

→ 벡터공간(또는  $V$ )이 있을 때 서로 선형독립이면  $V$ 를 표현할 수 있는 벡터집합

Problem 1. 다음 용어를 간단히 정의하고, 서로 어떤 관계가 있는지 2-3문장으로 설명하시오.

- 선형 결합 (linear combination)
- 선형 독립성 (linear independence)
- 기저 (basis)
- 차원 (dimension)

벡터들을 곱하고 더하는 연산

한 벡터가 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현되지 않으면  
선형 독립이라 함

↳  $V$  기저 벡터 개수

Problem 2. 다음 연립방정식을 증강행렬로 표현하고 가우스 소거법을 통해 해의 구조를 판별하시오.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = & 9 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 8 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & \rightarrow & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 8 & & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

- 해가 유일한가, 없는가, 무한히 많은가? 유일
- 해가 존재한다면 일반해를 표현하시오. (Hint: 해가 유일하다면, 그 자체로 일반해가 됩니다!)

$$\begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \rightarrow & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Problem 3. 다음 벡터들이 선형 독립인지 판정하시오.

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (2, 4, 7), \quad v_3 = (3, 6, 10)$$

- 행렬을 구성하고 RREF를 통해 판단할 것. (Hint: RREF로 변환하는 과정에서 Row Operation을 수행하다 보면 독립성을 파악할 수 있습니다!)
- 종속일 경우, 어떤 벡터가 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현되는지 명시하시오.

$$v_1 + v_2 = v_3$$

Problem 4. 다음 벡터 집합이 생성하는 부분공간의 기저와 차원을 구하시오.

$$\{(1, 2, 1), (2, 4, 2), (1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

- 기저를 구하는 과정을 보이고, 차원을 명시할 것.

$$v_1 = (1, 2, 1) \quad v_2 = (2, 4, 2) \quad v_3 = (1, 0, 1) \text{ 일 때}$$

$$2v_1 = v_2 \text{ 이므로 기저는 } [v_1, v_3] \text{ 와 같다.}$$

$$[(1, 2, 1), (1, 0, 1)] \subset \mathbb{R}^3$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}$$

$$x_2 = 1, x_1 = 5$$

Problem 5.  $\mathbb{R}^2$ 의 새로운 기저를  $b_1 = (1,1)$ ,  $b_2 = (1,-1)$ 로 정의하자.

벡터  $v = (3,5)$ 를 이 새로운 기저에 대한 좌표로 표현하시오.

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 = v, \quad \therefore v = 5b_1 - b_2$$

Problem 6. 머신러닝에서 PCA(주성분 분석)를 한다고 할 때, 왜 선형 독립성과 기저의 개념이 중요한가?

- 데이터 압축, 중복 제거, 새로운 좌표계라는 키워드를 사용해 3-4문장으로 설명하시오.
- GPT 쓰셔도 됩니다! 다만 충분히 고민하고 본인의 언어로 표현하는 과정이 중요해요~

PCA는 고차원 데이터의 중요한 정보를 최대한 보존하는 방향으로 저차원으로 차원을 축소하는 방법(데이터 압축)으로, 데이터가 가장 많이 퍼져 있는 방향을 새로운 좌표축(주성분)으로 잡아 새로운 좌표계를 만든다. 이때 축들이 선형 독립이어야 중복없이 정보가 저장된다.