Mathematics (2) Assignment

25-2 기초 데이터 분석 및 실습

Problem 1.

벡터 $x = (2, 1, 0), y = (1, -2, 1)$에 대해

1. $< x, y >$를 계산하시오. $2 + (-2) + 0 = 0$
2. 두 벡터는 직교하는가? 네 (내적이 0 이므로)
3. 두 벡터 사이 각도를 w라고 할 때, $\cos w$를 구하시오.

$\cos w = \frac{x \cdot y}{|x||y|} = 0$

Problem 2.

벡터 집합 {(1, 1, 0), (1, 0, 1)}에 대해 Gram–Schmidt 과정을 적용하여 **직교정규 기저**를 구하시오.

v_1 v_2

$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ $\quad \mathrm{Proj}_{e_1} v_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ $\quad e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$u_2 = v_2 - \mathrm{Proj}_{e_1} v_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ $\quad e_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$

Problem 3.

데이터 벡터 $y = (1,2,2)^T$와 기저 $\mathrm{u1} = (1,0,0)^\mathrm{T}$, $\mathrm{u2} = (0,1,1)^\mathrm{T}$가 Span하는 부분공간 U가 있다.

$\beta = (A^TA)^{-1}A^Ty$ $\quad A^Ty \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \hat{y} = (A^TA)^{-1}A^Ty$

$A^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad (A^tA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\quad$ y가 U 위에 있으므로 $\hat{y} = y$

1. y를 U 위로 직교투영한 벡터 $\hat{y}$ 를 구하시오.
2. 잔차 $r = y - \hat{y}$가 U에 직교함을 보이시오.
3. 이 과정을 "최소제곱 회귀"의 관점에서 해석하시오.

$\hat{y} = y$ $\quad r = 0$ → 모든 벡터와 직교

$\|y - A\beta\|^2$ 최소화, $\beta = (1, 2)$ 에서 $A\beta = \hat{y} = y = 0$ $\quad r = 0$ 완전적합

회귀오차가 0이다

Problem 4.

다변수 함수 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$에 대하여,

$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y)$

1. $\nabla f(x, y)$를 구하시오.
2. 점 (1, 2)에서의 그래디언트를 구하고, 해당 벡터가 의미하는 바를 설명하시오. $\nabla f(1,2) = (4, 5)$ (1, 2)에서의 최대증가율
3. 방향벡터 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$에 대한 방향도함수를 구하시오.

$D_u = \nabla f \cdot u$

$D_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x + y) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 2y)$

if 점 (1, 2)에서 $\boxed{\frac{9}{\sqrt{2}}}$

Problem 5. $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}}$

1. 함수 $f(x) = e^x$를 a = 0에서 2차 **테일러 다항식으로** 근사하시오.
2. 함수 $g(x, y) = x^2 + y^2$를 (0, 0)에서 2차 **테일러 전개로** 근사하시오.
3. 이러한 근사가 경사하강법(gradient descent)과 뉴턴 방법(Newton’s method)에서 어떻게 활용되는지 찾고 서술하시오.

$$\underbrace{g(x,y)}_{0} + \underbrace{\nabla g(x,y)}_{0} \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y) \cdot H \cdot (x,y)^T$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(2x^2, 2y^2) = x^2 + y^2$$

3.

경사하강법은 1차 테일러 근사를
이용하여 학습의 방향(내리막 방향)을
정할 수 있다.

뉴턴방법은 제 2차 테일러 근사를
이용하여 곡면의 형태를 따라 가장