Problem 1. 다음 용어를 간단히 정의하고, 서로 어떤 관계가 있는지 2-3문장으로 설명하시오.

┌ 스칼라(상수)를 곱하는 것

- 선형 결합 (linear combination) 벡터들을 스케일하고 모두 더해 새 벡터를 얻는 모든 연산 → $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$

┌ 벡터들의 모든 선형결합의 집합

선형 종속 ↔
- 선형 독립성 (linear independence) 벡터 모두가 각자 생성이 다른 차원을 구성 → 0벡터를 만드는 선형 결합이 (모든 계수=0) 뿐인 경우
- 기저 (basis) 벡터 공간 전체를 생성할 수 있으면서 서로 선형독립인 벡터의 집합
- 차원 (dimension) 한 공간의 기저에 포함되는 벡터의 개수

Problem 2. 다음 연립방정식을 증강행렬로 표현하고 가우스 소거법을 통해 해의 구조를 판별하시오.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 8$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

- 해가 유일한가, 없는가, 무한히 많은가? 유일 $x_3 = 4,\ x_2 = -3,\ x_1 = 6$
- 해가 존재한다면 일반해를 표현하시오. (Hint : 해가 유일하다면, 그 자체로 일반해가 됩니다!) $(x_1, x_2, x_3) = (6, -3, 4)$

┌ $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ 의 해가 오직 $a=b=c=0$

Problem 3. 다음 벡터들이 선형 독립인지 판정하시오.

$$A = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

두 행을 맞바꾸거나 0이 아닌 수로 곱해도 해 집합은 바뀌지 X

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (2, 4, 7), \quad v_3 = (3, 6, 10)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

┌ 기약행사다리꼴

- 행렬을 구성하고 RREF를 통해 판단할 것. (Hint : RREF로 변환하는 과정에서 Row Operation을 수행하다 보면 독립성을 파악할 수 있습니다!) 선형 종속 독립적인 벡터가 2개
- 종속일 경우, 어떤 벡터가 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현되는지 명시하시오.

$$v_3 = v_1 + v_2$$

Problem 4. 다음 벡터 집합이 생성하는 부분공간의 기저와 차원을 구하시오.

$$\{\underset{v_1}{(1,2,1)}, \underset{v_2}{(2,4,2)}, \underset{v_3}{(1,0,1)}\} \subset \mathbb{R}^3$$

- 기저를 구하는 과정을 보이고, 차원을 명시할 것.

$v_2 = 2v_1$

공간은 v_1, v_3이 만드는 것과 같음

$av_1 + bv_2 = 0$ 만족시키는 0이 아닌 a, b 존재하는지?

$a(1,2,1) + b(1,0,1) = (0,0,0)$

v_1 과 v_3은 독립 → 기저벡터 2개 → 차원 : 2 기저 : $(1,2,1), (1,0,1)$

Problem 5. $\mathbb{R}^2$의 새로운 기저를 $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (1,-1)$로 정의하자.

벡터 $v = (3,5)$를 이 새로운 기저에 대한 좌표로 표현하시오.

$V = \alpha b_1 + \beta b_2$ $\quad \alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (3,5)$ $\quad \begin{cases} \alpha+\beta = 3 \\ \alpha-\beta = 5 \end{cases}$ $\quad (\alpha,\beta) = (4,-1)$

$V = 4(1,1) - 1(1,-1) = (3,5)$

Problem 6. 머신러닝에서 PCA(주성분 분석)를 한다고 할 때, 왜 선형 독립성과 기저의 개념이 중요한가?

- 데이터 압축, 중복 제거, 새로운 좌표계라는 키워드를 사용해 3–4문장으로 설명하시오.
- GPT 쓰셔도 됩니다! 다만 충분히 고민하고 본인의 언어로 표현하는 과정이 중요해요~

PCA는 원래 데이터가 차원이 크고(= 변수가 많고) 중복되는 정보가 많은 경우,
이를 더 단순하게 압축하려고 쓰는 기법.

이 때 PCA는 데이터의 중복 제거를 위해 서로 선형 독립인 축들을 새로 골라 내는데,
이 축들이 바로 주성분들이고 그 집합이 새로운 기저를 이룸.

서로 독립인 축을 쓰면 주성분 좌표들 사이의 상관이 사라져 해석이 쉬워지고,
필요 없는 축을 버리면 노이즈와 중복이 줄어듦.

즉, PCA는 독립적인 기저로 바꿔서 중요한 성분만 쓰는 새 좌표계를 만드는 방법이라서
선형 독립성과 기저 개념이 핵심.