

# 声场求解器开发之(3)---C++开发BEM求解器

www.cae-sim.com [多物理场仿真技术](#)

本文主要介绍基于BEM（边界单元方法）方法开发用于计算声学求解器的基本知识。

## 1. 概要

在数值仿真领域，有限元方法一直是首选，但在一些细分领域，其他方法可能更有效，比如有限体积法（FVM）对流体，边界元法（Boundary Element Method）对声，电磁散射。

以声场为例，声音向外传播，作用区间是一个典型的无限范围，如果使用FEM，需要对整个区域划分网格，尤其在三维空间，随着计算范围的增大，网格数目会急剧增大。而采用BEM，只需要求解声场边界上的数值，大大降低了计算量，提高了计算效率。

既然BEM效率这么高，为什么使用范围不如FEM广泛呢？主要两点原因：

1. FEM 是一种纯数值解法，而BEM是半数值解，也就是说要以解析基本解为前提条件
2. 因为最后形成的线性方程组为非对称满秩矩阵，限制了工程上的求解规模。桌面单机几千自由度就已无法解出结果，虽然通过FMM（快速多极子方法）解决了这个问题，但因为FMM算法本身实现也有一定难度，因而没有FEM应用广泛。统计显示当模型自由度在15000以下时，传统的BEM效率更高，而大于15000时，传统BEM计算量会急剧上升，此时FMM的计算量仍然呈线性增长。

BEM 基于解析解，在处理某些特定领域（声场，电磁场，连续介质弹性力等无限域问题）具有精度高，降低维度等特点，同时通过与FEM相结合，能够综合两者的优势，提高计算效率和精度。

## 2. 理论

前面介绍过声场的控制方程为赫姆霍兹方程，边界元方法的第一步是要将PDE转换为边界积分方程，对于三维空间的方程，需要使用格林函数将体积分转换为面积分。

通常流程是：

1. 利用算子的基本解作为权函数，按加权余量格式得到区域上的积分方程；
2. 利用高斯公式（格林函数）建立区域内积分和边界积分的关系，从而得到区域内任意一点的通解变量表示的积分表达式；（利用格林函数可以将三维体积分转为二维面积分）
3. 将基本解的奇异点 $P$ 趋于边界点 $p$ ，得到边界积分方程。

这个过程简称为用加权余量法建立边界积分方程。

BEM求解流程与FEM基本类似，划分网格，建立线性方程组，求解方程，不同的只是建立的本构方程不同。

因为BEM求解区域只在边界上，所以三维问题只需要划分面网格，二维问题划分线网格，使前处理工作大为简化。

BEM的计算流程与FEM相似:

1. 生成网格 (三维使用面单元, 二维计算使用线单元)
2. 计算单元影响矩阵
3. 组装总体影响矩阵
4. 求解线性方程组
5. 根据边界上的值计算任一点的声场压力

不失一般性, 以线性四边形单元求解空间声场问题。

单元定义可以从FEM的四边形单元派生, 因此可以直接使用FEM中等参单元定义的形函数, 再加上声场计算所需的函数与变量。针对每个单元需要计算H和G矩阵, 这两个矩阵后面用来组装整体矩阵。为了求解精度, 三维实体划分网格的时候, 四边形边长需要控制在波长的一定比例之内。

### 1. 声场线性四边形单元定义如下:

```
#include "FEM_Element.h"
#include "FEM_Quad.h"

class BEM_Quad : public FEM_Quad
{
public:
    BEM_Quad(void);
    ~BEM_Quad(void);

    void CalGeMatrix();
    void CalHeMatrix();
    void CalAngle();

    CMatrix* GetHe();
    CMatrix* GetGe();

    double GetAngle();
private:
    CMatrix* m_Ge;
    CMatrix* m_He;
    double m_Angle;
};
```

多物理场仿真技术

单元函数说明:

CalGeMatrix() 和 CalHeMatrix()分别用来计算 G矩阵和H矩阵。关于矩阵介绍参考附录 参考1。

## 2. 材料属性:

材料可以直接使用FEM定义的部分

1. 角频率 =  $2\pi v$  (v为频率 单位 赫兹);
2. 声在介质中的传播速度;
3. 介质的密度;

## 3. 整体刚度组装流程:

```
void BEM_Model::AssembleGMatrix()
{
    for (int i = 0; i < elemNum; i++)
    {
        //遍历全局所有节点;
        for (int j = 0; j < 4*elemNum; j++)
        {
            //计算单元影响矩阵;
            elemMap[i]->InitGIData(gldata.at(j));
            elemMap[i]->CalGeMatrix();
            elemMap[i]->CalHeMatrix();

            //组装全局影响矩阵;
            AssembleGMatrix(elemMap[i]);
            AssembleGMatrix(elemMap[i]);
        }
    }
}
```

多物理场仿真技术

## 4. 边界条件带入总体矩阵，构建线性方程组

边界条件包括压力，速度以及声阻

## 5. 结果计算

求解得到边界上的声场压力和速度之后，就可以直接利用表达式计算得到空间中任意一点的压力和速度。

由于最后的HG矩阵为满秩矩阵，在本人I7四核 + 8G PC机上单元达到5000时，基本上已经算不出结果。

参考:

1. *STRUCTURE-ACOUSTIC ANALYSIS USING BEM/FEM IMPLEMENTATION IN MATLAB.* **FREDRIK HOLMSTRÖM**

2. *The Boundary Element Method in Acoustics.* **Stephen Kirkup**

3. *BEM-FEM Acoustic-Structure Interaction For Modeling and Analysis of Spacecraft Structures Subject to Acoustic Excitation.* **Harijono Djojodihardjo**

阅读: null

在看: null