

# 一篇文章入门边界元方法

原创 [www.cae-sim.com](http://www.cae-sim.com) [多物理场仿真技术](#)



老规矩，仍然针对软件研发测试工程人员，不会有公式积分，科普性文章。

在数值仿真领域，有限元方法一直是首选，但在一些细分领域，其他方法可能更有效，比如有限体积法（FVM）对流体，边界元法（Boundary Element Method）对声，电磁散射。

在2005年关于SCI收录的数值方法统计中，有限元相关文献有66237篇，有限差分19531篇，边界元10126篇。

以声场为例，声音向外传播，作用区间是一个典型的无限范围，如果使用FEM，需要对整个区域划分网格，在三维空间随着计算范围的增大，四面体或者六面体网格数目会急剧增大。而采用BEM，只需要求解声场边界上的数值，大大降低了计算量，提高了计算效率。

边界元方法的核心：**只以边界上的变量为基本变量，求解边界变量，场内的未知量可以用公式根据边界变量求出。**

BEM 基于解析解，在处理某些特定领域（声场，电磁场，连续介质弹性力等无限域问题）具有精度高，降低维度等特点，同时通过与FEM相结合，能够综合两者的优势，提高计算效率和精度。

前面介绍过声场的控制方程为[赫姆霍兹方程](#)，边界元方法的第一步是要将PDE转换为边界积分方程，对于三维空间的方程，需要使用格林函数将体积分转换为面积分。

通常流程是：

1. 利用算子的基本解作为权函数，按加权余量格式得到区域上的积分方程；
2. 利用[高斯公式（格林函数）](#)建立区域内积分和边界积分的关系，从而得到区域内任意一点的通解变量表示的积分表达式；（利用格林函数可以将三维体积分转为二维面积分）
3. 将基本解的奇异点 $P$ 趋于边界点 $p$ ，得到边界积分方程。

这个过程简称为用加权余量法建立边界积分方程。

BEM求解流程与FEM基本类似，划分网格，建立线性方程组，求解方程，不同的只是建立的本构方程不同。因为BEM求解区域只在边界上，所以三维问题只需要划分面网格，二维问题划分线网格，使前处理工作大为简化。

既然BEM效率这么高，为什么使用范围不如FEM广泛呢？主要两点原因：

1. FEM 是一种纯数值解法，而BEM是半数值解，也就是说要以解析基本解为前提条件，有些情形比如非均匀介质，各向无规律异性等问题无法处理。
2. BEM方法最后形成的线性方程组为非对称满秩矩阵，限制了工程上的求解规模。桌面单机几千自由度就已无法解出结果，虽然通过FMM（快速多极子方法）解决了这个问题，但因为FMM算法本身实现也有一定难度，因而没有FEM应用广泛。笔者曾经计算显示当模型自由度在15000以下时，传统的BEM效率更高，而大于15000时，传统BEM计算量会急剧上升，此时FMM的计算量仍然呈线性增长。

目前，边界元在电磁和声场领域应用较多，在连续介质结构也有较多研究，商业软件有BEASY, IntegratedSoft, FastBEM等。

快速多级方法参考公众号之前文章：

[快速多级算法简介](#)

[快速多级子算法（FMM）介绍和实现](#)