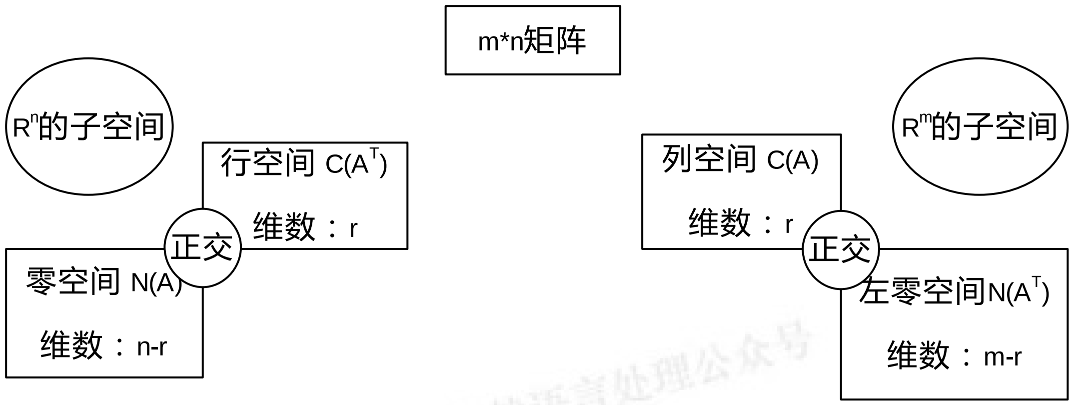
线性代数

-14 课　正交向量与子空间

一、知识概要

这是新的一部分，研究的重点还是之前提到过的子空间，但是本节我们主要从正交的角度来探讨这些子空间具有的性质以及正交向量的特点等。主要内容都在图（一）上。



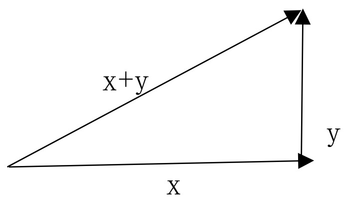
图（一）

二．正交向量与子空间

2.1 基本正交概念

首先我们来介绍一下正交的概念，在线性代数中，正交就是垂直，无论我们以后谈论的是向量正交还是空间正交，都可以理解为：垂直。

我们首先来研究最简单的向量正交：



如上面这幅图，我们能直接根据垂直关系得到：x^ty = 0。

这个结论很明显，但是我们还可以用另一种方法得到这个结论：

- 根据勾股定理，写出：$|x|^2$ + $|y|^2$ = $|x+y|^2$。
- 用向量来表示这种关系：x^tx + y^ty = $(x+y)^t$(x + y)
- 化简这个式子，得到：x^ty + y^tx = 0。
- 因x^ty 与y^tx 相同，都表示两个一维向量的点乘，进一步化简上式：2x^ty = 0。

• 得到：两个向量正交，则x^ty = 0。

注：两个向量中一个是零向量，则两个向量一定正交。

接下来我们说一说空间的正交，两个空间正交就是：**一个空间中的任意一个向量，都与另一个空间中的任意一个向量正交。**

这里有一个问题要注意一下，有一种很容易混淆，就是教授上课时候举的例子，黑板与地面的两个平面的子空间并不正交，因为这两个平面有交线。而这个交线无法满足空间正交的定义。

这也提醒了我们：两个平面在某一非零向量处相交，那这两个平面一定不正交，因为相交处的这个非零向量无法满足空间正交定义。

再从子空间角度看一看正交空间：

以R^2的子空间为例，一个平面上的子空间有三种：

1. 整个平面 D
2. 过原点的直线 L
3. 原点 0。

看一看这些子空间之间的正交，以 L 为例：

（1） L 与 D 什么时候正交？

很明显，一个平面上的直线不可能永远与这个平面垂直。

（2） L 什么时候与 0 正交？

L 与 0 永远是正交的。

（3） L 什么时候与另一个 L 正交？

由正交的定义，两条直线在原点处互相垂直，这两个 L 空间才正交。

2.2 零空间与行空间的正交关系

零空间与行空间之间是正交的，它们之间的关系类似于将一个空间一分为二的两个子空间，而且这两个子空间还是正交的。得到这个结论并不难，我们来看，A 写成行向量形式，再看 Ax = 0 这个方程：

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(x_1, x_2 \dots) \\ R_2(x_1, x_2 \dots) \\ .\dots\dots\dots\dots\dots. \\ .\dots\dots\dots\dots\dots. \\ R_m(x_1, x_2 \dots) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

不难发现，A 的每一行R_x与 x 的列相乘，其结果都为 0。x 所代表的是零空间中任意向量，而 A 的每一行代表的即是行空间中的任意行向量。这就说明

这两个空间满足正交子空间定义，即：零空间与行空间之间是正交的。

我们再回到之前说过的“它们之间的关系类似于将一个空间一分为二的两个子空间”，这点很重要，行空间与零空间的维数之和正好为 n。我们举个例子了解下：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}，AX = 0 \text{ 可以写为：}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这个例子中，A 的行空间是一维，而对应零空间是(3-1=2)二维的，可以理解为垂直于向量（1,2,5）的一个平面。行空间与零空间维数相加为 3.

而行向量是 3 维的，零空间中的向量也是 3 维的。说明行空间与零空间都是R^3的子空间，这点之前也提过。

这也充分说明了，零空间与行空间维数之和等于空间R^n的维数这一性质。这也解释了“行空间与零空间之间关系类似将一个空间一分为二，得到两个正交的子空间”这点。

我们把这称为R^n空间的正交补。

2.3 无解方程的最优解

我们上一节中看见了，矩阵的数据来源于实际测量，那么就势必会有测量不准确的时候，例如有时候我们求解 Ax = b 方程时，如果 A 的列数太多，那么其中就很有可能混进去一些不准确的数据。这时我们以往的手段求解方程并不会求出准确的解。这就引出了我们这部分内容。

既然无法求出解，那么我们就用一些手段求出方程最优解。类似于一种拟合。大致如下：

将方程改写成：　$A^T A\hat{x} = A^T b$，求解$\hat{x}$即为最优解。

（注意：不是 Ax = b 的解）

这部分我们利用了$A^T A$矩阵的特殊性质如下：

（1）$A^T A$ 的结果总是方阵。

设 A 为 m*n 矩阵，则$A^T A$ 为 n*n 型的矩阵。

（2）$A^T A$ 总为对称阵。

$(A^T A)^T = A^T A$，故$A^T A$ 总是对称的。

这样的话我们就构造出了一个新矩阵：A^TA，可以利用这个矩阵求出最优解。

有一点需要注意，A^TA 矩阵不一定总是可逆的，所以在求解时要注意 A 的特点。很明显，当 A 矩阵列向量线性相关时候，A^TA 就不可逆了。

我们举个例子，A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$时，$A^T$A = $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 27 \end{bmatrix}$

这时A^TA 就是不可逆的。

那么A^TA 是否可逆有没有什么判断依据呢？这里先给出结论如下：

- N(A^TA) = N(A)：A^TA 与 A 的零空间相同。
- A^TA 与 A 的秩相同。

由这两个基本结论，A^TA 这个矩阵可逆意味着：

A^TA 零空间中只有零向量。$\xrightarrow[\text{N}(A^T\text{A}) \;=\; \text{N(A)}]{}$ A 的各列线性无关

所以我们在求最优解的时候要判断 A 的列向量之间是否线性无关，再进行求解。

三、学习感悟

本节主要学习了正交的概念，从向量之间的正交再到空间之间的正交，进而引出了零空间与行空间之间的正交。最后讨论并引出了解决 AX = b 无解时的方法，这部分是本章核心所在。其实空间之间的正交关系就体现在我们开头给的图（一）上。这是这部分内容的前提，首先理解正交与子空间，接下来才能有进一步理解核心内容：A^TA$\hat{x}$ = A^Tb 的求解。