Алгебра и Теория чисел

Конспект по 1 семестру специальности «прикладная информатика»

(лектор Г. В. Матвеев)

Содержание

1 Операции над комплексными числами

Множество комплексных чисел имеет вид:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

где число i — мнимая единица.

По определению $i^2 = -1$

- ***Общим видом*** *комлексного числа называется представление*

$$z = a + bi$$

- *Число* $a = \operatorname{Re} z$ *—* ***вещественная*** *часть числа* z.
- *Число* $b = \operatorname{Im} z$ *—* ***мнимая*** *часть числа* z.

Операции над комплексными числами:

1. *Сложение и вычитание комплексных чисел*

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d) \cdot i.$$

2. *Сравнение комплексных чисел*

$$a + bi = c + di \Longleftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

3. *Нулевое комплексное число*

$$a + bi = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

4. *Умножение комплексных чисел*

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i.$$

5. *Деление комплексных чисел*

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i.$$

Свойства сложения и умножения:

1. *Коммутативность*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

Коммутативность комплексных чисел вытекает из коммутативности вещественных.

2. *Ассоциативность*

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3;$$
$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_1) \cdot z_3.$$

3. *Существование противоположного числа*

$$\forall z \ \exists (-z), \ z + (-z) = 0.$$

4. *Дистрибутивность*

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

1.1 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

- *Число* $\overline{z} = a - bi$ *называется* ***сопряженным числом*** *для числа* $z = a + bi$.

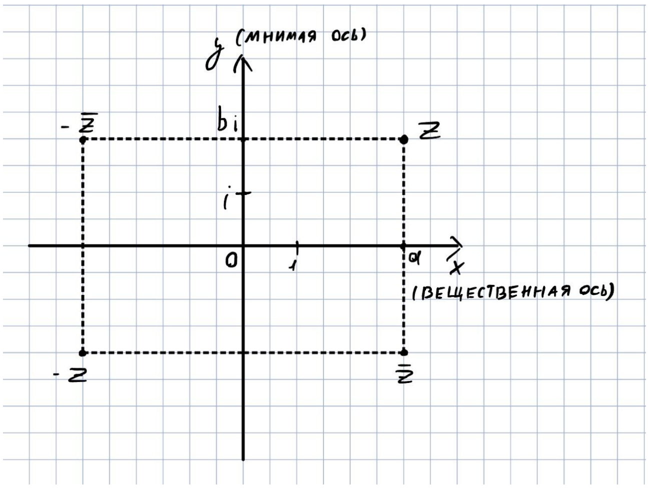

Рис. 1: Комплексные числа на плоскости

Свойства сопряженных чисел:

1. $\overline{\overline{z}} = z$.

   ♦ $\overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a + bi = z.$ ⊠

2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

   ♦ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{a + bi + c + di} = \overline{(a + c) + (b + d) \cdot i} = (a + c) - (b + d) \cdot i;$
   $\overline{z_1} + \overline{z_2} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d) \cdot i = \overline{z_1 + z_2}.$ ⊠

3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

   ♦ $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc) \cdot i;$
   $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i;$
   $\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc) \cdot i = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$ ⊠

4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

   ♦ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + bi}{c + di} \cdot \dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2};$

   $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{ad - bc}{c^2 + d^2} \cdot i;$

   $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \dfrac{a - bi}{c - di} \cdot \dfrac{c + di}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{ad - bc}{c^2 + d^2} \cdot i = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}.$ ⊠

5. $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$.

- ***Модулем*** *комплексного числа называется число*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \quad |z| \in \mathbb{R}.$$

Свойства модуля:

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

2. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

3. $z = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0$.