第 3 章

对偶线性规划与理论

任何一个线性规划问题都伴随着一个“影子”线性规划问题，其中一个线性规划问题称为原始线性规划问题；另一个被称为对偶线性规划问题。当一个线性规划问题解决后，另一个问题也得到了答案。有关原始问题与对偶问题的关系在 1947 年已经开始，并形成完善的理论。对偶理论深刻地揭示了原问题与对偶问题的内在联系，不仅可以增强对原始问题的理解，还是一些新算法的思想源泉。因此研究对偶理论无论是对理论工作者，还是工程实践者来说，意义重大。在本章的随后几节中，将讲述对偶理论在线性规划问题的内点算法和对偶算法中的具体应用。

3.1 对偶理论

3.1.1 对偶问题的定义

1. 对称形式的对偶问题定义

为了得到对称形式的原始对偶关系，首先要研究非标准型线性规划模型，然后推出标准型形式的线性规划模型的对偶形式。原始一对偶模型定义如下。

原始问题：

$$\max\ x_0 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s. t. } \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3.1.1}$$

对偶问题：

$$\min\ w_0 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$
$$\text{s. t. } \begin{cases} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

这里 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{b},\boldsymbol{w}$ 是 m 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 维矩阵。从上面的两个模型可以看出，原模型和对偶模型采用相同的常量，无非是这些常量出现的位置不同。

例 3.1.1 假设原始问题为

$$\max\ x_1 + 3x_2$$
$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

上述模型的对偶模型为

$$
\max\ 6w_1+6w_2
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases} w_1-w_2\leqslant 1\\ w_1+2w_2\leqslant 3\\ w_1,w_2\geqslant 0\end{cases}
$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成行向量和列向量的形式：

$$
\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_i,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]^{\mathrm{T}}
$$

其中：

$$
\boldsymbol{\alpha}_j=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]
$$

那么原始问题和对偶问题可以写为向量形式：

$$
\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{b}_i, & i=1,\cdots,m\\ \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{3.1.3}
$$

$$
\min\ \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{w}\geqslant \boldsymbol{c}_j, & j=1,\cdots,n\\ \boldsymbol{w}\geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{3.1.4}
$$

为了更加清晰地看到原始问题与对偶问题的关系，将上述矩阵形式的模型写为表格形式，如表 3.1.1 所示。

表 3.1.1　原始问题与对偶问题的关系

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$x_0=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ix_i$		$w_0=\sum\limits_{j=1}^{m}b_jw_j$
c_1 $\geqslant$	c_2 $\geqslant$	$\cdots$	c_n $\geqslant$			
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\leqslant$	b_1	w_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\leqslant$	b_2	w_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\leqslant$	b_m	w_m

上述表格是对原始问题及其对偶问题的综合描述，从行的角度看，每一行对应着一个原始问题的一个约束方程，每一列对应着一个对偶问题的一个约束方程，右上角分别是原始问题和对偶问题的目标函数值。从上述表格可以看出原始问题与对偶问题之间有以下关系。

（1）原始问题有 n 个变量和 m 个约束方程，而对偶问题有 m 个变量和 n 个约束方程。

（2）原始问题的目标函数是极大化，对偶问题是极小化。

（3）原始问题的约束均为小于等于约束，对偶问题均为大于等于约束。

（4）所有的原始问题的变量和对偶问题的变量均为非负要求。

（5）原始问题的每一个约束对应于对偶问题的一个变量，即原始问题的约束 $\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{x}\leqslant b_i$ 对应于对偶问题的变量 w_i；对偶问题的每一个约束对应于原始问题的一个变量，即 $\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{w}\geqslant c_j$ 对应于原始问题的变量 x_j。

（6）原始问题的目标函数的每一个变量的系数对应于一个对偶问题的一个约束的右端常量，即 c_i 是对偶问题的第 i 个约束 $\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{w}\geqslant c_i$ 的右端常量。

(7) 系数 a_j 是 x_j 的第 i 个约束的系数，同时又是 w_i 的第 j 个约束的系数。

2. 非对称形式的对偶问题

上述的模型是对称形式的对偶问题的定义，但是常见到的线性规划问题的模型并不总满足上述的形式，因此要考虑其他的形式线性规划问题的对偶问题。首先考虑等式约束的线性规划问题的对偶形式：

原始问题：

$$\max x_0 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t. }\begin{cases}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{3.1.5}$$

定义 3.1.1 线性规划模型的等价性：如果两个线性规划模型能够相互转化，且转化后可行解、最优解都相同，则称这两个线性规划模型等价。

首先先把上述约束方程转换为对称形式的原始问题的形式：

$$\max x_0 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t. }\begin{cases}\boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{Ax} \geqslant -\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{3.1.6}$$

可以看出式(3.1.5)和式(3.1.6)是等价的。

采用表 3.1.1 的形式，将式(3.1.6)写成如表 3.1.2 所示的形式。

表 3.1.2 原始问题与对偶问题的关系

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$		
c_1	c_2	$\cdots$	c_n		$w_0 = \sum_{j=1}^{m} b_j\lambda_j - \sum_{j=1}^{m} b_j\gamma_j$	
$\geqslant$	$\geqslant$	$\cdots$	$\geqslant$			
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\leqslant$	b_1	λ_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\leqslant$	b_2	λ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\leqslant$	b_m	λ_m
$-a_{11}$	$-a_{12}$	$\cdots$	$-a_{1n}$	$\leqslant$	$-b_1$	γ_1
$-a_{21}$	$-a_{22}$	$\cdots$	$-a_{2n}$	$\leqslant$	$-b_2$	γ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	$\cdots$	$-a_{mn}$	$\leqslant$	$-b_m$	γ_m

上述表格很容易写成矩阵形式：

$$\min w_0 = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$
$$\text{s.t. }\begin{cases}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{\lambda} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\gamma} \geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{3.1.7}$$

令 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\gamma}$，则 $\boldsymbol{w}$ 没有正负的限制，式(3.1.4)可以简化为

$$\min w_0 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{c} \tag{3.1.8}$$

从上面的对偶模型可以看出，原始问题如果是等式约束，则所对应对偶问题的变量无正

负限制。

3. 一般形式的对偶问题

下面描述一般形式的线性规划模型的对偶形式，考虑如下模型。

$$\max x_0 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2\\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{x}\geqslant 0\end{cases}\tag{3.1.9}$$

首先将上述模型转化为式(3.1.1)的等价形式：

$$\max x_0 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}_2\\ -\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}\leqslant-\boldsymbol{b}_2\\ -\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}\leqslant-\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{x}\geqslant 0\end{cases}\tag{3.1.10}$$

然后针对每一个约束方程引入一个非负的变量：

$$\max x_0 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}_1 & \text{对应 }\boldsymbol{w}_1\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}_2 & \text{对应}\boldsymbol{\gamma}_1\\ -\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}\leqslant-\boldsymbol{b}_2 & \text{对应}\boldsymbol{\gamma}_2\\ -\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}\leqslant-\boldsymbol{b}_3 & \text{对应}\boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{x}\geqslant 0,\boldsymbol{w}_1\geqslant 0,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\geqslant 0,\boldsymbol{\lambda}\geqslant 0\end{cases}$$

得到式(3.1.9)的对偶模型：

$$\min \boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_3\leqslant\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{w}_1\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{\lambda}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{3.1.11}$$

令 $\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{w}_3=-\boldsymbol{\lambda}$，则 $\boldsymbol{w}_2$ 无正负限制，$\boldsymbol{w}_3\leqslant\boldsymbol{0}$，将式(3.1.11)化简为

$$\min \boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{w}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{w}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{w}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_3\leqslant\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{w}_1\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_3\leqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{3.1.12}$$

式(3.1.9)与式(3.1.12)互为原始一对偶模型对。

从一般形式的原始一对偶模型对可以得出如下结论。

(1) 如果原始问题的约束为小于等于约束，则其所对应的对偶变量为非负要求。

(2) 如果原始问题的约束为大于等于约束，则其所对应的对偶变量为非正要求。

(3) 如果原始问题的约束为等于约束，则其所对应的对偶变量为无正负限制。

定理 3.1.1　对偶的对偶是原始问题。

证明：仅证明对称形式的对偶问题该定理成立，其他形式的对偶问题稍加变换就可以

转化为对称形式。

原始问题式(3.1.1)的对偶问题是式(3.1.2)，首先把式(3.1.2)转化为如下等价形式：

$$\max x_0 = -w_0 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{b})$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{w}(-\boldsymbol{A}) \leqslant (-\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$,则上述模型可以写成如下等价形式：

$$\max x_0 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{wB} \leqslant \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

根据定理 3.1.1,同样可以得出如下结论。

(1) 如果对偶问题的约束为小于等于约束,则其所对应的原始变量为非负要求。

(2) 如果对偶问题的约束为大于等于约束,则其所对应的原始变量为非正要求。

(3) 如果对偶问题的约束为等于约束,则其所对应的原始变量为无正负限制。

有了上述结论,很容易将一个线性规划模型转化为其对偶形式。

例 3.1.2

$$\max 10x_1 + 11x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leqslant 3 \\ 5x_1 + 3x_2 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 \geqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

根据上述规则,每一个原始约束所对应的对偶变量有如下关系。

$$\max 10x_1 + 11x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leqslant 3 & \text{对应 } \boldsymbol{w}_1 \geqslant \boldsymbol{0} \\ 5x_1 + 3x_2 = 7 & \text{对应 } \boldsymbol{w}_2 \text{ 无约束} \\ -x_1 + 4x_2 \geqslant 1 & \text{对应 } \boldsymbol{w}_3 \leqslant \boldsymbol{0} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

可得原始问题的对偶模型为

$$\min 3w_1 + 7w_2 + w_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} w_1 + 5w_2 - w_3 \geqslant 10 \\ -2w_1 + 3x_2 + 4w_3 \geqslant 11 \\ w_1 \geqslant 0, w_3 \leqslant 0 \end{cases}$$

3.1.2 对偶定理

原始问题和对偶问题的解之间有许多关系,研究对偶理论对算法工作者、理论工作者来说都有很大意义。

在下面的定理中为了表述方便,$\boldsymbol{x}$ 是指原始问题的可行解,$\boldsymbol{w}$ 是指对偶问题的可行解;$\boldsymbol{x}^*$ 是指原始问题的最优解,$\boldsymbol{w}^*$ 是指对偶问题的最优解;x_0^* ,w_0^* 分别是原始问题和对偶问题

的最优值。

定理 3.1.2　(弱对偶定理)对于对称形式的原始模型及其对偶模型来说,如果 $\boldsymbol{x}$ 是原始问题的一个可行解,x_0 是相应的目标函数;$\boldsymbol{w}$ 是对偶问题的可行解,w_0 是相应的目标函数,必有 $x_0 \leqslant w_0$。

证明:$\boldsymbol{x}$ 是原始问题的一个可行解,必有 $\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$;$\boldsymbol{w}$ 是对偶问题的可行解,必有 $\boldsymbol{wA} \geqslant \boldsymbol{c}$,且 $\boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{0}$,将 $\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}$ 方程组两边分别乘以 $\boldsymbol{w}$,则有 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = w_0$。将 $\boldsymbol{wA} \geqslant \boldsymbol{c}$ 方程组两边分别乘以 $\boldsymbol{x}$,则有 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = x_0$,所以有 $x_0 \leqslant w_0$,定理成立。

从上述定理可以推出许多有用的推论。

推论 3.1.1　原始问题的任意一个可行解的目标函数是对偶问题的一个下界。

推论 3.1.2　对偶问题的任意一个可行解的目标函数是原始问题的一个上界。

推论 3.1.3　如果原始问题的目标函数无上界,则对偶问题无可行解。

推论 3.1.4　如果对偶问题的目标函数无下界,则原始问题无可行解。

定理 3.1.3　(最优性的充分条件)对于对称形式的原始模型及其对偶模型来说,如果$\hat{\boldsymbol{x}}$是原始问题的一个可行解,$\hat{x}_0$ 是相应的目标函数,$\hat{\boldsymbol{w}}$是对偶问题的可行解,$\hat{w}_0$ 是相应的目标函数,如果满足$\hat{x}_0 = \hat{w}_0$,那么$\hat{\boldsymbol{x}}$和$\hat{\boldsymbol{w}}$分别是原始问题和对偶问题的最优解。

证明:原始问题的最优解必有:$\hat{x}_0 \leqslant x_0^*$

对偶问题的最优解必有:$\hat{w}_0 \geqslant w_0^*$

根据定理 3.1.2,有 $x_0^* \leqslant w_0^*$

综合起来有$\hat{x}_0 \leqslant x_0^* \leqslant w_0^* \leqslant \hat{w}_0$

根据命题的条件:$\hat{x}_0 = \hat{w}_0$

必有:$\hat{x}_0 = x_0^* = w_0^* = \hat{w}_0$

定理 3.1.4　(强对偶定理)对于对称形式的原始问题和对偶问题的模型来说,只要一个有最优解,则另外一个必有最优解,且二者的目标函数值相等。

证明:首先证明原始问题有最优解,则对偶问题有相同目标函数的最优解。

如果采用单纯形表格来求解原始问题,则需要首先把模型式(3.1.1)转化为等价形式:

$$\max\ x_0 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant 0, \boldsymbol{y} \geqslant 0\end{cases}$$

利用单纯形表格进行求解,由于式(3.1.1)问题有最优解,则上述问题也有最优解,假设最优解是$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^* \\ \boldsymbol{y}^*\end{bmatrix}$,最优解对应的基为 $\boldsymbol{B}$,此时必有 $\boldsymbol{x}_B^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{0}$,所有的判别数均为非负,即$[(\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}) - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N})] \leqslant \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$,即 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \leqslant \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$,令 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}$,则有 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \leqslant \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{w}$ 是对偶问题的一个可行解,其目标函数值为 $w_0 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*$,根据定理 3.1.3,$\boldsymbol{w}$ 是对偶问题的一个最优解。

利用同样的方法可以证明对偶问题有最优解,则原始问题有相同目标函数的最优解。

强对偶定理不仅对于对称形式的原始对偶问题成立,对于非对称形式和一般形式均成立。

3.1.3 对偶互补解

为了得到对偶互补解的定义，需要考虑下述模型。

原始问题：

$$\max x_0 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_S = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_S \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3.1.13}$$

其中 $\boldsymbol{x}_S=(x_{s1},x_{s2},\cdots,x_{sm})^{\mathrm{T}}$ 为 m 维列向量。

由于式(3.1.13)是式(3.1.1)的等价形式，因此其对偶问题：

$$\min w_0 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3.1.14}$$

定义 3.1.2 对偶互补解：给定式(3.1.13)约束方程的任意一个基 $\boldsymbol{B}$，与该基相对应的基本解的基变量是 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，非基变量 $\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$，目标函数为：$x_0=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。令 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}$，那么 $\boldsymbol{w}$ 被称为其对偶问题式(3.1.14)的一个对偶互补解。

从定义 3.1.2 可以看出，原始问题的基本解和对偶问题的对偶互补解并没有要求可行，因此原始问题的每一个极点(不一定是可行极点)都对应于一个对偶互补解。且原始问题的极点处的目标函数与其对偶互补解的目标函数值相等。

定理 3.1.5 (可行对偶互补解的最优性)如果原始问题的一个基 $\boldsymbol{B}$ 所对应的基本解 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$ 是可行解，且其对偶互补解 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}$对于对偶问题而言也是可行解，那么二者必然是相应问题的最优解。

证明：由于可行解 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$ 与其对偶解具有相同的目标函数，根据定理3.1.3，该定理必然成立。

定理 3.1.6 如果原始问题的一个基 $\boldsymbol{B}$ 所对应的基本解 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$ 是可行解且是原始问题的一个最优解，则其对偶互补解 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}$ 必然是对偶问题的可行解，且是最优解。

证明：由于基 $\boldsymbol{B}$ 所对应的基本解 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$ 是可行解且是原始问题的一个最优解，根据单纯形表格求解的过程，必有：

$$x_0 = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$$

由于 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$ 是最优解，必有 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\geqslant\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$，即

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{w}$ 为对偶问题的可行解。根据定理 3.1.5 可得，$\boldsymbol{w}$ 为对偶问题的最优解。

在定理 3.1.6 的证明过程中，还可以得到如下结论。

结论 3.1.1 当达到最优后，如果原始问题的变量 x_k 是基变量，那么对偶问题的第 k 个约束满足：$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_k=c_k$。

结论 3.1.2 当达到最优后，如果原始问题的非基变量是松弛变量 x_{si}，那么对偶问题的第 i 个变量非负，即 $w_i\geqslant 0$。

结论 3.1.3 当达到最优后，如果原始问题的基变量是松弛变量 x_{si}，那么对偶问题的第 i 个变量为零，即 $w_i=0$。

同样从定理 3.1.6 的证明过程中，可以得到推论 3.1.5。

推论 3.1.5　给定原始问题的一个基，不论是不是最优基，均有如下结论成立：当原始问题的变量 x_k 是基变量时，相应的对偶问题的约束方程满足等式约束(即该方程的对偶松弛变量取值为 0)；当原始问题的松弛变量 x_{si} 是基变量，那么对偶问题的第 i 个变量为零，即 $w_i=0$。

例 3.1.3　给定线性规划问题，原始问题是

$$\max\ x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+x_2\leqslant 2\\ -x_1+2x_2\leqslant 3\\ x_1-3x_2\leqslant 1\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

其对偶问题是

$$\min\ 2w_1+3w_2+w_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3w_1-w_2+w_3\geqslant 1\\ w_1+2w_2-3w_3\geqslant 2\\ w_1,w_2,w_3\geqslant 0\end{cases}$$

首先将原始问题写成等价的等式约束：

$$\max\ x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=2\\ -x_1+2x_2+x_4=3\\ x_1-3x_2+x_5=1\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

上述模型的基一共有 $C_5^3=10$ 个，分别考虑这 10 个基所对应的基变量及其对偶互补变量，验证上面的结论是否成立。

上述方程中约束矩阵和右端常量为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&1&0&0\\-1&2&0&1&0\\1&-3&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}3&1&1\\-1&2&0\\1&-3&0\end{bmatrix}$，对应的基变量为($x_1$，$x_2$，$x_3$)，非基变量为($x_4$，$x_5$)，$\boldsymbol{B}_1^{-1}=\begin{bmatrix}0&-3&-2\\0&-1&-1\\1&10&7\end{bmatrix}$，基变量为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-11\\-4\\39\end{bmatrix}$，该基变量是不可行基变量，其目标函数为$-19$；对偶互补变量为$(w_1,w_2,w_3)=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}=(0,-5,-4)$，由于不满足对偶模型的约束方程，因此为对偶问题的不可行解，其目标函数的值也是-19，同时可以验证对偶互补解的两个约束方程均为等式约束。类似于单纯形表格的求解方法，将上述基所对应的解及其对偶互补解写成表格的形式。

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}_B$	1	2	0	0	0	
x_1	1	3	1	1	0	0	−11
x_2	2	−1	2	0	1	0	−4
x_3	0	1	−3	0	0	1	39
$\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$		0	0	0	−5	−4	−19
				w_1	w_2	w_3	

从表格上可以看出，原始问题的松弛变量对应的判别数即对偶问题的对偶互补解。

(2) $\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}$，对应的基变量为$(x_1,x_2,x_4)$，非基变量为$(x_3,x_5)$，$\boldsymbol{B}_1^{-1}=\begin{bmatrix}0.3 & 0 & 0.1\\ 0.1 & 0 & -0.3\\ 0.1 & 1 & 0.7\end{bmatrix}$，基变量为$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0.7\\ -0.1\\ 3.9\end{bmatrix}$，该基变量是不可行基变量，其目标函数为 0.5；对偶互补变量为$(w_1,w_2,w_3)=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}=(0.5,0,0.5)$，由于满足对偶模型的约束方程，因此为对偶问题的可行解，其目标函数的值也是 0.5，同时可以验证对偶互补解的两个约束方程均为等式约束。

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}_B$	1	2	0	0	0	
x_1	1	3	1	1	0	0	0.7
x_2	2	−1	2	0	1	0	−0.1
x_4	0	1	−3	0	0	1	3.9
$\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$		0	0	0.5	0	−0.5	0.5
				w_1	w_2	w_3	

(3) $\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$，对应的基变量为$(x_1,x_2,x_5)$，非基变量为$(x_3,x_4)$，$\boldsymbol{B}_3^{-1}=\begin{bmatrix}0.28571 & -0.14286 & 0\\ 0.14286 & 0.42857 & 0\\ 0.14286 & 1.4286 & 1\end{bmatrix}$，基变量为$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_5\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0.14286\\ 1.5714\\ 5.5714\end{bmatrix}$，该基变量是可行基变量，其目标函数为 3.2857；对偶互补变量为$(w_1,w_2,w_3)=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}=(0.57143,0.71429,0)$，由于满足对偶模型的约束方程，因此为对偶问题的可行解，其目标函数的值也是 3.2857，同时大家可以验证对偶互补解的两个约束方程均为等式约束。

采用同样的方法，可以求出其他解对应的情况。

从上面的讨论中可以得到如下定理。

定理 3.1.7 原始问题的一个可行解 $\boldsymbol{x}$ 是最优解的充分必要条件是该可行解的对偶互补解是可行解。

3.1.4　互补松弛性质

考虑对称形式的原始对偶问题的模型，并将模型的不等式约束通过增加松弛变量和剩余变量修改成如下对偶形式：

原始问题：

$$\max\ x_0 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{x}_s \leqslant \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_s \geqslant 0\end{cases} \tag{3.1.15}$$

对偶问题：

$$\min\ w_0 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_s \geqslant \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{w},\boldsymbol{w}_s \geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{3.1.16}$$

为了论述方便，将上述模型写成向量形式：

$$\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{x}+x_{s_i} = b_i, & i=1,\cdots,m\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}, x_{s_i} = 0, & i=1,\cdots,m\end{cases} \tag{3.1.17}$$

$$\min\ \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j+w_{s_j} \geqslant c_j, & j=1,\cdots,n\\ \boldsymbol{w}\geqslant 0, w_{s_j} \geqslant 0, & j=1,\cdots,n\end{cases} \tag{3.1.18}$$

其中$\boldsymbol{\beta}_i$是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行行向量，$\boldsymbol{\alpha}_j$是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列的列向量。

定义 $n+m$ 个对偶对，从而得到这些对偶对所具有的一些有趣的特性。

原始变量与对偶剩余变量对：(x_j, w_{s_j})；

对偶变量与原始松弛变量对：(x_{s_i}, w_i)。

根据推论 3.1.2，可以看出这 $n+m$ 个对偶对中必然有一个为 0，因此可以得到如下定理。

定理 3.1.8（对偶松弛定理）　$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_s)$是模型式(3.1.14)的最优解以及$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}_s)$是模型式(3.1.15)的最优解的充分必要条件是当一个问题的松弛变量是严格正数时，与该松弛变量相关的另一个问题的值必为 0。

回忆前面利用单纯形表格求解上述问题时，可以看到，如果 $x_{s_i}=b_i-\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{x}>0$ 则说明 x_{s_i} 在达到最优解时为基变量，因此 $w_i=0$；同样，如果 $w_{s_j}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j-c_j>0$，$x_{s_i}=b_i-\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{x}>0$ 则说明 w_{s_j} 在达到最优解时为基变量，因此 $x_j=0$，上述定理 3.1.10 可以得到如下推论：

推论 3.1.6　$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_s)$是模型式(3.1.15)的最优解以及$(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}_s)$是模型式(3.1.16)的最优解的充分条件是 $\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}_s=0$，且 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{w}_s=0$。

3.2　对偶单纯形算法

3.2.1　对偶单纯形算法的基本思想

在原始单纯形算法中，要求在构造初始解时约束方程的右端向量为非负，本节考虑另外