线性代数

-27 课 复数矩阵与快速傅里叶变换

一、知识概要

之前我们曾经谈论过复数矩阵，但是对于它的运算与性质并没有进行展开。本节中我们介绍复数矩阵的运算等特征。并介绍一个重要的复数矩阵：傅里叶矩阵。其中重点介绍快速傅里叶变换，可以显著减小运算量。

二．复数矩阵

我们从最基本的向量谈起，如果向量中有分量是虚数的话，很明显我们无法再用普通的公式计算长度和内积。比如：$\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ 这个向量。按照我们以前的计算会得到：$[1 \quad i]\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ = 0，这样计算出的长度就是 0，但是很明显$\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$这个向量模长为$\sqrt{2}$，这就造成了谬误。在这里我们给出复向量的长度与内积计算方法。

对复数向量$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\z_n\end{bmatrix} \in C^n$,定义$|z|^2 = z^H z = \bar{z}^{\,T} z$(先将分量取共轭，再转置相乘)

同样，复数向量的内积变为 $yx = y^H x = \bar{y}^{\,T} x$

接下来我们谈一谈对称阵，在实矩阵中，$A^T = A$，则 A 为对称阵。而在复矩阵中，这并不成立，而联系上面的向量内积处理方法，我们发现在复矩阵中取共轭与取转置往往是同步的。所以，复对称矩阵定义为：若$\bar{A}^{\,T} = A$，则 A 为对称阵。例如$\begin{bmatrix}2 & 3+i\\3-i & 5\end{bmatrix}$，主对角线上为实数，而沿主对角线对称的两个元素共轭。这样的矩阵我们成为埃尔米特矩阵，$A^H = A$。它的特征值皆为实数。且特征向量正交。

同理，推广到复矩阵的特征向量正交这个概念，即一组 q_1，q_2……q_n。如果 $\bar{q_i}^{\,T} q_j = \begin{cases}0 & (i \neq j)\\1 & (i = j)\end{cases}$，它们即为一组标准正交基。而这一组标准正交基可以构成一个矩阵 Q，$Q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \cdots \quad \cdots \quad q_n]$，（q 是列向量）。

这样的话就有$Q^T Q = I = Q^H Q$（前一部分是以前写法，后一部分是类比写法。）

这样的矩阵 Q 称为：酉矩阵。

三．傅里叶矩阵与快速傅里叶变换

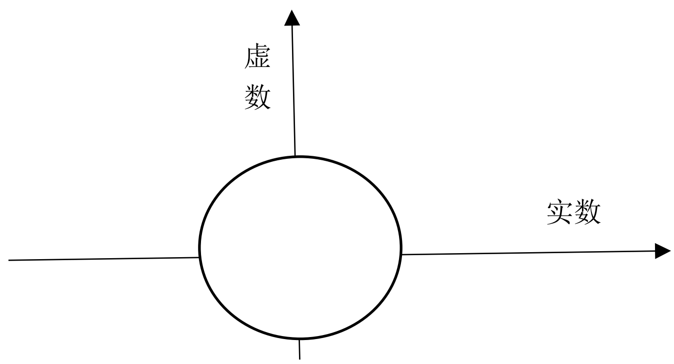
3.1 傅里叶矩阵

傅里叶矩阵F_n本身也是一个酉矩阵，给出傅里叶矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & & w^{2(n-1)} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$(计数从 0 开始，到 n-1 结束)

其中$w^n = 1$，w = $e^{i2\pi/n}$ = cos(2π/n) + isin(2π/n)

注：计算时不要用 a+bi 形式计算，应使用 $e^{i2\pi/n}$ 计算。反映在复数坐标系上：



w = $e^{i2\pi/n}$ 就反映在这个圆上，其中的 n 就表示将这个圆分成几部分，分别为：w，w^2，w^3 ……… w^n。

接下里我们假设 w = $e^{i2\pi/4}$ = i，则其对应四阶傅里叶矩阵F_4为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

这个矩阵列向量均正交，很容易计算其逆矩阵，得到：

$${F_4}^H F_4 = 4\mathrm{I}$$

将 F_4 前乘上 1/2,作为新 F_4'，既直接得到新的 F_4'逆矩阵即为${F_4}'^H$。

3.2 快速傅里叶变换

快速傅里叶变换主要就是因为 F 之间有所关联，以F_{64} 与 F_{32}为例：

直接代入公式 w = $e^{i2\pi/n}$就可以看出来，F_{64}中的w_{64}(下标代表元素属于哪个矩阵) = $(w_{32})^2$

构造矩阵转换：

$$[F_{64}] = \begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{32} & 0 \\ 0 & F_{32} \end{bmatrix} [P]$$

解释一下这个式子，其中，置换矩阵 P 的作用是将奇偶行分开，目的是减小计算量。而前面的 D 代表着对角矩阵。

例如 4 维时，置换矩阵 P = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。D = $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & w & & & \\ & & w^2 & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & w^{31} \end{bmatrix}$，

而矩阵$\begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix}$的作用就是将$F_{32}$转化为$F_{64}$。

使用傅里叶矩阵乘上一个列向量，对于计算量来说，原本计算$[F_{64}]$时，由于其有 64 个元素，故需要 64*64 次运算才能得到，而经过快速傅里叶变换，这个计算量变为 2*32*32 + 32 次。其中 2*32*32 为两个F_{32}的运算，而+ 32 为修正项的计算量，修正项的计算量来自于$\begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix}$中的 32 阶对角矩阵 D 的运算，虽然看矩阵形式应该要计算两次 D，但是两次运算只是符号相反，具体值只需要计算一次就行，两个位置上的结果改变符号就行了。

如果继续这样分解下去，那么计算量会变为：2*(2*16*16 + 16) + 32 次，原因同 F_{32} 到 F_{64} 的变化一样。一共进行$\log_2 64$次分解。最后，只剩下了修正项的运算，F 变为 I。所以最后的运算量变为(64/2) $\log_2 64$。推广到 n 阶，快速傅里叶变换的运算量为：(n/2) $\log_2 n$。对比原本的n^2次运算量，可见减少显著。

三、学习感悟

本节为复矩阵，复向量的计算以及性质的研究，拓展了原本求向量内积和向量长度的方法，并研究了一种特殊的复矩阵：傅里叶矩阵。最后讲解了本章

的重点：快速傅里叶变换，其中快速傅里叶变化是难点，尤其是对

$$[F_{64}] = \begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{32} & 0 \\ 0 & F_{32} \end{bmatrix}[P]$$

这一转换的理解较难，我的理解就是转换矩阵 P 将向量之中的奇偶行分离，这样可以减小计算量。而$\begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix}$的作用就是进行两个 F 之间的转换。FFT 十分重要，其应用较复杂，想彻底理解还要继续深入学习这部分知识。