线性代数

-13 课　复习 1

一、知识概要

本节为习题课，主要回顾了下之前的学习内容，需要掌握经典题型的解法。

二．例题

【例 1】

设 u，v，w 是R^7空间内的非零向量，由他们生成了一个属于R^7的向量子空间，则此空间的维数是多少？

答案：

三个向量张开的空间，很明显维数只能是 0，1，2，3。本题中维数不可能是 0，因为题设为非零向量。所以最后答案为：1，2，3。

【例 2】

有一个 5x3 的阶梯形矩阵 U，秩为 3，求矩阵 U 的零空间。

答案：只有零向量

复习：

首先复习几个概念：

1）零空间：

使得 Ax = 0 成立的所有解向量构成的空间。

2）行阶梯矩阵：

在矩阵中可画出一条阶梯线，线的下方全为 0，每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线（每段竖线的长度为一行）后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元，

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

3）行最简形矩阵：

非零行的第一个非零元都为 1，且这些非零元所在的列的其他元素都为 0。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4）矩阵 A 右乘列向量的意义：

矩阵 A 右乘列向量可以理解为对 A 各列向量的线性组合。

分析本题：

由秩为 3 可知原矩阵的列向量线性无关，也就是没有线性组合能得到零向量，所以其零空间中只有零向量。

【例 3】

给定 10x3 矩阵 B，B 中含有矩阵 R 和 2R：B $= \begin{bmatrix} \mathrm{R} \\ 2R \end{bmatrix}$（R 是行最简形矩阵）

问：该矩阵的秩是多少？其阶梯型矩阵又是怎样的？

答案：

利用分块矩阵思想，B 可化简为：$\begin{bmatrix} \mathrm{R} \\ 0 \end{bmatrix}$。这就是 B 的阶梯型矩阵，它的秩即为矩阵 R 的秩。

△进一步，矩阵 C $= \begin{bmatrix} R & R \\ R & 0 \end{bmatrix}$的行最简形是什么？

直接化简为行最简形矩阵：

$$\begin{bmatrix} R & R \\ R & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{行变化}]{} \begin{bmatrix} R & R \\ 0 & -R \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{提出}(-1)]{} \begin{bmatrix} R & R \\ 0 & R \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{行变化}]{} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

注意：严格意义上还应当将$\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$中 R 的下面零行移到最简形$\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$整体的最下面一行，这才是标准的行最简型矩阵。

△再进一步，已知 R 的秩为 3，求 C 的转置矩阵的零空间的维数？

知识回顾：**矩阵的零空间的维数等于列数减去矩阵的秩(n-r)**，列满秩的矩阵对应零空间的维数为 0。

这里，C 为 10x6 的矩阵，对应C^T为 6X10 的矩阵，n-r = 10-(3+3)。其零空间的维数为 4。

【例 4】

已知： $Ax = \begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$，$x = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$。求 A 的行向量的生成空间的维数。

分析：

- 首先，矩阵 A 的形状是怎样的？

  由于 $Ax = \begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$，所以一定是 A(3x3)与 x(3x1)相乘得到的。由此可知矩阵 A 的形状是 3x3 的。

- 那么，A 的秩是多少？

  我们看零空间的维数为 2，所以(n-r) = 2。而 A 的列数 n = 3，所以 A 的秩为 1。

- 下面作进一步讨论：A 矩阵到底是什么样的？

  由通解 x 的形式，先将 c，d 均为 0 情况代入 Ax = b 方程。

$$A\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$$

这样计算之后可以得到 A 的第一列为$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$。

而 Ax = b 的解形式中也包含了零空间 Ax = 0 的两个特解：：$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$。直接代入方程 Ax = 0 就能解出来 A 的形式了。最终确定 A 的形式为：

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\2 & -2 & 0\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

△引申问题：

$$既然 A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}，那么当 b 满足何种形式时，Ax = b 有解$$

分析：

由之前几节的结论知道，当 b 属于矩阵的列空间时有解，所以，这里的实际问题是求矩阵 A 的列空间，即 A 列向量的线性组合。而对于 A 矩阵来说，相当于只有一列对线性组合有贡献。

答案：

b 向量应当满足以下形式：

$$b = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}（c 为任意常数）$$

【例 5】

如果一个方阵 A 的零空间只包含零向量，那它转置矩阵的零空间呢？

答案：

也只包含零向量

【例 6】

5 阶可逆方阵是否构成向量空间？

答案：

否。因为连零矩阵都不包含在内，肯定不是向量空间。

【例 7】存在除零矩阵外的平方为零的矩阵吗？

答案：

$$存在，例如 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}（这个例子比较重要）$$

【例 8】

方阵的列线性无关，Ax = b 是否总是有解的？

分析：

因为矩阵列线性无关且其为方阵，故其可逆，我们之前介绍消元矩阵时说过，可逆矩阵是可以消元回代求解的。因此时 Ax = b 总是可解的。

【例 9】

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

先来研究一下 B 的零空间：

首先知道的是：由 B 是 3x4 矩阵，有四个列向量。因此 B 的零空间必是R^4的子空间

除此之外，我们想一下，B 是由一个可逆矩阵$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$左乘上矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$得到的，那么我们在 Ax = 0 两侧同时左乘上$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$的逆矩阵，这样也不会影响到 B 零空间的求解。也就是说，B 的零空间求解只取决于这个矩阵：$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，列式为：$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = 0$

引入结论：

假设有矩阵 C,D，当 C 可逆的时候，N(CD) = N(D)。

（N（A）表示 A 的零空间）

原因：

可以对 CDx = 0 两侧同时乘上C^{-1}

回到这道题，经过计算，或者直接使用介绍过的 A = $\begin{bmatrix}I & F\\0 & 0\end{bmatrix}$结论（第 7 课）

得到：

$$B\text{零空间的基为}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

△　求 $Bx = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$的通解

先分析其特解：

$$B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & * & * & *\\0 & * & * & *\\1 & * & * & *\end{bmatrix}$$

观察 B 的第一列，B 的第一列恰好就是等式右侧的 b：$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

于是可以很快地写出一个特解：$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

注：

　　在 $Ax = b$ 中，如果 b 与 A 中一个列向量相同，则我们都可以直接写出一个特解，即该列系数为 1，其余列系数为 0 的线性组合方式。

而零空间的基我们之前讨论过了，通解即已求出。

【例 10】如果矩阵是方阵，是否意味着矩阵的行空间等于列空间

答案：错误，反例：$B = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$。

【例 11】如果 A 与 B 的四个子空间相同，则 A 是 B 的倍数

答案：错误，例如：任意的可逆矩阵的四个子空间都相同。不一定非要成倍数。

【例 12】给定矩阵 A，交换其中的两行，哪些子空间没变？

答案：行空间与零空间

【例 13】为什么向量（1，2，3）不能既是 A 的某一行，又在 A 零空间中？

分析：

直接代入方程 Ax = 0 看一下就知道了：

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ . & . & .\\ . & . & .\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

这不可能成立。

结论：

给定矩阵，其行空间与零空间共享的向量只能是零向量

（以后会提到：矩阵的零空间与行空间正交）

五. 学习感悟

这节复习结束，我们线性代数这一部分基础也结束了，接下来的课程会围绕正交，特征值等概念展开讨论。