Problem 1. 다음 용어를 간단히 정의하고, 서로 어떤 관계가 있는지 2-3문장으로 설명하시오.

- 선형 결합 (linear combination) : 벡터 각각에 임의의 상수배를 해서 다 더해 만든 벡터
  예) $v_1 \cdots v_n$ 과 스칼라 $c_1 \cdots c_k$ 로 $c_1v_1+\cdots+c_nv_n$ 형태로 만드는것.
- 선형 독립성 (linear independence) : $c_1v_1+\cdots+c_nv_n=0$ 의 유일해가 $c_i=0$ 이면 선형독립
- 기저 (basis) : 벡터 공간을 형성하기 위한 기초, 어떤 공간을 생성하면서 (span) 서로 선형독립인 벡터집합
- 차원 (dimension) : 그 공간의 기저 벡터개수

선형 독립성은 선형결합에서 정의되며
기저는 선형독립인 벡터 집합을 말한다
차원은 어떤 그 공간에 들어가는
기저벡터의 수를 말한다.

Problem 2. 다음 연립방정식을 증강행렬로 표현하고 가우스 소거법을 통해 해의 구조를 판별하시오.

$$x_1+2x_2=8$$
$$2x_1+5x_2=21$$
$$x_2=5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 8$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2-2 & 5 & 3 & 9 \\ 3-3 & 6 & 2 & 8 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

- 해가 유일한가, 없는가, 무한히 많은가?
- 해가 존재한다면 일반해를 표현하시오. (Hint : 해가 유일하다면, 그 자체로 일반해가 됩니다!)

$x_3=-4$
$x_2=5$
$x_1=-2$

→ $\boxed{\text{해 유일}}$

Problem 3. 다음 벡터들이 선형 독립인지 판정하시오.

$$v_1 = (1,2,3), \quad v_2 = (2,4,7), \quad v_3 = (3,6,10)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 행렬을 구성하고 RREF를 통해 판단할 것. (Hint : RREF로 변환하는 과정에서 Row Operation을 수행하다 보면 독립성을 파악할 수 있습니다!)
- 종속일 경우, 어떤 벡터가 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현되는지 명시하시오.

$\boxed{\text{종속이다}}$

Problem 4. 다음 벡터 집합이 생성하는 부분공간의 기저와 차원을 구하시오.

(선형결합)

$$\{(1,2,1),(2,4,2),(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

- 기저를 구하는 과정을 보이고, 차원을 명시할 것.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

v_1, v_3 기저
차원 : 2

$\boxed{V = (4, -1)}$

Problem 5. $\mathbb{R}^2$의 새로운 기저를 $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (1, -1)$로 정의하자.

$c_1 + c_2 = 3$ $c_1 = 4$

벡터 $v = (3, 5)$를 이 새로운 기저에 대한 좌표로 표현하시오.

$c_1 - c_2 = 5$ $c_2 = -1$

$(3,5) = c_1(1,1) + c_2(1,-1)$

Problem 6. 머신러닝에서 PCA(주성분 분석)를 한다고 할 때, 왜 선형 독립성과 기저의 개념이 중요한가?

- 데이터 압축, 중복 제거, 새로운 좌표계라는 키워드를 사용해 3–4문장으로 설명하시오.
- GPT 쓰셔도 됩니다! 다만 충분히 고민하고 본인의 언어로 표현하는 과정이 중요해요~

pca는 고차원 데이터를 적은 차원에 압축하여 표현하면서 정보 손실을 최소화 해야 합니다.
그러나 이때 찾은 주 성분 벡터가 선형 종속이라면 같은 방향을 중복해서 잡은 꼴이기에 중복을 제거해야 합니다, 이 때문에 pca에서 선형 독립인 성분벡터를 보장하는게 중요합니다.
pca에서 기저는 기존 좌표축 대신 데이터를 잘 표현하는 새로운 기저를 찾는 과정입니다.
따라서 pca에서는 가저의 개념이 매우 중요하다고 할 수 있습니다.