

一篇文章入门多重网格方法

原创 邓子平 [多物理场仿真技术](#)



很多人第一次看到“多重网格”的时候，可能认为是有限元方法的网格划分方法。实际上多重网格方法是一种求解大规模线性方程组的数值计算方法，和有限元方法里的网格是两码事。

求解线性方程组通常有直接法和迭代法，直接法主要以求解逆矩阵为主，精确解，在小规模（自由度小于10万）比较常用，而大规模的方程组（自由度100万-1000万）通常适用迭代方法，一般给出一个初始值和迭代矩阵，在此基础上进行迭代计算，达到收敛标准为止。而对于超大规模（自由度1000万以上）的方程组，对硬件要求较高，普遍使用模型降阶方法，目前工程领域主要使用Krylov子空间方法（之前有过介绍）和多重网格方法，尤其是Krylov方法很容易进行并行和分布式计算。

多重网格方法属于迭代方法，具有迭代方法的一系列特点，在求解大规模稀疏对称正定线性方程组时，效率要高出普通迭代方法很多。

之所以叫多重网格，是因为该方法最初应用在有限差分方法上，有限元和有限差分在网格上的区别在于：有限差分的网格是结构化网格，即横平竖直的均匀网格，网格是平铺在对象上；而有限元方法则是把对象进行离散化。所以缩小线性方程组规模时，简单跨过中点，恢复时插值取其两点之间点即可，这也是多重网格的最初由来。这种最初的取点方法由于依赖于几何空间数据，所以又叫几何多重网格(Geometrical Multi Grid, GMG)，后来发展起来的无需几何空间数据，即纯粹求解线性方程组的方法，又叫代数多重网格(Algebraic Multi Grid, AMG)，很明显AMG在处理线性方程组迭代矩阵时要比GMG复杂。

多重网格方法理论基础复杂，翻遍网络，找不出一个实际应用的例子。后面有空拿一个具体求解例子来说明问题。

在笔者看来，解决工程领域的性能问题简单归结两个原则：二八原则和分治原则。即性能瓶颈普遍存在20%的地方，而解决方法即将问题分开，集中处理这20%的问题。

在[一篇文章入门仿真软件性能优化](#)一文中介绍过改进工业软件性能的方法和思想，多重网格方法属于其中的分治法，或者也属于模型降解的一种。其核心思想是在原有的线性方程组基础上构造迭代矩阵，缩小线性方程组的规模，其目的是加快某些区域的收敛速度，收敛到一定程度后再插值恢复到原有的规模。

开源工具推荐两个：

AMGCL

<https://github.com/ddemidov/amgcl.git>

HYPRE：

<https://computing.llnl.gov/projects/hypre-scalable-linear-solvers-multigrid-methods>

阅读： null

在看： null