

一篇文章入门时域有限差分方法 (FDTD)

原创 www.cae-sim.com [多物理场仿真技术](#)



时域有限差分 (Finite Difference Time Domain简称FDTD) 由美籍华人Yee于1966年提出，是求解Maxwell方程的一种方法，其核心思想是将求解空间离散成笛卡尔坐标上的长方体网状结构，其中每个点赋值电场和磁场，随着时间变化每个点以蛙跳形式交替更新电场和磁场，从本质上讲，FDTD是对电磁场问题的最原始最完善的模拟，具有非常广泛的适用性。

不同于有限元方法，该方法只需要对求解空间划分结构化网格，不需要对对象划分网格，不需要求解线性方程组，不需要复杂导出方程，适合计算程序实现，非常容易应用并行计算。但由于FDTD计算量巨大，导致其方法提出后应用发展缓慢，最近一二十年，由于计算机硬件快速发展，尤其是多核多线程，GPU计算，分布式计算应用，使得FDTD可用于计算量大的实际工程。Navida 的CUDA 计算案例里甚至有专门针对FDTD的例子。

之前简单介绍了计算电磁学，这里首先介绍一下数学基础理论知识。

基础介绍

在积分微分公式中我们经常看到倒三角符号 ∇ ，叫做哈密顿算子，这是一个常用算子，读作del，表示在空间xyz各方向上的全微分，另一个是 $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$ ， Δ 称为拉普拉斯算子。

梯度: ∇u

散度: $\nabla \cdot \mathbf{A}$

旋度: $\nabla \times \mathbf{A}$

梯度、散度和旋度是矢量分析里的重要概念。之所以是“分析”，因为三者是三种偏导数计算形式。这里假设读者已经了解了三者的定义。它们的符号分别记作如下：

$$\mathbf{grad} \varphi \leftrightarrow \nabla \varphi$$

$$\mathbf{div} \mathbf{F} \leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} \leftrightarrow \nabla \times \mathbf{F}$$

从符号中可以获得这样的信息：

- ①求梯度是针对一个标量函数，求梯度的结果是得到一个矢量函数。这里 φ 称为势函数；
- ②求散度则是针对一个矢量函数，得到的结果是一个标量函数，跟求梯度是反一下的；
- ③求旋度是针对一个矢量函数，得到的还是一个矢量函数。

这三种关系可以从定义式很直观地看出，因此可以求“梯度的散度”、“散度的梯度”、“梯度的旋度”、“旋度的散度”和“旋度的旋度”，只有旋度可以连续作用两次，而一维波动方程具有如下的形式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

其中 a 为一实数，于是可以设想，对于一个矢量函数来说，要求得它的波动方程，只有求它的“旋度的旋度”才能得到。下面先给出梯度、散度和旋度的计算式：

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (4)$$

多物理场仿真技术

电磁场本构方程为麦克斯韦方程

名称	微分形式	积分形式
高斯定律	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$
高斯磁定律	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
法拉第感应定律	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
麦克斯韦-安培定律	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

以上四个方程构成了麦克斯韦方程组。

其中 E 为电场强度， H 为磁感应强度， B 为磁通量密度， J 为电流密度。

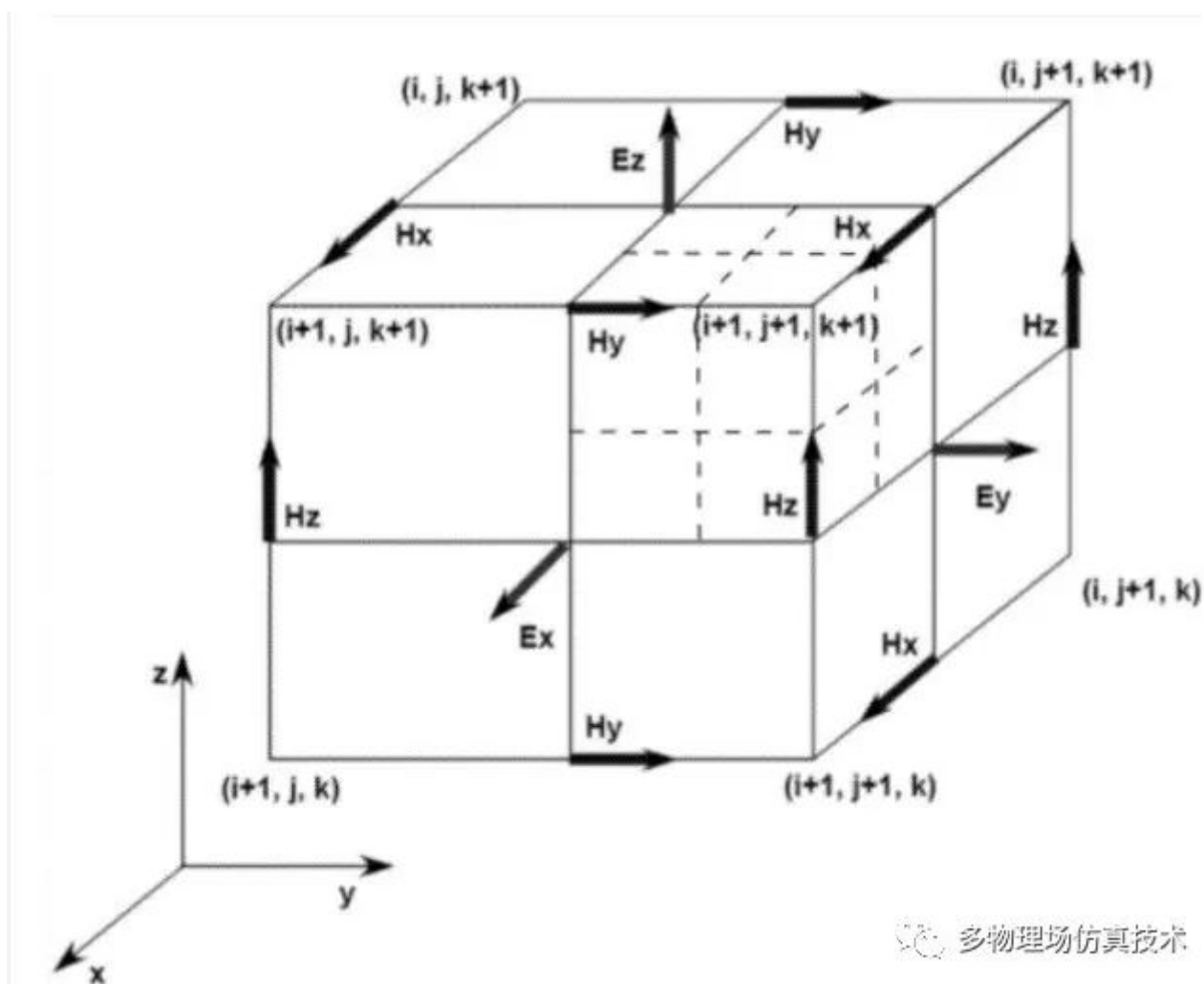
通常说的磁生电，电生磁，麦克斯韦方程准确描述为：

- 1.电场的散度跟这点的电荷密度成正比；
- 2.感生电场的旋度等于磁感应强度的变化率；
- 3.磁场的散度处处为0；
- 4.感生磁场的旋度等于电流密度和电场强度变化率之和

FDTD的Cell（元胞）结构

FDTD的核心思想是将求解空间离散成笛卡尔坐标上的长方体网状结构，下图（图3）是网状结构中的一个单元，一个非常典型的三维Yee元胞结构，又叫Yee网格。

FDTD的Cell



1.靠近远点的坐标为 i, j, k , 对角坐标则为 $i+1, j+1, k+1$ 。

2.在这个长方体上, 我们将其分为八个等分长方体, 长方体的每条边的中点存放磁场分量, 面上的中点存放电场分量。当到下一个长方体时, 则反过来: 边的中点存放电场分量, 面的中点存放磁场分量, 以此类推。由上图可以看到: 每一个电场矢量都被四个磁场矢量环绕; 每个磁场矢量被四个电场所环绕, 类似磁场的旋度。

3.FDTD算法在离散的时间瞬间取样和计算场值, 电场和磁场取样计算并不在同一时刻。对时间步长 t , 电场取样时间为 $0, 1t, 2t, 3t$, 磁场取样时刻为 $0.5t, 1.5t, 2.5t, 3.5t$, 两者之间相差半个时间步长。

4.对于求解区域内不同介质的对象(介电常数, 磁导率, 电导率等), 也分布在FDTD的整个网格节点上。

从以上描述可知, FDTD是一种在时间上迭代的差分方法, 在给定的时间上, 更新网格节点上电场, 磁场, 不需要对对象划分网格, 也不需要求解线性方程组。

几个核心问题:

1. 如何确定网格大小;
2. 如何确定迭代时间步长;
3. 边界条件如何设置;
4. 如何设置激励

1. 如何确定网格大小;

FDTD的网格, 我们通常用Grid, 表示是对空间的离散, 而非对物体本身的离散, 对空间划分网格比划分物体几何要简单, 这是差分法和有限元法最显著的一个区别。FDTD差分格式所能模拟的最小尺寸为一个网格, 对于小于一个网格的尺寸, 需要近似成一个网格, 但是存在的问题是在细小几何, 比如圆孔, 曲面曲线, 缝隙等结构物体时, 计算误差会比较大, 如果全体加密网格, 网格单元数和计算量也会快速增加。通常的办法是在这些细小几何的地方, 采用局部加密的方式, 如图1所示。

通常情况下, FDTD离散网格的大小和波长有关, 应满足条件网格尺寸小于计算区域内最小波长的0.1倍。网格加密尺寸需要更加几何和波长动态确定。

2. 如何确定迭代时间步长;

利用波矢量和频率的色散关系，可以求出空间和时间间隔之间应该满足的关系，该关系称为Courant稳定性条件。对于一维，时间间隔必须小于等于波以光速通过一个Yee网格所需的时间，二维和三维，时间间隔必须小于等于波以光速通过一个Yee网格对角线的1/3(三维)或者1/2(二维)所需要的时间。而对于数值色散，时间间隔要取得更小。

3. 边界条件如何设置

许多电磁场边值问题都包含了无限大的空间范围，例如天线设计，电磁散射，电磁传播等。求解的一大困难是无法存储无限空间的网格数据，需要采取一定措施将无限大空间问题转成有限空间问题，通常的做法是设置人工的边界，将无限大区域截断，构造出一个有限的空间区域，这个区域包含了要求解的对象，激励源等，同时需要在人工边界上接入一定的边界条件。使得电磁波在这些边界上与无限大空间一样无条件地向外传播，这些边界条件称为吸收边界条件。解决问题的关键是获得合适的吸收边界条件，其中早期比较典型的是Mur吸收边界条件。

完全匹配层，通过在截断边界处附加匹配的有耗材料来实现。在实际三维电磁场中，电磁波会以不同角度入射到截断边界上，要使所有入射波都能够无反射地进入到有耗媒质中比较困难。完全匹配层吸收边界通过场分裂法和单轴媒质两种方法实现。

4. 激励源

在电磁仿真软件中，需要设置激励源，也就是通常所说的类似Port端口的概念。FDTD常用的激励源有：时协场源；脉冲源，包括常见的高斯脉冲，升余弦脉冲，截断三正/余弦脉冲，调制高斯脉冲，双指数脉冲。

利用FDTD计算还会涉及到近远场转化，色散模型，并行计算，S参数计算等一系列问题，后面介绍天线，矩量法等再介绍相关话题。

FDTD软件

由于FDTD原理相对简单，开源和商用的软件都比较多，开源的FDTD++，Meep，OpenEMS，商用的GEMS，xFDTD，FDTDSolution，国内的有EastFDTD。