Дискретная математика и математическая логика

Конспект по 1 семестру специальностей «экономическая кибернетика» и «компьютерная безопасность»

(лектор В. И. Бенедиктович)

Оглавление

Глава 1

Высказывания

Высказывания, операции над нами. Формулы логики высказываний (ФЛВ). Равносильные формулы, тавтологии, противоречия. Теорема о подстановке формулы вместо переменной. Теорема о замене подформулы равносильной ей формулой

Высказывания

• **Высказывание** - повествовательное предложение, относительно которого можно сделать вывод, что его содержание истинно или ложно (далее **И** - истинно, **Л** - ложно).

Свойства высказываний:

1. **Закон исключения третьего**
   Всякое высказывание является либо истинным, либо ложным.

2. **Закон непротиворечивости**
   Никакое высказывание не может быть одновременно быть истинным и ложным.

Пример

1. Сейчас дождь (Л);

2. $2 + 3 = 5$ (И);

3. $2 + 3 > 5$ (Л);

4. Закройте дверь (не высказывание);

5. Идёт ли дождь? (не высказывание);

Обозначаем высказывания большими латинскими буквами ($A, B, \dots, Z$).

Логические операции

Из имеющихся высказываний можно получить другие спомощью логических операций
Логические операции:

1. **Отрицание**
   A - некоторое высказывание
   Высказывание типа: «неверно, что A» ($\bar{A}/\ \neg A$)

   Таблица истинности:

A	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

2. **Конъюнкция**
   Пусть A и B - некоторые высказывания
   Конъюнкцией высказываний A и B называется высказывание, которое обозначается $A \wedge B$ или $A \cdot B$ и которое принимает значение истинности тогда и только тогда, когда оба значения (A и B) принимают значение «истинно».

   Таблица истинности:

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

3. **Дизъюнкция**
   Пусть A и B - некоторые высказывания
   Дизъюнкцией этих высказываний, которое обозначается $A \vee B$, называется высказывание, которое принимает значение «истинно» тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний истинно

   Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

4. **Импликация**
   Пусть A и B - некоторые высказывания
   Импликация - высказывание, обозначается $A \Rightarrow B$, типа «если A, то B», которое принимает значение «ложь», когда высказывание A - истинно, а B - ложно.

   Также A - посылка, B - заключение.

   Если импликация является истинной, то B - необходимое условие для A, либо A является достаточным условием для B , либо A влечёт B. Если импликация является ложной, то из A не следует B ($A \not\Rightarrow B$)

   Таблица истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Свойства импликации:

(a) транзитивность:
$D = ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ - принимает значение **И** при любых наборах A, B, C

5. Эквивалентность Высказывание A называют эквивалентным высказыванию B ,если выполняется A необходимое и достаточное условие для B.

Таблица истинности:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Соглашение о приоритетах логических операций

1) Отприцание приоритетнее всех остальных операций
2) Конъюнкция приоритетнее 3)
3) Дизъюнкция приоритетнее 4-5)
4) Импликация приоритетнее 5)
5) Эквивалентность

Понятие пропозициональной формулы

- выражение, построенное из пропозициональных букв $A, B, C, \ldots$ по следующим правилам:

1. Все буквы пропозициональны и является пропозициональной формулой
2. Если A, B, C – пропозициональные формулы, то и выражения с логическими операциями тоже являются пропозициональными формулами
3. Других формул нет

обозначение пропозициональной формулы:
Пропозициональная формула определяется на множестве всех возможных наборов значений переменных функции принимающие аргументы И Л
Такая функция может быть задана с помощью конечной таблицы истинности, содержащей 2^n строк. Формулы, выражающие одну и ту же формулу, принимают дно и то же значение, называют эквивалентными (одна и та же таблица истинности).

Примеры эквивалентных формул:

1. $\neg(\neg X) = X$ (закон двойного отрицания);
2. $X \vee Y = Y \vee X$ (коммутативность дизъюнкции);
3. $X \wedge Y = Y \wedge X$ (коммутативность конъюнкции);
4. $(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$ (ассоциативность дизъюнкции);
5. $(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z)$ (ассоциативность конъюнкции);
6. $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);

7. $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);

8. $X \vee X = X$ (закон идемпотентности дизъюнкции);

9. $X \wedge X = X$ (законы идемпотентности конъюнкции);

10. $X \vee \text{Л} = ;$

11. $X \wedge \text{Л} = \text{Л}$;

12. $\text{И} \wedge X = X;$

13. $X \vee \top = \top;$

14. $X \vee (\neg X) = \top;$

15. $X(\neg X) = \text{Л};$

16. $\neg(X \wedge Y) = (\neg X) \vee (\neg Y);$

17. $\neg(X \vee Y) = (\neg X)(\neg Y)$ (законы двойственности, или де Моргана);

18. $(X \Rightarrow Y) = (\neg X) \vee Y;$

19. $(X \Leftrightarrow Y) = (x \Rightarrow Y)(Y \Rightarrow X) = (\neg X \vee Y) \wedge (X \Rightarrow Y);$

20. $(X \Rightarrow Y) = (\neg Y \Rightarrow \neg X)$ (закон обращения, или контрапозиции).

21. $X \vee (X \wedge Y) = X$ (закон поглощения относительно дизъюнкции);

22. $X(X \vee Y) = X$ (закон поглощения относительно конъюнкции);

23. $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z) = (X \wedge Y) \Rightarrow Z$ (закон объединения посылок);

24. $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z) = Y \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$ (закон перестановки посылок);

25. $(A \wedge X) \vee (A \wedge \neg X) =$ (элементарное склеивание);

26. $(A \wedge X) \vee (B \wedge \neg X) = (A \wedge X) \vee (B \wedge (\neg X)) \vee (A \wedge B)$ (обобщенное склеивание).