FEM之理论通俗有限元(2-2)---带时间项的偏微分方程有限元解

www.cae-sim.com [多物理场仿真技术]

通常不带时间的偏微分方程称之为稳态方程，带时间项的偏微分方程称之为瞬态方程。大部分工程都需要用瞬态控制方程，温度传播，流体运动，动力学，扩散，电磁传播等。即使控制方程没有时间项，随时间变化的荷载和边界条件也会使之成为瞬态问题。

瞬态求解中通常会带有时间项，最简单的二维温度传播为例，控制方程如下：

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+q=\rho c\frac{dT}{dt}$$

利用上一节介绍的方法（参考附录）：

使用三角单元，权函数等于形函数：

T = [S1 S2 S3] [Ti Tj Tk]；

利用伽辽金方法建立方程：

$$\iint_{\Omega} S^T(\rho c\frac{dT}{dt}-k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2})dxdy=0$$

与上一节中的公式相比多了一个式子 $\rho c\frac{dT}{dt}$ ，因此主要处理的也是这部分。

$$\iint_{\Omega} S^T\rho c\frac{dT}{dt}dxdy=\rho c\iint_{\Omega} S^T\frac{dT}{dt}dxdy=\rho c\iint_{\Omega} S^T S^T dxdyT$$

重点需要处理式子中的T项，通常采用差分法。

$$T_{n+1}=T_n+\Delta t((1-\alpha)T_{n+1}+\alpha T_n)$$

其中 Δt 为时间步长， α 大于0小于1.，可以根据每步计算结果调整值。

将上式带入有限元方程中，即可得到含有时间项的方程组，在实际求解过程中，需要设定适合的步长，时间步长是影响求解精度和效率的最大因素，步长过大不能反映温度梯度，步长过短浪费计算

资源。

步长估计通常两种方法：

1. 指定一个较保守的数值，然后根据每步计算的结果自动调整步长

2. 估计初始时间步长，可以使用Biot和Fourier数。

第二和第三边界条件本质上也是离散成利用变量步长来表示温度。

求解瞬态的偏微分方程本质上属于迭代法。热学应该是数值计算中最简单的物理场，弄清楚了热学的稳态和瞬态问题，再理解有限元方法求解其他诸如结构，流体，电磁等物理场问题就会容易很多。