

一、知识概要

本节从对称矩阵的特征值，特征向量入手，介绍对称矩阵在我们之前学习的一些内容上的特殊性质。并借此引出了正定矩阵。

二、对称矩阵

正如我们之前学习的很多特殊矩阵一样（如马尔科夫矩阵），对称矩阵也有许多特殊性质。而我们之前注意到，一个矩阵很多性质的特殊性体现在特征值与特征向量上，而对于对称矩阵，我们从特征值也特征向量的特殊性开始入手。直接给出性质，对称矩阵满足：

$$(1) \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

(2) 有正交的特征向量

注：其中(2)指的是可以“挑选出”一组垂直的特征向量，因为对于特征值重复的情况来说，这时会有一整个平面的特征向量，那么我们只要选其中垂直的一组向量就行，此时定理“有正交的特征向量”仍满足。而对于特征值不重复的情况，其对应的特征向量相互垂直。

2.1 对称矩阵的分解

已知上面两个性质，我们就能看出来对称矩阵的很多特点了，比如：由(2)这个性质，它的特征向量必然全部线性无关，而这正是矩阵可被对角化的前提条件。于是我们根据矩阵对角化的知识：

通常情况：

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}^{-1} \quad (\mathbf{S} \text{ 是特征向量组成的矩阵})$$

对称情况(有特征向量正交)：

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^{-1} \quad (\mathbf{Q} \text{ 的列向量标准正交, } \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}) \\ &= \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T \end{aligned}$$

另外注意到，本身 $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T$ 这个形式就是对称的。 $(\mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T)^T = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T$ 。

所以，给定一个对称矩阵，我们就可以将其分解成上面的这种形式。这在力学上被称为主轴定理，它意味着如果给定某种材料，在合适的轴上来看，它就会变成对角化的，方向就不会重复。而在数学上，这被称为“谱定理”。

2.2 对称矩阵的特征值

还记得之前介绍的旋转矩阵，其中有的对应值会造成特征值为虚数的情况，但是对于对称矩阵来说，这种情况是不会发生的，即：**对称矩阵特征值均为实数**。那么为什么对称矩阵的特征值是实数？

由特征值公式：

$$Ax = \lambda x$$

- 对该公式取共轭，由于 A 是实矩阵，于是得到：

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda} \overline{x}$$

- 对其两侧同时取倒置：

$$\overline{x}^T A = \overline{x}^T \overline{\lambda}$$

- 两侧同时乘上 x 构造方程，可得：

$$\overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \overline{\lambda} x \quad (2.2.1)$$

注意到这时左边的等式出现了 Ax，如果我们构造一个新的等式，将 $Ax = \lambda x$ 代入，可以得到另一个关系式：

$$\overline{x}^T Ax = \lambda \overline{x}^T x \quad (2.2.2)$$

- 对比上面的两个式子 2.2.1 与 2.2.2，可以得到： $\lambda = \overline{\lambda}$ ($\overline{x}^T x$ 不为零时)

这就证明了特征值是一个实数。那么 $\overline{x}^T x = 0$ 情况存不存在呢？

列式计算：

$$\overline{x}^T x = [\overline{x}_1 \quad \overline{x}_2 \quad \dots \quad \overline{x}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2 + \dots + \overline{x}_n x_n$$

而其中的 $\overline{x}_i x_i$ 均为 $(a+bi)(a-bi)$ ，得到的均为实数且大于 0。仅当 x 为零向量时，其内积为 0。而对称矩阵的特征向量 x 不是零向量，那么 $\overline{x}^T x = 0$ 情况不存在，所以**对称矩阵特征值均为实数**。

同时，这里强调一下，**复数矩阵也可能特征值均为实数**。只要满足 $\overline{A}^T = A$ 。（共轭转置等于其本身）则其对称矩阵是实数，因为此时推理过程和对称矩阵无异。可将运算后的 \overline{A}^T 代换为 A。

接下来，在知道了其特征值为实数之后，下面我们还需要探究其是**正数还是负数**。

给出对称矩阵特殊性质如下：

(1) 对称矩阵的主元正负个数与特征值的正负个数对应一致。

正主元个数 = 正特征值个数

负主元个数 = 负特征值个数

(2) 对称矩阵的主元的乘积等于特征值的乘积(它们都等于矩阵行列式的值)

这提供了一种更方便的方式来了解对称矩阵的特征值多少个为正, 多少为负。因为在矩阵规格很大的情况下, 求矩阵的主元要远比求其特征值要简单得多, 前一个消元就好, 后一个还要解方程。

2.3 对称矩阵的另一种理解

根据我们上面的对称矩阵方式, $A = Q\Lambda Q^T$, 我们将它展开, 使用另一种矩阵乘法方式, 看看能不能从中得到什么新的理解矩阵运算方式。

$$A = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \dots \\ q_n^T \end{bmatrix}$$

而我们以前学习过, 矩阵乘法还可以用列乘行, 再相加方式计算, 这里我们使用这种计算方式。中间的对角阵可以理解为常数, 只要将 $\begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}$ 使用这种方式计算后相加, 得到:

$$A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \dots$$

q_1 是列向量, 而这里由于 $q_1 q_1^T$ 是单位向量, 或者说 $q_1^T q_1$ 为 1, 所以可将这些 $q_i q_i^T$ 都改写为 $q_i q_i^T / q_1^T q_1$, 很明显, 这是投影矩阵 $A(A^T A)^{-1} A^T$ 形式。而 $q_i q_i^T$ 可以理解为向 q_i 方向投影的投影矩阵。

于是就有对于谱定理的另一理解角度: 每一个对称矩阵都是一些互相垂直的投影矩阵的线性组合。

三. 正定矩阵简介

这一节中提前渗透一些正定矩阵的内容, 了解即可, 27, 28 课会时对正定矩阵会进行详细叙述。

所谓正定矩阵就是一类对称矩阵, 满足:

(1) 所有的特征值是正数

(2) 所有主元为正

(3) 所有的子行列式都为正

注：

子行列式概念：

从原行列式左上角开始依次划分出 1×1 的一块, 2×2 的一块, ... 得到的这些子块对应的行列式就称之为“子行列式”。

下面我们通过一个例题了解一下正定矩阵究竟有什么特别之处。

【例】矩阵 $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

解：

对该矩阵消元，可求得其主元为：5、 $\frac{11}{5}$ 皆为正。而且该矩阵是对称矩阵，所以它也是正定矩阵。

同时，我们计算它的特征值可以得到： $\lambda = 4 \pm \sqrt{5}$ （同主元，皆为正）

所以正定矩阵的行列式值是正数，但是这里要注意，行列式为正数的矩阵不一定是正定矩阵，要满足“所有的子行列式都为正”才可以。反例： $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

从主元到行列式再到特征值，这些性质就将本门课的主要内容很好地融合在了一起。这样一来，我们以前问题的探讨会方便很多。例如：矩阵的特征值就是计算微分方程时的关键条件。因为根据特征值的正负与否我们就知道其稳定与否。

四. 学习感悟

本节从对称矩阵入手，介绍了对称矩阵的一些基本性质，进而引出了正定矩阵。我们可以看到，正定矩阵将矩阵的特征值，主元，行列式都联系到了一起，这样一来很多东西就被大大简化了，之后学习正定矩阵时，我们会更好的体会到这一点。