Mathematics (2) Assignment

25-2 기초 데이터 분석 및 실습

Problem 1.

벡터 $x = (2, 1, 0), y = (1, -2, 1)$에 대해

1. $< x, y >$를 계산하시오. <x,y>= 2+(−2)+0 = 0
2. 두 벡터는 직교하는가? 내적이 0이므로 직교한다
3. 두 벡터 사이 각도를 w라고 할 때, $\cos w$를 구하시오. cos w = 0

Problem 2.

벡터 집합 {(1, 1, 0), (1, 0, 1)}에 대해 Gram–Schmidt 과정을 적용하여 **직교정규 기저**를 구하시오.

$u_1 = v_1 = (1,1,0)$ $|u_1| = \sqrt{2}$ $e_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$proj_{u_1}(v_2) = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \frac{1}{2}(1,1,0)$ $u_2 = v_2 - proj = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

$|u_2| = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$

Problem 3.

데이터 벡터 $y = (1,2,2)^T$와 기저 u1 = $(1,0,0)^T$, u2 = $(0,1,1)^T$가 Span하는 부분공간 U가 있다.

1. y를 U 위로 직교투영한 벡터 $\hat{y}$ 를 구하시오. (1,2,2)
2. 잔차 $r = y - \hat{y}$가 U에 직교함을 보이시오. r= (1,2,2) - (1,2,2) = 0 , 영벡터는 모든 벡터에 직교
3. 이 과정을 "최소제곱 회귀"의 관점에서 해석하시오.
   y를 U에 가장 가깝게 붙이는 점이 y^. 잔차 r는 U와 직교. 회귀에서 y^는 예측값, r는

Problem 4.

다변수 함수 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$에 대하여,

1. $\nabla f(x, y)$를 구하시오. $(2x+y, x+2y)$
2. 점 (1, 2)에서의 그래디언트를 구하고, 해당 벡터가 의미하는 바를 설명하시오. $(4,5)$
3. 방향벡터 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$에 대한 방향도함수를 구하시오.

$D_u f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot u = (4,5) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{9}{\sqrt{2}}$

Problem 5.

1. 함수 $f(x) = e^x$를 a = 0에서 2차 **테일러 다항식으로** 근사하시오.
2. 함수 $g(x, y) = x^2 + y^2$를 (0, 0)에서 2차 **테일러 전개로** 근사하시오.
3. 이러한 근사가 경사하강법(gradient descent)과 뉴턴 방법(Newton’s method)에서 어떻게 활용되는지 찾고 서술하시오.

1. $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$

$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1$

$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$

2. $T_2(x,y) = g(0,0) + g_x(0,0) + g_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left[g_{xx}(0,0)x^2 + 2g_{xy}(0,0)xy + g_{yy}(0,0)y^2\right]$

$g_x = 2x,\ g_y = 2y \Rightarrow g_x(0,0) = 0,\ g_y(0,0) = 0$

$g_{xx} = 2,\ g_{yy} = 2,\ g_{xy} = 0$

$g(x,y) \approx x^2 + y^2$

3. 1차 테일러 근사는 함수가 어떤 점 근처에서 단순한 다항식으로 바꾸어 생각
것이고, 경사하강법은 이 직선의 기울기를 이용해 함수가 줄어드는 방향으로 조
이동하며 최솟값 찾음.
2차 테일러 근사는 함수가 근처에서 이차곡선 형태라고 보며 기울기뿐 아니라
까지 고려하는 것이고, 뉴턴 방법은 이 이차 근사식의 최솟값을 직접 계산하는
으로 경사하강법보다 더 빠르고 정확하게 수렴함.