

Mathematics (2) Assignment

25-2 기초 데이터 분석 및 실습

Problem 1.

벡터 $x = (2, 1, 0), y = (1, -2, 1)$ 에 대해

1. $\langle x, y \rangle$ 를 계산하시오. $2 - 2 + 0 = 0$
2. 두 벡터는 직교하는가? \checkmark
3. 두 벡터 사이 각도를 w 라고 할 때, $\cos w$ 를 구하시오.

$$\frac{0}{\|x\|\|y\|} = 0$$

Problem 2.

벡터 집합 $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ 에 대해 Gram-Schmidt 과정을 적용하여 **직교정규 기저**를 구하시오.

$$u_1 = v_1 = (1, 1, 0) \quad \|u_1\| = \sqrt{2} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$v_2 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \quad \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Problem 3.

데이터 벡터 $y = (1, 2, 2)^T$ 와 기저 $u_1 = (1, 0, 0)^T, u_2 = (0, 1, 1)^T$ 가 Span하는 부분공간 U 가 있다.

1. y 를 U 위로 직교투영한 벡터 \hat{y} 를 구하시오. $(1, 2, 2)$
2. 잔차 $r = y - \hat{y}$ 가 U 에 직교함을 보이시오. $(1, 2, 2) - (1, 2, 2) \rightarrow 0$
3. 이 과정을 "최소제곱 회귀"의 관점에서 해석하시오.

가장 작은 제곱으로, 잔차가 직교함.

Problem 4.

다변수 함수 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ 에 대하여,

1. $\nabla f(x, y)$ 를 구하시오. $(2x+y, x+2y)$
2. 점 $(1, 2)$ 에서의 그래디언트를 구하고, 해당 벡터가 의미하는 바를 설명하시오. $\nabla f(1, 2) = (4, 5)$
3. 방향벡터 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ 에 대한 방향도함수를 구하시오.

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) \cdot u &= (2x+y, x+2y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \\ &= \frac{3x+3y}{\sqrt{2}} \quad \text{at } (1, 2) = \frac{9}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Problem 5.

1. 함수 $f(x) = e^x$ 를 $a = 0$ 에서 2차 테일러 다항식으로 근사하시오.
2. 함수 $g(x, y) = x^2 + y^2$ 를 $(0, 0)$ 에서 2차 테일러 전개로 근사하시오.
3. 이러한 근사가 경사하강법(gradient descent)과 뉴턴 방법(Newton's method)에서 어떻게 활용되는지 찾고 서술하시오.

1차 테일러 근사 - 경사하강법 : 가장 빠른 증감방향 찾기
2차 테일러 근사 - 뉴턴 방법 : 기울기 되는 지점

찾아
마치려
진짜 근사

$$1. f(0) = 1 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 1$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$2. P_2(x, y) = g(a, b) + \nabla g(a, b) \cdot h + \frac{1}{2} [g_{xx}(0, 0)x^2 + 2g_{xy}(0, 0)xy + g_{yy}(0, 0)y^2]$$

$$g_x = 2x \quad g_y = 2y \quad g_x(0, 0) = 0 \\ g_y(0, 0) = 0$$

$$g_{xx} = 2 \quad g_{yy} = 2 \quad g_{xy} = 0 \quad H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_2(x, y) = x^2 + y^2$$

