

Problem 1. 다음 용어를 간단히 정의하고, 서로 어떤 관계가 있는지 2-3문장으로 설명하시오.

- 선형 결합 (linear combination)
- 선형 독립성 (linear independence)
- 기저 (basis)
- 차원 (dimension)

Problem 2. 다음 연립방정식을 증강행렬로 표현하고 가우스 소거법을 통해 해의 구조를 판별하시오.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 9$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 8$$

- 해가 유일한가, 없는가, 무한히 많은가?
- 해가 존재한다면 일반해를 표현하시오. (Hint: 해가 유일하다면, 그 자체로 일반해가 됩니다!)

Problem 3. 다음 벡터들이 선형 독립인지 판정하시오.

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (2, 4, 7), \quad v_3 = (3, 6, 10)$$

- 행렬을 구성하고 RREF를 통해 판단할 것. (Hint: RREF로 변환하는 과정에서 Row Operation을 수행하다 보면 독립성을 파악할 수 있습니다!)
- 종속일 경우, 어떤 벡터가 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현되는지 명시하시오.

Problem 4. 다음 벡터 집합이 생성하는 부분공간의 기저와 차원을 구하시오.

$$\{(1, 2, 1), (2, 4, 2), (1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

- 기저를 구하는 과정을 보이고, 차원을 명시할 것.

Problem 5. \mathbb{R}^2 의 새로운 기저를 $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (1,-1)$ 로 정의하자.

벡터 $v = (3,5)$ 를 이 새로운 기저에 대한 좌표로 표현하시오.

Problem 6. 행렬 A가 5개의 column을 가지며, $N(\text{Basis Vector of } A) = 3$ 이라고 하자.

- $\text{Dim}(A)$ 는 얼마인가?
- 이것이 의미하는 바를 ‘데이터 특성(feature)’ 관점에서 설명하시오. (Hint: 전체 컬럼 중 유의미한 컬럼의 개수라는 관점에서 생각해 보세요!)

Problem 7. 머신러닝에서 PCA(주성분 분석)를 한다고 할 때, 왜 선형 독립성과 기저의 개념이 중요한가?

- 데이터 압축, 중복 제거, 새로운 좌표계라는 키워드를 사용해 3-4문장으로 설명하시오.
- GPT 쓰셔도 됩니다! 다만 충분히 고민하고 본인의 언어로 표현하는 과정이 중요해요~