

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA E ASTROFISICA



DISCHI DI ACCRESCIMENTO SU OGGETTI COMPATTI:

MODELLO SHAKURA-SUNYAEV DI DISCHI SOTTILI

ACCRETION DISKS AROUND COMPACT OBJECTS:

THE SHAKURA-SUNYAEV MODEL FOR THIN DISKS

TESI DI LAUREA DI 1° LIVELLO

Anno Accademico 2011-2012

Relatore:

Dott. Guido Risaliti

Candidato:

Emanuele Biagioli

Correlatore:

Prof. Alessandro Marconi

Indice

1	Accrescimento	1
1.1	Dischi di accrescimento	1
1.2	La conservazione del momento angolare	4
1.3	Il modello α -disk	6
2	La materia nel disco	9
2.1	Evoluzione temporale del disco	9
2.2	Disco stazionario	11
2.2.1	La struttura orizzontale	12
2.2.2	La struttura verticale	14
2.3	Equilibrio Viriale	16
3	La produzione di energia	17
3.1	L'azione della dissipazione viscosa	18
3.2	L'equazione del trasporto	20
3.3	La temperatura superficiale	22
3.4	Calcolo dello spettro	22
4	La struttura del disco	26
4.1	L'equazione di stato	26
4.2	L'opacità	27
4.3	Luminosità limite	28
5	Equazioni per la struttura del disco	30
5.1	Il sistema algebrico	30
5.2	La divisione in zone	34
5.3	Considerazioni sulla Zona A	36
5.4	Conclusioni	37
A	Costanti di proporzionalità	38
	Bibliografia	40

Capitolo 1

Accrescimento

Nell’ambito dell’astrofisica i dischi di accrescimento sono definiti come sistemi in cui della materia orbita attorno ad una sorgente di campo gravitazionale, con una distribuzione a forma di disco, e parte di questa materia fluisce verso il corpo centrale, aumentandone progressivamente la massa. Nei casi a cui ci riferiamo in questa tesi i corpi centrali sono oggetti “compatti”, ossia con densità più elevate di quelle medie di stelle o pianeti (nane bianche, stelle di neutroni e buchi neri). Un disco di accrescimento è visibile ad un osservatore solo se la materia che cade sull’oggetto compatto rilascia la sua energia gravitazionale sotto forma di radiazione. Se questo avviene, dato che le differenze di potenziale gravitazionale sono assai elevate, si potranno osservare luminosità altissime.

1.1 Dischi di accrescimento

Lo studio dei dischi di accrescimento è di notevole importanza nell’ambito dell’astrofisica per il fatto che il modello di un sistema fisico in cui la materia riesce ad emettere la differenza di energia gravitazionale acquisita sotto forma di radiazione elettromagnetica permette di spiegare tutta una classe di eventi che non trova altrimenti soluzione usando le dinamiche della produzione di energia tipiche della fisica stellare (Fig.1)¹. Dischi sono presenti in sistemi binari, laddove una stella nelle fasi finali della sua vita si espande diventando una gigante, ed i suoi strati più esterni entrano nella zona in cui è dominante l’azione gravitazionale della compagna. Attorno ad essa si forma un disco con temperature tipiche di milioni di gradi Kelvin, che emette quindi radiazione a frequenze più alte di qualsiasi stella. Si trovano dischi anche al centro delle galassie, attorno ai buchi neri supermassivi, e sono fonte di luminosità talmente elevate da essere paragonabili (o superiori) a quella della stessa galassia ospite.

¹1: Risaliti et al. 2011; 2: Wang et al. 2010; 3 [http : //chandra.harvard.edu /xray_sources/3c273/index.html](http://chandra.harvard.edu/xray_sources/3c273/index.html); 4: Vanden Berk et al. 2001

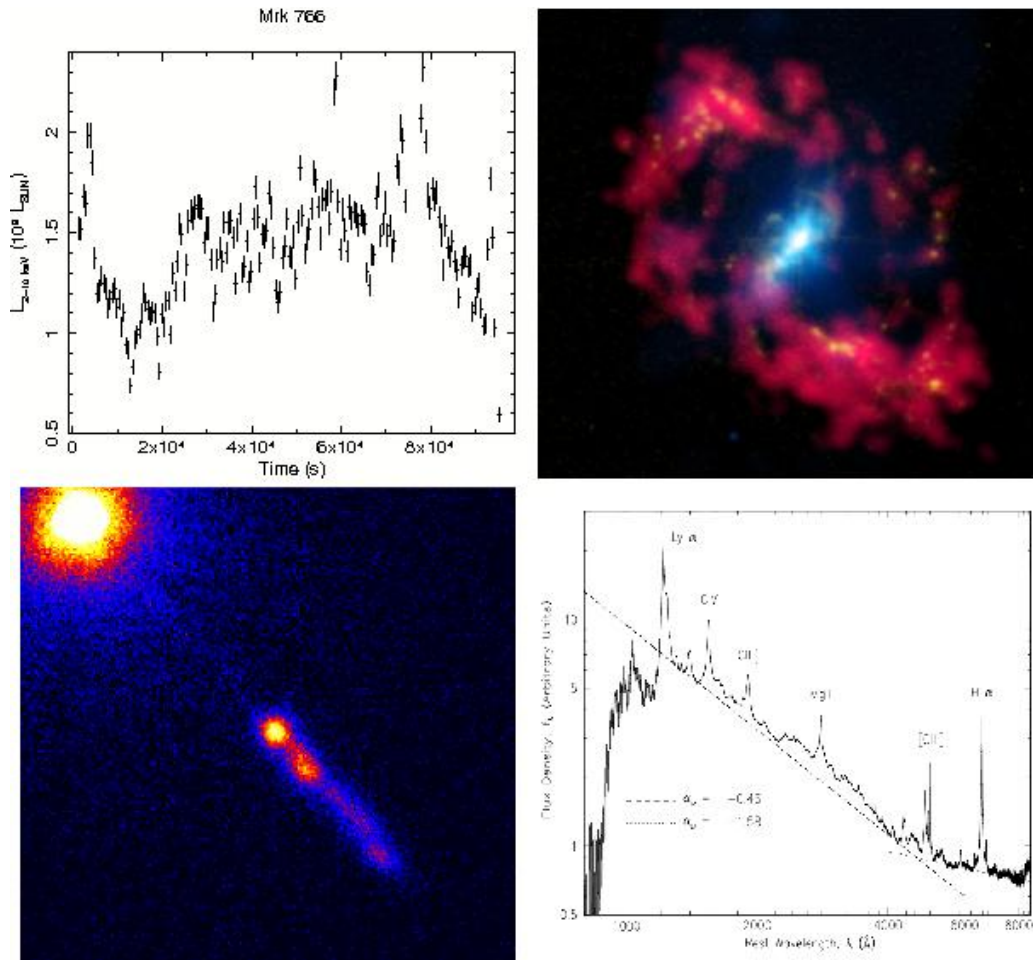


Figura 1.1: Esempi di osservazioni di fenomeni astrofisici spiegabili solo mediante l'emissione da dischi di accrescimento. 1.(*in alto a sinistra*) Curva di luce (luminosità in funzione del tempo) per un Nucleo Galattico Attivo nei raggi X. Si osservano variazioni di luminosità dell'ordine di 10^9 luminosità solari in tempi di poche migliaia di secondi, corrispondenti a dimensioni massime della sorgente dell'ordine di quelle del Sistema Solare. 2.(*in alto a destra*) Immagine ottica e nei raggi X della galassia NGC 4151, in cui una intensa emissione centrale ha creato una cavità di gas altamente ionizzato nel centro della galassia ospite. 3.(*in basso a sinistra*) Immagine nei raggi X del quasar 3C 273. La luminosità totale emessa è tale da coprire completamente quella della galassia ospite. Si nota inoltre un getto altamente collimato fino a distanze ben superiori alle dimensioni della galassia. 4.(*in basso a destra*) Spettro medio in banda ottica e ultra-violetta dei quasar, in cui si notano forti righe in emissione di altissima ionizzazione (indice di un continuo ultra-violetto ionizzante molto intenso).

Caratteristica principale del collasso gravitazionale è infatti quella di presentare efficienze estremamente elevate di conversione in energia della massa coinvolta nel fenomeno, anche ordini di grandezza superiore a quelle della fusione nucleare, che è il meccanismo che alimenta le stelle. Eseguiamo adesso il confronto, lasciando a dopo l'indagine su quali siano i fenomeni che permettono il rilascio di questa energia sotto forma di radiazione.

L'energia cinetica massima che una massa m acquisisce, posta inizialmente all'infinito, arrivando al raggio R_0 all'interno di un campo gravitazionale prodotto da una massa M è (supponendo una trattazione non relativistica del fenomeno):

$$E_{cin} = -E_{grav} = \frac{GMm}{R_0}$$

dove G è la costante di gravitazione universale e vale:

$$G = (6.67428 \pm 0.00067) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

La luminosità identifica la quantità di energia irradiata per unità di tempo. Se assumiamo che l'energia gravitazionale perduta da ogni particella in caduta sia riemessa nello spazio esterno, posso eguagliare il guadagno di energia per unità di tempo alla luminosità massima:

$$L_{max} = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{GM\dot{m}}{R_0} \quad (1.1)$$

La derivazione temporale influenza solo m poiché le altre grandezze, tra cui la massa dell'oggetto su cui va a cadere la materia, non variano sensibilmente (avremo modo di verificare dopo che la massa di tutto il disco è essenzialmente molto minore della massa dell'oggetto compatto); \dot{m} deve essere inteso come un flusso di massa nel disco. Posso riscrivere la luminosità per poterla confrontare con quella prodotta da fenomeni simili, in particolare a quella delle reazioni nucleari per cui vale

$$L_{nuc} = \xi \dot{m} c^2$$

dove ξ è l'efficienza di conversione della massa a riposo e determina l'energia rilasciata per unità di tempo (L) in funzione della massa a disposizione (m). Le normali efficienze per la reazione del ciclo p-p (4 che protoni si legano insieme a formare un atomo d'Elio) che avviene in quasi tutte le stelle sono dell'ordine di $\xi \sim 0.007$. Riprendo la (1.1)

$$L_{max} = \frac{GM\dot{m}}{R_0} = \frac{GM}{c^2 R_0} \dot{m} c^2 = \xi' \dot{m} c^2 \quad (1.2)$$

Il parametro ξ' è definito unicamente dalle condizioni del sistema (purché valga l'ipotesi che tutta l'energia gravitazionale possa esser convertita in radiazione e non venga altrimenti perduta).

Per una nana bianca di 10^3 km di raggio e di una massa solare ($M_\odot \simeq 2 \cdot 10^{30} kg$)

ottengo $\xi' \sim 10^{-4}$; con una stella di neutroni, il cui raggio è di due ordini di grandezza inferiore ed ha massa superiore, si arriva invece anche a $\xi' \sim 0.15$.

Abbiamo dimostrato che il collasso gravitazionale è un meccanismo estremamente efficiente. É quindi necessario sviluppare una teoria autoconsistente per i dischi di accrescimento che descriva il processo di conversione dell'energia gravitazionale in radiazione luminosa, tenendo conto che questo meccanismo deve essere in grado di estrarre una parte considerevole dell'energia accumulata, ed essere quindi particolarmente efficiente. Tale modello dovrà poi trovare una conferma negli spettri di emissione di stelle binarie e di oggetti extragalattici, nei quali si ha accrescimento su buchi neri supermassivi. La teoria dei dischi di accrescimento di maggior successo è quella sviluppata da Shakura e Sunyaev che presenta un'elaborazione molto diretta del problema, riuscendo a superare la grande incognita dei fenomeni che avvengono all'interno di un disco senza però limitare il suo campo di validità, oltre a dare ottime efficienze di conversione di massa in energia. Lo scopo di questa tesi è ripercorrere i passi che portano alla formulazione del suddetto modello, analizzandone in maniera attenta le varie tappe.

1.2 La conservazione del momento angolare

É noto che un qualsiasi oggetto orbitante in maniera Kepleriana, se possiede una velocità angolare Ω_k diversa da zero, non potrà mai passare per i fuochi dell'ellisse. Anche nel caso di un sistema binario la massa persa dalla stella gigante, quando oltrepassa il primo punto Lagrangiano ¹, possiederà una velocità angolare non nulla, e quindi molto difficilmente potrà andare a depositarsi sulla compagna minore, il cui raggio è molto piccolo.

Si pone perciò il primo dei problemi, ossia deve esistere un meccanismo che permetta il trasferimento di momento angolare tra le particelle che compongono il disco, in modo che parte di queste possano diminuire man mano il raggio a cui orbitano, andando ad accrescere la massa dell'oggetto compatto. Non è stato ancora ben definito quale sia questo meccanismo ma è sicuramente attribuibile a due fattori: in primo luogo la presenza di un attrito turbolento tra le particelle permette il trasferimento locale di momento angolare, ed anche la conversione dell'energia gravitazionale in energia termica, con conseguente emissione radiativa; inoltre esperimenti in laboratorio hanno mostrato che la presenza di campi magnetici molto forti ed instabili può avere anch'essa un ruolo importante nel trasferimento di momento angolare su distanze maggiori. Nella trattazione che seguirà non terremo però di

¹Per primo punto Lagrangiano si intende quella posizione, compresa tra due oggetti legati gravitazionalmente, in cui le forze attrattive prodotte dalle due masse si bilanciano e l'accelerazione risultante è nulla (si tratta quindi del centro di massa del sistema). Il punto di equilibrio è instabile, e definisce il raggio discriminante per cui un terzo corpo (di massa trascurabile) orbita attorno ad uno o all'altro dei due oggetti.

conto di quest'ultimo fattore, approfondito solo di recente ², e considereremo che il trasporto di momento angolare e la dissipazione in calore siano dovuta unicamente all'attrito che viene a svilupparsi tra le particelle.

Tutta la fisica del disco, proprio per la sua conformazione, sarà inserita in un sistema di coordinate cilindriche in cui R indicherà la coordinata radiale, z quella assiale, e θ l'angolo polare (Fig.1.2). Per la natura del disco esisteranno due simmetrie fondamentali: una di rotazione rispetto all'asse z , e la variabile θ sparirà nel processo di integrazione fornendo un fattore 2π , un'altra rispetto al piano equatoriale $z = 0$, e d'ora in avanti studieremo solo la zona di spazio che va da $z = 0$ a $z \rightarrow +\infty$. Passeremo quindi a suddividere il disco in anelli concentrici di spessore dR , i quali ruoteranno rigidamente (ossia la velocità di rotazione non sarà funzione di z) con velocità angolare $\Omega(R)$. Nel momento in cui vi sarà differenza tra le velocità di rotazione di due anelli consecutivi potremo utilizzare la fluidodinamica per definire un attrito viscoso, al quale attribuiremo tutte le proprietà necessarie per il trasporto di momento angolare e la produzione di radiazione luminosa.

Per parlare di attrito, e poterlo quantificare, è tuttavia necessario definire una viscosità ν , ossia un coefficiente che legghi la differenza di velocità di rotazione tra anelli adiacenti alla forza che ne scatuisce. Nel nostro caso è un processo alquanto complicato, giacché il moto delle particelle, date le elevate temperature, sarà sicuramente turbolento e la materia altamente ionizzata; inoltre, sebbene sia un argomento studiato da oltre 30 anni, ancora oggi si hanno difficoltà a creare modelli che riescano a descrivere precisamente le interazioni che avvengono in questi sistemi. Quello che invece hanno fatto Shakura e Sunyaev³ è stato di introdurre un parametro α che definisce la viscosità come:

$$\nu = \alpha H(R, t) c_s(R, t) \quad (1.3)$$

$H(R, t)$ è lo spessore del disco (ossia la lunghezza scala, dipendente da R e t , in cui è concentrata quasi tutta la materia del disco), c_s è la velocità del suono in questo mezzo; ν ha le dimensioni di una superficie diviso un tempo. Nel caso di moti turbolenti, dalla fluidodinamica si può approssimare $\nu_{turb} \sim \lambda_{turb} v_{turb}$ dove questi due valori sono i fattori di scala (in diametro e velocità di rotazione) dei vortici che si formano nel mezzo in esame. Il parametro α non rappresenta altro che la normalizzazione di ν , e poiché né i vortici potranno essere più grandi di quanto è spesso il disco, né potranno ruotare più velocemente del suono, si avrà che $\alpha \leq 1$. La forte assunzione che Shakura e Sunyaev fanno su α è che il suo valore si mantenga costante su tutto il disco; in questo modo si esplicita la viscosità, liberandola da ogni dipendenza locale dovuta a dinamiche a noi ignote (ci si riferisce a questo modello proprio con il nome di ' $\alpha - disk$ ').

²Uno studio dell'argomento, al quale ci si riferisco con 'magnetorotational instability', è fornito dalle pubblicazioni di Steven Balbus e John Hawley del 1991

³Black Holes in Binary System. Observational Appearance, N. I. Shakura, R. A. Sunyaev, Astron. & Astrophysics 24,337-355 (1973)

Il notevole successo del modello è legato al fatto che, sebbene l'imposizione di α costante sembri una restrizione estremamente forte, a calcoli svolti si rivelerà autoconsistente: quelle funzioni in cui α comparirà esplicitamente avranno una dipendenza così debole da questo parametro che ogni sua variazione avrà ripercussioni minime sui risultati ottenuti, convalidando l'assunzione fatta.

1.3 Il modello α -disk

Le ipotesi per iniziare il lavoro sono cinque e definiscono solo una particolare classe di dischi; difatti la teoria non si presta ad una trattazione generale di tutta la materia in accrescimento, ma solamente di quella che soddisfa i seguenti requisiti:

1. $\nu = \alpha H c_s$, con $\alpha = \text{costante}$;
2. Elevata profondità ottica per l'assorbimento del disco: $\tau \gg 1$ (ossia alta probabilità di assorbimento dei fotoni da parte della materia costituente);
3. Disco sottile, ossia $H(R) \ll R$ (H è una grandezza di scala, indica il valore limite per $|z|$ entro cui si ha praticamente tutta la materia del disco);
4. Velocità angolare orbitale Kepleriana $\Omega = \sqrt{GM/R^3}$, indipendente da z e θ ;
5. Nel disco teorizzato da Shakura e Sunyaev gli elettroni ed i protoni devono sempre essere in uno stato di accoppiamento, di modo che la radiazione incidente sui primi possa trasferire impulso sui secondi, e l'energia dei secondi possa essere trasferita ai primi ed emessa elettromagneticamente.

L'ipotesi di disco sottile ha una conseguenza immediata: imponendo una notevole differenza di ordini di grandezza tra i fenomeni che riguardano R e quelli che riguardano z , permetterà di disaccoppiare lo studio della struttura orizzontale da quella verticale. Per la prima gli effetti verticali saranno trascurabili; nel passaggio alla struttura lungo z , d'altro canto, i valori dipendenti da R risulteranno fissati e agiranno da condizioni al contorno. Quello dell'alta profondità ottica sarà un tema affrontato più nel dettaglio nel 3° e 4° capitolo; possiamo anticipare che per profondità ottica (o spessore ottico) si intende il numero medio di interazioni che un fotone fa prima di abbandonare un mezzo: se questo numero è molto elevato la radiazione prodotta all'interno del disco verrà totalmente assorbita, e riemessa in seguito nello spazio esterno, così che ogni anello del disco si comporterà come un corpo nero in equilibrio al suo interno, che emette ad una temperatura ben definita.

Iniziamo adesso a suddividere il disco in vari anelli adiacenti di spessore dR e di altezza da $z = 0$ a $z = H$: poiché vale l'ipotesi 4 vi è rotazione differenziale all'interno del disco (ogni elemento ruota con velocità che dipende da R) e gli anelli di gas saranno sottoposti ad un momento torcente dovuto allo sfregamento delle superfici contigue, questo produrrà un trasferimento di momento angolare tra sezioni

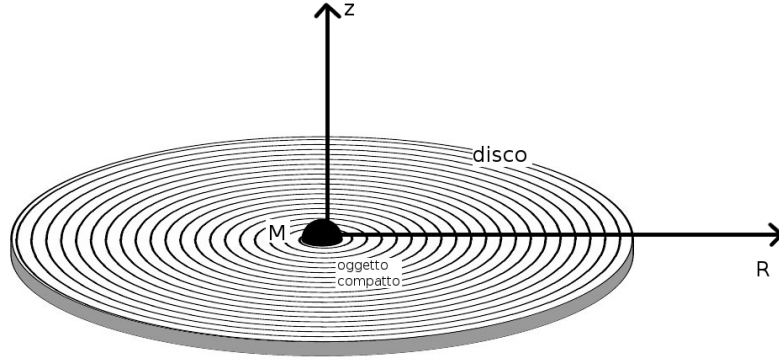


Figura 1.2: Schematizzazione del disco sottile in coordinate cilindriche, al centro abbiamo l'oggetto compatto di massa M su cui si verifica l'accrescimento; tutto il disco è concentrato in altezza in uno spessore $2H$, radialmente invece si estende ipoteticamente all'infinito

adiacenti ed una dissipazione locale di energia potenziale. Esplicitiamo i calcoli che portano alla definizione di questo momento: in coordinate cartesiane lo sfregamento tra due superfici viscosi genera, per definizione, una forza d'attrito (per unità di area) data da:

$$f_{x,y} = \eta \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]$$

dove η è la viscosità dinamica (nel S.I. si misura in [Pascal]·[secondi]) che dipende dallo stato fisico del mezzo in cui ci troviamo e dalla natura dell'interazione tra le sue componenti; v_x e v_y sono le proiezioni della velocità del fluido lungo le componenti cartesiane. Anche nel disco, per l'ipotesi di indipendenza di Ω da z , si produce un attrito viscoso solo tra superfici adiacenti. Facendo il passaggio in coordinate cilindriche ottengo una forza d'attrito diretta tangenzialmente agli anelli, il cui valore è legato da z e, per ragioni di simmetria, anche da θ :

$$f_R = \eta R \frac{\partial \Omega}{\partial R} \quad (1.4)$$

Questa è una forza agente per unità di area, il momento torcente totale agente sulla superficie di contatto tra due anelli lo ottengo moltiplicando la (1.4) per R (ottenendo il momento di una forza) e per $2\pi RH$ (ossia l'area di contatto). Chiamo questo valore W .

$$W = W(R, t) = \nu \rho R^2 (2\pi RH) \partial \Omega / \partial R \quad (1.5)$$

ρ è la densità del disco, ν è la viscosità cinematica e vale l'equivalenza $\eta = \rho \nu$. W ha le dimensioni (e la funzione) del momento di una forza [N][m] e Ω è la velocità angolare del gas. Si vede subito che i casi limite in cui non si ha azione

del momento torcente sono solamente quelli in cui il disco ruota in maniera rigida ($\Omega' = \partial\Omega/\partial R = 0$) o quando è composto da materia perfettamente fluida ($\nu = 0$). Definisco infine la densità superficiale $\Sigma(R)$, sfruttando il fatto che nel disco sottile la densità non possa variare apprezzabilmente al variare di z , almeno finché non supero il valore di $z = H$, oltre il quale ρ va velocemente a zero:

$$\Sigma(R) = \int \rho dz = \rho H \quad (1.6)$$

Se sostituita nella (1.5) ho l'espressione che d'ora in avanti userò per $W(R)$:

$$W = 2\pi R^3 (\nu \Sigma) \partial\Omega/\partial R \quad (1.7)$$

La risultante delle forze agenti su un anello è quindi la differenza di W calcolata sulle due superfici che lo delimitano, se la distanza tra queste è l'infinitesimo dR allora ottengo che il momento totale agente vale:

$$W(R + dR) - W(R) = \frac{\partial W}{\partial R} dR \quad (1.8)$$

l'uguaglianza è data dalla definizione di rapporto incrementale.

L'ultima cosa che si deve imporre, ma verrà giustificata nel 5° capitolo, è che la materia all'interno del disco non risenta dell'influenza gravitazionale del disco stesso, ma solo dell'oggetto compatto attorno a cui orbita. Questo avviene sempre, anche per dischi di raggio superiore a 10^{10} cm.

Capitolo 2

La materia nel disco

Ora che W è stato definito, sorge necessariamente un interrogativo: un gas che orbita attorno ad un oggetto compatto a cui è legato gravitazionalmente e subisce al suo interno l'azione di una forza dissipativa W , si distribuisce effettivamente a forma di disco e così si mantiene? O invece il modello di disco è assurdo e, sebbene se ne osservino in astrofisica, la definizione che abbiamo dato di W non permetterebbe una conformazione del genere? Inoltre, le soluzioni determinate da W permettono il raggiungimento di un regime stazionario per tempi considerevolmente piccoli rispetto a quelli tipici dell'evoluzione stellare? Alla fine del seguente paragrafo avremo trovato risposta a queste domande, e i tempi di rilassamento del disco che avremo ricavato saranno tali che potremmo considerare sempre uno sviluppo indipendente dal tempo per la risoluzione delle equazioni.

2.1 Evoluzione temporale del disco

In aggiunta alle mie 5 ipotesi iniziali, svilupperò ora le due condizioni di conservazione del momento angolare e della massa. Considerato l'anello di spessore infinitesimo ΔR ed altezza data H , ho che la massa contenuta nel volume considerato vale:

$$2\pi R\Sigma\Delta R$$

La variazione temporale di questa quantità è la risultante dei flussi di materia attraverso le superfici dell'anello diretta verso quelli contigui, per fare ciò devo introdurre una velocità radiale $v_R(R)$, sempre normale alla superficie dell'anello, il cui valore è definito localmente; il flusso avrà la seguente espressione:

$$\Phi(R) = 2\pi R\Sigma \frac{\Delta R}{\Delta t} = 2\pi R\Sigma v_R$$

e quindi:

$$\frac{d(2\pi R\Sigma\Delta R)}{dt} = \Phi(R) - \Phi(R + \Delta R)$$

$$\begin{aligned}\frac{d(2\pi R\Sigma\Delta R)}{dt} &= 2\pi[v_R(R)\Sigma(R)R - v_R(R+\Delta R)\Sigma(R+\Delta R)(R+\Delta R)] \\ \frac{d(2\pi R\Sigma\Delta R)}{dt} &\simeq -2\pi\Delta R\frac{d(R\Sigma v_R)}{dR} \\ 2\pi\lim_{\Delta R\rightarrow 0}\left(\frac{d(R\Sigma\Delta R)}{dt}\right) &= -2\pi\lim_{\Delta R\rightarrow 0}\left(\Delta R\frac{d(R\Sigma v_R)}{dR}\right)\end{aligned}$$

Che risolto il limite equivale a:

$$R\frac{d\Sigma}{dt} + \frac{d(R\Sigma v_R)}{dR} = 0 \quad (2.1)$$

Questa è la conservazione della massa.

Si esegue poi lo stesso procedimento per la quantità di momento angolare

$$2\pi R\Delta R\Sigma R^2\Omega$$

il cui flusso

$$\Phi(R) = 2\pi v_R R\Sigma R^2\Omega$$

stavolta è bilanciato anche dalla presenza del momento torcente $W(R, t)$ agente su entrambe le superfici delimitanti l'anello (vedi 1.8). Si ottiene, eseguendo lo stesso procedimento di prima e passando al caso limite, un'espressione per la conservazione del momento angolare:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(2\pi R^3\Omega\Sigma\Delta R) &= \Phi(R) - \Phi(R+\Delta R) + \frac{dW}{dR}\Delta R \\ R\frac{d(\Sigma R^2\Omega)}{dt} + \frac{d(R\Sigma v_R R^2\Omega)}{dR} &= \frac{1}{2\pi}\frac{dW}{dR}\end{aligned} \quad (2.2)$$

Risolvere queste equazioni ci porta lontano dagli obiettivi di questa tesi, quello che a noi interessa è verificare che esiste la possibilità di affrontare uno studio indipendente dal tempo per tutto il nostro sistema. Di seguito riporto la soluzione per Σ , analitica (eq. 2.3) e grafica (Fig.2.1)¹.

$$\Sigma(R, t) = \frac{m}{\pi R_s^2}\tau^{-1}x^{-1/4}\exp\left\{-\frac{1+x^2}{\tau}\right\}I_{1/4}(2x/\tau) \quad (2.3)$$

m è la massa contenuta nell'anello, R_s è la coordinata a cui si trova al tempo $t = 0$, $x = R/R_s$, $\tau = 12\nu t R_s^{-2}$ sono variabili adimensionali ed infine I è la funzione di Bessel modificata. Osservandone l'andamento posso dire che la viscosità ha l'effetto di disperdere qualsiasi anello lungo tutto il disco in tempi dell'ordine di $\tau_{dis} \simeq 0.5$, ricavo così il mio tempo di dispersione t_{dis} :

$$t_{dis} \sim R_s^2/24\nu$$

¹J. Frank, Accretion Power in Astrophysics, Cambridge University Press; Revised. ed. (17 gennaio 2002)

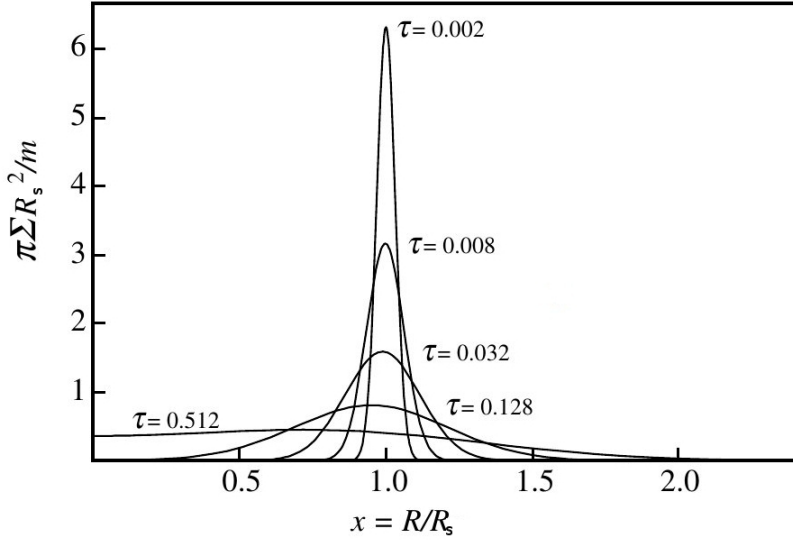


Figura 2.1: La densità Σ normalizzata nell'equazione (2.3) è espressa in funzione del raggio a tempi τ diversi, si osserva che già a $\tau = 0.5$ l'anello originariamente localizzato totalmente attorno a R_s è disperso tra 0 e $1.5R_s$

per cui l'anello si deposita uniformemente tra 0 e $1.5R_s$. Così resterà per un tempo considerevole, ed infine la massa sarà diminuita in maniera non più trascurabile a causa dell'accrescimento solo per $\tau_{dis} \gg 1$. Ogni cambiamento in fisica stellare avviene su tempi maggiori di t_{dis} anche per ν plausibilmente piccoli², e quindi non solo abbiamo una conferma che un disco che si forma non svanisce subito sotto l'azione di W, ma che il tempo che passa prima che si possa estinguere è tale da poter considerare una soluzione stazionaria per lo studio delle equazioni. Sempre dalla soluzione grafica si nota come l'azione di W porti gran parte della massa del disco a fluire verso l'oggetto compatto, mentre solo una minima parte finisce a $R > R_s$.

2.2 Disco stazionario

Ora che abbiamo eliminato la dipendenza temporale dalle nostre variabili possiamo apprestarci a ricavare una struttura che rappresenti il disco in ogni sua parte: il primo passo sarà capire come si dispone e come si muove la materia nel disco, approfittando della possibilità di disaccoppiare le variabili z ed R per poter studiare separatamente la struttura orizzontale e quella verticale. La prima sarà stretta-

²valori tipici per η in un gas sono dell'ordine di $10^{-4}\text{Pa}\cdot\text{s}$, mentre le densità ρ con cui abbiamo a che fare sono circa $10^{-6}\text{kg}/\text{m}^3$, il massimo per R_s è al più 10^7m , si ottiene quindi $t_{dis} \simeq 10^{11}\text{s} \simeq 10^4\text{yr}$

mente legata al meccanismo di produzione di radiazione termica e del trasporto del momento angolare, e dal suo studio potrà ricavare un'equazione per la temperatura, una per lo spettro di emissione ed anche una formula esplicita per la velocità v_R . La seconda invece sarà direttamente connessa con la pressione e permetterà di definire una funzione di stato per l'equilibrio idrostatico, dalla sua analisi discenderanno infine i limiti di validità imposti dall'approssimazione di disco sottile che legheranno H alle velocità (sia radiale che angolare) con cui la materia si muove all'interno del disco. Una volta definito anche lo spessore ottico, otterrò un set di equazioni adatte a descrivere il disco, non tralasciando alcun aspetto fisico.

2.2.1 La struttura orizzontale

Riprendo le equazioni (2.1) e (2.2), e pongo a zero le derivate temporali per avere soluzioni stazionarie. Ottengo per la prima:

$$R\Sigma v_R = \text{costante}$$

Questa equazione rappresenta un flusso di materia costante verso l'interno, chiamo questo valore tasso di accrescimento e lo indico con:

$$\dot{M} = 2\pi\Sigma R(-v_R)$$

Integrando la (2.2) nel caso stazionario ottengo

$$R^3\Sigma v_R\Omega = \frac{1}{2\pi} (W + C) \quad (2.4)$$

dove C è la costante di integrazione. Il passo successivo è sostituire il valore di W (vedi eq. (1.7)) precedentemente ricavato.

$$\nu\Sigma\Omega' = \Sigma v_R\Omega - \frac{C}{2\pi R^3} \quad (2.5)$$

La condizione su C , infine, si trova imponendo che per $R = R_0$ la velocità angolare del gas sia uguale a quella sulla superficie dell'oggetto compatto (ed R_0 indica proprio il raggio di quest'ultimo); inoltre $\Omega(R_0)$ dovrà essere sicuramente minore del suo valore Kepleriano, infatti se fosse uguale il gas stazionerebbe in un'orbita stabile senza poter accrescere l'oggetto massiccio. Nel caso di un buco nero impongo che la velocità angolare della materia sia minore del suo valore Kepleriano a $3R_g$ (raggio di Schwarzschild, $R_g = 2GM/c^2$) ¹, così che la materia che orbita in questa zona possa avvicinarsi ulteriormente, andando ad accrescere il buco nero.

¹Il raggio di Schwarzschild è un raggio associato ad ogni distribuzione di massa: se tutta la massa è contenuta nella sfera di raggio R_g , qualsiasi altro oggetto si venga a trovare nella sfera non potrà più uscirvi; lo stesso vale per la radiazione elettromagnetica prodotta all'interno. Alla superficie di tale sfera ci si riferisce anche con il termine di orizzonte degli eventi, in quanto non si può avere nessuna informazione su ciò che si trova al suo interno. Classicamente si può ricavare un

Per portare a termine il raccordo richiesto si definisce una parte di disco tra R_0 e $R_0 + b$ (con la richiesta che lo spessore b sia molto minore di R_0) in cui la velocità angolare del gas decresce da $\Omega_k(R_0 + b)$ a $\Omega(R_0) < \Omega_k(R_0 + b) < \Omega_k(R_0)$, discostandosi dal suo valore Kepleriano (indicato dal pedice k). Se b fosse grande rispetto a R_0 allora l'ipotesi 4 sarebbe contraddetta, invece così, poiché le dimensioni del disco sono molto maggiori di quelle dell'oggetto compatto, possiamo considerare la 4 ancora valida praticamente ovunque. Si ha quindi un massimo assoluto per la velocità angolare in $R = R_0 + b$, e poiché $b \ll R_0$ allora:

$$\Omega_k(R_0 + b) = \Omega_k(R_0) + O\left(\frac{b}{R_0}\right) \simeq \Omega_k(R_0)$$

Si va perciò a valutare la precedente equazione in $R = R_0 + b$, in cui $\Omega'(R) = 0$:

$$C = 2\pi (R_0 + b)^3 (\Sigma v_R \Omega(R_0 + b)) \quad (2.6)$$

Considerando il primo ordine, sostituendo v_R in funzione del tasso di accrescimento e il valore esplicito per $\Omega_k(R_0)$ ottengo:

$$C = 2\pi R_0^3 \left[\Sigma \left(\frac{-\dot{M}}{2\pi \Sigma R_0} \right) \left(\frac{GM}{R_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

In cui M indica il valore della massa dell'oggetto attorno a cui ho accrescimento.

$$C = -\dot{M} (GMR_0)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

Poiché in tutto il disco le velocità sono Kepleriane (come imposto dalla condizione 4) ho che:

$$\Omega' = -\frac{3}{2} \sqrt{GM} R^{-\frac{5}{2}}$$

valore per R_g imponendo che l'attrazione prodotta dal campo gravitazionale in ogni punto distante R_g dal centro di massa richieda una velocità di fuga uguale alla velocità della luce. La velocità di fuga si definisce dalla conservazione dell'energia, imponendo che a distanza infinita l'energia sia nulla:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{GMm}{R}$$

dove R indica la posizione di partenza del corpo di massa m ; sostituendo c per v_f trovo il raggio limite

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

Il valore così ricavato è solo il caso limite per buchi neri non rotanti, ed una trattazione adeguata che tenga conto del momento angolare richiede la Relatività Generale. Sempre dallo studio delle deformazioni spaziotemporali (per buchi neri non rotanti), ho tuttavia che non esistono orbite stabili per un qualsiasi oggetto che si trovi entro $3R_g$ dal centro di massa, trascureremo perciò quello che accade tra 0 e $3R_g$, imponendo il raccordo delle velocità angolari all'ultima orbita stabile.

Sostituendo questo valore e quello determinato per C nella (2.5) ottengo il risultato finale:

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}} \right) \quad (2.8)$$

Per arrivare a questo punto abbiamo usato la condizione 4, tuttavia possiamo far vedere che quella che sembra essere una necessità a priori, da uno studio attento, scaturisce come conseguenza diretta delle altre nostre ipotesi di partenza, in particolare dalla 3 e dalla 1. Per mostrare questo fatto devo sfruttare la condizione di equilibrio (poiché il disco è stazionario) della struttura verticale.

2.2.2 La struttura verticale

Abbandoniamo innanzitutto l'ipotesi 4; dato il disaccoppiamento posso fattorizzare la densità di materia nel disco come prodotto di due funzioni tra loro indipendenti:

$$\rho(R, z) = \rho_c(R)\rho_t(z) \quad (2.9)$$

Dove ρ è la densità in un punto generico, ρ_c è la densità calcolata nel piano $z = 0$, ρ_t è il contributo, fissato R , in funzione di z ; poiché il disco è sottile voglio una rapida caduta nelle densità per $|z| > H$, dove H è il valore di scala per lo spessore del disco tale che $\rho_t(|z| > H) \simeq 0$. Perché la struttura si mantenga in equilibrio idrostatico deve esserci un gradiente di pressione verticale che bilanci la forza di gravità che agisce sulle masse che non si trovano sul piano $z = 0$. Utilizzando la condizione di equilibrio fornita dall'idrostatica scrivo:

$$\vec{\nabla}P(R, z, \theta) = -\rho\vec{\nabla}V_g(R, z, \theta)$$

Dove V_g indica il potenziale gravitazionale. Proietto l'equazione sull'asse z , ottenendo:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{GM}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (2.10)$$

Poiché ci troviamo nel caso di disco sottile $z \leq H \ll R$, la (2.10) si riduce a:

$$\frac{dP}{dz} = \rho \frac{GMz}{R^3} \quad (2.11)$$

Per come è definito H posso considerare $\partial P/\partial z \sim P/H$ e $z \sim H$; inoltre, facendo uso delle equazioni per le trasformazioni politropiche, posso scrivere che la pressione in relazione alla velocità del suono in un mezzo (c_s) è:

$$P = \gamma \rho c_s^2 \quad (2.12)$$

con γ il coefficiente di dilatazione adiabatica. Inserendo tutto questo nella (2.11) posso infine dare una funzione che caratterizzi H :

$$H = \sqrt{\gamma \frac{R}{GM}} R \quad (2.13)$$

e quindi, affinché valga $z < H \ll R$ devo avere che:

$$c_s \ll \sqrt{\frac{GM}{\gamma R}} \sim \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (2.14)$$

si vede quindi che la velocità Kepleriana è molto maggiore della velocità del suono in ogni punto del disco (ricordiamo che, volendo dimostrare la 4, non è ancora detto che la velocità orbitale sia la velocità Kepleriana). Tengo a mente questo risultato e torno alla struttura radiale: uso l'equazione di Eulero per la fluidodinamica (Navier-Stokes in assenza di attriti, cosa che posso fare giacché la struttura verticale ruota rigidamente):

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} (\vec{\nabla} \cdot \bar{v}) = -\vec{\nabla} P + \rho \bar{f}$$

Dove \bar{v} è la velocità dell'elemento di materia, P è la pressione e \bar{f} è la forza di gravità. Proietto su R :

$$-\frac{v_\phi^2}{R} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{GM}{R^2} = 0 \quad (2.15)$$

Analizziamo il rapporto in ordini di grandezza tra i vari termini:

1. Come prima approssimo $\partial P / \partial R \sim P/R$ e così il terzo termine dell'equazione, sostituendo la (2.12) diventa proporzionale a c_s^2/R e per la (2.14) risulta trascurabile rispetto al quarto termine.
2. Dalla (2.8) ricavo un valore per Σ e lo sostituisco in $\dot{M} = 2\pi \Sigma R(-v_R)$, ottenendo un'espressione per v_R :

$$v_R = -\frac{3\nu}{2R} \left(1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}} \right)^{-1} \quad (2.16)$$

Per cui $v_R \sim \nu/R$, poiché già per $R > 4R_0$ la quantità tra parentesi tende a 1. Per poter confrontare il secondo termine con gli altri introduco la prima condizione, esplicitando ν con la (1.3):

$$v_R \sim \frac{\nu}{R} = \alpha \frac{H}{R} c_s$$

richiamando la condizione di disco sottile ($H \ll R$) si capisce che

$$v_R \ll c_s$$

$$v_R (\partial v_R / \partial R) \ll c_s$$

Infatti R compare ad esponente negativo nella (2.16), e la sua derivata avrà un andamento a zero per R grandi ancora più accentuato. Così anche il secondo termine si rivela esser trascurabile rispetto al terzo.

La componente radiale della velocità risulta perciò fortemente subsonica e l'eq. (2.15) si semplifica infine in:

$$v_\phi^2 \simeq \frac{GM}{R} \quad (2.17)$$

$$\frac{v_\phi^2}{R^2} = \Omega^2 = \frac{GM}{R^3} \quad (2.18)$$

Ossia che la velocità orbitale è quasi Kepleriana, e più il disco è sottile più l'uguaglianza è verificata. Perciò la condizione 4 può essere ricavata a posteriori dalla 3 e dalla 1, una volta imposto però il disaccoppiamento della struttura verticale da quella orizzontale e l'assenza di sforzi di taglio lungo piani paralleli a z ; la (2.14) mi dice che v_ϕ è fortemente supersonica, coerentemente con le semplificazioni eseguite nella (2.15); infine, proprio osservando le semplificazioni della (2.15) si nota una sostanziale differenza: la pressione è necessaria per conferire al disco uno spessore diverso da zero, tuttavia l'equilibrio lungo la componente radiale è dato dal fatto che la materia orbita a velocità quasi Kepleriana, l'accelerazione gravitazionale è completamente bilanciata da quella centrifuga, e il contributo della pressione è trascurabile.

2.3 Equilibrio Viriale

Senza entrare nel dettaglio dei calcoli che portano al risultato finale, appare subito un parallelismo con le equazioni della struttura stellare. L'energia termica all'interno di una stella non equivale totalmente a quella perduta per collasso gravitazionale, bensì proprio la presenza di un equilibrio idrostatico introduce una relazione di proporzionalità tra l'energia gravitazionale della materia legata e quella della sua eccitazione termica.

Il risultato è l'equazione del Viriale, che noi estendiamo alla dinamica del disco. Indicando con E_{tot} l'energia termica all'interno della struttura e con E_{grav} il valore ricavato dalla differenza di energia gravitazionale tra l'infinito e R (vedi par. 1.1), il teorema del Viriale dà il seguente risultato:

$$E_{tot} = -\frac{1}{2}E_{grav} \quad (2.19)$$

Ossia nel sistema legato il limite massimo di energia gravitazionale che può essere convertita in eccitazione termica è ridimensionato a $-1/2E_{grav}$: definisco quindi l'energia massima che può essere rilasciata per collasso ed il suo valore differenziale riprendendo la (1.1):

$$L_{grav} = \frac{1}{2} \frac{GM\dot{M}}{R} \quad (2.20)$$

$$dL_{grav} = \frac{1}{2} \frac{GM\dot{M}dR}{R^2} \quad (2.21)$$

Capitolo 3

La produzione di energia

Torniamo adesso ad analizzare attentamente il momento torcente W : già nel capitolo 2 avevamo sostituito il valore Kepleriano per ricavare la (2.8), ed in seguito alle conclusioni a cui siamo giunti nel paragrafo 2.2 a maggior ragione la sostituzione $\Omega = \Omega_k$ è valida (e da ora in poi ometteremo il pedice). L'azione totale della torsione agente su un anello localizzato tra R e $R + dR$ è, richiamando la (1.8):

$$W(R + dR) - W(R) = \frac{\partial W}{\partial R} dR \quad (3.1)$$

Dove W è sempre il momento torcente definito nella (1.7). Poiché la forza agisce nella direzione della velocità angolare Ω , ci sarà una potenza dovuta all'azione dissipativa:

$$D_{tot} = \Omega \frac{\partial W}{\partial R} dR = \left[\frac{\partial}{\partial R} (W\Omega) - W\Omega' \right] dR \quad (3.2)$$

Per ricavare la potenza totale che agisce nel disco devo integrare su tutto R . Dei due termini ho che il primo è già una funzione derivata per R , il suo integrale definito assumerà direttamente i valori della funzione calcolata agli estremi e dipenderà perciò solo dalle condizioni ai bordi. Il secondo invece è determinato dal valore assunto localmente dalla funzione e potrò riferirmi a quest'ultimo nell'ottica di una perdita locale di energia dovuta al momento torcente, tralasciando lo studio del primo che ha più che altro una condizione di raccordo tra le condizioni al contorno. Si dirà perciò che nel disco si verifica una dissipazione viscosa, che indico con $D(R)$, ad un tasso di $W\Omega'$ per unità di raggio dR .

$$D(R) = W\Omega' dR = W(R) \frac{\partial \Omega(R)}{\partial R} dR \quad (3.3)$$

3.1 L'azione della dissipazione viscosa

Una volta definito il tasso di energia dissipata per unità di raggio, il flusso di energia uscente dal disco per unità di area (che vale $S(R) = 2\pi R dR$) sarà:

$$Q(R) = \frac{D(R)}{2S(R)}$$

infatti ogni il disco ha due superfici emittenti, per $z = \pm H$. Sostituendo prima il valore di W (eq. 1.7)¹ e derivando $\Omega = \sqrt{GM/R^3}$ rispetto a R ottengo un'equazione che diventa indipendente dalla viscosità se utilizzo la relazione (2.8):

$$Q(R) = \frac{W\Omega'}{4\pi R} = \frac{2\pi R\nu\Sigma(R^2\Omega')\Omega'}{4\pi R} = \frac{\nu\Sigma}{2}R^2\left(\frac{9GM}{4R^5}\right)$$

$$Q(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3}\left(1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}}\right) \quad (3.4)$$

Con Q e D posso legare l'azione della dissipazione viscosa alla produzione di energia (luminosità) ed anche alla temperatura del disco: dimensionalmente D è una luminosità per unità di raggio, e se integrata su tutto R da la luminosità del disco, altrimenti fornirà quella locale, circoscritta all'anello tra R e $R+dR$; d'altro canto Q è un flusso di energia per unità di tempo e di superficie, applicare questa grandezza alla teoria di corpo nero permetterà di ricavare lo spettro dettagliato di tutto il disco. Voglio ricavarli innanzitutto la luminosità prodotta per unità di raggio:

$$dL = D(R) = 2Q(R)2\pi R dR = \frac{3GM\dot{M}}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}}\right] \frac{dR}{R^2}$$

Confronto questo valore con la luminosità derivante dal collasso gravitazionale e dal teorema del Viriale (eq.2.21), una volta preso il suo differenziale:

$$dL_{grav} = GM\dot{M}\frac{dR}{2R^2}$$

La loro differenza ci da informazioni sulla dinamica del meccanismo del trasporto del momento angolare:

$$dL_{diff} = dL - dL_{grav} = \frac{GM\dot{M}}{R^2}\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{R_0}{R}}\right) dR \quad (3.5)$$

Si ha che questo termine per $R_0 < R < 9R_0/4$ è negativo, ossia l'energia persa per collasso gravitazionale eccede quella dissipata per frizione dal disco; nel limite opposto invece l'energia rilasciata per frizione è maggiore, fino a diventare doppia (per

¹Si ha che considerando tutto il disco e non solo la metà superiore, la superficie di sfregamento tra anelli è raddoppiata, anche il valore di Σ raddoppia e diventa $2\rho H$, W dunque mantiene la definizione data dalla (1.7).

$R \gg R_0$) rispetto alla perdita locale di energia gravitazionale. L'interpretazione di questa conclusione, che appare ovvia se ricordiamo le ipotesi iniziali di stazionarietà del disco e di conservazione del flusso del momento angolare, è che l'unica funzione dell'attrito viscoso è quella di redistribuire il momento angolare dalle zone più interne del disco a quelle più esterne, dove si ha il rilascio energetico.

La Luminosità L emessa da una zona di disco compresa tra R_1 e R_2 , tenendo conto che ogni anello emette da entrambe le superfici di sfregamento, vale:

$$L(R_1, R_2) = 2 \int_{R_1}^{R_2} Q(R) 2\pi R dR = \frac{3GM\dot{M}}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left[1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}} \right] \frac{dR}{R^2} \quad (3.6)$$

Con la sostituzione $x = \frac{R_0}{R}$, $dx = -R_0 \frac{dR}{R^2}$ e scambiando gli estremi di integrazione:

$$L = \frac{3GM\dot{M}}{2R_0} \int_{x_2}^{x_1} [1 - \sqrt{x}] dx = K \left[\left(x_1 - \frac{2}{3} \sqrt{x_1^3} \right) - \left(x_2 - \frac{2}{3} \sqrt{x_2^3} \right) \right] \quad (3.7)$$

Risostituisco $x_1 = R_0/R_1$ e $x_2 = R_0/R_2$, raccogliendo i termini comuni ottengo infine:

$$L(R_1, R_2) = \frac{3GM\dot{M}}{2} \left[\frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \right) - \frac{1}{R_2} \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{R_0}{R_2}} \right) \right] \quad (3.8)$$

Per calcolare la luminosità prodotta da tutto il disco, basta mandare $R_1 \rightarrow R_0$ e $R_2 \rightarrow \infty$, quello che risulta è:

$$L_{disco} = \frac{GM\dot{M}}{2R_0} = \frac{1}{2} L_{max} = L_{grav} \quad (3.9)$$

dove L_{max} è la luminosità che viene prodotta in un ipotetico processo in grado di emettere tutta la differenza di energia gravitazionale accumulata. L'eq (3.9) dimostra innanzitutto che all'interno del disco è rispettato l'equilibrio Viriale, quindi metà dell'energia persa per collasso gravitazionale si trasforma in energia termica; significa anche che la materia in accrescimento, sottoposta al meccanismo della dissipazione viscosa, riesce ad emettere metà dell'energia che acquista; l'altra metà è ancora sotto forma di energia cinetica al raggio R_0 . Si hanno quindi due casi: se ad R_0 la materia in caduta entra in contatto con la superficie dell'oggetto compatto, qui si arresta bruscamente e la restante energia accumulata viene liberata come nel caso di un urto anelastico. Questo fa sì che la superficie dell'oggetto compatto sia fonte di una luminosità non trascurabile, e anzi, paragonabile a tutta quella del disco. Se invece il disco orbita attorno ad un buco nero, la materia che supera R_0 oltrepasserà poi anche l'orizzonte degli eventi, ogni informazione su di essa verrà quindi inevitabilmente perduta, e con essa tutta l'energia residua. Abbiamo trovato perciò una soluzione ottimale al secondo problema: il modello di Shakura-Sunyaev risponde alla necessità di avere un tasso estremamente efficiente di conversione in energia della massa a disposizione.

3.2 L'equazione del trasporto

La presenza di una produzione locale di energia, proprio come in fisica stellare, permette di ricavare una funzione per la temperatura all'interno del disco: per fare ciò richiamo le condizioni 2 e 5. La condizione 2 permette di introdurre un'approssimazione di corpo nero per l'emissione degli anelli del disco, e di legare la luminosità prodotta alla temperatura mediante la legge di Stefan-Boltzmann. Viceversa, se lo spessore ottico fosse molto basso, si avrebbe che la radiazione prodotta fuoriuscirebbe dal disco senza precedente interazione, e dovrei definire altrimenti la temperatura. Anche la condizione 5 può non essere verificata: se protoni ed elettroni fossero fortemente disaccoppiati non si avrebbe alcuna emissione relativa alla perdita di energia per collasso gravitazionale: è infatti quasi tutto protonico ($m_p \gg m_e$) il contributo alla differenza di energia, tuttavia il protone emette radiazione con un'efficienza assai inferiore all'elettrone: se non fosse legato a questi ultimi non sarebbe in grado di liberare la sua energia in tempi utili. Nel caso limite di buchi neri e forte disaccoppiamento si avrebbero protoni con energie cinetiche molto alte, ma questi finirebbero con l'oltrepassare l'orizzonte degli eventi senza praticamente emettere nessun tipo di radiazione: dischi, quindi, estremamente caldi ma oscuri. Esistono modelli anche per questo caso, in cui i dischi, non più sottili, sono dominati da fenomeni di trasporto convettivo, e sono noti come **ADAF** (*advection dominated accretion flow*).

Partiamo dunque dal fatto che ogni anello è un corpo nero in equilibrio al suo interno e che solo la superficie esterna del disco è sensibilmente più fredda, allora la variazione di temperatura lungo l'asse z è piccola e all'interno del disco il trasporto di calore è di tipo radiativo. Se il disco è sottile potrò dividerlo in sezioni con $z = \text{costante}$ e considerare il flusso di calore diretto unicamente lungo z , tale che la temperatura decresca verso l'esterno ($|z|$ crescente). Fissato il raggio R ho che l'energia prodotta localmente nell'anello dalla dissipazione viscosa deve essere tutta riemessa all'esterno del disco dopo gli opportuni assorbimenti e riemissioni, e questo avviene perché mi trovo in un caso stazionario; il flusso di energia per unità di frequenza in uscita da un corpo nero è definito dall'equazione del trasporto radiativo, ricavata proprio dalla conservazione dell'energia, con l'approssimazione che $T(z)$ vari poco rispetto a z .

$$F_\nu = -\frac{4\pi}{3\chi\rho} \frac{dI_\nu}{dz}$$

Per la prima volta compare l'opacità χ . Lasciamo la sua definizione al prossimo capitolo e per ora la consideriamo un valore costante, le cui dimensioni sono l'inverso di una densità di superficie. I_ν è l'intensità (energia per unità di tempo e superficie); il segno meno indica che la propagazione avviene per $|z|$ crescente. Integro su tutte le frequenze, e sfrutto la legge di Stefan-Boltzmann per l'emissione di corpo nero:

$$\int_\nu I_\nu d\nu = \sigma T^4$$

$$F = -\frac{4\pi}{3\chi\rho} \frac{d(\sigma T^4)}{dz}$$

$$F = -\frac{16\sigma T^3}{3\chi\rho} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.10)$$

Dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann e vale: $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 K^4)$. Il flusso calcolato all'estremità superiore del disco $F(H)$ (tolto un possibile contributo in $F(0)$ alla base) deve eguagliare il precedentemente definito flusso di energia dovuto al tasso di dissipazione di momento angolare per unità di superficie $Q(R)$.

$$F(H) - F(0) = Q(R) \quad (3.11)$$

Moltiplicando e dividendo per H al primo membro ottengo al numeratore una quantità che per il teorema della media integrale può essere riportata sotto forma di integrazione (se approssimo il flusso come uniforme all'interno dell'anello):

$$Q(R) = \frac{1}{H} H (F(H) - F(0)) = \frac{1}{H} \int F(z) dz \quad (3.12)$$

con $z \in [0, H]$. Se poi sostituisco la (3.10) ottengo:

$$Q(R) = -\frac{1}{H} \int \frac{16\sigma T^3}{3\chi\rho} \frac{\partial T}{\partial z} dz \quad (3.13)$$

Se moltiplico χ per $H \cdot \rho$ ottengo un numero puro che è lo spessore ottico τ :

$$\tau = \rho H \chi = \Sigma \chi$$

Cambiando variabile di integrazione nella (3.13) e sfruttando la definizione per lo spessore ottico, l'integrale diventa:

$$Q(R) = -\frac{4}{3} \int \frac{4\sigma T^3}{\rho H \chi} dT = -\frac{4\sigma}{3\tau} T^4 \quad (3.14)$$

Dobbiamo ricordarci però che il nostro è un integrale definito, e quindi dovrà essere calcolato prendendo la differenza dei valori ottenuti con la sostituzione di z in $z = H$ e in $z = 0$; come abbiamo detto prima però la temperatura al centro del disco è maggiore di quella sulla superficie. Poiché T compare alla quarta potenza la disuguaglianza viene notevolmente amplificata anche se la differenza tra $T(H)$ e $T(0)$ non è grande, e la (3.14) può essere scritta direttamente, ricordando che dobbiamo calcolare $T(H) - T(0)$, come:

$$Q(R) = \frac{4\sigma}{3\tau} T_c^4 \quad (3.15)$$

Dove il pedice c indica il piano $z = 0$ in coordinate cilindriche. L'equazione così sviluppata fornisce una temperatura mediata (proprio dall'equazione 3.12) all'interno del disco. Questo valore è quindi indipendente da z , e definisce completamente quello che è il tasso di produzione energetica all'interno del disco, caratterizzando ogni anello come un emettitore in equilibrio termico.

3.3 La temperatura superficiale

Come per le stelle, non possiamo osservare direttamente la radiazione proveniente dall'interno del disco, ma solo quella emessa dalla sua superficie. Sarà quindi compito di questo capitolo quello di definire un andamento dello spettro osservabile della radiazione del disco a partire dalla sua temperatura superficiale. Usiamo sempre la relazione di corpo nero:

$$\frac{dL(R)}{2S(R)} = Q(R) = \sigma T^4(R) \quad (3.16)$$

Dove la temperatura stavolta è calcolata sulla superficie $z = H$, sarà anch'essa quindi una funzione del solo raggio R . Detto questo sostituisco la (3.4):

$$T(R) = \left[\frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3\sigma} \left(1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}} \right) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3.17)$$

Si nota subito che anche in questo caso la teoria si dimostra efficace nel definire un'altra grandezza osservabile che non dipende dalla viscosità, che resta la grande incognita di tutto il modello. Definisco

$$T_0 = \left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi R_0^3\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.18)$$

Ricordando che consideriamo solo le soluzioni per $R > R_0$ la funzione $T(R)$ (Fig.3.1) presenta un massimo per $R = (49/36)R_0$ del valore di $T_{max} = 0.488T_0$, dopodiché decresce lentamente fino ad andare a zero per R molto grandi. Se vado a sostituire i valori nel caso di nane bianche o stelle di neutroni ottengo delle temperature T_0 rispettivamente dell'ordine di $10^4 K$ e $10^7 K$ e spettri di corpo nero che avranno il picco di emissione per le prime nell'UV, per le seconde nei raggi X.

3.4 Calcolo dello spettro

Continuiamo ad applicare la teoria di corpo nero per calcolare precisamente lo spettro di emissione. L'intensità della radiazione emessa ad una data frequenza ν è data dalla distribuzione di Planck per l'emissione di corpo nero $B_\nu(T)$, una volta che siamo all'equilibrio termico e possiamo definire localmente una temperatura:

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2 (e^{h\nu/kT(R)} - 1)} \quad (3.19)$$

Dove sono state introdotte:

1. Costante di Planck $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

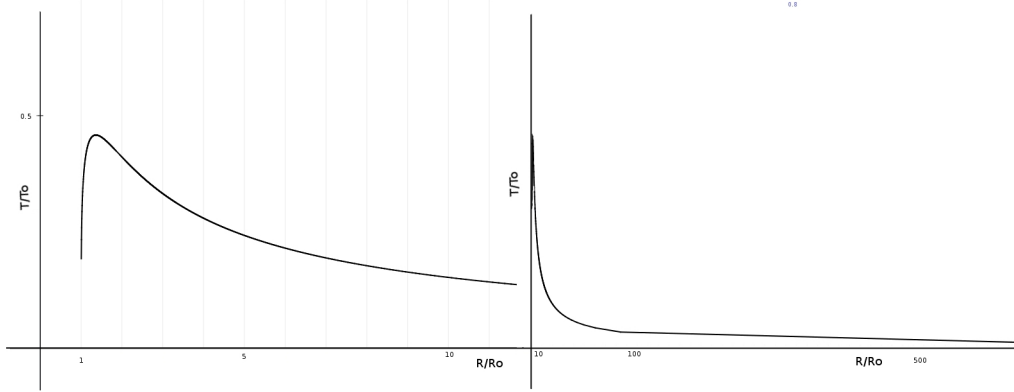


Figura 3.1: Profilo di temperatura lungo il disco: sulle ordinate ho T/T_0 (con T_0 definita dall'eq.3.18), sulle ascisse R/R_0 , nella figura a sinistra si può osservare l'andamento in prossimità dell'oggetto compatto, per R piccolo, quella a destra mette in evidenza come già a $50R_0$ si raggiunga il regime asintotico.

2. Costante di Boltzmann $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$
3. ν è la frequenza in s^{-1}
4. Velocità della luce c
5. $T = T(R)$ la temperatura superficiale data dalla (3.17)

Nel momento in cui scrivo questa formula sto considerando il disco un perfetto emettitore, e trascurando la presenza di strati esterni più freddi e rarefatti, in cui non avviene dissipazione viscosa e trasferimento di momento angolare ma solamente riassorbimento della radiazione emessa dal disco di accrescimento vero e proprio. Questa la nostra assunzione, trascurare gli effetti dell'atmosfera esterna di cui effettivamente sappiamo ben poco, semplifica il modello matematico ma ne complica il confronto con i dati empirici, poiché negli spettri reali saranno assenti contributi a determinate frequenze, a causa dei picchi di assorbimento dei gas freddi.

Quello che possiamo misurare da terra è il flusso di $B_\nu(T)$. Data D la distanza dell'osservatore e θ l'angolo sotto cui è osservato il disco ($\theta = \pi/2$ se l'osservatore è posizionato lungo l'asse di rotazione) per ottenere lo spettro di emissione di tutto il disco devo integrare I_ν su tutto R , poiché è stato ricavato da una densità superficiale di emissione: questo equivale a sovrapporre tutti gli spettri emessi dai singoli anelli, ottenendo uno spettro cumulativo:

$$F_\nu = \frac{2\pi \cos\theta}{D^2} \int_{R_0}^{\infty} B_\nu(T) R dR = \frac{4\pi h (\cos\theta) \nu^3}{c^2 D^2} \int_{R_0}^{R_\infty} \frac{R dR}{e^{h\nu/kT(R)} - 1} \quad (3.20)$$

Eseguo l'integrazione in tre casi, per definire le proprietà dello spettro anche se solo in maniera approssimata, poiché la dipendenza di $e^{1/T}$ rende necessario un

procedimento di integrazione numerica: perché ciò sia possibile dobbiamo anche cambiare il limite superiore dell'integrale da ∞ ad un R_{out} tale che la Temperatura, non nulla, sia comunque molto più piccola che all'interno del disco ($R_{out} \sim 10^{12} \text{cm}$).

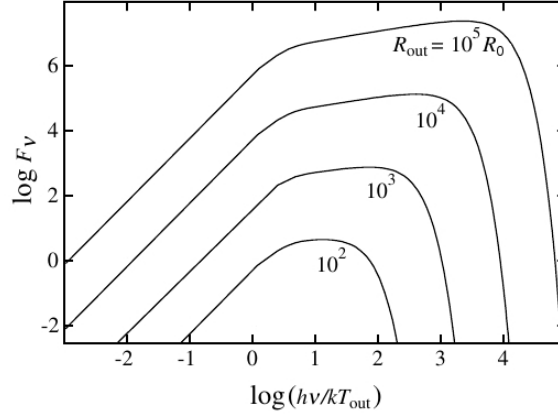


Figura 3.2: Grafico dello spettro, sull'ascissa ho un'espressione per la frequenza, mentre sull'ordinata il flusso $F_\nu(\nu)$ espresso in unità arbitrarie, sono tracciate diverse curve, fissato ogni volta un diverso rapporto R_{out}/R_0 , si vede che la zona piatta è più estesa tanto più il rapporto è grande, di pari passo, sarà maggiore anche il valore del flusso, poiché avremo a che fare con dischi sempre più grandi.

1. Spettro nelle basse frequenze $\nu \ll kT(R)/h$

Equivale a riportarsi alla legge di Rayleigh-Jeans per lo spettro di corpo nero, ossia sviluppare l'esponenziale $e^{h\nu/kT} \simeq 1 + (h\nu/kT)$. L'integrale diventa:

$$F_\nu = \frac{4\pi \cos\theta \nu^2 k}{c^2 D^2} \int_{R_0}^{R_{out}} T(R) R dR \quad (3.21)$$

Tralasciando le costanti si ottiene:

$$F_\nu \propto \nu^2 \int \left(1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}}\right)^{\frac{1}{4}} R^{\frac{1}{4}} dR \quad (3.22)$$

Poiché abbiamo a che fare con l'integrale di una funzione che non presenta asintoti, su un intervallo limitato, il suo risultato sarà una costante, e il flusso F_ν sarà quindi proporzionale a ν^2 .

2. Spettro nelle alte frequenze $\nu \gg kT(R)/h$

Nel limite opposto si ottiene che $e^{h\nu/kT} \gg 1$:

$$F_\nu \propto \nu^3 \int \frac{R}{e^{h\nu/kT(R)}} dR \quad (3.23)$$

L'integrale una volta risolto fa nuovamente da costante di proporzionalità tra il Flusso e la funzione ν^3/e^ν , che nelle alte frequenze è la legge di Wien.

3. Frequenze intermedie

Per le frequenze intermedie l'approssimazione necessaria è un'altra, ossia che il disco sia molto esteso rispetto a R_0 , di modo che si possa andare a considerare solo il contributo delle zone esterne del disco allo spettro, integrando su $R \gg R_0$, tralasciare così la parte interna approssimare $T(R)$ con il suo valore asintotico:

$$T(R) \simeq T_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{\frac{3}{4}}$$

Così facendo e definendo $x = (h\nu/kT_0)(R/R_0)^{\frac{3}{4}}$ ottengo la terza relazione per l'ultima zona dello spettro:

$$F_\nu \propto \nu^{\frac{1}{3}} \int \frac{x^{\frac{5}{3}}}{e^x - 1} dx \quad (3.24)$$

Questo integrale definisce infine la dipendenza di F_ν dalla potenza 1/3 di ν , tale relazione è tipica dei dischi, e proprio il carattere di questa banda limitata dello spettro viene ricercata nelle osservazioni galattiche a conferma del modello di Shakura e Sunyaev.

Abbiamo ricavato così uno spettro diviso in 3 settori (Fig.3.2)², assolutamente simile a quello di corpo nero tranne per la parte delle frequenze centrali, quasi piatta. Questa zona sarà tanto più estesa quanto più l'approssimazione fatta nel caso 3 sarà fondata (disco esteso rispetto a R_0 , ossia $R_{out}/R_0 \gg 1$). Un altro modo per esprimere la sostituzione fatta è che la temperatura $T(R)$ sia apprezzabilmente minore di $T(R_0)$, infatti una notevole differenza di ordini di grandezza tra R_0 e R_{out} si traduce su una temperatura $T(R_{out})$ assai minore di $T(R_0)$. Viceversa se le temperature non si discostano molto dal valore massimo si avrà che il disco ha uno spettro molto più simile a quello di un tipico corpo nero. Infine proprio gli andamenti di T_c , T , e della luminosità, tutti in funzione del raggio, permettono di dare un bordo esterno al disco: per valori molto grandi di R infatti, sebbene non sia esclusa la presenza di materia orbitante, non si ha dissipazione viscosa, e quindi non avviene né accrescimento né emissione termica: il gas orbita praticamente indisturbato, e di fatto si tratta di comune mezzo interstellare.

²J. Frank, *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge University Press; Revised. ed. (17 gennaio 2002)

Capitolo 4

La struttura del disco

Finora il disaccoppiamento tra la struttura verticale e quella orizzontale ci ha aiutato molto nel nostro lavoro, tuttavia allo stato attuale delle cose non appare esserci alcun legame tra le due, o comunque nessuna grandezza che le mette in relazione; questo ci fa capire che prima di poter descrivere completamente il disco ci servirà una funzione che connetta gli aspetti principali di entrambe. Per completare la descrizione del nostro modello dobbiamo infatti ancora considerare due fondamentali aspetti finora trascurati: l'equazione di stato, che lega la pressione della materia nel disco alla sua densità e temperatura, e la natura dell'opacità, cioè dell'interazione fra radiazione e materia. Queste ultime equazioni, riunite con quelle ricavate a partire dalla conservazione della massa e del momento angolare permetteranno di descrivere completamente la struttura interna del disco.

4.1 L'equazione di stato

Si ha che la pressione che sostiene la struttura verticale è la somma di due effetti, uno dovuto all'energia cinetica delle particelle che compongono il gas, l'altro all'emissione di fotoni delle parti interne del disco diretta verso l'esterno che portano con loro un impulso $P = \frac{E}{c}$. Sia l'energia cinetica che l'emissione di fotoni sono strettamente legati alla temperatura del disco. Dalla teoria ho la seguente espressione, composta dai due termini: al primo mi riferirò con *pressione cinetica o del gas*, al secondo con *pressione di radiazione*.

$$P = \frac{\rho k T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4 \quad (4.1)$$

Dove k è la costante di Boltzmann, μm_p è la massa media delle particelle che compongono il gas pesata in base alla massa del protone (m_p) tramite il coefficiente μ ; σ è la costante di Stefan-Boltzmann e c è la velocità della luce. Infine la temperatura T_c che compare è la temperatura a $z = 0$ definita dall'equazione (3.15), questa è una grandezza che determina lo stato di un anello infinitesimo del disco, attraverso una media su tutto z ; per definizione è quindi costante per $z < H$, prima di scendere al

valore $T(R)$, che tuttavia non è coinvolto nello studio della struttura in equilibrio. Anticipando una discriminazione che si rivelerà necessaria nel prossimo capitolo, calcolo la differenza di grandezza tra i termini che contribuiscono alla pressione: utilizzando unità di misura S.I. il coefficiente del termine lineare, assunto $\mu = 1$ è dell'ordine di $10^4 \cdot \rho [N/(m^2 \cdot K)]$; il coefficiente del secondo vale invece circa $10^{-16} [N/(m^2 \cdot K^4)]$. Considerando ρ dell'ordine di grandezza di $10^{-6} kg/m^3$ (valore plausibile per il disco di accrescimento) ho 14 ordini di grandezza di differenza, il che significa che il secondo contributo supera il primo solo a temperature maggiori di $10^5 K$. Se riprendo il discorso fatto nel paragrafo 3.3 noto che per una nana bianca questa condizione non si presenta praticamente mai nel disco di accrescimento, infatti la temperatura superficiale supera difficilmente i $10^4 K$ nel suo punto più caldo, e quella interna al massimo sarà più grande di un valore di $\tau^{1/4}$; per oggetti più massicci invece è valida a raggi piccoli, prima che la funzione della temperatura crolli al valore asintotico. In entrambi i casi esisterà un'ampia zona del disco in cui il contributo radiativo alla pressione potrà essere ampiamente trascurato rispetto a quello cinetico.

4.2 L'opacità

L'opacità, indicata con χ ha dimensioni di $1/\Sigma$, ed indica la superficie efficace a disposizione per un'interazione moltiplicata per la densità del mezzo in cui si verifica l'urto, e quindi è assai affine alla sezione d'urto. Come per quest'ultima, esiste quindi un'opacità relativa ad ogni tipo di interazione tra radiazione e materia: nel caso di un disco di accrescimento sono due i processi competitivi per l'assorbimento di fotoni:

1. Opacità Thomson: è dovuta allo scattering elastico di un fotone su di un elettrone libero: la sezione d'urto relativa allo scattering Thomson è la più piccola esistente, e tuttavia diventa l'unica possibile nel momento in cui la ionizzazione del gas raggiunge un livello tale che gli tutti gli elettroni sono liberi; in queste zone l'ipotesi 5 comincia però a cedere di applicabilità. Ci si riferisce allo scattering Thomson con il termine di processo *free – free*. Il valore della relativa opacità è:

$$\chi_{Th} = \sigma_{Th}/m_p \simeq 0.4 cm^2 g^{-1} \quad (4.2)$$

2. Opacità Kramers: Quando un elettrone è in uno stato legato con un nucleo esistono condizioni di risonanza per l'assorbimento dei fotoni dovute alla presenza di righe spettrali; vista l'elevata energia della radiazione però, sarà maggiormente favorito lo stato finale dell'elettrone libero. Le sezioni d'urto per stati legati sono molto più alte di quelle per elettroni liberi, quindi tranne che in casi di forte ionizzazione del gas, all'interno del disco sarà quest'ultima l'opacità dominante. In questo caso si parla di processo *bound – free*. Ogni singolo atomo ha perciò una sezione d'urto che dipende dal suo stato di eccitazione,

dal suo numero atomico ed anche dal grado di ionizzazione. Così, per caratterizzare uniformemente il disco, si usa l'opacità media di Rosseland. Questa è stata ricavata usando dati empirici e definisce un valore medio per l'opacità della materia stellare in funzione della temperatura. Lo stesso valore può essere usato senza commettere errore anche per i dischi di accrescimento, poiché sono composti dallo stesso materiale nelle medesime percentuali (dopo tutto il disco di accrescimento in gran parte dei casi è proprio composto dall'atmosfera esterna di una stella). Vale la relazione:

$$\chi_R = 5 \cdot 10^{24} \rho T_c^{-7/2} \text{cm}^2 \text{g}^{-1} \quad (4.3)$$

Dove ρ è la densità di materia, T_c la temperatura calcolata su $z = 0$. Esiste tuttavia un intervallo di validità per opacità Kramers che introduce un limite inferiore alla temperatura: per $T \leq 10^4 K$ non possiamo applicare questa sezione d'urto perché l'energia per lo stato finale free non è sufficiente.

4.3 Luminosità limite

Come abbiamo visto nel 4.1 più le zone interne del disco sono calde, maggiore è la pressione di radiazione, fino a raggiungere valori in cui non è più trascurabile rispetto all'attrazione gravitazionale (cosa che già avevamo fatto invece nell'equazione di Eulero, al paragrafo 2.2.2). In queste zone si rivela perciò necessario valutare un bilanciamento di forze anche sulla struttura orizzontale: calcoleremo se esiste, e nel caso quanto vale, il limite sulla luminosità (ossia sulla temperatura) in funzione del campo gravitazionale generato dall'oggetto compatto di massa M . Devo considerare che la gravità agisce sia su protoni che elettroni, ma la forza esercitata sui secondi è trascurabile (essendo $m_p \gg m_e$), d'altro canto la radiazione agisce trasferendo impulso agli elettroni, tale che la forza risultante è la pressione per la superficie efficace (sezione d'urto Thomson), ma per la condizione 5 questo viene trasferito direttamente ai protoni. Dalla (4.1):

$$f_{rad} = \sigma_{Th} \cdot P_{rad} = \frac{4\sigma\sigma_{Th}}{3c} T_c^4 = f_{grav} = \frac{GMm_p}{R^2} \quad (4.4)$$

Ne calcolo il valore in $R \sim R_0$, che è la zona più calda del disco, è quindi quel settore dove prima si raggiunge il limite che pone fine all'accrescimento:

$$\sigma T_{edd}^4 4\pi R_0^2 = L_{edd} = \frac{12\pi c G M m_p}{\sigma_{Th}} = 1.3 \cdot 10^{31} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) W \quad (4.5)$$

Chiamo questi valore rispettivamente Temperatura e Luminosità limite di Eddington; se vado a confrontare questo valore con gli ordini di grandezza per T_0 trovati nel paragrafo 3.1 mi accorgo che tutti gli oggetti considerati accrescono massa a luminosità praticamente critiche. Per un buco nero non si può imporre R_0 come

raggio minimo, ma, come abbiamo visto nel secondo capitolo, il limite inferiore è dato da 3 volte il Raggio di Schwarzschild (R_g). Dato che $R_g \propto M/M_\odot$, sostituendo questa condizione nell'equazione (4.5), si ha che la temperatura limite alla quarta potenza è inversamente proporzionale alla massa; si avranno perciò temperature via via più piccole man mano che il buco nero è più massiccio, tanto che i nuclei delle galassie, dischi attorno a buchi neri con $M \sim 10^8 M_\odot$, avranno temperature massime di $10^5 K$.

Un'altra sostituzione che può essere fatta è la (2.20), per ottenere un limite di Eddington sul tasso di accrescimento:

$$L_{edd} = \frac{GM\dot{M}_{edd}}{2R_0} = \frac{12\pi cGMm_p}{\sigma_{Th}}$$

$$\dot{M}_{edd} = \frac{12\pi cGMm_p}{\sigma_{Th}} \cdot \frac{2R_0}{GM} = 1.3 \cdot 10^{31} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{2R_0}{GM} \right) kg \cdot s^{-1} = 2.6 \cdot 10^{31} \left(\frac{R_0}{GM_\odot} \right) kg \cdot s^{-1} \quad (4.6)$$

Dove le grandezze tra parentesi sono espresse in unità S.I. Si nota che più un oggetto è piccolo, minore è il massimo ammissibile per il tasso di accrescimento. Perciò nel caso di un buco nero si raggiungerà questo limite prima che in ogni altro sistema: sostituisco la relazione $R_0 = 3R_g = 6GM/c^2$

$$\dot{M}_{edd} = 7.8 \cdot 10^{31} \frac{R_g}{GM_\odot} kg \cdot s^{-1} = 1.5 \cdot 10^{32} \frac{1}{c^2} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) kg \cdot s^{-1}$$

$$\dot{M}_{edd} = 1.7 \cdot 10^{15} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) kg \cdot s^{-1} \quad (4.7)$$

che è, infine, il tasso limite ricercato.

Capitolo 5

Equazioni per la struttura del disco

Quello che abbiamo fatto nei precedenti capitoli è stato esplicitare una serie di equazioni che legano tra loro una serie di osservabili e di proprietà fisiche che riguardano la struttura del disco. È importante che le condizioni finora trovate permettano di esprimere queste grandezze in funzione solo di parametri noti quali: raggio R , raggio minimo R_0 , massa oggetto compatto M , tasso di accrescimento \dot{M} ed α . Per fare ciò analizziamo come sono legate tra loro le espressioni che abbiamo ricavato finora.

5.1 Il sistema algebrico

Una funzione per Σ rispetto ai parametri noti è la (2.7), al suo interno compare anche ν , per risolverla quindi considero anche la (1.3). Questa si rifà a H e c_s , la prima è definita dalla (2.13), la seconda dalla (2.12). In quest'ultima compaiono ρ e P , aggiungo quindi altre due equazioni al sistema, ossia la (1.6) che chiude un circolo rimandando a H e Σ , e la (4.1). Nuovamente quest'ultima fa riferimento a una nuova variabile: la temperatura sul piano $z = 0$, T_c . Per definire T_c faccio riferimento alla (3.15) che dipende da τ , utilizzo infine la definizione di profondità ottica, chiudendo definitivamente il sistema di equazioni poiché non compaiono nuovi parametri. Qui di seguito sono tutte riunite:

$$\rho = \frac{\Sigma}{H} \quad (5.1)$$

$$H = c_s \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (5.2)$$

$$c_s^2 = \gamma \frac{P}{\rho} \quad (5.3)$$

$$P = \frac{\rho k T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma T_c^4}{3\tau c} \quad (5.4)$$

$$\frac{4\sigma T_c^4}{3\tau} = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}}\right) \quad (5.5)$$

$$\tau = \Sigma\chi \quad (5.6)$$

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}}\right) \quad (5.7)$$

$$\nu = \alpha H c_s \quad (5.8)$$

Il sistema algebrico non è risolvibile analiticamente finché nella (5.4) compare la doppia dipendenza (di primo e quarto grado) di P da T_c . Dovremo perciò dividere in disco in due tipi di zone: quelle in cui prevale il termine cinetico e quelle in cui prevale il termine radiativo. Il numero di zone si raddoppia se rammentiamo il paragrafo 4.3, per cui dovrò suddividere ogni zona in una sottozona in cui è prevalente l'opacità di Rosseland o di Thomson. Calcoleremo i limiti di ogni zona nel paragrafo 2, prima risolveremo il sistema per la zona spazialmente più estesa, che indicherò con la lettera A: abbiamo detto che il termine di Rosseland è quasi sempre dominante finché non ci avviciniamo ai casi limite per la temperatura del disco, sempre per lo stesso motivo nei contributi alla pressione trascureremo il termine radiativo a favore di quello cinetico. La Zona A è quindi la zona intermedia tra le zone interne, estremamente calde, e quelle più esterne, dove il meccanismo di emissione energetica dovuto all'accrescimento inizia a perdere di efficacia.

La Zona A: *interazione bound-free (opacità media di Rosseland), $P_g \gg P_r$.*

Parto proprio dalla temperatura per risolvere il sistema e al momento tralascio tutte le costanti fisiche e i coefficienti numerici di proporzionalità per comodità di scrittura. Riscrivo la (5.5):

$$\frac{T_c^4}{\tau} \propto \frac{M\dot{M}}{R^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_0}{R}}\right) \propto \frac{M\dot{M}}{R^3} f^4 \propto Q \quad (5.9)$$

Dove Q è quello definito dalla (3.4). Ho introdotto la funzione $f = \left(1 - \sqrt{R_0/R}\right)^{1/4}$. f assume valori compresi tra 0, per $R = R_0$ e 1 per $R \rightarrow \infty$ (e $[R_0, \infty]$ è il suo dominio), la derivata si mantiene sempre positiva ed ha pendenza infinita all'estremo sinistro del dominio, la funzione sale molto rapidamente fino a raggiungere il valore asintotico già a $R \sim 3.5R_0$. Utilizzo la (5.6) sostituendo $\chi = \chi_R$ definito tramite la (4.3) (già si vede che per lo studio delle altre zone tutta l'impostazione del sistema sarà differente):

$$\frac{T_c^4}{\Sigma\rho T_c^{-7/2}} \propto Q$$

$$T_c^{15/2} \propto \Sigma \rho Q \quad (5.10)$$

Uso adesso la (5.1) per eliminare ρ

$$T_c^{15/2} \propto \Sigma^2 \frac{Q}{H} \quad (5.11)$$

Con la (5.2) posso togliere H:

$$T_c^{15/2} \propto Q \Sigma^2 M^{1/2} R^{-3/2} c_s^{-1} \quad (5.12)$$

Per finire sfrutto la seguente relazione ricavabile sostituendo nella (5.3) la (5.4), per cui nuovamente ci si presenta il bivio della suddivisione in zone.

$$\begin{aligned} c_s^2 &\propto P \rho^{-1} \propto \rho^{-1} \rho T_c \\ c_s &\propto T_c^{1/2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Sostituisco questo nuovo risultato nella (5.12) portando c_s a sinistra:

$$T_c^8 \propto \Sigma^2 Q M^{1/2} R^{-3/2} \quad (5.14)$$

tengo da parte questa relazione per il momento, e ne sviluppo una per Σ a partire dalla (5.7), in cui sostituisco la (5.8) per eliminare ν :

$$\begin{aligned} \nu \Sigma &\propto \dot{M} f^4 \\ \alpha H c_s \Sigma &\propto \dot{M} f^4 \\ \alpha c_s^2 R^{3/2} M^{-1/2} \Sigma &\propto \dot{M} f^4 \end{aligned}$$

Ho riusato la (5.2) per eliminare H, ora uso la (5.13) per eliminare c_s e sostituisco poi il valore per la temperatura definito dalla (5.14):

$$\begin{aligned} \alpha T_c R^{3/2} M^{-1/2} \Sigma &\propto \dot{M} f^4 \\ \alpha (\Sigma^{1/4} Q^{1/8} M^{1/16} R^{-3/16}) R^{3/2} M^{-1/2} \Sigma &\propto \dot{M} f^4 \\ \alpha \Sigma^{5/4} Q^{1/8} M^{-7/16} R^{21/16} &\propto \dot{M} f^4 \\ \alpha^4 \Sigma^5 Q^{1/2} M^{-7/4} R^{21/4} &\propto \dot{M}^4 f^{16} \end{aligned}$$

Ora esplicito Q dalla (5.9) e metto in evidenza Σ :

$$\begin{aligned} \Sigma^5 &\propto \alpha^{-4} f^{16-2} \dot{M}^{4-1/2} M^{7/4-1/2} R^{-21/4+3/2} \\ \Sigma &\propto \alpha^{-4/5} f^{14/5} \dot{M}^{7/10} M^{1/4} R^{-3/4} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Questa è la prima equazione ad essere dipendente solo da variabili note e definisce completamente Σ . Può essere usata subito per calcolare H, ricordandoci sempre le sostituzioni (5.13) e (5.14):

$$H \propto c_s R^{3/2} M^{-1/2}$$

$$H \propto T_c^{1/2} R^{3/2} M^{-1/2}$$

$$H \propto \Sigma^{1/8} Q^{1/16} M^{1/32} R^{-3/32} R^{3/2} M^{-1/2}$$

Sostituendo Q e Σ trovo una relazione definitiva per H :

$$H \propto \alpha^{-1/10} f^{3/5} \dot{M}^{3/20} M^{-3/8} R^{9/8} \quad (5.16)$$

Dividendo la (5.15) per la (5.16) trovo la (5.1):

$$\rho \propto \alpha^{-7/10} f^{11/5} \dot{M}^{11/20} M^{5/8} R^{-15/8} \quad (5.17)$$

Oltre ad essere l'andamento della densità sul disco sul piano $z = 0$ mi permette di togliere ρ dalla definizione di χ_R e risolvere la (5.6). Prima però sostituiamo Σ nella (5.14), così da avere una forma nota per T_c , anch'esso parametro nella definizione dell'opacità:

$$T_c \propto \alpha^{-1/5} f^{6/5} \dot{M}^{3/10} M^{1/4} R^{-3/4} \quad (5.18)$$

$$\tau \propto \Sigma \rho T_c^{-7/2}$$

$$\tau \propto \alpha^{-3/4} f^{4/5} \dot{M}^{1/5} \quad (5.19)$$

Resta infine da determinare ν , ed anche v_R (usando la 2.16): dalla (5.8), sostituisco H e la (5.18) grazie alla (5.13):

$$\nu \propto \alpha^{4/5} f^{6/5} \dot{M}^{3/10} M^{-1/4} R^{3/4} \quad (5.20)$$

$$v_R \propto \alpha^{4/5} f^{-14/5} \dot{M}^{-1/4} R^{-1/4} \quad (5.21)$$

Ho così definito tutte le grandezze di interesse che riguardano il mio modello di disco sottile, il prossimo passo è normalizzarle a valori noti, eliminando la semplice proporzionalità, e calcolare i limiti di validità del modello e della Zona A. Le mie nuove variabili saranno:

1. $m = M/M_\odot$ dove M_\odot è la massa del Sole, e vale $M_\odot = 1.9891 \cdot 10^{33} g$;
2. $R_{10} = R/(10^{10} cm)$;
3. $\dot{M}_{16} = \dot{M}/(10^{16} g \ s^{-1})$;
4. Per caratterizzare il mezzo interstellare completamente ionizzato, ad esempio composto da idrogeno al 90% e di elio al 10%, ottengo un $\mu = 0.619$:

$$\mu = \frac{m_{tot}/m_p}{N} \simeq \frac{N_H + 4N_{He}}{N_H + N_H + N_{He} + 2N_{He}}$$

dove m_{tot} è la somma delle masse nel sistema, m_p la normalizzazione alla massa del protone ed N il numero totale di particelle. Nella mia approssimazione ho considerato la massa dell'elio uguale a quella della massa di 4 protoni, ed al numeratore compaiono il numero degli atomi d'elio e di idrogeno, trascurando

le masse elettroniche dalla somma; al denominatore invece ho un elettrone per ogni atomo di idrogeno, e due elettroni ogni atomo d'elio; posto $N_H = 90$ e $N_{He} = 10$ ottengo il μ sopra indicato. La letteratura indica un risultato più preciso ($\mu = 0.615$), che tiene di conto anche della presenza di elementi più pesanti (in bassa percentuale) e di polveri.

Le equazioni di Shakura e Sunyaev per il disco sono quindi¹:

1. $\Sigma = 5.2 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{7/10} m^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{14/5} g \text{ cm}^{-2}$
2. $H = 1.7 \cdot 10^8 \alpha^{-1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} m^{-3/8} R_{10}^{9/8} f^{3/5} \text{ cm}$
3. $\rho = 3.1 \cdot 10^{-8} \alpha^{-7/10} \dot{M}_{16}^{11/20} m^{5/8} R_{10}^{-15/8} f^{11/5} g \text{ cm}^{-3}$
4. $T_c = 1.4 \cdot 10^4 \alpha^{-1/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{6/5} \text{ K}$
5. $\tau = 190 \alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{1/5} f^{4/5}$
6. $\nu = 1.8 \cdot 10^{14} \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m^{-1/4} R_{10}^{3/4} f^{6/5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$
7. $v_R = -2.7 \cdot 10^4 \alpha^{4/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m^{-1/4} R_{10}^{-1/4} f^{-14/5} \text{ cm s}^{-1}$

Quello che possiamo subito sottolineare, che avevamo preannunciato fin dalle prime pagine della tesi, è la debole influenza del parametro α sulle nostre grandezze osservabili: questo infatti compare sempre a basse potenze; ogni variazione del parametro dal valore costante avrà perciò minime ripercussioni sulla fisica del sistema.

5.2 La divisione in zone

Il primo confronto che facciamo è quello tra le sezioni d'urto: dalla (5.6) scrivo χ_R in funzione dei parametri noti, inserendo la 5 e la 1:

$$\chi_R = \frac{\Sigma}{\tau} = 36 \dot{M}_{16}^{-1/2} m^{1/4} R_{10}^{3/4} f^{-2} \text{ cm}^2 g^{-1} \quad (5.22)$$

Se paragonata con la (4.2) ottengo che l'opacità media Rosseland è un processo dominante solo per

$$R \geq 2.5 \cdot 10^7 \dot{M}_{16}^{2/3} m^{1/3} f^{8/3} \text{ cm} \quad (5.23)$$

Dopo aver riportato R in c.g.s. Ci accorgiamo che nel caso di una nana bianca, per cui $R_0 = 10^8 \text{ cm}$, non esiste alcuna nessuna zona interna in cui l'opacità Thomson sia dominante, a meno tassi di accrescimento estremamente elevati. L'opacità di Rosseland ha tuttavia un'altra limitazione: come detto nel capitolo 4, è applicabile solo per temperature superiori a 10^4 K , e nel caso del disco secondo il modello

¹Il metodo per ricavare i valori espliciti per le costanti di proporzionalità è illustrato nell'appendice A.

Shakura-Sunyaev la temperatura va a decrescere verso l'esterno (come $R^{-3/4}$); arriveremo perciò ad un raggio R per cui l'opacità dominante tornerà ad essere quella di Thomson.

Nel caso particolare di un oggetto con $M = M_\odot$, $\dot{M}_{16} = 1$ il passaggio dal regime *free – free* a quello *bound – free* avviene per $R \sim 10^8 \text{ cm}$. Se studio la funzione (3.15), approssimandola la sostituzione (3.4) a $R^{-3}f^4$, ottengo che già a $R \sim 10R_0$ il valore della temperatura si è ridotto di un fattore 10. Considerando quindi una stella di neutroni, che ha un raggio di circa 10^5 cm e la cui temperatura massima del disco sta tra $10^6 K$ e $10^7 K$, ho che la transizione da regime di pressione di radiazione dominante a pressione cinetica dominante avviene ad un raggio di circa 10^7 cm , un valore 10 volte inferiore a quello per cui avviene la transizione da opacità Thomson ad opacità Rosseland. In conclusione potrò dividere l'intero disco in 4 zone (ma 2 di queste formalmente descritte dalle stesse equazioni), con la condizione di raccordare al contorno tra loro le soluzioni algebriche sviluppate in ciascuna zona. Riassumendo in ordine di raggio crescente:

1. Zona C: pressione di radiazione e opacità Thomson
2. Zona B: pressione cinetica e opacità Thomson
3. Zona A: pressione cinetica e opacità Rosseland
4. Zona B: pressione cinetica e opacità Thomson

La transizione dalla Zona C alla Zona B avviene quando la pressione di radiazione equivale quella cinetica. Il raggio discriminante esatto non può essere ricavato a partire dalle espressioni che abbiamo ricavato poiché riguardano esclusivamente la zona A, ma è quello che verifica l'equivalenza:

$$T_c(R) \simeq (\rho(R)(kg/m^3)^{-1} \cdot 10^{20})^{1/3} K$$

Per la transizione $B \rightarrow A$ vale quanto ricavato nella (5.23) poiché qui le equazioni della Zona A sono valide; l'ultima transizione infine ($A \rightarrow B$) si verifica quando $T_c(R) \simeq 10^4$: trovandomi al limite superiore della Zona A, uso la (4.) che è ancora valida, ed approssimo i vari parametri all'unità (anche $\alpha^{-1/5}$).

$$T_c = 10^4 K = 1.4 \cdot 10^4 R_{10}^{-3/4} K$$

$$R_{10} = 1.588$$

Ossia si ottiene la transizione dalla Zona A alla Zona B più esterna a raggi $R \simeq 1.6 \cdot 10^{10} \text{ cm}$. In figura (5.1)¹ è riportata una rappresentazione della suddivisione in zone, espressa anche in funzione del parametro M .

¹J. Frank, *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge University Press; Revised. ed. (17 gennaio 2002)

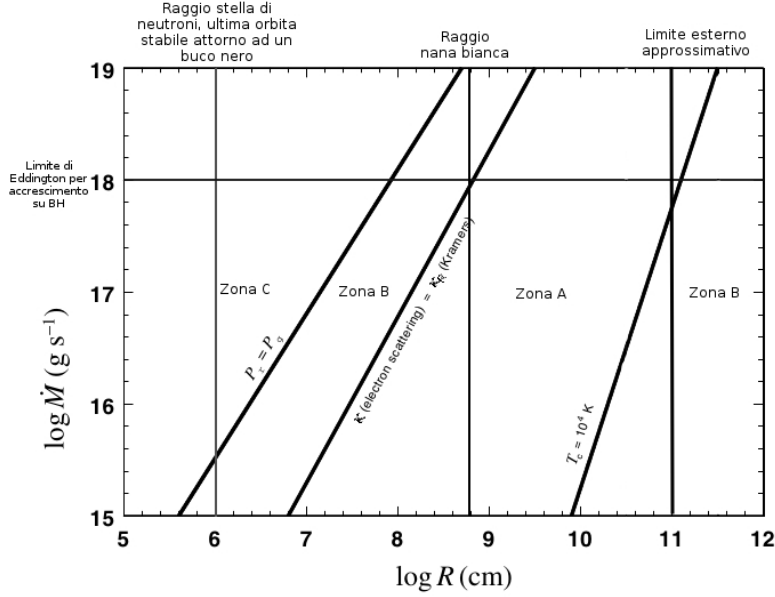


Figura 5.1: Suddivisione in Zone in funzione del tasso di accrescimento (ordinate) e del raggio (ascisse), il primo è ovviamente una condizione al contorno del sistema; riporto il \dot{M}_{edd} ricavato dalla (4.7)

5.3 Considerazioni sulla Zona A

Osservando l'andamento delle soluzioni trovate per la Zona A si possono verificare alcune delle nostre ipotesi, per controllare se il lavoro sviluppato sinora è autoconsistente:

1. $H/R \ll 1$ sempre;
2. $\tau \gg 1$ sempre;
3. massa disco \ll massa oggetto compatto

Scrivo il rapporto H/R , e per fare ciò devo riesprimere R nelle unità di R_{10} :

$$\frac{H}{R} = 1.7 \cdot 10^{-2} \alpha^{-1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} R_{10}^{1/8} f^{3/5} \quad (5.24)$$

Quello che possiamo dedurre è che H risulta sempre più piccolo di circa due ordini di grandezza rispetto ad R , e che il loro rapporto è pressoché costante; anzi, il disco risulterà leggermente concavo, con il risultato che si potranno osservare dei fenomeni di riscaldamento delle zone superficiali più esterne dovute all'emissione termica in quelle più interne. Infine, qualora dovessimo osservare zone convesse del

disco potremmo affermare che il fenomeno è dovuto ad una variazione di $\alpha^{-1/10}$ più veloce di $R^{1/8}$, e potremmo ottenere informazioni sulla non costanza del nostro parametro.

La questione riguardante τ è abbastanza evidente visto la sua dipendenza da pochi parametri: è sempre molto maggiore di 1 tranne in zone veramente vicine all'oggetto compatto, ma dobbiamo ricordarci che per raggi di questo tipo non ci troviamo più nella Zona A. Così τ è praticamente costante ($e \gg 1$) ovunque.

Poiché la Zona A è la più estesa, al suo interno sarà contenuta gran parte della massa del disco: calcoliamo approssimativamente tutta la massa estendendo la Zona A a tutto lo spazio compreso tra R_0 e $R \sim 10^{11}cm$ per avere una stima approssimativa di M_{disc} :

$$M_{disc} = 2\pi \int \int \rho R dz dR = 2\pi \int_{R_0}^{10R_{10}} \Sigma R dR$$

esplicitando Σ , quello che devo fare è rendere adimensionale R , tale che $R = 10^{10}R_{10}cm$, $dR = 10^{10}dR_{10}cm$, a quel punto gli estremi di integrazione diventano 0 e 10, poiché R_0 è trascurabile rispetto a $10^{10}cm$:

$$M_{disc} = 10.4\pi\alpha^{-4/5} \dot{M}_{16}^{7/10} m^{1/4} 10^{20} cm^2 \left(\int_0^{10} (R_{10})^{-3/4} f^{14/5} R_{10} dR_{10} \right) g \cdot cm^{-2}$$

Per finire utilizzo la media integrale per ottenere un limite superiore massimizzando le funzioni all'interno: il massimo per f è 1, per $R_{10}^{1/4}$ è anch'esso 1, difatti nella nostra integrazione R_{10} al più vale 10. Si osserva che la massa del disco, presi uguali ad 1 tutti gli altri parametri è al massimo $\alpha^{-4/5} \cdot 10^{22} g$, e quindi, se α non è dell'ordine di almeno 10^{-10} , la massa del disco sarà sempre trascurabile rispetto a quella dell'oggetto su cui ho accrescimento, che vale $1M_{\odot} \simeq 10^{33}g$ nel momento in cui abbiamo posto $m = 1$.

5.4 Conclusioni

Una simile trattazione può essere svolta per le zone B e C, selezionando i termini appropriati nell'equazione di stato e in quella dell'opacità. Così facendo si ottiene una descrizione completa del disco di accrescimento. La possibilità di tale soluzione completa, unita ai facili test di autoconsistenza, è alla base del successo del modello di Shakura e Sunyaev, che è tuttora il più citato ed utilizzato in ambito astrofisico. Se tale successo è dovuto alla debole dipendenza delle soluzioni dal parametro α , ciò costituisce anche il suo principale limite: le nostre equazioni, abbiamo più volte detto, dipendono da α in maniera alquanto debole e perciò la nostra ignoranza della viscosità non compromette significativamente la nostra conoscenza del disco; d'altro canto lo studio dei dischi che rispondono al modello non potrà darci informazioni precise sul comportamento locale della viscosità, che rimane quindi non compresa fisicamente.

Appendice A

Costanti di proporzionalità

Qui di seguito sono elencate le costanti del sistema, come si presentano all'ultimo passaggio di ogni risoluzione:

costante per Σ (eq. 5.15)

$$\left[\frac{9}{8} \cdot 10^3 \left(\frac{15}{4\sigma} \right)^{1/8} \left(\frac{\gamma k}{\mu m_p} \right)^{15/16} G^{9/16} \right]^{-4/5} \quad (\text{A.1})$$

costante per H (eq. 5.16)

$$\left(\sqrt{\frac{\gamma k}{\mu m_p G}} \right)^{15/16} \left(\frac{15 \cdot 10^{24}}{4\sigma} \right)^{1/16} \left[\frac{9}{8} \cdot 10^3 \left(\frac{15}{4\sigma} \right)^{1/8} \left(\frac{\gamma k}{\mu m_p} \right)^{15/16} G^{9/16} \right]^{-1/10} \left(\frac{3G}{8\pi} \right)^{1/16} \quad (\text{A.2})$$

prima costante per T_c (eq. 5.14)

$$\left(\frac{15 \cdot 10^{24}}{4\sigma} \sqrt{\frac{G\mu m_p}{\gamma k}} \right) \quad (\text{A.3})$$

costante per ρ (eq. 5.17)

$$\left(\sqrt{\frac{\gamma k}{\mu m_p G}} \right)^{-15/16} \left(\frac{15 \cdot 10^{24}}{4\sigma} \right)^{-1/16} \left[\frac{9}{8} \cdot 10^3 \left(\frac{15}{4\sigma} \right)^{1/8} \left(\frac{\gamma k}{\mu m_p} \right)^{15/16} G^{9/16} \right]^{-7/10} \left(\frac{3G}{8\pi} \right)^{-1/16} \quad (\text{A.4})$$

costante finale per T_c (eq 5.18)

$$\left(\frac{15 \cdot 10^{24}}{4\sigma} \sqrt{\frac{G\mu m_p}{\gamma k}} \right)^{1/8} \left[\frac{9}{8} \cdot 10^3 \left(\frac{15}{4\sigma} \right)^{1/8} \left(\frac{\gamma k}{\mu m_p} \right)^{15/16} G^{9/16} \right]^{-8/5} \quad (\text{A.5})$$

Vista il gran numero di termini, essendo ogni parametro definito a partire dal precedente, nelle seguenti equazioni saranno indicate le costanti precedenti, qualora

ricompaiano, con la dicitura $cost(*)$; ad esempio $cost(\rho)$ equivale all'eq. (6.4).
costante per τ (eq 5.19)

$$cost(\rho) \cdot cost(\Sigma) \cdot (cost(T_c))^{-7/2} \quad (\text{A.6})$$

costante per ν (eq. 5.20)

$$cost(H) \cdot (cost(T_c))^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{\gamma k}{\mu m_p}} \quad (\text{A.7})$$

costante per v_R (eq 5.21)

$$cost(\nu) \cdot (-3/2) \quad (\text{A.8})$$

Bibliografia

- [1] N. I. Shakura, R. A. Sunyaev, *Black Holes in Binary System. Observational Appearance*, Astron. & Astrophysics 24,337-355 (1973)
- [2] J. Frank, A. King, D. Raine, *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge University Press; Revised. ed. (17 gennaio 2002)
- [3] M. S. Longair, *High Energy Astrophysics*, Cambridge University Press; Third Edition (2011)
- [4] A.King, *Disc accretion in active galactic nuclei*, New Astronomy Reviews, 52 (2008) 253-256
- [5] D. Maoz, *Astrophysics in a Nutshell*, Princeton University Press, March 2007
- [6] A. Marconi, *Struttura stellare*, Dispense del corso di Fondamenti di Astrofisica, Università degli Studi di Firenze
- [7] G. Risaliti, et al. *Outflowing clouds in the NLS1 Mrk 766* 2011, MNRAS 410, 1027
- [8] Wang., J., et al. *Extended X-Ray emission in the HI cavity of NGC 4151* The Astrophysical Journals Letter 719,(2010) L208
- [9] Vanden Berk, S., et al. *Composite Quasar Spectra from the Sloan Digital Sky Survey* The Astronomical Journal, 122,(2001) 549