Problem 1. 다음 용어를 간단히 정의하고, 서로 어떤 관계가 있는지 2-3문장으로 설명하시오.

- 선형 결합 (linear combination) 여러 벡터에 스칼라를 곱하여 더한것
- 선형 독립성 (linear independence) 어떤 벡터 집합에서, 한 벡터도 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현할 수 없는 상태
- 기저 (basis) 선형 독립이면서 그 공간의 모든 벡터를 선형 결합으로 표현할 수 있는 벡터들의 집합
- 차원 (dimension) 그 공간의 어떤 기저를 구성하는 벡터의 개수

벡터들의 선형 결합을 통해 공간을 만들 때, 선형 독립적인 벡터들만 모으면 그 공간의 '뼈대' 역할을 하는 기저가 된다. 이 기저를 이루는 벡터의 개수가 바로 그 공간의 차원이다.

- 해가 유일한가, 없는가, 무한히 많은가?
- 해가 존재한다면 일반해를 표현하시오.(Hint: 해가 유일하다면, 그 <mark>자체로 일반해가</mark>

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \end{array}\right] \xrightarrow{b}$$

Problem 3. 다음 벡터들이 선형 독립인지 판정하시오.

$$v_1=(1,2,3), \quad v_2=(2,4,7), \quad v_3=(3,6,10)$$

● 행렬을 구성하고 RREF를 통해 판단할 것. (Hint: RREF로 변환하는 과정에서 Row Operation을 수행하다 보면 독립성을 파악할 수 있습니다!)

● 종속일 경우, 어떤 벡터가 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현되는지 명시하시오.

RREF 결론: 3행이 모두 0이됨- 선형종속 v3가 vv1 v2의 선형결합으로 표현

Problem 4. 다음 벡터 집합이 생성하는 부분공간의 기저와 차원을 구하시오.

$$\{(1,2,1),(2,4,2),(1,0,1)\}\subset\mathbb{R}^3$$

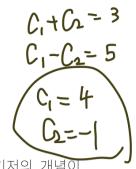
● 기저를 구하는 과정을 보이고, 차원을 명시할 것.

$$\begin{pmatrix}
121 \\
242
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
121 \\
000
\end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
121 \\
0-20 \\
000
\end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
121 \\
010 \\
000
\end{pmatrix}$$

$$7M:27H$$

$$7M:27H$$

Problem 5.
$$\mathbb{R}^2$$
의 새로운 기저를 $b_1 = (1,1), b_2 = (1,-1)$ 로 정의하자.



Problem 6. 머신러닝에서 PCA(주성분 분석)를 한다고 할 때, 왜 선형 독립성과 기저의 개념이 중요한가?

- 데이터 압축, 중복 제거, 새로운 좌표계라는 키워드를 사용해 3-4문장으로 설명하시 오.
- GPT 쓰셔도 됩니다! 다만 충분히 고민하고 본인의 언어로 표현하는 과정이 중요해요~

머신러닝에서 PCA는 고차원 데이터를 효율적으로 다루기 위해 선형 독립성과 기저 개념을 활용합니다. 데이터에 는 종종 중복된 정보나 서로 상관관계가 높은 피처들이 있는데, PCA는 이러한 중복 제거를 통해 데이터의 분산을 가장 잘 설명하는 새로운 축들을 찾아냅니다. 이 축들은 서로 선형 독립적이며, 새로운 좌표계를 형성하는 기저 역 할을 합니다. 이를 통해 데이터의 핵심 정보를 보존하면서 불필요한 차원을 제거하여 데이터 압축을 가능하게 합 니다.