# 线性代数

## -2 课　矩阵消元

## 一、知识概要

这一节中我们介绍一下消元法，即是上一节中我们提到的“系统化”求解方程所用的方法，通过矩阵消元运算可以很轻松地求解复杂方程。另外介绍了消元矩阵，即我们的消元运算在矩阵乘法中所表现的形式。并从消元矩阵引入，介绍逆矩阵的基础知识。

## 二．消元法求解方程

### 2.1 消元法介绍

对于一些“好”的系数矩阵（可逆矩阵）A 来说，我们可以使用**消元法**来求解方程 Ax = b，我们还是从一个例子谈起。

【例 1】

求解方程：$\begin{cases} x+2y+z &= 2 \\ 3x+8y+z &= 12 \\ \quad\ \ 4y+z &= 2 \end{cases}$



还是使用矩阵运算，将方程写为矩阵形式 Ax = b。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

所谓矩阵的消元法，与我们初等数学中学习的解二元一次方程组的消元法其实师出同门，都是通过将不同行的方程进行消元运算来简化方程，最后能得到简化的方程组，只不过这里我们把系数单独抽出来进行运算，寻找一种矩阵情况下的普遍规律而已。

消元针对的对象是系数矩阵 A：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$。首先注意，左上角的 1 是消元法的关键，我们称之为主元 1，接下来通过我们熟悉的“将一行乘倍数加到另一行”的行化简方法将第一列中除了主元之外的元素全变为 0。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(2,1)]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

第一步目标达成，我们在第一列中只留下了主元 1，很好，接下来我们可以认为第一行与第一列已经“完工”了，再看去掉第一行第一列之后右下角剩下的部分：$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$，同样，我们将左上角的 2 视为主元，消元第一列，使其列上（不包括第一行中元素）除此主元 2 之外皆为 0。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3,2)]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

这时候第三行只剩下 5，我们直接将其处理为主元即可。得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(2,1)]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3,2)]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

由于 A 矩阵可逆，经过消元处理得到的上三角矩阵 $U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$中有三个主元，至此，消元结束，得到的 U 即为我们想要化简的形式。

**注：**

并不是所有的 A 矩阵都可消元处理，需要注意在我们消元过程中，如果主元位置（左上角）为 0，那么意味着这个主元不可取，需要进行 “换行”处理，首先看它的下一行对应位置是不是 0，如果不是，就将这两行位置互换，将非零数视为主元。如果是，就再看下下行，以此类推。若其下面每一行都看到了，仍然没有非零数的话，那就意味着这个矩阵不可逆，消元法求出的解不唯一。下面是三个例子：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

## 2.2 回带求解

其实回带求解应该和消元法同时进行，只不过本课中以及一些软件工作原理中它们是先后进行的，所以我们这里分开讨论，先介绍增广矩阵：

还是【例 1】中的方程：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$，我们先给出增广矩阵形式：

$$\text{增广矩阵：}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

一下子就看出来了，就是把系数矩阵 A 和向量 b 拼接成一个矩阵就行了。

然后像我们之前说的那样消元，但是这次要带着增广的 b(蓝色部分)一起进行：

$$\begin{bmatrix}1&2&1&2\\3&8&1&12\\0&4&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[(2,1)]{}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&4&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[(3,2)]{}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&0&5&-10\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{1}&2&1&2\\0&\mathbf{2}&-2&6\\0&0&\mathbf{5}&-10\end{bmatrix}$$

好，带回方程 Ax = b，变为：

$$\begin{cases}1x+2y+z &= 2\\ \quad 2y-2z &= 6\\ \qquad 5z &= -10\end{cases}$$

从下向上开始求解，很容易求出 x，y，z 的值了。

## 三. 消元矩阵

### 3.1 行向量与矩阵的乘法

上面的消元法是从简单的变换角度介绍了消元的具体操作，接下来我们需要用矩阵来表示变换的步骤，这也十分有必要，因为这是一种“系统地”变换矩阵的方法。

首先我们需要介绍向量与矩阵之间的乘法，上一节中我们提到了矩阵与列向量之间的乘法，例如：

$$\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} = \text{矩阵列的线性组合} = \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}*3&*4&*5\end{array}\\ \begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}\end{array}$$

这并不能解决我们现在的问题，因为消元法之中我们用到的是行变换，那么我们考虑这个问题，行向量与矩阵的乘积是什么呢？

$$\begin{bmatrix}1&2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix} = \text{矩阵行的线性组合} = \begin{array}{cc}\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix} & \begin{array}{c}*1\\*2\\*7\end{array}\end{array}$$

至于行向量与矩阵之间乘法为什么变为左乘，是因为此时，行向量是 1*3 的，矩阵是 3*3 的，故可以得到一个 1*3 的结果。如果在右面的话，$\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&7\end{bmatrix}$。这是个 3*3 矩阵乘上一个 1*3 矩阵，其中衔接部位

$1 \neq 3$，导致错误。其实学过矩阵之间的乘法之后这些东西都极为简单，但这里还是建议大家尽量从向量的角度去考虑问题。

### 3.2 消元矩阵介绍

好的，接下来是重点。学会了行向量与矩阵之间的乘法，我们就可以使用行向量对矩阵的行做操作了。所谓消元矩阵，就是将消元过程中的行变换转化为矩阵之间的乘法形式。

首先我们要知道，$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ ? & ? & ?\\ ? & ? & ?\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}? & ? & ?\\ 1 & 1 & 1\\ ? & ? & ?\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}? & ? & ?\\ ? & ? & ?\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

此时将$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$构成一个矩阵：单位阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，我们很容易验证，这样的单位阵与矩阵相乘不改变矩阵。消元矩阵就是它的变换形式。仍是以例一中的矩阵说明：

$$\begin{bmatrix}? & ? & ?\\ ? & ? & ?\\ ? & ? & ?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

首先明确：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}\text{本身}$$

我们消元过程是将第一行乘-3 加到第二行，这是对第二行的操作，那么就从单位阵得到第二行着手：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{第一行乘}-3\text{ 加到第二行}]{}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

单独抽取第二行的$\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & 8 & 1\\0 & 4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & 8 & 1\\0 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}*-3\\ *1\\ *0\end{array} = \begin{bmatrix}0 & 2 & -2\end{bmatrix}$

所以，经验证，这一步的消元矩阵就是$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，记为 $E_{21}$，意义是将矩阵 A 之中 2 行 1 列(2,1)位置变为 0 的消元矩阵。

同样，计算$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 2\\0 & 2 & -2 & 6\\0 & 4 & 1 & 2\end{array}\right] \xrightarrow[(3,2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 2\\0 & 2 & -2 & 6\\0 & 0 & 5 & -10\end{array}\right]$这一步的消元矩阵，即为：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{（第二行}*(-2)\text{加到第三行）}]{} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}(E_{32})$$

得到：

$$E_{32}\ E_{21}\ A(\text{系数矩阵}) = U(\text{上三角矩阵})$$

使用结合律，先计算 $E_{32}\ E_{21}$，记为 E，则 E 就是整个此消元过程的消元矩阵。

**核心：求消元矩阵就是从单位阵 I 入手，按照 A 每次变换的消元步骤操作 I 矩阵，能分别得到 $E_{\text{某行某列}}$，最后累积得到 E 即可。**

### 3.3 行交换矩阵与逆矩阵

（1）行变换与列变换

有了上面消元矩阵的启发，不难得到，能够交换 2x2 矩阵中两行的矩阵为：

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c & d\\a & b\end{bmatrix}$$

而交换 2x2 矩阵中两列的矩阵为：

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b & a\\d & c\end{bmatrix}$$

所以，左乘等同行变换，右乘等同列变换。

（2）逆矩阵初探

可以说我们学会了消元矩阵，就相当于我们可以用矩阵乘法对一个矩阵进行任何变化了，那么我们考虑一个反过程，即我们把一个消元结束的矩阵 U 如何变为未经消元的矩阵 A 呢？答案就是乘上一个逆矩阵。

比如【例 1】中的 $E_{21}$，是第一行*(-3)加到第二行，即 $E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，那么与之相反，我们在第二行上加上第一行*3 就可以复原这一运算过程，即：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathrm{I}$$

其中的 I 乘矩阵 A 不会造成影响。此时的$\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$称为${E_{21}}^{-1}$，就有了：

$${E_{21}}^{-1}\ E_{21}=\mathrm{I}$$

此时的${E_{21}}^{-1}$就是 $E_{21}$ 的逆矩阵。

## 五. 学习感悟

本节从矩阵消元的角度，介绍解方程的通用做法，并介绍了消元矩阵，使我们从矩阵乘法层面理解了消元的过程，并延伸了消元矩阵的应用：就是基于单位阵 I 的变化，对矩阵 A 进行行列变换的过程。这一节的消元法以后会常用，要熟练掌握才可以。