

Problem 1. 다음 용어를 간단히 정의하고, 서로 어떤 관계가 있는지 2-3문장으로 설명하시오.

- 선형 결합 (linear combination) 여러 벡터에 스칼라를 곱하여 더한 것
- 선형 독립성 (linear independence) 어떤 벡터 집합에서, 한 벡터도 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현할 수 없는 상태
- 기저 (basis) 선형 독립이면서 그 공간의 모든 벡터를 선형 결합으로 표현할 수 있는 벡터들의 집합
- 차원 (dimension) 그 공간의 어떤 기저를 구성하는 벡터의 개수

벡터들의 선형 결합을 통해 공간을 만들 때, 선형 독립적인 벡터들만 모으면 그 공간의 '뼈대' 역할을 하는 기저가 된다. 이 기저를 이루는 벡터의 개수가 바로 그 공간의 차원이다.

Problem 2. 다음 연립방정식을 증강행렬로 표현하고 가우스 소거법을 통해 해의 구조를 판별하시오.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 9$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 8$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

- 해가 유일한가, 없는가, 무한히 많은가?
- 해가 존재한다면 일반해를 표현하시오. (Hint: 해가 유일하다면, 그 자체로 일반해가 됩니다!)

$$x_1 = 6 \quad x_3 = 4 \\ x_2 = -3$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Problem 3. 다음 벡터들이 선형 독립인지 판정하시오.

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (2, 4, 7), \quad v_3 = (3, 6, 10)$$

- 행렬을 구성하고 RREF를 통해 판단할 것. (Hint: RREF로 변환하는 과정에서 Row Operation을 수행하다 보면 독립성을 파악할 수 있습니다!)
- 종속일 경우, 어떤 벡터가 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현되는지 명시하시오.

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{array} \right)$$

RREF 결론: 3행이 모두 0이 됨 - 선형종속  
v3가 v1 v2의 선형결합으로 표현

Problem 4. 다음 벡터 집합이 생성하는 부분공간의 기저와 차원을 구하시오.

$$\{(1, 2, 1), (2, 4, 2), (1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

- 기저를 구하는 과정을 보이고, 차원을 명시할 것.

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

기저: 2개      차원: 2

Problem 5.  $\mathbb{R}^2$ 의 새로운 기저를  $b_1 = (1,1)$ ,  $b_2 = (1,-1)$ 로 정의하자.

벡터  $v = (3,5)$ 를 이 새로운 기저에 대한 좌표로 표현하시오.

$$v = C_1 b_1 + C_2 b_2 \quad (3,5) = C_1(1,1) + C_2(1,-1)$$

$$C_1 + C_2 = 3$$

$$C_1 - C_2 = 5$$

$$C_1 = 4$$

$$C_2 = -1$$

Problem 6. 머신러닝에서 PCA(주성분 분석)를 한다고 할 때, 왜 선형 독립성과 기저의 개념이 중요한가?

- 데이터 압축, 중복 제거, 새로운 좌표계라는 키워드를 사용해 3-4문장으로 설명하시오.
- GPT 쓰셔도 됩니다! 다만 충분히 고민하고 본인의 언어로 표현하는 과정이 중요해요~

머신러닝에서 PCA는 고차원 데이터를 효율적으로 다루기 위해 선형 독립성과 기저 개념을 활용합니다. 데이터에는 종종 중복된 정보나 서로 상관관계가 높은 피처들이 있는데, PCA는 이러한 중복 제거를 통해 데이터의 분산을 가장 잘 설명하는 새로운 축들을 찾아냅니다. 이 축들은 서로 선형 독립적이며, 새로운 좌표계를 형성하는 기저 역할을 합니다. 이를 통해 데이터의 핵심 정보를 보존하면서 불필요한 차원을 제거하여 데이터 압축을 가능하게 합니다.

