线性代数

-11 课　矩阵空间 秩 1 矩阵

一、知识概要

上节末尾我们介绍了矩阵空间，这是一种延伸的向量空间。这节我们从矩阵空间谈起，介绍矩阵空间的维数，基等问题。渗透一些微分方程与线性代数之间的联系，并介绍秩为 1 的矩阵特点。

二．矩阵空间

还是上一节中的问题，将所有 3*3 的矩阵都看做“向量空间”中的元素，很明显，由所有 3*3 矩阵构成的集合中，矩阵之间加法与数乘矩阵都是封闭的，所以所有 3*3 矩阵构成的集合 M 可以被称为空间。

上节中介绍过，M 有两个基本的子空间：

1. 对称矩阵 S
2. 上三角矩阵 U

上面两个矩阵集合中，加法封闭与数乘封闭都很容易得到证明。

而 S 与 U 空间相交，得到另一个子空间：对角阵 D。

2.1 基与维数

最明显的就是 M 的基，对任何一个 3*3 矩阵都适用的基，类似R^9的基：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

与R^9的向量空间类似，只不过这里矩阵自身的性质决定了基的存在状态。

所以 M 的维数为 9。

接下来要讨论的是对称矩阵 S 与上三角矩阵 U

S 与 U 的基也很好写出，让每个元素都等于一次 1 就可以了。一并给出：

对称阵 S 的基有 6 个：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

上三角矩阵 U 的基有 6 个：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以 S，U 维数都是 6。这里主要想强调的是矩阵基与向量形式上的不同。

再看对角阵 D，明显只有三个基：$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，即对角阵维数为 3，基正好为 S 与 U 的交集。也可以写为：dim（S∩U）= 3。

聊完交集，再考虑一下并集，之前向量空间中也介绍过，这样的两个子空间的并集不是向量空间，因为两个向量加和会脱离范围。ok，那么不谈交集，怎样才能使两个空间的和为一个向量空间呢？

这个空间叫做：S+U，它与并集的不同就在于，并集只包含了 S 与 U，而 S+U 集合包含了它们两个的线性组合，就是任意对称阵加上任意上三角矩阵的和都包含于这个集合里。另外，很容易看出来，这个集合就是 M，所以 S+U 的维数是 9。

联系上面的所有维数，有这样一个等式：

$$\dim(S) + \dim(U) = \dim(S\cap U) + \dim(S+U)$$
$$6 + 6 = 3 + 9$$

2.2 微分方程

同样的“空间”概念还适用于很多地方，这样的线性空间内元素不一定是向量，矩阵，还可以是方程的解。

例如：解微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

只考虑实数范围，很明显这个微分方程有两个特解： y = sinx 与 y = cosx。而所有的解就是这两个特解的线性组合：y = $c_1$cosx + $c_1$sinx。

这很类似于零空间，也就是说我们将这些解看做线性空间中的元素也可以。所以我们可以称其为解空间。其中的元素是解，满足线性运算封闭条件。

那么从空间的角度出发，这个解空间两个基就是 cosx 与 sinx，其线性组合构成了解空间，所以解空间维数为 2。

三. 秩一矩阵

这里重点提一下秩为 1 的矩阵，因为它易于分解。

3.1 秩一矩阵的优点

例：矩阵 A = $\begin{bmatrix}1&4&5\\2&8&10\end{bmatrix}$

很明显 A 秩为 1，可以被分解为 A = $\begin{bmatrix}1&4&5\\2&8&10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\end{bmatrix}$。这就是秩一矩阵的优点，每一行都是第一行的几倍。可以被分解为一列乘一行的形式。都可以写为：A = UV^T

秩一矩阵的另外一个优点是它可以“搭建”其他矩阵，比如秩为 4 的矩阵，通过四个秩一矩阵就能搭建出来。具体过程类似于矩阵乘法中的“列乘行”形式，通过一列一行搭出一个矩阵。

3.2 空间角度解释同秩矩阵

那么从空间角度看，所有秩为 4 的矩阵构成的集合 M，能称之为空间么？肯定不是。其中都不包含零向量。另外，因为有这样一个性质存在：

$$R(A+B) \le R(A) + R(B)$$

这就意味着 M 这个集合对加法也不封闭。两个秩为 4 的矩阵相加，结果的秩可能大于 4。所以所有秩为 4 的矩阵集合并不能构成空间。同理，秩为 1 的矩阵集合也不能构成空间。

3.3 子空间的转化

我们通过这样一个例子再加深一下对子空间的印象：

【例】四维空间中的向量都有四个分量$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$，设 S 为一个集合，其中的向量都满足：$v_1+v_2+v_3+v_4=0$。则 S 是不是一个子空间？若是，那么其维数是多少？

解：

S 显然是一个子空间，$v_1+v_2+v_3+v_4=0$ 这个特点，对加法和数乘都封闭。而且 S 中肯定有零向量，故 S 是一个子空间。

假设有一矩阵 A，A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，由 S 中 v 的特殊性质，很明显可以得到：

$$Av= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = v_1+v_2+v_3+v_4 = 0$$

这样一来，我们就通过 A 构造了一个 Ax = 0 的方程，将 S 空间转化为了 A 的零空间。问题也转化为求此零空间的基和维数。

矩阵 A 的秩 r 为 1，列数 n=4，主元只有一个，自由变元有三个。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因此维度为 n-r =3，S 的零空间是三维空间。其基为 Av = 0 的三个特解

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这下我们就解决了这个问题，接下来回顾 A 的列空间与左零空间：

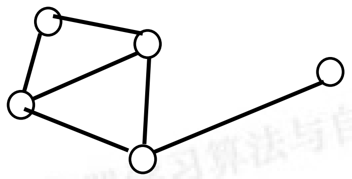
A = $[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$，很明显它的列空间的基就是$R^1$的基，其线性组合构成的空间就是$R^1$。所以 A 列空间即为$R^1$。

左零空间 N(A^T)：A 的左零空间即是线性组合各行得到零向量的方式，很显然，这个 A 的左零空间只有零向量。

四．小世界图

这部分是对下一节“图与网络”的引出，主要渗透一下图与矩阵的关联。

有这样一个图：



这个图包括五个节点和六条边，可以用一个 5*6 的矩阵来表示其中的所有信息。具体内容我们下节课再说。

另外，大家应该也听说过“六度分割理论”，任何两位素不相识的人之间，通过一定的联系方式，总能够产生必然联系或关系。这个概念即是将人抽象成点，将联系抽象为图。

这一节是渗透一些关于图与矩阵之间会有联系的思想，具体内容下节再谈。

五. 学习感悟

这一节中主要介绍了线性空间，一并介绍了类似于矩阵空间，解空间这一类空间的存在。另外，秩一矩阵将我们之前学习的矩阵乘法列乘行方式联系了起来，便于分解，可以搭建矩阵。