数值优化（Numerical Optimization）学习系列-非线性约束最优化（Nonlinear Constrained Optimization）

下一步 于 2015-12-27 18:55:43 发布

概述

> 在实际问题中不是所有的目标函数或者约束都是线性的，本节主要介绍对于非线性约束或者目标函数如何有效的求解。
> 1. 非线性约束问题概述
> 2. 求解非线性约束常用的思路
> 3. 总结

非线性约束最优化问题

基本形式表示为

$$\begin{aligned} min\ f(x) \\ s.t\ \ c_i(x) = 0, i \in \mathcal{E} \\ c_i(x) \geq 0, i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

该类问题的最优解一阶和二阶条件都已介绍过。
后续会介绍几类常见的非线性约束最优化问题
1. QP（Quadratic Programming）问题，即二次规划问题，目标函数是二次的，并且约束为线性约束，该问题的算法也比较成熟，例如有效集算法、内点法和梯度映射算法。该问题常常成为处理其他问题的子步骤。
2. 带惩罚的增强拉格朗日算法，主要思路将目标函数和约束整合到一起，通过求解一系列无约束问题从而逼近原始问题的解。例如对于等式约束问题，可以定义 $F(x) = f(x) + \frac{u}{2}\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x)^2$。或者 $F(x) = f(x) + u\sum_{i\in\mathcal{E}} |c_i(x)|$。对于增强拉格朗日方法，综合考虑原始目标和约束，例如

$$\mathcal{L} = f(x) + \frac{u}{2}\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x)^2 - \sum_{i\in\mathcal{E}} \lambda_i c_i(x)$$

3. SQP（Sequential Quadratic Programming）问题，即序列二次规划问题，即将原始问题转换为一系列QP问题，例如基础的SQP问题，寻找某个搜索方向，满足如下条件

$$
\min \frac{1}{2} p^T \nabla^2 \mathcal{L}(x_k, \lambda_k) p + \nabla f(x_k)^T p
$$
$$
s.t\ \nabla c_i(x_k)^T p + c_i(x_k) = 0, i \in \mathcal{E}
$$
$$
\nabla c_i(x_k)^T p + c_i(x_k) \geq 0, i \in \mathcal{I}
$$

相当于在某个步骤中对拉格朗日进行泰勒展开，计算最佳搜索方向。
4. 内点法，也成为障碍方法，将约束添加到目标函数中，从而通过求解无约束问题得到最优解。

常用求解思路

不等式约束处理

在有效集算法（Active Set Method）中，类似于单纯形算法，每一次求解仅仅考虑等式约束。主要思路如下
1. 定义某个工作集合W为要满足的等式约束
2. 求解满足等式约束集合W，对于原始问题的最优解，检查是否满足不等式约束。
3. 将某个不等式约束，变成等式约束加入到W集合中
4. 不断重复第二部步骤，直到找到最优解。

通过这类算法可以只处理等式约束就可以找到最优解，但是复杂度相对较大，例如对于n个不等式约束，就要重复2^n步。
问题即使遍历了所有不等式约束也有可能找不到最优解

变量消减方法

对于等式约束问题，可以将等式约束进行转换代入到目标函数中，问题是某些等式约束可能会带有隐式约束，如果不能处理，则直接导致原始问题不可解。

> 对于现行约束，例如$Ax = b$可以直接采用变量消减或者高斯消元法进行求解

价值函数(Merit Function)

在很多求解步骤中，要不断的平衡目标函数和约束函数，例如某个搜索步骤带来较大的目标函数减少，但是会带来更多的约束函数不满足，此时就要利用价值函数进行平衡。
价值函数就是在原始目标函数上添加对约束函数的惩罚项。

> 精确的价值函数，对于添加了惩罚项的$\phi(x; u)$，如果对于存在u^*，使得任何$u > u^*$情况下，原始问题的解都是修改后问题的解。

常见的价值函数

$$\phi_1(x;u)=f(x)+u\sum_{i\in\mathcal{E}}|c_i(x)|+u\sum_{i\in\mathcal{I}}[c_i(x)]^-$$

其中 $[x]^-=max(0,-x)$

$$\phi_2(x;u)=f(x)+u||c(x)||_2$$

$$\phi_F(x;u)=f(x)+\lambda(x)^Tc(x)+\frac{1}{2}u\sum_{i\in\mathcal{E}}[c_i(x)]^2$$

Filter 方法

思路来源于多目标优化，即定义惩罚项$h(x)=u\sum_{i\in\mathcal{E}}|c_i(x)|+u\sum_{i\in\mathcal{I}}[c_i(x)]^-$
同时优化两个目标 min f(x)和min h(x)

Maratos 影响

Maratos Effect在很多问题中都会遇到，特别是使用价值函数的方法中，即要同时满足约束和最优化目标函数（每一步使得目标函数值下降），可能存在某个步骤不满足约束或者目标值不下降，但是沿着该步骤能够找到最优解。
对于任何使用价值函数的方法$\phi(x,u)=f(x)+uh(c((x))$，如果h(0)=0，则一定会受到maratos影响。
改进方案有

> 1. 使用一个不受影响的价值函数，例如h(x) != 0
> 2. 添加一个二阶修正项，$p_k+\hat{p}_k$
> 3. 使用非单调策略，不是每一个接受的搜索方向都使得目标函数值下降，一定概率接受其他。例如WatchDog策略，对于某个搜索方向，尝试t=5-8次，如果不能找到大幅度下降的解，则返回原始步骤继续求解。

总结

该小结主要介绍了非线性约束最优化问题形式，和基本求解策略。