线性代数

-18,19 课　行列式介绍

一、知识概要

这一节是为下面求特征值来进行铺垫，主要是要掌握求行列式的方法与行列式的一些性质，掌握行列式一般求解过程之后这部分不是很难。由于这部分主要在于技巧的掌握，抽象理解部分并不是很多，我这里将 18,19 课中关于行列式的内容放在了一起。

二．行列式性质

行列式是跟每个方阵都有关的一个数字。这个数字包含了这个矩阵的很多性质，例如之前介绍过的，方阵是否可逆可以根据行列式进行判断，行列式为 0，则方阵不可逆。

首先，**行列式记法：|A|**。另外，我们还知道：

方阵可逆，等价于其对应的行列式值不为 0

这是我们到目前为止对行列式的所有了解内容，那么接下来我们会介绍行列式的更多性质，这部分为我们了解行列式做了铺垫。

性质一：对于单位阵 I，有：|I| = 1

性质二：交换两行后，行列式的值相反

由上面的两个性质我们可以得到：之前学习的置换矩阵的行列式值为 1 或-1

例如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \;,\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

接下来我们的介绍有些会比较抽象，所以这里先给出二阶行列式的计算方法，便于我们理解接下来的性质：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = ad - bc$$

性质三：1. 行列式按行提出矩阵中的系数，即： $\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

或者理解为：矩阵一行乘系数等价于：整个行列式乘系数。

2.行列式是一个线性函数，但是这个线性单独反映在每一行上。即：

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

注：这里并不是:$|A+B| = |A| + |B|$,这里的线性运算并不作用于整个矩阵上，而是只反映在每一行上。可以用二阶行列式验证一下。

性质四：如果两行相等，那么行列式等于 0

这个性质的理解并不难，从线性相关角度可以很明显理解。另外，还可以用性质二证明，交换相同两行而不变号，那行列式只能是 0 了。

性质五：从矩阵的行 k 减去行 L 的 i 倍，对应的行列式值不发生改变

这就是我们经常做的消元步骤，这个过程不影响行列式。

下面就以二阶行列式来说明：

首先将$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$构造成上面的形式：$\begin{vmatrix} a & b \\ c-ia & d-ib \end{vmatrix}$

变换：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c-ia & d-ib \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{性质三.2}]{} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -ia & -ib \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{性质三.1} \\ \text{性质四}}]{} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

可见，从矩阵的行 k 减去行 L 的 i 倍，对应的行列式值不发生改变。

性质六：如果有一行为零，那么 A 的行列式为 0

这个性质很简单，让性质 3 中的 t = 0，行列式值也为 0。

性质七：上三角矩阵对应的行列式的值等于其对角线上元素的乘积

证明：前面讲到：行阶梯矩阵总是可以化成行最简形，这里类似。我们通过消元可以使得主元上下的元素为零，并且提公因子出来即可证得此结论。

$$\begin{vmatrix} d_1 & * & * & * \\ 0 & d_2 & * & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{消元化为行最简}]{} \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{vmatrix} = (d_1)(d_2)\cdots(d_n)$$

性质八： $|A|$不为零，当且仅当 A 可逆。

这个性质之前了解过，解释起来就是不可逆矩阵消元能得到全零行，其行列式必为 0。而可逆矩阵消元后各列都有主元，行列式就是主元的乘积，其行列式不为 0。

前八个都是行列式自身的性质，下面继续补充两个关于矩阵变形的性质：

性质九：方阵乘积的行列式 = 方阵行列式的乘积，即：$|AB| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

由此结论可知：

（1） 可逆矩阵的行列式与其逆矩阵的行列式互为倒数:

$$AA^{-1} = \mathrm{I} \qquad \rightarrow \qquad |\mathrm{A}||A^{-1}| = 1$$

（2）$|A^2| = (|A|)^2$（矩阵平方的行列式等于矩阵行列式的平方）

（3）$|kA| = k^n|\mathrm{A}|$（k 为常数，A 为 n 阶矩阵，提出了每一行中的 k）

性质十： $|A^T| = |\mathbf{A}|$

机器学习算法与自然语言处理公众号
丁坤博

这个性质的理解并不难，过程如下：

• 将矩阵化成 LU 的形式： $|U^T L^T| = |\mathrm{LU}|$

• 由性质九，将行列式分开：$|U^T||L^T| = |\mathrm{U}||\mathrm{L}|$

• 第四课中的 LU 分解中介绍过，L 是一个主对角线全为 1 的下三角矩阵(因为消元过程总是向下消元)。而 U 是一个上三角矩阵。很明显。像 U,L 这样的上/下三角矩阵，不论转置与否，其行列式都为对角线上各元素乘积。

注：这一课结尾时，教授提到了行交换的奇偶问题，这个问题很重要，因为行交换的奇偶性会影响最终值的正负号，所以置换矩阵行列式的正负性受其行交换次数影响。

三、行列式公式

前面介绍的是行列式的基本性质，掌握这些性质不需要知道行列式怎么求解，但是我们可以根据这些性质推出来行列式的一般求解过程。我们从二阶行列式谈

起：

利用上节讲到的行列式的**性质三.2**，我们可以得到：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{第一行线性组合}]{} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第二行线性组合}]{} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$$

再根据上面介绍的性质，很明显结果为：0 + ad + (-bc) + 0
得到结果：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}$$

这与我们之前介绍的二阶行列式求解结果相同。

观察上面的求解过程，不难发现，行列式其实取决于那些分解后非零的行列式的和，这些非零行列式有这样一个特点：各行格列均有元素。

根据这个特点，我们可以简化更高阶的行列式解法

接下来将问题扩展到三阶：
根据上面的非零行列式特点，可以得到：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

观察这个拆分形式，很明显，如果是 n 阶矩阵的话，得到的非零拆分一共有 n！种。拿这个三阶矩阵为例，非零拆分选各行格列元素时，第一行选择有 3 种，第二行有 2 中，最后一行有 1 种，所以最后一共是 3！个矩阵相加的结果。

下面通过类比得到一般公式，这个拆分过程其实是每次从一行中选择某一列上相交位置的元素来累乘，而且各行选定的列不相同。注意该项的符号的正负，写成以下形式：

$$|A| = \sum_{n!} \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots \dots a_{n\omega}$$

（其中$\alpha,\beta,\gamma \ldots\ldots \omega$ 是列标集合 1 到 n 的某种排列。n 个列标符号每个均用到 1 次。）

接下来通过一个例子来熟悉下这个公式：

【例】

求行列式：$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解：

按照公式$\sum_{n!} \pm a_{1\alpha}\, a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots\ldots a_{n\omega}$求解，刨除值为零的行列式。。

首先发现，α只能为 3 或 4，因为其他位置元素都为 0。所以逐行选定$(\alpha,\beta,\gamma,\omega)$为（4，3,2,1）和（3,2,1,4）的非零元素项的累乘，写成行列式形式：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

将其调整到标准的对角线位置，前者最少需要 2 次行交换，故为 +1，后者至少一次行交换就可以。值为 -1。

于是该行列式值为 0

四、代数余子式

接下来介绍代数余子式概念，利用代数余子式我们可以更方便地求解行列式，其作用即是将 n 阶行列式化成 n-1 阶。

根据前面所讲的公式，不难发现，在选元素做累乘时，例如从第一行中选了第一个元素，则剩余因子从剩余的 n-1 行和 n-1 列中选取，于是剩余的因子组成一个 n-1 阶行列式，这就是所谓代数余子式

如图：以第一行选定a_{11}为例，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}$$

反映在算式上，其实就是将原来的公式中所有含a_{11}项放在一起提取公因式，对应的剩余因子就是代数余子式基础(还需要进一步考虑正负问题)

前面介绍行列式公式时，我们回避了一个问题没有讨论—如何确定结果的正负号。这个问题在代数余子式计算行列式中可以得到很好的解决。

下面给出代数余子式的一般公式：

a_{ij}位置对应的代数余子式（记为C_{ij}）为：

去掉原行列式中第 i 行第 j 列后剩余元素组成的行列式值与a_{ij}的乘积的正或负值——当 i+j 为偶数时为正，奇数为负，可以理解为：$(-1)^{i+j}$ * 剩余元素组成的行列式值

符号规律如下图：

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}$$

机器学习算法与自然语言处理公众号
丁坤博

（正负符号代表选取该位置的a_{ij}后对应C_{ij}的符号）

a_{ij}对应的余子式：

去掉代数余子式的正负符号就是其对应的余子式了。

根据之前介绍过的，计算代数余子式就是一个提取公因式的过程，那么对应地，使用**代数余子式来展开一个行列式**，就能得到对应行列式的值：

$$|\mathbf{A}| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots\cdots + a_{1n}C_{1n}$$

（这是沿第一行展开的形式——如果沿第 i 行展开则只要将 1 换成 i 即可）
至此，我们学习了求解行列式的所有方法，总结如下：

- 将矩阵 A 化成三角矩阵（最简单）
- 使用代数余子式按一行展开计算（稍复杂）
- 按行列式公式完全展开计算（很复杂）

接下来通过一种特殊的矩阵熟悉一下按行展开行列式的计算方法：

【例】$A_1=1$，$A_2 = \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}$，$A_3 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}$，$A_4 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$。寻找其行列式值得规律。

解：
我们先看下 1,2,3 阶对应情况，很易求得有：

$$A_1=1，A_2 = 0，A_3 = -1$$

那么它们的对应行列式有什么规律呢？我们使用代数余子式展开看一下。
按第一行展开：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$A_4 = 1 * \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} + (-1 * \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix})$$

$$\boxed{(-1)^{i+j}}$$

经过计算：

$$A_4 = A_3 - A_2$$

由这个矩阵的特殊性，其实存在规律：

$$A_n = A_{n-1} - A_{n-2}$$

所以这个结构的一组行列式对应的值是一个数列：1，0，-1，-1，0,1 这样的循环。也就是其对应行列式的值以 6 为周期进行变换。

五、学习感悟

这两节主要围绕计算行列式的技巧展开讨论，首先介绍了行列式具有的性质，之后引出了使用公式计算行列式的方式，最后介绍了最常用的计算行列式的方法：代数余子式展开。这部分主要是计算技巧问题，需要理解的部分较少。