Mathematics (2) Assignment

25-2 기초 데이터 분석 및 실습

Problem 1.

벡터 $x = (2, 1, 0), y = (1, -2, 1)$에 대해

1. $< x, y >$를 계산하시오. $\langle x, y \rangle = 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 0\cdot 1 = 0$
2. 두 벡터는 직교하는가? 내적이 0이므로 두 벡터는 직교한다.
3. 두 벡터 사이 각도를 w라고 할 때, $\cos w$를 구하시오.

$$\cos w = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{0}{\|x\|\|y\|} = 0$$

Problem 2.

벡터 집합 {(1, 1, 0), (1, 0, 1)}에 대해 Gram–Schmidt 과정을 적용하여 **직교정규 기저**를 구하시오.

$u_1 = v_1 = (1,1,0)$ $\quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ $\quad u_2 = v_2 - proj_{u_1}(v_2)$

$v_2 = (1,0,1)$ $\quad proj_{u_1}(v_2) = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \frac{1}{2}(1,1,0)$

$u_2 = (1,0,1) - (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$ $\quad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$

$\therefore \{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0), (\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})\}$

Problem 3.

데이터 벡터 $y = (1,2,2)^T$와 기저 $\mathrm{u1} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{u2} = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$가 Span하는 부분공간 U가 있다.

$\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ 이므로, u_1, u_2는 서로 직교한다.

$proj_{u_1}(y) = \frac{\langle y, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (1,0,0)^T$ $\quad proj_{u_2}(y) = \frac{\langle y, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \frac{4}{2} u_2 = 2u_2 = (0,2,2)^T$

1. y를 U 위로 직교투영한 벡터 $\hat{y}$를 구하시오. $\hat{y} = (1,0,0)^T + (0,2,2)^T = (1,2,2)^T = y$
2. 잔차 $r = y - \hat{y}$가 U에 직교함을 보이시오. $r = y - \hat{y} = (1,2,2) - (1,2,2) = (0,0,0)$, 임의의 벡터 v에 대해, $\langle r, v \rangle = 0$ 이므로, 잔차 r는 U에 직교한다.
3. 이 과정을 "최소제곱 회귀"의 관점에서 해석하시오.

최소제곱 회귀는 $\|y-\hat{y}\|^2$ 을 최소로 만드는 $\hat{y} \in U$ 를 찾는 과정이다. 이때 최적해의 조건이 잔차 $r = y - \hat{y}$ 가 U의 모든 벡터에 직교한다는 것인데, 이 경우에는 y가 U안에 완벽하게 포함된 경우이므로, 최소제곱 오차는 0이 된다.

Problem 4.

다변수 함수 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$에 대하여,

1. $\nabla f(x,y)$를 구하시오. $\nabla f(x,y) = (2x+y, x+2y)$
2. 점 (1, 2)에서의 그래디언트를 구하고, 해당 벡터가 의미하는 바를 설명하시오.
3. 방향벡터 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$에 대한 방향도함수를 구하시오.

2. $\nabla f(1,2) = (4,5)$

$\nabla f(1,2)$는 점 $(1,2)$에서 f의 값이 가장 가파르게 증가하는 방향을 나타낸다.

$\|\nabla f(1,2)\| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$ 은 해당 방향으로의 최대 변화율이 된다.

3. $D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$

$= (2x+y, x+2y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$= \frac{2x+y}{\sqrt{2}} + \frac{x+2y}{\sqrt{2}} = \frac{3x+3y}{\sqrt{2}}$

$D_{\vec{u}} f(1,2) = \frac{3+6}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$

Problem 5.

1. 함수 $f(x) = e^x$를 a = 0에서 2차 **테일러 다항식으로** 근사하시오.
2. 함수 $g(x, y) = x^2 + y^2$를 (0, 0)에서 2차 **테일러 전개로** 근사하시오.
3. 이러한 근사가 경사하강법(gradient descent)과 뉴턴 방법(Newton's method)에서 어떻게 활용되는지 찾고 서술하시오.

1. $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$

$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x$

$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1$

$\therefore P_2(x) = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)^2$

$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

2. $P_2(x,y) \approx g(a,b) + \nabla g(a,b) \cdot (x-a, y-b) + \frac{1}{2}[x-a, y-b]\, H_g(a,b)\, [x-a, y-b]^T$

$a=0, b=0$ 때

$g(0,0) = 0$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \Rightarrow \nabla g(0,0) = (0,0)$

$g_{xx} = 2,\ g_{xy} = 0,\ g_{yy} = 2$

$\Rightarrow H_g(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$P_2(x,y) = 0 + (0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}[x, y]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}[2x\ \ 2y]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$= x^2 + y^2$

3. 경사 하강법은 1차 테일러 근사를 사용하며, 현재 위치 x_k에서 함수를 선형으로 근사한다.
이 선형 근사 함수에서 가장 빠르게 감소하는 방향($-\nabla f(x_k)$ 방향)으로 일정 거리 (α, 학습률) 만큼 이동한다.

$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$

뉴턴 방법은 2차 테일러 근사를 사용하며, 현재 위치 x_k에서 함수를 2차 함수로 근사한다.
경사를 따라 조금씩 이동하는 방식이 아니라, 근사된 2차 함수의 최소 지점으로 한 번에 점프하는 방식이다.
해당 최소 지점은 근사 함수의 그래디언트를 0으로 만드는 지점이다.

$x_{k+1} = x_k - [H_f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$