线性代数

-10 课　四个基本子空间

一、知识概要

上面我们介绍过列空间，零空间。但是这还远远不够，对一个矩阵来说，我们能从它身上挖掘出的空间远不止这些，所以这一节我们介绍四个基本子空间，也是对空间概念的补充，便于我们接下来的讨论。

二．四个基本空间介绍：

对于一个 m*n 矩阵 A 来说，以下四个基本空间是其基础。

（1）　列空间 C(A)：

即之前介绍过的，列空间即是矩阵 A 的列向量线性组合构成的空间。对于 m*n 的矩阵 A 来说，每个列向量有 m 个分量，即列向量属于R^m空间。所以列空间是R^m的子空间。

（2）　零空间 N(A)：

这个以前也介绍过，即由 Ax = 0 的解构成的空间。由于 x 本质是对 A 列向量的线性组合，A 一共有 n 个列向量，所以零空间是R^n的子空间。

（3）　行空间 C(A^T)：

行空间这个概念我们第一次接触，但是不难理解，所谓行空间就是矩阵 A 各行线性组合构成的子空间。也可以理解为 A 转置的列空间，即：C(A^T)。

A 的每个行向量都有 n 个分量，所以每个行向量都在R^n中。也就是 A 的行空间是R^n的子空间。

（4）　左零空间 N(A^T)

左零空间我们接下来会再介绍，先理解为A^T的零空间就好。很明显，A^T是一个 n*m 的矩阵。联系零空间的介绍，A^T一共有 m 个列向量，所以左零空间是R^m的子空间。

2.1 四个基本空间的维数与基

还是研究 m*n 的矩阵 A，其四个子空间的基本性质如下:

（1） 列空间：

之前介绍过列空间的基，设矩阵 A 的秩为 r，则 A 有 r 个主列，这 r 个主列就是列空间 C(A)一组基，一组基里有 r 个向量，所以列空间维数为：r。

（2） 零空间：

同样，之前介绍过矩阵 A 秩为 r 时，自由列为 n-r 列。这 n-r 列决定了 x 中的 n-r 个自由变元，赋值后就构成了零空间的 n-r 个基向量，故零空间维数为：n-r。

（3） 行空间：

A 的行空间可以化为A^T的列空间。但我们这里使用的方法是直接对 A 的行向量进行行变换（其实一样），最后行空间的维数也是秩数 r。

【例】 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

我们接下来从行空间的角度来研究这个矩阵的基与维数。

直接对 A 进行行变换，得到：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，这个矩阵我们很熟悉，左上角是单位矩阵 I，右上角是自由列 F，下面是全零行。这就是行最简形矩阵 R。

显然，A 只有两行线性无关，所以 A 秩为 2，所以 A 行向量的基就是 R 的前两行。维数为 2。

注：经过行变换，矩阵 A 的列空间显然改变了：C(A)≠C(R)。显然列向量$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$在 A 的列空间中，但是并不在 R 的列空间中。但是行变换并没有改变 A 的行空间，因为所谓行空间就是 A 行向量的线性组合，而我们进行的行变换就是取原来行向量的一些线性组合，并没有改变行空间。

从上面这个例子中，我们知道行空间会在行最简型 R 中以最佳形式表现出来。也就是说，将 A 化简为行最简型 R 后取前 r(秩数)行向量，即为 A 行空间的基。

（4）左零空间：

首先介绍一下左零空间，写成方程形式，即A^Ty = 0，我们不处理A^T，所以将

方程两边同时转置，得到：y^TA = 0。我们看到，对于 A 矩阵本身来说，y^T左乘矩阵 A 得到零向量，所以我们称之为左零空间。但是我个人觉得这种理解方式不太好，还是理解为A^T的零空间更直接一点。

上面提到了，A^T是一个 n*m 的矩阵，m 与 n 位置颠倒，所以A^T零空间维数为 m-r。那么怎样找它的基向量呢？

首先明确，零空间内的向量反映的是 A 列向量线性组合，最终得到零向量。而左零空间反映的就是 A 的行向量的线性组合，最终得到零向量。

这就让我们想到了上面行向量的处理方式：设 A = $\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}$，行变换后得到行最简矩阵 R：$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，R 下面有零行，也就是一种线性组合将 A 行向量组合后得到了零向量。而这个行变换过程可以用一种消元矩阵反映出来：

$$EA = E\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} = R$$

说明得到 E 矩阵，找到其中对应的第三行向量，就是将 A 各行组合得到零的方式。

怎样得到 E 矩阵呢？联想高斯-若尔当消元法，我们根据 AA^{-1} = I 得到了A^{-1}，那么这里我们是不是也能根据 EA = R，得到矩阵 E 呢？

将 A 与 I 写在一起，通过行变换，将 A 化为 R，则右侧原本的 I 就变为了 E。

$$[A \quad I] \xrightarrow[\text{初等行变换}]{} [R \quad E]$$

原因和高斯-若尔当消元法一样，A 变为 R 相当于左乘 E 矩阵，同样处理单位阵 I，得到的即是矩阵 E。

将上面 A = $\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}$，行最简矩阵 R = $\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$进行这样的处理，得到矩阵 E 为：$\begin{bmatrix}-1&2&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$。也就是：

$$EA = \begin{bmatrix}-1&2&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} = R$$

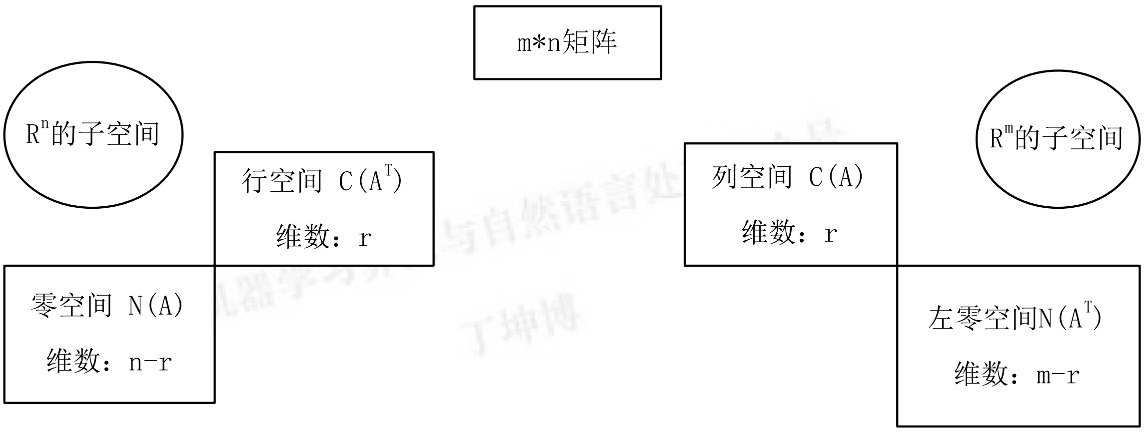
观察 R 下面一行为零行，抽出 E 第三行：

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 0$$

这样就得到了左零空间的一组基：$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，也正是 m-r = 3-2 = 1 个向量。所以寻找左零矩阵的基，重点在于找 A 行组合为零的系数，也就是上面的活用高斯—若尔当消元法，将$[A\quad I]\xrightarrow[\text{初等行变换}]{}[R\quad E]$，进而求得 E 矩阵，写出 EA = R，寻找 R 中的零行，对应找到 E 中的线性组合方式，就得到了左零空间的基。

2.2 四个基本空间图像：

经过上面的总结，四个基本空间图像如下：



三．矩阵空间

这是一种新的对空间的定义，实际上，线性空间的元素并不一定是实数组成的向量，我们可以将所有 3*3 的矩阵当成一个所谓“向量空间”中的向量，只要满足线性空间的八条规律，对线性运算封闭，就可以将其当做线性空间中的元素。因为矩阵本身也满足线性空间的八条运算律，我们就可以将所有的 3*3 矩阵看做一个线性空间。

这里先渗透一下这个概念，先不用深入了解，下节中会提到部分的详细内容。

总之，这里我们将所有的 3*3 矩阵看做了一个线性空间，那么它的子空间有什么呢？

上三角矩阵，对称矩阵，对角矩阵。

而很明显，上三角矩阵与对称矩阵的交集为对角矩阵(diag)。深入研究对角矩阵，就要给出它的基，

随意给出一个基：$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&7\end{bmatrix}$。

这里只是给出一种理解线性空间的方式，下节会详细介绍这部分内容。

四. 学习感悟

本节也是概念的渗透，介绍四个基本空间，其中比较新的内容是左零空间，即行向量的线性组合得到零，这部分要好好理解。前面重点在于 2.2 的图，以后会经常用到。另外给下一节开了个头，引申了向量空间概念。