Problem 1. 다음 용어를 간단히 정의하고, 서로 어떤 관계가 있는지 2-3문장으로 설명하시오.

- 선형 결합 (linear combination) - 벡터를 상수배한 후 더한것. $c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_nv_n$
- 선형 독립성 (linear independence) — 한 벡터를 다른 벡터들의 선형결합으로 표현될 수 없음.
- 기저 (basis) - 벡터공간을 생성하고, 서로 선형독립인 벡터
- 차원 (dimension) - 기저 벡터의 개수.

선형 독립성은 선형결합으로 표현될 수 없은 때를 말하며, 기저는 서로 선형독립인 벡터들의 집합이다.
이때, 기저 벡터의 개수가 곧 차원이다.

Problem 2. 다음 연립방정식을 증강행렬로 표현하고 가우스 소거법을 통해 해의 구조를 판별하시오.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 8$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 8 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

- 해가 유일한가, 없는가, 무한히 많은가? 해는 유일하다.
- 해가 존재한다면 일반해를 표현하시오. (Hint : 해가 유일하다면, 그 자체로 일반해가 됩니다!) (6, -3, 4)

Problem 3. 다음 벡터들이 선형 독립인지 판정하시오.

$$v_1 = (1,2,3), \quad v_2 = (2,4,7), \quad v_3 = (3,6,10)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ Pivot이 2개, column 3 = column 1 + column 2 선형종속.

- 행렬을 구성하고 RREF를 통해 판단할 것. (Hint : RREF로 변환하는 과정에서 Row Operation을 수행하다 보면 독립성을 파악할 수 있습니다!)
- 종속일 경우, 어떤 벡터가 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현되는지 명시하시오.

$v_1+v_2=v_3$, $v_3-v_1-v_2=0$
∴선형 종속이다.

Problem 4. 다음 벡터 집합이 생성하는 부분공간의 기저와 차원을 구하시오.

$$\{(1,2,1),(2,4,2),(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

- 기저를 구하는 과정을 보이고, 차원을 명시할 것.

(2,4,2) = 2(1,2,1) 이므로 (1,2,1)과 (2,4,2)는 종속
(1,0,1)와 (1,2,1)는 독립.

∴ 기저 : {(1,2,1), (1,0,1)}, 차원 = 2

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Problem 5. $\mathbb{R}^2$의 새로운 기저를 $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (1,-1)$로 정의하자.

벡터 $v = (3,5)$를 이 새로운 기저에 대한 좌표로 표현하시오.

$[v]_B = (a_1, a_2)$ $\quad v = a_1 b_1 + a_2 b_2 \Rightarrow (3,5) = a_1(1,1) + a_2(1,-1) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 3 \\ a_1 - a_2 = 5 \end{cases}$$

$\therefore a_1 = 4,\ a_2 = -1 \qquad \therefore [v]_B = (4, -1)$

Problem 6. 머신러닝에서 PCA(주성분 분석)를 한다고 할 때, 왜 선형 독립성과 기저의 개념이 중요한가?

- 데이터 압축, 중복 제거, 새로운 좌표계라는 키워드를 사용해 3–4문장으로 설명하시오.
- GPT 쓰셔도 됩니다! 다만 충분히 고민하고 본인의 언어로 표현하는 과정이 중요해요~

PCA는 고차원의 데이터의 좌표계를 새로운 직교기저, 즉 주성분 축으로 바꾸는 방법이다. 이 축들은 서로 선형 독립이기 때문에 각 성분이 중복 없이 정보를 담으므로 중복이 제거된다. 그리고, 고유값 즉 분산이 큰 상위 k개의 축을 선택하면, 정보를 최대한 유지한 채로 차원을 줄이는 데이터 압축이 가능하다. 이 과정을 통해 중복을 제거하고, 더 작은 차원의 새로운 좌표계에서 데이터를 효율적으로 표현할 수 있게 된다.