

FEM之理论通俗有限元(2-1)---偏微分方程应用 (Matlab/COMSOL)

[多物理场仿真技术](#)

本文介绍分别用Matlab, COMSOL, 以及自己手工 求解拉普拉斯方程。

1. Matlab

命令行输入

1. pdetool

2. 启动界面, 工具栏选择画长方形工具, 画一个正方形, 如图1-1

3. 点击菜单 Options--> Application--> Heat transfer

4. 点击菜单 Boundary--> Boundary Mode, 选中图中左边一条边, 温度设置为100, 选中右边一条边温度设为0.

5. 点击菜单 Solve--Solve PDE 如图1-2

图1-1:

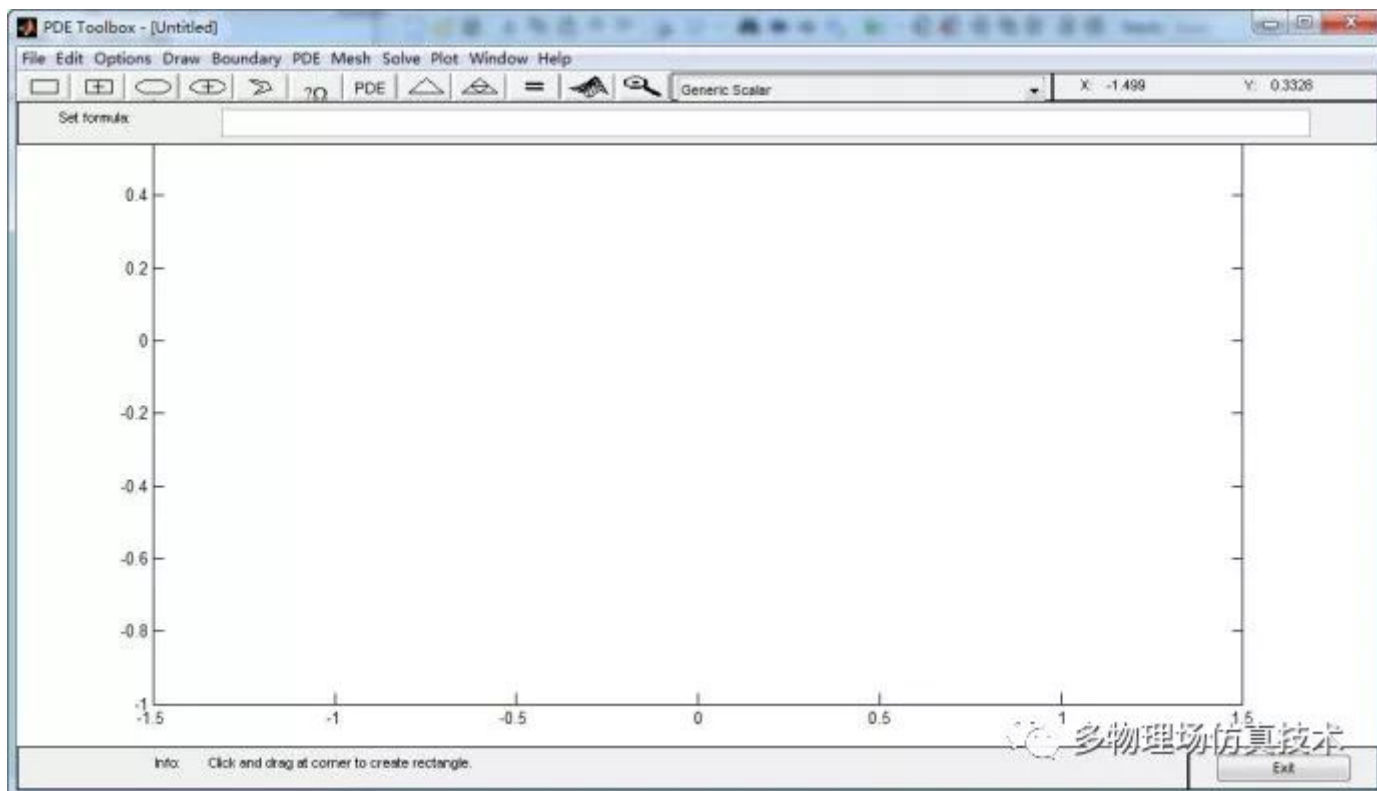
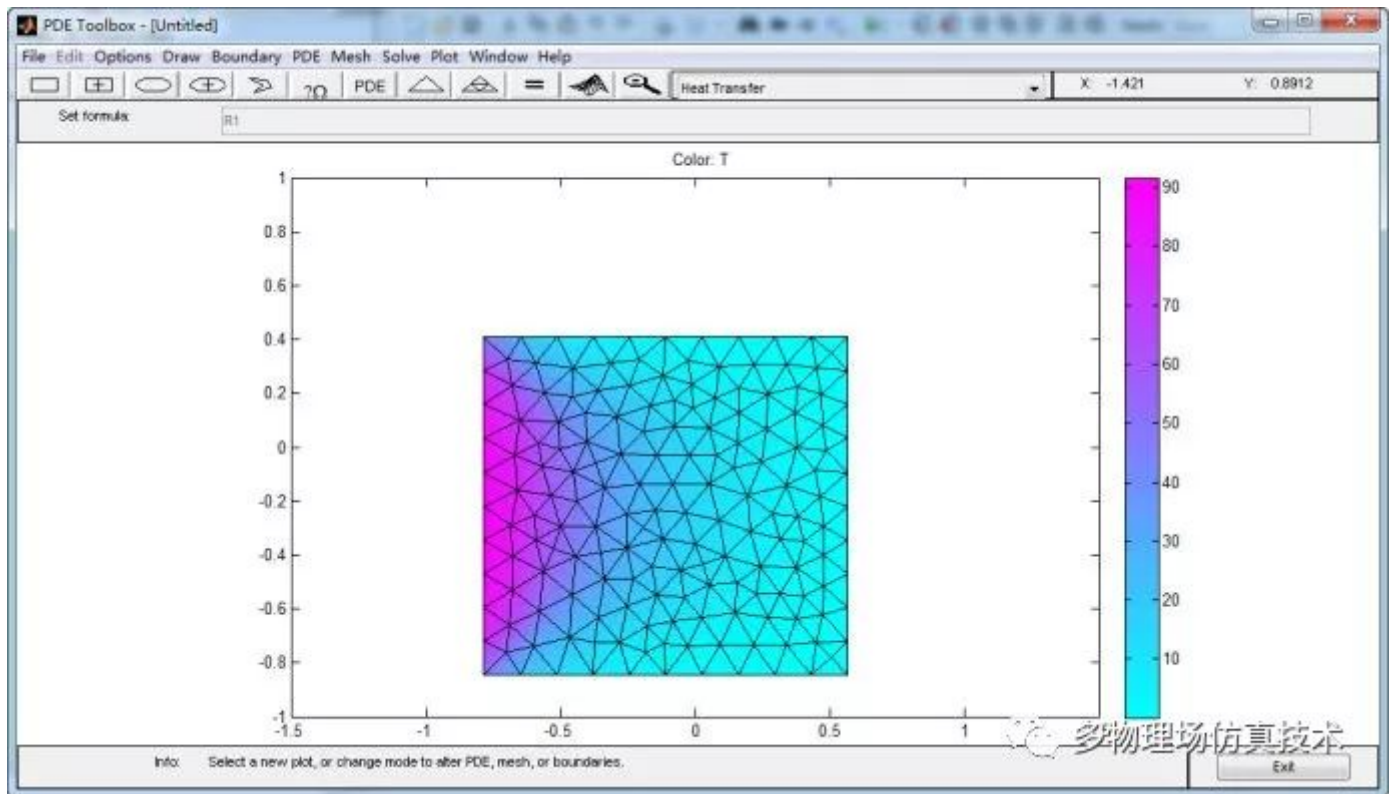


图1-2:

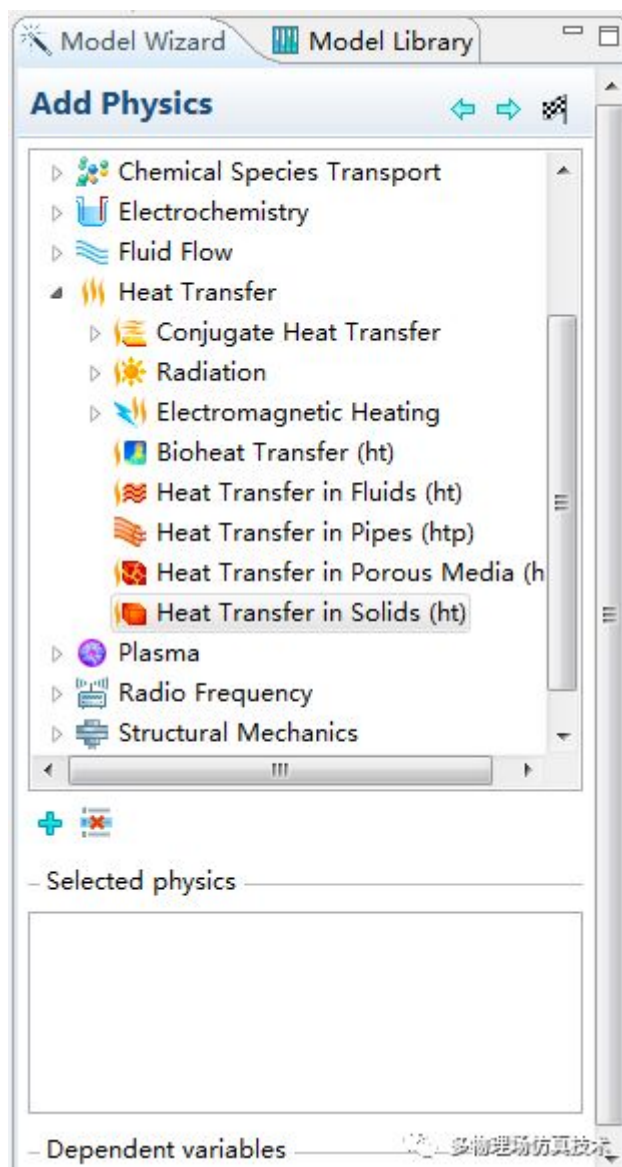
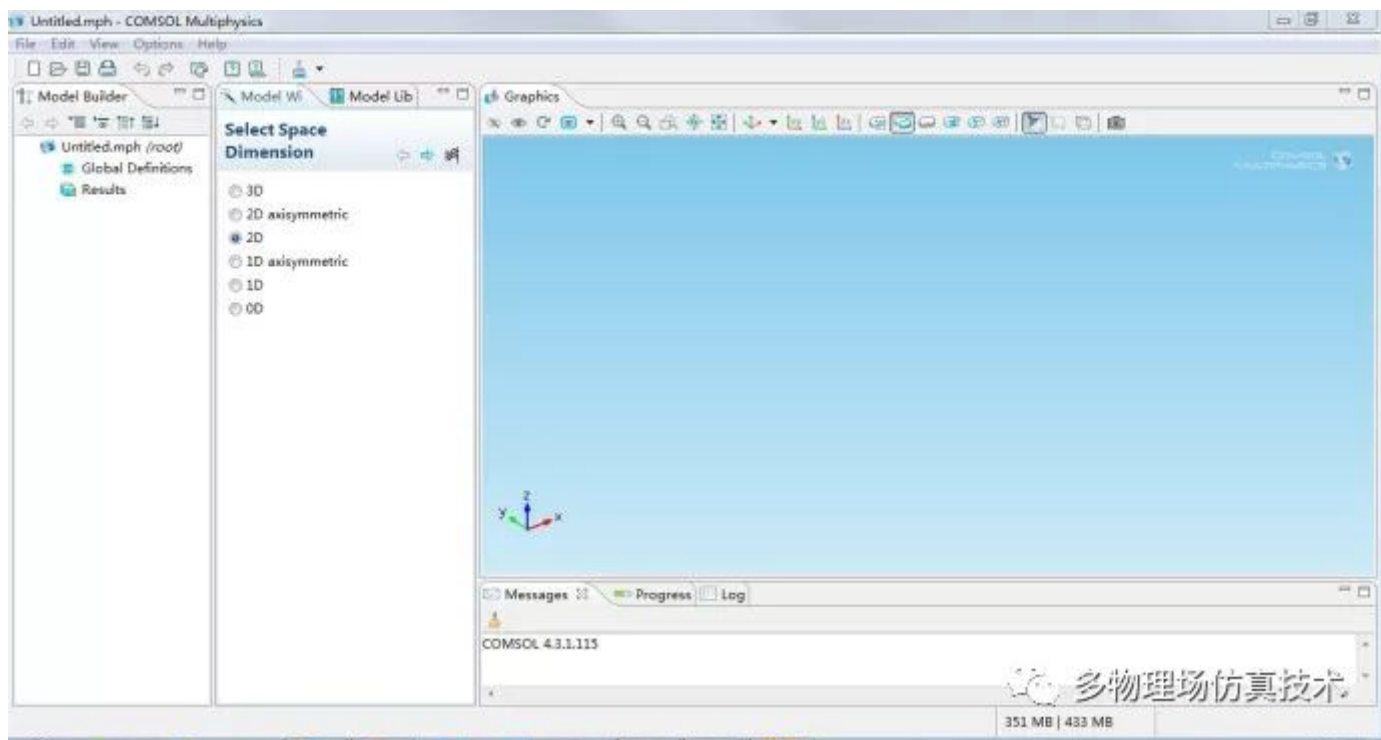


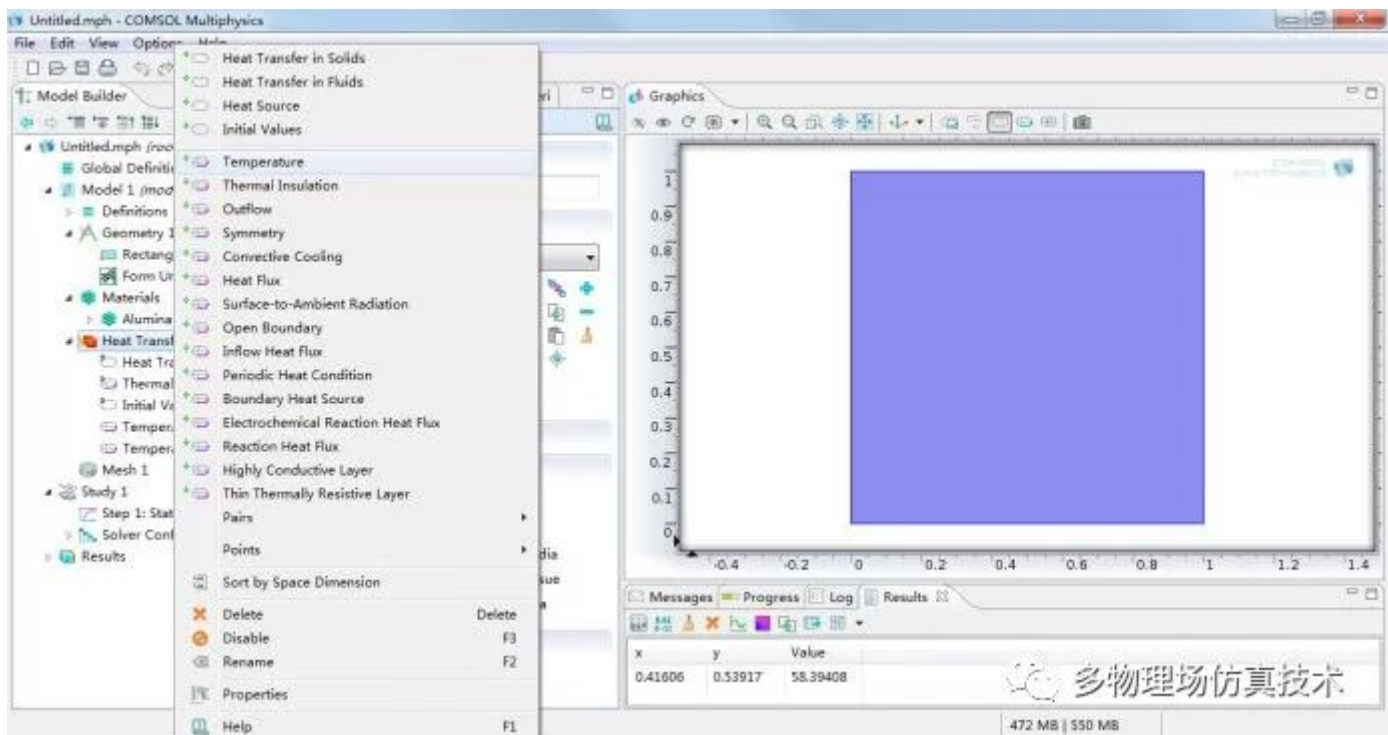
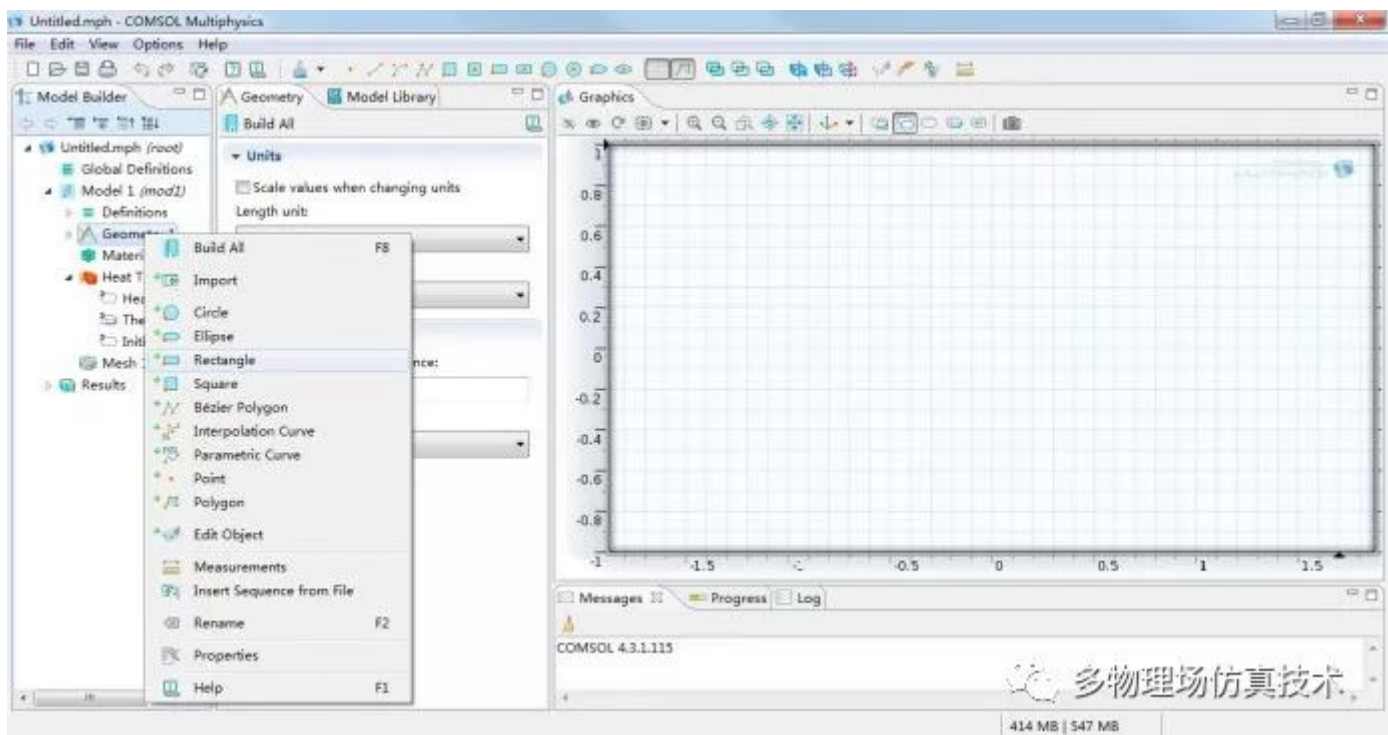
Matlab 解偏微分方程最大的局限性是 只能求解平面不能解三维。

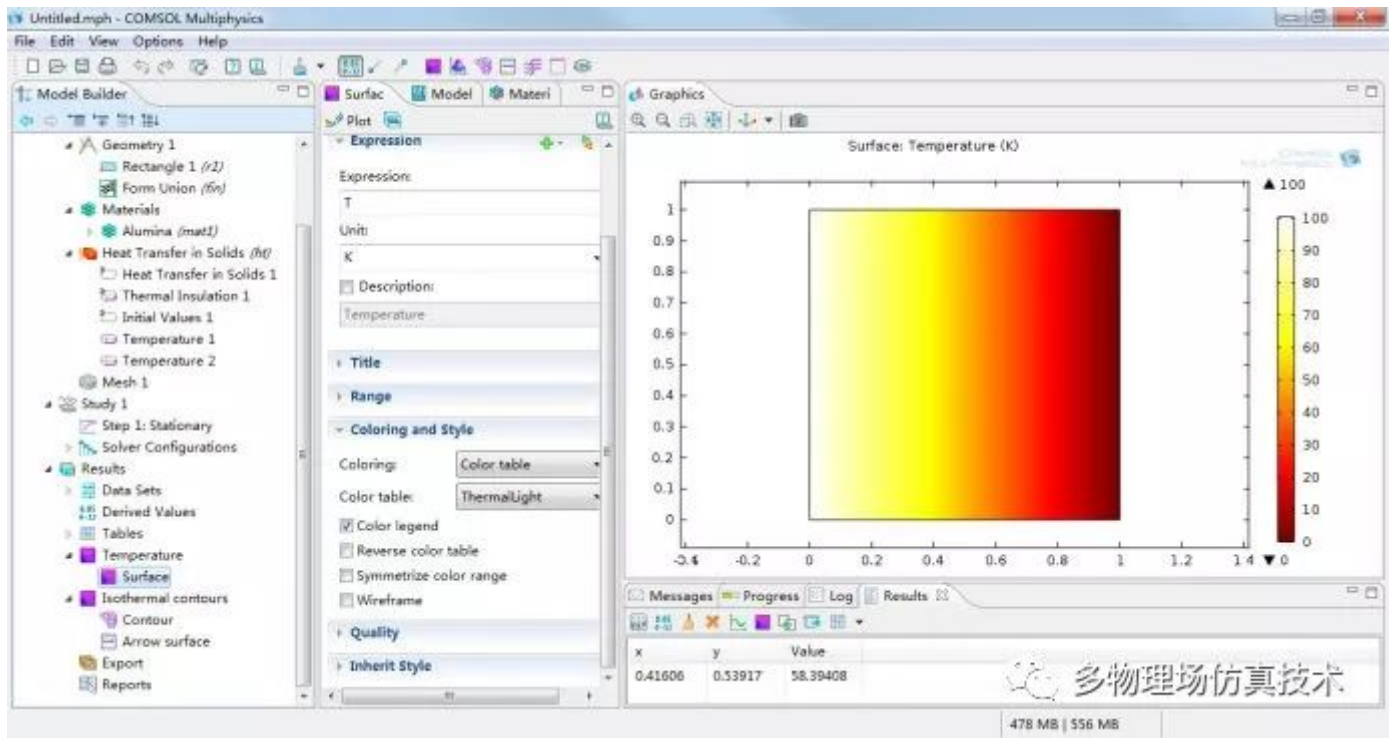
2. COMSOL

1. Space 选择2D
2. 求解类型选择Heat transfer-》Heat transfer in solid，求解类型选Stationary
3. 选中树形菜单Geometry，右键，选择rectangle，然后画出一个正方形
4. 选中树形菜单Material，选中一个Build-in的材料
5. 选中树形菜单Heat Transfer in Solids,右键选中 Temperature，然后选中长方形左边设置100,
6. 重复5，选中正方形右边设置0
7. 点击树形菜单Study1，右键计算 Compute selected step

结果看起来和Matlab 不太一样，是因为材料属性热导率不同，Matlab 默认边界温度为0。







3. 手工求解

先将正方形离散为三角单元，为三角单元建立形函数，然后利用伽辽金方法推导出积分公式，加入边界，建立可编程实现的有限元方程，求解线性方程，计算出结果。

三角单元离散化参考：FEM之单元(1)---三角单元介绍。

假设三角单元温度场函数为：

$$T = [S1 \ S2 \ S3] [T_i \ T_j \ T_k];$$

$S1 \ S2 \ S3$ 为 线性形函数；

$$S1 = (a1 + b1x + c1y) / 2A;$$

$$S2 = (a2 + b2x + c2y) / 2A;$$

$$S3 = (a3 + b3x + c3y) / 2A;$$

$T_i \ T_j \ T_k$ 为 三角形三个顶点上的温度；

A 为三角形面积；

T 表示了三角单元内部任意一点的温度。

下面最主要的一步是利用伽辽金方法为三角单元建立方程：

$$\int_A S^T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dA = 0$$

将形函数与偏微分方程乘积的积分余差为0.

其中 S^T 即为[S1 S2 S3]形函数，其中包含了变量x, y, 上式可以拆成两个

$$\int_A S^T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dA + \int_A S^T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dA = 0$$

对第一个式子进行解析，按照分步积分和链式求导法则，有如下表达式：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S^T \frac{\partial T}{\partial x} \right) = S^T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial S^T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}$$

将该式子右边第二项移动到左边，就得到了要计算的表达式

$$\frac{\partial S^T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}$$

其中 求导无任何问题，简单的高等数学知识；

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S^T \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

表达式 计算要利用一下 格林函数，将面积分转化成曲线积分，其实也是大学高等数学知识。最终的计算结果可以将积分表达式转化成用a, b, c表现的矩阵形式。

上面一步是很多教科书都没有写明的，一带而过，但这才是用伽辽金方法生成有限元方程的关键所在。

形成矩阵形式以后，就可以很方便的用编程实现了。详细推导过程可以参考《有限元分析--ANSYS理论与应用》P310--P312，作者 Saeed Moaveni，这个系列的书都不错，深入浅出，通俗易懂。

下一步就是要将单个矩阵组装成整体矩阵表达式。知道了节点编号，就是对号入座就行了。假设节点数目为N，生成一个N*N的总体矩阵K，按节点编号，将单个单元标号的矩阵放入整体矩阵中，不同单元相同节点号直接相加即可，这表明了单元的连续性。之后就是边界条件，将已知边界的温度生成一个N的向量B，解方程 $Kx=B$ ，即可得到温度场分布。在解决实际问题时，由于矩阵特别大，在总刚组装以及求解线性方程组时会非常讲究，以后有时间讨论。

注：文中所使用的软件仅供学习使用。