Mathematics (2) Assignment

25-2 기초 데이터 분석 및 실습

Problem 1.

벡터 $x = (2,1,0), y = (1,-2,1)$에 대해

1. $<x,y>$를 계산하시오. $2-2+0=0.$
2. 두 벡터는 직교하는가? OO
3. 두 벡터 사이 각도를 w라고 할 때, $\cos w$를 구하시오. $0.$

$\cos w = \dfrac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} = 0.$

Problem 2.

벡터 집합 {(1, 1, 0), (1, 0, 1)}에 대해 Gram–Schmidt 과정을 적용하여 **직교정규 기저**를 구하시오.

$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $a_2^\perp = a_2 - (q_1^T a_2)q_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} \right\}$

Problem 3.

$3\times2 \quad 2\times3$

데이터 벡터 $y = (1,2,2)^T$와 기저 $u1 = (1,0,0)^T$, $u2 = (0,1,1)^T$가 Span하는 부분공간 U가 있다.

$Q = \begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$ $\hat{y} = Q(Q^TQ)^{-1}Q^Ty = QQ^Ty = \begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac12&\frac12\\0&\frac12&\frac12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}.$

1. y를 U 위로 직교투영한 벡터 $\hat{y}$ 를 구하시오.
2. 잔차 $r = y - \hat{y}$가 U에 직교함을 보이시오. $r = y - \hat{y} = 0.$ $u1 \cdot r = u2 \cdot r = 0.$
3. 이 과정을 "최소제곱 회귀"의 관점에서 해석하시오.

$\min \|Ux - y\|^2 \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}.$

Problem 4.

다변수 함수 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$에 대하여,

1. $\nabla f(x,y)$를 구하시오.
2. 점 (1, 2)에서의 그래디언트를 구하고, 해당 벡터가 의미하는 바를 설명하시오.
3. 방향벡터 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$에 대한 방향도함수를 구하시오.

1. $\nabla f = \langle 2x+y, x+2y \rangle$
2. $\nabla f(1,2) = \langle 4,5 \rangle$ (4,5) 방향으로 가장 빠르게 증가함.

$D_u f = \nabla f \cdot u = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 2x+y, x+2y \rangle \langle 1,1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(3x+3y)$

Problem 5.

1. 함수 $f(x) = e^x$를 a = 0에서 2차 **테일러 다항식으로** 근사하시오.
2. 함수 $g(x, y) = x^2 + y^2$를 (0, 0)에서 2차 **테일러 전개로** 근사하시오.
3. 이러한 근사가 경사하강법(gradient descent)과 뉴턴 방법(Newton’s method)에서 어떻게 활용되는지 찾고 서술하시오.

1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ $\quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$

2) $g(x,y) \approx g(a,b) + \nabla g \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x-a & y-b \end{bmatrix} H_g(a,b) \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$

$H_g = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{bmatrix}$, $\quad g(x,y) = 0 + 0 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} H_g(0,0) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + y^2$

3) 어떤 함수 f를 최소로 만드는 x,y…를 찾을 때 그레디언트f 방향의 반대 방향으로 이동하는 방법이 경사하강법이라고 한다. 이때 f가 복잡할수록 그레디언트f를 구하는게 힘드니 1차 근사를 통해 방향을 알아낸다고 한다. 뉴턴 방법은 어떤 함수에 대한 방정식 f = 0의 해를 수치적으로 찾을 때 쓰인다고 한다. 역시 f가 복잡할수록 미분하는데 비용이 많이 드니깐 근사로 식을 단순하게 만들어 계산한다고 한다.