виде как

$$\mathbf{AX{=}0}$$

Теорема. *Решения однородной системы линейных уравнений образуют векторное пространство, размерность которого* $\dim W = n - r$ *(*n *— число неизвестных,* r *— ранг системы,* $r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|0)$.

⧫ Докажем, что это пространство. Вспомним необходимые критерии:

$$W_1, W_2 \in W \Rightarrow W_1 + W_2 \in W$$

$$W_1 \in W \Rightarrow \lambda W_1 \in W$$

Пусть X_1 — конкретный набор, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1\prime \\ x_2\prime \\ \vdots \\ x_n\prime \end{pmatrix}$. Тогда выполняются свойства

$$AX_1 = 0,\ AX_2 = 0 \Rightarrow A(X_1 + X_2) = 0$$

$$AX_1 = 0 \Rightarrow \lambda AX_1 = 0$$

Перенесем свободные неизвестные в системе в левую сторону.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mr}x_r = b_m - a_{m,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{mn}x_n \end{cases} \tag{3}$$

Базисный минор для этой системы

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Где неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ — базисные, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — свободные.
Выражаем базисные неизвестные через свободные по правилу Крамера или Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Найдем базисные решения. Для этого передадим значения

$$\begin{cases} c_1 = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1r}, 1, 0, \ldots, 0) \\ c_2 = (c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2r}, 0, 1, \ldots, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-r} = (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \ldots, c_{n-r,r}, 0, 0, \ldots, 1) \end{cases}$$

Переменные, которым были переданы значения 0 и 1, являются базисными. Векторы являются линейно независимыми благодаря этим переменным.

Докажем, что любое решение выражается через базис.

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n) - \gamma_{r+1}c_1 - \ldots - \gamma_n c_{n-r} = (\gamma_1 c_1, \gamma_2 c_2, \ldots, \gamma_n c_{n-r})$$

Значит все решения выражаются через базис. ⊠

- *Базисные решения ОСЛУ называются* ***фундаментальной системой решений****.*

Решение неоднородной системы через однородную

Будем обозначать $AX = B$ — **неоднородная система**, $AY = 0$ — **однородная система**.

$$\left.\begin{matrix} AX = B \\ AY = 0 \end{matrix}\right\} = A(X + Y) = AX + AY = B + 0 = B$$

1. Разность 2-ух решений неоднородной системы будет решением однородной.

2. Если от решения неоднородной системы отнять фиксированное решение неоднородной системы, то получится решение однородной системы.

$$AX - AX_0 = B - B = 0$$

3. Произвольное решение неоднородной системы можно получить, добавляя к фиксированному решению некоторые решения однородной системы.

4 Линейные преобразования векторных пространств

- *Отображение* $\varphi : V \to V$ *(само в себя) называется* ***линейным****, если*

1. *Образ суммы равен сумме образов:*

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

2. *При умножении вектора на скаляр его образ умножается на этот же скаляр:*

$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$$

Если $\varphi : V \to W$, то φ — линейное отображение.

Свойства линейного преобразования:

1. *Образ линейной комбинации равен такой же линейной комбинации образов (под действием линейного преобразования)*

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = \lambda_1\varphi(a_1) + \lambda_2\varphi(a_2) + \cdots + \lambda_n\varphi(a_n)$$

2. *Преобразование* $\vec{0}$

$$\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\varphi(\vec{0}) = \varphi(\vec{0} \cdot \vec{a}) = 0 \cdot \varphi(\vec{a}) = \vec{0}$$

3. *Вынесение минуса*

$$\varphi(-\vec{a}) = -\varphi(\vec{a})$$

4. *Линейное преобразование переводит линейно зависимые векторы в линейно зависимые с такими же скалярами.*

Теорема. *Любое линейное преобразование вполне определяется своими значениями на базисных векторах и эти значения могут быть любыми.*

♦ Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — системы векторов.
Возьмем функцию φ такую, что:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_1 \\ \varphi(e_2) = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(e_n) = a_n \end{cases}$$

Докажем, что такое пространство существует:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

$$\varphi(x) = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$$

Докажем, что оно линейное:

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n$$

- $\varphi(x+y) = (x_1+y_1)a_1+(x_2+y_2)a_2+\ldots+(x_n+y_n)a_n = x_1a_1+y_1a_1+\ldots+x_na_n+y_na_n = (x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n) + (y_1a_1 + y_2a_2 + \ldots + y_na_n) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
- $\varphi(\lambda x) = \lambda x_1a_1 + \lambda x_2a_2 + \ldots + \lambda x_na_n = \lambda\varphi(x)$.

Докажем, что единственное:
Пусть существует

$$\begin{cases} \psi(e_1) = a_1 \\ \psi(e_2) = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \psi(e_n) = a_n \end{cases}$$

с такими же свойствами. Тогда

$$\psi(x) = \psi(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n) = x_1\psi(e1)+x_2\psi(e_2)+\cdots+x_n\psi(e_n) = x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n = \varphi(x)$$

⊠

5 Операции над линейными преобразованиями

Пусть f, φ — линейные преобразования векторного пространства V.

1. **Сумма линейных преобразований:**

$$f(x) + \varphi(x) = (f + \varphi)(x),\ \forall x \in V.$$

♦ $(f + \varphi)(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) + \varphi(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = f(\lambda_1x_1) + f(\lambda_2x_2) + \varphi(\lambda_1x_1) + \varphi(\lambda_2x_2) = \lambda_1f(x_1) + \lambda_2f(x_2) + \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2) = \lambda_1(f(x_1) + \varphi(x_1)) + \lambda_2(f(x_2) + \varphi(x_2)) = \lambda_1(f + \varphi)(x_1) + \lambda_2(f + \varphi)(x_2)$. ⊠

2. **Произведение на скаляр линейного преобразования:**

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ \forall x \in V.$$

♦ $(\lambda f)(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = (\lambda f)(\lambda_1x_1) + (\lambda f)(\lambda_2x_2) = \lambda f(\lambda_1x_1) + \lambda f(\lambda_2x_2) = \lambda(f(\lambda_1x_1) + \lambda(f(\lambda_2x_2)) = \lambda f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)$. ⊠

3. **Композиция линейных преобразований:**

$$(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)),\ \forall x \in V.$$

♦ $(f\varphi)(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = f(\varphi(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)) = f(\varphi(\lambda_1x_1) + \varphi(\lambda_2x_2)) = f)\lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2)) = \lambda_1f(\varphi(x_1)) + \lambda_2f(\varphi(x_2)) = \lambda_1(f\varphi)(x_1) + \lambda_2(f\varphi)(x_2)$. ⊠

6 Ранг и дефект линейного преобразования

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейное преобразование.

• *Множество* $\ker\varphi = \{x \mid \varphi(x) = \vec{0}\}$ *—* ***ядро*** *линейного преобразования.*
$\dim\ker\varphi$ - **дефект** линейного преобразования (размерность ядра).

• *Множество* $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(v) = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$ *—* ***образ*** *линейного преобразования.*
$\dim\operatorname{Im}\varphi$ - **ранг** линейного преобразования (размерность образа).

Пример 1
Рассмотрим функцию $\sin(x)$. Функция синуса не является линейной, в чем легко убедиться ($\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b$), однако для нее можно определить ядро и образ. Таким образом

$$\ker(\sin) = \pi n$$

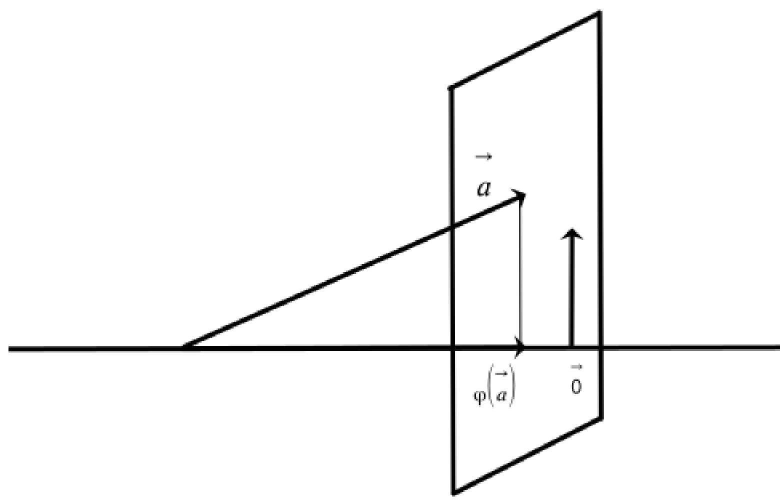
$$\operatorname{Im}(\sin) = [-1, 1]$$

Пример 2
Тождественное преобразование - $\varphi(v) = v \quad \forall v \in V$

$$\ker(\varphi) = \vec{0}$$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = V$$

Пример 3
Возьмем прямую l и плоскость P, где $l \perp P$.



$$\varphi(\vec{a}) = \vec{p}ra$$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = l = V_1$$

$$\ker(\varphi) = P = V_2$$

Теорема. *Ядро и образ линейного преобразования — подпространства исходного векторного пространства.*

♦ Проверим выполнимость свойств:

1. $w_1, w_2 \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(w_1) = \varphi(w_2) = \vec{0}$ $\varphi(w_1 + w_2) = \varphi(w_1) + \varphi(w_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow$ $w_1 + w_2 \in \ker(\varphi)$

2. $\lambda\varphi(w) = \lambda\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\varphi \in \ker(\varphi)$

3. $\varphi(w_1), \varphi(w_2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$
   $\varphi(w_1) + \varphi(w_2) = \varphi(w_1 + w_2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$

4. $\lambda\varphi(w_1) = \varphi(\lambda w_1) \in \operatorname{Im}(\varphi)$

⊠

- *Размерность ядра —* ***дефект****. Будем обозначать* $d = \dim(\ker(\varphi))$.

- *Размерность образа —* ***ранг****. Будем обозначать* $r = \operatorname{rank}\varphi = \dim(\operatorname{Im}(\varphi))$.

Тогда φ — **нулевое преобразование**, если $d = n$, $r = 0$.
φ — **тождественное преобразование**, если $d = 0$, $r = n$.
φ — **проектирование векторов**, если $d = 2$, $r = 1$.

Теорема. *Сумма ранга и дефекта равняется размерности пространства.*

⧫ Рассмотрим образ $\varphi(V)$. Пусть базис $\varphi(V) : \varphi(\varphi(l_1), \varphi(l_2), \ldots, \varphi(l_r))$
Докажем, что

$$V_n = L(l_1, l_2, \ldots, l_r) \oplus \ker(\varphi)$$

$$n = r + d$$

1. $l_1, l_2, \ldots, l_r$ — линейно независимы.
   По свойству линейное преобразование сохраняет зависимость. Если бы $l_1, l_2, \ldots, l_r$ были зависимы, то и $\varphi(l_1), \varphi(l_2), \ldots, \varphi(l_r)$ были бы зависимы, но это базис, значит не зависимы.

2. $\vec{v} \in V_n = \vec{x} \in L(l_1, l_2, \ldots, l_r) + \vec{y} \in ker\varphi$

$$\varphi(V) = \alpha_1\varphi(l_1) + \alpha_2\varphi(l_2) + dots + \alpha_r\varphi(l_r)$$

$$\varphi(v - \alpha_1 l_1 - \ldots - \alpha_r l_r) = \vec{0} \Rightarrow v - \alpha_1 l_1 - \ldots - \alpha_r l_r = y \in \ker\varphi$$

$$v = \alpha_1 l_1 - \ldots - \alpha_r l_r + y = x + y$$

3. $L \cap ker\varphi = \vec{0}$
   Пусть $x \in L \cap \ker\varphi$.
   $x = \alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_r l_r$
   $\varphi(x) = \vec{0}, \quad \varphi(x) = \varphi(\alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_r l_r) = \varphi(\alpha_1 l_1) + \varphi(\alpha_2 l_2) + \ldots + \varphi(\alpha_r l_r) = \alpha_1\varphi(l_1) + \alpha_2\varphi(l_2) + \ldots + \alpha_r\varphi(l_r) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0 \Rightarrow x = \vec{0}$

⊠

7 Матрица линейного преобразования

Пусть V — векторное пространство с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

$$x \in V, \quad x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

• Пусть $\varphi : V \to V$ — **линейное преобразование** векторного пространства V. Подействуем этим преобразованием поочередно на все базисные векторы и полученные векторы выразим через базис:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n \\ \varphi(e_2) = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n \end{cases} \tag{1}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица линейного преобразования φ.

• Столбцами матрицы линейного преобразования являются координаты образов базисных векторов.

Рассмотрим пример:
На вектор $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ подействуем линейным преобразованием.

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + \ldots + x_n\varphi(e_n),$$

где $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ — столбцы матрицы A.
Тогда систему (1) можно переписать следующим образом:
Пусть $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, тогда

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n)A = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))$$

$$\varphi(e) = eA$$

Вектор x запишем как $x = eX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда линейное преобразование вектора x примет вид:

$$\varphi(x) = \varphi(e)X$$

$$\varphi(x) = eAX$$

Это говорит о том, что $X \xrightarrow{\varphi} AX \sim \varphi(X) = AX$.

Теорема.

1. *При сложении линейных преобразований их матрицы в данном базисе складываются.*

2. *При умножении линейных преобразований их матрицы в данном базисе умножаются.*

3. *При умножении линейного преобразования на скаляр его матрица умножается на тот же скаляр.*

♦ Пусть V — векторное пространство с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$.
И пусть f, φ — линейные преобразования.
Подействовав этими линейными преобразованиями на базис V получим следующие системы:

$$\begin{cases} f(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n \\ f(e_2) = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(e_n) = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = \beta_{11}e_1 + \beta_{21}e_2 + \dots + \beta_{n1}e_n \\ \varphi(e_2) = \beta_{12}e_1 + \beta_{22}e_2 + \dots + \beta_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) = \beta_{1n}e_1 + \beta_{2n}e_2 + \dots + \beta_{nn}e_n \end{cases} \tag{2}$$

Запишем матрицы линейных преобразований для f, φ:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ — матрица линейного преобразования } f.$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \text{ — матрица линейного преобразования } \varphi.$$

1. Сложим почленно строки систем (1) и (2).

$$\begin{cases} f(e_1) + \varphi(e_1) = (\alpha_{11} + \beta_{11})e_1 + (\alpha_{21} + \beta_{21})e_2 + \dots + (\alpha_{n1} + \beta_{n1})e_n \\ f(e_2) + \varphi(e_2) = (\alpha_{12} + \beta_{12})e_1 + (\alpha_{22} + \beta_{22})e_2 + \dots + (\alpha_{n2} + \beta_{n2})e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(e_n) + \varphi(e_n) = (\alpha_{1n} + \beta_{1n})e_1 + (\alpha_{2n} + \beta_{2n})e_2 + \dots + (\alpha_{nn} + \beta_{nn})e_n \end{cases}$$

   Отсюда получим матрицу линейного преобразования $f + \varphi$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \dots & \alpha_{2n} + \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} + \beta_{n1} & \alpha_{n2} + \beta_{n2} & \dots & \alpha_{nn} + \beta_{nn} \end{pmatrix} = A + B$$

2. Будем рассматривать умножение линейных преобразований как компзицию отображений $\varphi(f(e))$. Подействуем линейным преобразованием f на базисные векторы:

$$\begin{cases} f(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n \\ f(e_2) = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(e_n) = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n \end{cases} \tag{1}$$

На полученные векторы подействуем линейным преобразованием φ:

$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = \beta_{11}f(e_1) + \beta_{21}f(e_2) + \dots + \beta_{n1}f(e_n) \\ \varphi(f(e_2)) = \beta_{12}f(e_2) + \beta_{22}f(e_2) + \dots + \beta_{n2}f(e_n) \\ \varphi(f(e_n)) = \beta_{1n}f(e_1) + \beta_{2n}f(e_2) + \dots + \beta_{nn}f(e_n) \end{cases}$$

Подставим в полученную систему уравнения системы (1):

$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = \beta_{11}(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_{21}(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n) + \dots \\ \varphi(f(e_2)) = \beta_{12}(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_{22}(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n) + \dots \\ \varphi(f(e_n)) = \beta_{1n}(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_{2n}(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n) + \dots \end{cases}$$

Раскроем скобки:

$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = \beta_{11}\alpha_{11}e_1 + \beta_{11}\alpha_{21}e_2 + \dots + \beta_{11}\alpha_{n1}e_n + \beta_{21}\alpha_{12}e_1 + \beta_{21}\alpha_{22}e_2 + \dots + \beta_{21}\alpha_{n2}e_n + \dots \\ \varphi(f(e_2)) = \beta_{12}\alpha_{11}e_1 + \beta_{12}\alpha_{21}e_2 + \dots + \beta_{12}\alpha_{n1}e_n + \beta_{22}\alpha_{12}e_1 + \beta_{22}\alpha_{22}e_2 + \dots + \beta_{22}\alpha_{n2}e_n + \dots \\ \varphi(f(e_n)) = \beta_{1n}\alpha_{11}e_1 + \beta_{1n}\alpha_{21}e_2 + \dots + \beta_{1n}\alpha_{n1}e_n + \beta_{2n}\alpha_{12}e_1 + \beta_{2n}\alpha_{22}e_2 + \dots + \beta_{2n}\alpha_{n2}e_n + \dots \end{cases}$$

Сгрупируем подобные слагаемые:

$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = (\beta_{11}\alpha_{11} + \beta_{21}\alpha_{12} + \dots)e_1 + (\beta_{11}\alpha_{21} + \beta_{21}\alpha_{22} + \dots)e_2 + \dots \\ \varphi(f(e_2)) = (\beta_{12}\alpha_{11} + \beta_{22}\alpha_{12} + \dots)e_1 + (\beta_{12}\alpha_{21} + \beta_{22}\alpha_{22} + \dots)e_2 + \dots \\ \varphi(f(e_n)) = (\beta_{1n}\alpha_{11} + \beta_{2n}\alpha_{12} + \dots)e_1 + (\beta_{1n}\alpha_{21} + \beta_{2n}\alpha_{22} + \dots)e_2 + \dots \end{cases}$$

Запишем координаты векторов в матрицу линейного преобразования:

$$\begin{pmatrix} \beta_{11}\alpha_{11} + \beta_{21}\alpha_{12} + \dots & \beta_{12}\alpha_{11} + \beta_{22}\alpha_{12} + \dots & \dots & \beta_{1n}\alpha_{11} + \beta_{2n}\alpha_{12} + \dots \\ \beta_{11}\alpha_{21} + \beta_{21}\alpha_{22} + \dots & \beta_{12}\alpha_{21} + \beta_{22}\alpha_{22} + \dots & \dots & \beta_{2n}\alpha_{21} + \beta_{2n}\alpha_{22} + \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{11}\alpha_{n1} + \beta_{21}\alpha_{n2} + \dots & \beta_{12}\alpha_{n1} + \beta_{22}\alpha_{n2} + \dots & \dots & \beta_{1n}\alpha_{n1} + \beta_{2n}\alpha_{n2} + \dots \end{pmatrix} = A \cdot B$$

3. Умножим каждую строку системы (1) на произвольный скаляр γ:

$$\begin{cases} \gamma f(e_1) = \gamma\alpha_{11}e_1 + \gamma\alpha_{21}e_2 + \dots + \gamma\alpha_{n1}e_n \\ \gamma f(e_2) = \gamma\alpha_{12}e_1 + \gamma\alpha_{22}e_2 + \dots + \gamma\alpha_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma f(e_n) = \gamma\alpha_{1n}e_1 + \gamma\alpha_{2n}e_2 + \dots + \gamma\alpha_{nn}e_n \end{cases}$$

Получаем матрицу линейного преобразования γf:

$$\begin{pmatrix} \gamma\alpha_{11} & \gamma\alpha_{12} & \dots & \gamma\alpha_{1n} \\ \gamma\alpha_{21} & \gamma\alpha_{22} & \dots & \gamma\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma\alpha_{n1} & \gamma\alpha_{n2} & \dots & \gamma\alpha_{nn} \end{pmatrix} = \gamma A$$

⊠

Теорема. *Ранг линейного преобразования равен рангу его матрицы.*

♦

$$\operatorname{rank}\varphi = \dim\varphi(V)$$

Так как образ есть *линейная оболочка* $L(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))$, то

$$\dim \varphi(V) = \dim L(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)) = \operatorname{rank}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)) = \operatorname{rank} A$$

$$\operatorname{rank} \varphi = \operatorname{rank} A$$

$\boxtimes$

Пример 1
$\varphi(x) = \vec{0}, \quad \forall x$ — нулевое преобразование.

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_n \\ \varphi(e_2) = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(e_n) = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_n \end{cases}$$

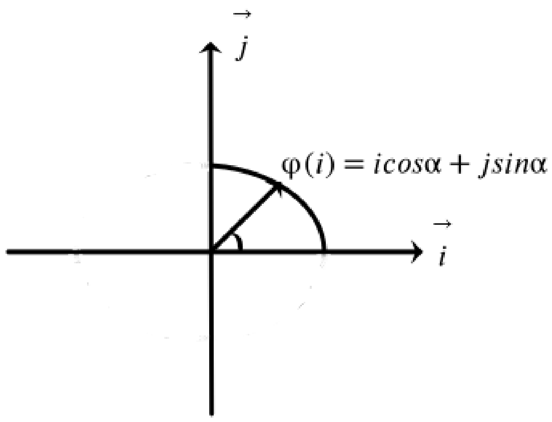
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \text{ — матрица нулевого преобразования.}$$

Пример 2
$\varphi(x) = x, \quad \forall x$ — тождественное преобразование.

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 1e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_n \\ \varphi(e_2) = 0e_1 + 1e_2 + \cdots + 0e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(e_n) = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 1e_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица тождественного преобразования.}$$

Пример 3



$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ — матрица угла поворота системы координат на угол } \alpha.$$

• *Биективное (взаимооднозначное) линейное преобразование называется* ***автоморфизмом.***

Если $\varphi : V \to V$ — линейное преобразование, то φ — автоморфизм $\Leftrightarrow$ φ — биекция.

Теорема. *Линейное преобразование φ — автоморфизм $\Leftrightarrow$ его матрица невырожденная.*

♦

$$\varphi(X) = AX$$

$\Rightarrow$ Предположим, что $|A| = 0$ (т.е. матрица вырожденная).
Тогда $AX = 0 \Rightarrow$ система уравнений линейного преобразования имеет несколько решений и ноль имеет несколько прообразов, чего быть не может.

$\Leftarrow$ Имеем, что $|A| \neq 0$ (т.е. матрица невырожденная).
Значит для $AX = B$ имеется только одно решение по правилу Крамера $\Rightarrow$ φ — биекция.
⊠

8 Подобные матрицы

Для определения подобия матриц рассмотрим задачу.

Задача
Пусть u, v — некоторые базисы, φ — линейное преобразование. Применим его к обоим базисам:

$$\varphi(u) = \varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)A$$

Запишем полученные преобразования в матричном виде:

$$\varphi(u) = uA$$

$$\varphi(v) = vB$$

Пусть S — матрица перехода от базиса u к базису v ($|S| \neq 0$ — матрица невырожденная), то есть $v = uS$.
Найти: связь между матрицами A и B.
Решение:
Подействуем линейным преобразованием φ на $v = uS$:

$$\varphi(v) = \varphi(u)S$$

Подставим в это равенство значение $\varphi(u)$, полученное выше:

$$\varphi(v) = uAS \tag{1}$$

Так как $\varphi(v) = vB$ и $v = uS$, то, подставив значение v в первое уравнение, получим:

$$\varphi(v) = uSB \tag{2}$$

Приравняем правые части уравнений (1) и (2):

$$uAS = uSB$$

$$u(SB - AS) = (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{0})$$

Так как векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$ линейно независимы как базис и их линейные комбинации равны $\vec{0}$, то элементы матрицы $SB - AS$ равны 0 $\Rightarrow SB = AS \Rightarrow B = S^{-1}AS$.

• Матрицы A и B, связанные соотношением $B = S^{-1}AS$, называются **подобными**.

• Матрицы одного и того же преобразования в разных базисах **подобны**.

• Если для матриц A и B справедливо равенство $B = S^{-1}AS$, то можно найти линейное преобразование и базисы, которые будут иметь эти матрицы.

Теорема. *Две квадратных матрицы одного и того же порядка являются матрицами одного и того же преобразования $\Leftrightarrow$ они подобны.*

Свойства подобных матриц

1. *Всякая матрица подобна самой себе:*
$$A = E^{-1}AE$$

2. *Подобие матриц транзитивно:*
Возьмем матрицы A, B, C, связанные соотношением:
$$C = T^{-1}BT$$
$$B = S^{-1}AS$$
Подставим значение B:
$$C = T^{-1}S^{-1}AST$$
Используя свойство обратных матриц
$$T^{-1}S^{-1} = (ST)^{-1}$$
и подставя полученное значение в предыдущее равенство, получаем:
$$C = (ST)^{-1}A(ST)$$

3. *Подобие матриц симметрично:*
$$A = T^{-1}BT \Leftrightarrow B = S^{-1}AS$$
Рассмотрим равенство $B = S^{-1}AS$. Домножим левую и правую часть на S^{-1} и S:
$$A = SBS^{-1}$$
Пусть $T = S^{-1} \Rightarrow T^{-1} = S$. Подставим это в равенство и получим:
$$A = T^{-1}BT$$
То есть если матрица B подобна матрице A, то мы можем найти такую матрицу T, чтобы матрица A была подобна матрице B.

4. *Определители подобных матриц равны:*
$$|B| = |S^{-1}AS| = |S^{-1}| \cdot |A| \cdot |S| = |A| \cdot |S| \cdot |S^{-1}| = |A| \cdot |SS^{-1}| = |A| \cdot |E| = |A| \cdot 1 = |A|$$

5. *Ранги подобных матриц равны:*
$$B = S^{-1}AS \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} f$$
Это объясняется тем, что ранг преобразования равен рангу матрицы:
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} f, \quad \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} f \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$$

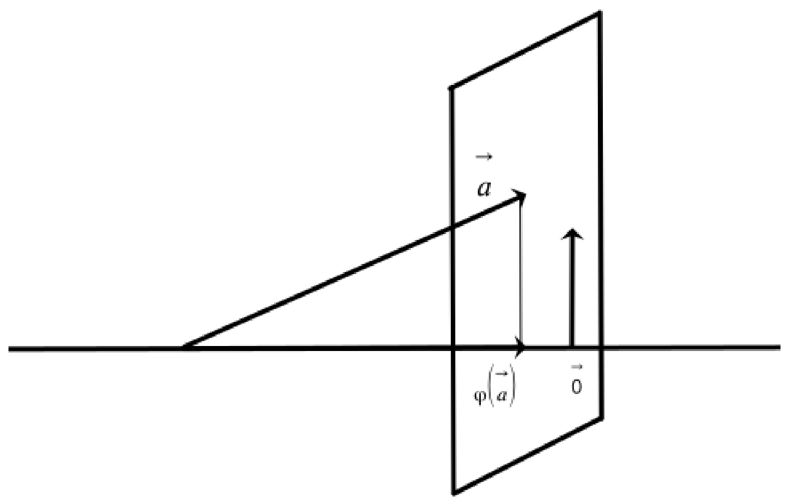
9 Инвариантные подпространства

Пусть $\varphi : V \to V$ — преобразование векторного пространства, W – подпространство.
W называется **инвариантным**, если $\varphi(W) \subset W$.

Примеры

1. $\varphi(V) = V,\ \varphi = e$ — все подпространства инвариантны.
2. $W = \vec{0},\ \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ — нулевое подпространство всегда инвариантно.
3. $W = V$ — само пространство инвариантно.
4. $\varphi(W) = 0 \in W,\ \varphi = 0$ — нулевое преобразование.
   Все подпространства инвариантны.
5. $\varphi = \lambda e$ — скалярное преобразование.
   Все подпространства инвариантны.
6. Проектирование в 3-х мерном пространстве на прямую:

$$\varphi = \text{пр}_l\, P$$



   Инвариантные подпространства:

   - Все векторы прямой;
   - Векторы, перпендикулярные плоскости.

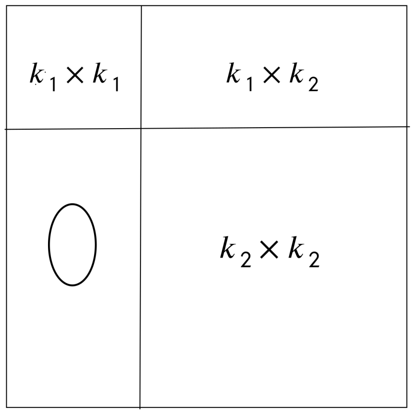
Теорема. *Сумма и пересечение инвариантных пространств инвариантны.*

♦ Пусть $x = W_1 \cap W_2$.
Так как W_1 — инвариантно, то $\varphi(x) \in W_1$, аналогично для W_2.
Так как $\varphi(x) \in W_1$ и $\varphi(x) \in W_2$, то $\varphi(x) \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2$ — инвариантно.

Пусть $x \in W_1 + W_2 \Rightarrow x \in W_1$ или $x \in W_2$.
Так как W_1 и W_2 — инвариантны, то $\varphi(x) \in W_1$ или $\varphi(x) \in W_2 \Rightarrow \varphi(x) \in W_1 + W_2 \Rightarrow$

$W_1 + W_2$ — инвариантно. $\boxtimes$

• Матрица называется **полураспавшейся**, если она имеет вид



где $k_1 + k_2 = n,\ k_1, k_2 > 0$.

Теорема. *У данного преобразования имеется нетривиальное инвариантное подпространство $\Leftrightarrow$ его матрица в некотором базисе **полураспавшаяся**.*

♦ Пусть линейное преобразование φ имеет имеет инвариантное подпространство:

$$\varphi(W) \subset W$$

$\Rightarrow$ Возьмем базис подпространства $w_1, w_2, \dots, w_{k1}$ и дополним его до базиса пространства:

$$w_1, w_2, \dots, w_{k1}, v_1, v_2, \dots, v_{k2}$$

Посчитаем матрицу линейного преобразования в новом базисе:

$$\varphi(w_1) \in W,\ \varphi(w_1) = \alpha_{11}w_1 + \alpha_{21}w_2 + \dots + \alpha_{k+1\ 1}w_{k1} + 0v_1 + \dots + 0v_{k2} \tag{1}$$

$\Leftarrow$ Если для линейного преобразования существует полураспавшаяся матрица, то выполнется разложение (1). А значит

$$\begin{cases} \varphi(w_1) \in L(w_1, w_2, \dots, w_{k1}) \\ \varphi(w_2) \in L(w_1, w_2, \dots, w_{k1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(w_{k1}) \in L(w_1, w_2, \dots, w_{k1}) \end{cases}$$

Отсюда следует, что L — инвариантно.

Рассмотрим произвольный вектор w:

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_{k1} w_{k1}$$

$$\varphi(w) = \alpha_1\varphi(w_1) + \alpha_2\varphi(w_2) + \dots + \alpha_{k1}\varphi(w_{k1})$$

Так как $\varphi(w_i) \in L$ то и $\varphi(w) \in L$. $\boxtimes$

Замечание. Инвариантность подпространства достаточно проверять только на базисных векторах.

10 Характеристическая матрица и характеристический многочлен

Пусть A — квадратная матрица.
• Характеристическая матрица матрицы A имеет вид:

$$xE - A$$

• Характеристическим многочленом называется определитель характеристической матрицы:

$$|xE - A|$$

Примеры.

1. $A = E$ — единичная матрица.

$$(xE - E) = \begin{pmatrix} x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x-1 \end{pmatrix}, \quad |xE - E| = (x-1)^n$$

2. $A = 0$ — нулевая матрица.

$$xE - 0 = xE = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}, \quad |xE - 0| = x^n$$

• **Следом** линейного преобразования называется выражение

$$\operatorname{tr} \varphi = \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица линейного преобразования φ.

Свойства характеристических матрицы и многочлена:

1. • *Характеристическая матрица всегда невырожденная.*
   • *Характеристический многочлен всегда* $\neq 0$.
   • *Степень многочлена равна* n *— порядок матрицы.*

2. $f(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n2} & \dots & x-a_{nn} \end{vmatrix} = x^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})x^{n-1} + \dots$

3. $f(0) = (-1)^n \cdot |A|$ — свободный член.

4. *Матрица будет вырожденной* $\Leftrightarrow$ 0 *является корнем ее многочлена.*
   ♦ $f(0) = |-A| = 0$ ⊠

5. *Характеристические многочлены подобных матриц равны.*

   ♦ Пусть $B = S^{-1}AS$
   $|xE-B| = |xE-S^{-1}AS| = |S^{-1}xES-S^{-1}AS| = |S^{-1}(xE-A)S| = |S^{-1}|\cdot|xE-A|\cdot|S| = |S^{-1}|\cdot|S|\cdot|xE-A| = |S\cdot S^{-1}|\cdot|xE-A| = |E|\cdot|xE-A| = |xE-A|$ ⊠

6. *Характеристический многочлен полураспавшейся (распавшейся) матрицы равен произведению характеристических многочленов ее диагональных блоков.*

$$\begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} xE_{n1} - A_1 & -C \\ 0 & xE_{n2} - A_2 \end{vmatrix} = |xE_{n1} - A_1| \cdot |xE_{n2} - A_2|$$

11 Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

Пусть φ — линейное преобразование пространства V_n.
• $\vec{x} \neq 0$ — **собственный вектор** линейного преобразования φ, отвечающий собственному значению λ:

$$\varphi(x) = \lambda x$$

Примеры

1. $\varphi(v) = v$ — тождественное преобразование.
   Все векторы собственные, отвечают значению 1.

$$\varphi(v) = 1 \cdot v$$

2. $\varphi(v) = \vec{0}$ — нулевое преобразование.
   Все векторы собственные, отвечают значению 0.

$$\varphi(v) = \vec{0} = 0 \cdot v$$

3. Проектирование
   Векторы прямой: $\varphi(\vec{a}) = 1 \cdot \vec{a}$ — отвечают значению 1.
   Векторы перпендикулярной плоскости: $\varphi(\vec{a}) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$ — отвечают значению 0.

$$X \xrightarrow{\varphi} AX$$

$$AX = \lambda X$$

$$AX = \lambda EA$$

$$(A - \lambda E)X = 0 \sim (A - \lambda E|0)$$

То есть решения ОСЛУ образуют векторное пространство.

$$\varphi(x) = \lambda x \sim (\varphi - \lambda e)x = \vec{0}$$

Образует инвариантное подпространство.

Теорема. *Собственные значения линейного преобразования — это корни характеристического многочлена (характеристические числа, принадлежащие основному полю).*

♦ По определению $\varphi(x) = \lambda x$. Запишем условие существования собственного вектора в виде:

$$(\varphi - \lambda E)x = \vec{0}$$

Так как $\vec{x} \neq 0$ по определению, то преобразование $\varphi - \lambda e$ должно быть вырожденным:

$$\det(\varphi - \lambda e) = 0 \tag{1}$$

Пусть в каком-нибудь базисе преобразование φ имеет матрицу A, тогда преобразование $\varphi - \lambda e$ будет иметь матрицу $A - \lambda E$.
Тогда условие (1) можно записать в следующем виде:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

А $\det(A - \lambda E)$ — характеристический многочлен, корнями которого являются собственные значения λ. ⊠ Собственные векторы, отвечающие найденным собственным значениям, и нулевой вектор образуют инвариантное подпространство $\ker(\varphi - \lambda e)$, и их можно найти, решая ОСЛУ $(A - \lambda E|0)$ и отбрасывая 0.

Теорема. *Собственные векторы, отвечающие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.*

♦ Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k,\ \lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j$ — некоторые собственные значения.
$\varphi(x_i) = \lambda_i x_i,\ i = 1, 2, \dots, k$ — собственные векторы. Докажем теорему методом от противного.
Предположим, что векторы линейно зависимы. Следовательно, один вектор линейно выражается через все остальные, которые будут линейно независимы:

$$x_k = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1} \tag{2}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ — линейно независимы. Подействуем на обе части уравнения (2) линейным преобразованием φ:

$$\lambda_k x_k = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} x_{k-1} \tag{3}$$

Умножим обе части уравнения (2) на λ_k:

$$\lambda_k x_k = \alpha_1 \lambda_k x_1 + \alpha_2 \lambda_k x_2 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_k x_{k-1} \tag{4}$$

Вычтем из уравнения (3) уравнение (4):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)x_2 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = \vec{0}$$

Так как векторы x_i линейно независимы, то $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0,\ i = 1, 2, \dots, k-1$.
Так как вектор $x_k \neq 0$, то $\alpha_i \neq 0$ одновременно. Положим, что $\alpha_1 \neq 0$.
Так как $\alpha_1 \neq 0,\ \lambda_k \neq \lambda_i \Rightarrow \alpha_i(\lambda_1 - \lambda_k) \neq 0$.
Полученное противоречие доказывает наше утверждение. ⊠

Теорема. *Если у преобразования φ пространства V_n имеется n попарно различных собственных значений, то для него существует базис, состоящий из собственных векторов, отвечающих этим значениям, и его матрица в этом базисе будет диагональной.*

♦ Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,\ \lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j$ — собственные значения.
$v_1, v_2, \dots, v_n$ — векторы, отвечающие данным значениям.
Разложим эти векторы:

$$\begin{cases} \varphi(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ \varphi(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n \end{cases}$$

Тогда матрица преобразования имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

⊠

Следствие. *Если у квадратной матрицы имеется n попарно различных характеристических чисел, то эта матрица подобна диагональной.*

12 Основные свойства делимости в кольце целых чисел

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

• Говорят, что a делит b ($a|b$), когда $a \neq 0$ и $\exists q:\ b = aq$.

Свойства делимости:

1. $b|a,\ b|c \Rightarrow b|a \pm c$

   ♦ $a = bq_1$
   $c = bq_2$
   $a \pm c = b(q_1 \pm q_2)$ ⊠

2. $b|a \Rightarrow b|ac$

   ♦ $a = bq_1$
   $ac = bq_1 c$ ⊠

3. $a|b,\ b|a \Leftrightarrow a = \pm b$

   ♦ $b = aq_1$
   $a = bq_2$
   $b = bq_2 q_1$
   $1 = q_1 q_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q_2 = q_1 = -1 \\ q_2 = q_1 = 1 \end{array}\right.$ ⊠

4. $b|a \Rightarrow (a, b) = b$

Теорема. *Всякое число a представимо единственным образом через положительное b в виде*

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

⧫ Возьмем наибольшее q с условием, что $bq \leq a$.
Тогда $r = a - bq \Rightarrow r$ удовлетворяет условию $0 \leq r < b$.
Покажем однозначность:

$$a = bq + r$$
$$a = bq_1 + r_1$$

Вычтем из одного равенства другое:

$$b(q - q_1) = r_1 - r$$

Очевидно, что $r_1 - r < b$. Пусть тогда $r_1 > r$. Тогда $q - q_1 > 0 \Rightarrow$ равенство невозможно $\Rightarrow r = r_1 \Rightarrow r_1 - r = 0$.
А так как $b \neq 0$, то $q - q_1 = 0 \Rightarrow q = q_1$. ⊠

12.1 НОД

• **НОД** — наибольший общий делитель 2 чисел, обозначается (a, b).

Свойства НОДа:

1. Для $(0, 0)$ НОД не существует.
2. $(a, 0) = a,\ a \neq 0$.
3. Знак не влияет на делимость.
4. $a = bq + r \Rightarrow (a, b) = (b, r)$
   ⧫ Если $d|a$ и $d|b \Rightarrow d|r$.
   Если $d|r$ и $d|b \Rightarrow d|a$. ⊠

12.2 Алгоритм Евклида

1. *Большее из чисел поделить с остатком на меньшее:*
   $$a = bq_1 + r_1$$
2. *Делитель делим с остатком на остаток r_1:*
   $$b = r_1q_2 + r_2$$
3. *Продолжаем до тех пор, пока не получим первый нулевой остаток. Последний, отличный от 0 остаток, будет НОДом.*
   $$r_1 = r_2q_3 + r_3$$
   $$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$$
   $$r_n = r_{n+1}q_{n+2}$$
   $$(a, b) = r_{n+1}$$

   ⧫
   $$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = r_{n+1}$$
   ⊠