FEM之单元(1)---三角单元介绍

原创 邓子平 多物理场仿真技术
收录于合集
#软件研发测试工程师 17
#求解器开发 17

大概10年前写的关于有限元的白话文

1.一阶三角形场函数

三角形单元因生成容易，计算简单，容易加密，成为有限元分析中最常用的单元。

针对一阶单元，即一个三角形有三个点。

对于任意一个三角形，假设三顶点坐标点为（x1, y1） (x2, y2) (x3, y3), 三点的场函数分别定义为点Fx1, Fy1, Fx2,Fy2，Fx3,Fy3

三角形内任意一点的场函数可以表示为

$$Fx=a1+a2*x+a3*y$$

$$Fy=b1+b2*x+b3*y$$

其中Fx为x方向的场函数，Fy为y方向的场函数，a1, a2, a3, b1, ,b2, b3为常数项。

由于已知三点坐标，即在三点上也满足上式。将三点的坐标带入上式，可得6个方程。例：

$$Fx1=a1+a2*x1+a3*y1$$

a1, a2, a3, b1, ,b2, b3共6个变量，6个方程，可以求出：

$$a1=((x2*y3-x3*y2)*Fx1+(x3*y1-x1*y3)*Fx2+(x1*y2-x2*y1)*Fx3)/(2*A)$$

$$b1=((x2*y3-x3*y2)*Fy1+(x3*y1-x1*y3)*Fy2+(x1*y2-x2*y1)*Fy3)/(2*A)$$

其中$A=((x2*y3-x3*y2)+(x3*y1-x1*y3)+(x1*y2-x2*y1))/2$

公式看起来比较繁琐，这些转换的目的只有一个：为了让场函数能用 三角形的三个顶点的坐标来表示。

将求解出来的 a1,a2,a3,b1,b2,b3 带入到

Fx=a1+a2*x+a3*y

Fy=b1+b2*x+b3*y

中：

可以得到新的表达式：

Fx=N1*Fx1+N2*Fx2+N3*Fx3

Fy=N1*Fy1+N2*Fy2+N3*Fy3

其中

N1=(x2*y3-x3*y2)+(y2-y3)*x+(x3-x2)*y

以此类推，详细推导公式可以参考任意一本有限元书籍

总之最后的结果是：

三角形内任意一点的场函数可以用 三个顶点的坐标，场函数，以及该任意点坐标表示，这样一来，只要我们求出了顶点的场函数的值，就可以通过插值计算出三角形内任意一点的场函数值。如果是矢量，需要两个表达式，标量只要一个表达式。

2.偏微分方程概念

有限元方法的目的就是求解偏微分方程，利用有限元方法求解偏微分方程主要有两种：

1. 变分原理的Ritz方法

2. 利用加权余值中的 伽辽金法（Galerkin weighted residual method）

一些基本概念

1.边界：

第一类边界,直接描述边界上结果，用于已知边界确切结果 比如边界上外力 F = 10，温度T=40

又叫 Dirichlet （狄利克雷）边界

第二类边界 不直接给出确切结果，用导数方式给出

又叫Neumann （诺伊曼/诺曼）边界

第三类边界可以看成是 第一类和第二类边界的叠加

又叫Robin 边界

2.常用标记：

梯度、散度和旋度是矢量分析里的重要概念。之所以是“分析”，因为三者是三种偏导数计算形式。这里假设读者已经了解了三者的定义。它们的符号分别记作如下：

$$grad\varphi \leftrightarrow \nabla\varphi$$

$$div\boldsymbol{F} \leftrightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{F}$$

$$rot\boldsymbol{F} \leftrightarrow \nabla\times\boldsymbol{F}$$

从符号中可以获得这样的信息：

①求梯度是针对一个标量函数，求梯度的结果是得到一个矢量函数。这里φ称为势函数；

②求散度则是针对一个矢量函数，得到的结果是一个标量函数，跟求梯度是反一下的；

③求旋度是针对一个矢量函数，得到的还是一个矢量函数。

这三种关系可以从定义式很直观地看出，因此可以求“梯度的散度”、“散度的梯度”、“梯度的旋度”、“旋度的散度”和“旋度的旋度”，只有旋度可以连续作用两次，而一维波动方程具有如下的形式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

其中a为一实数，于是可以设想，对于一个矢量函数来说，要求得它的波动方程，只有求它的“旋度的旋度”才能得到。下面先给出梯度、散度和旋度的计算式：

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{4}$$

上图截取自：

http://blog.sina.com.cn/s/blog_5701b67c0100x7fv.html

3. 不同物理场应用

平面力学问题：

场函数Fx，Fy取为位移

由平面应变为位移对坐标的导数

即x方向应变 = Fx'/x

y方向应变 = Fy'/y

可知 Fx=a2， Fy=b3 都为常数。所以一阶三角形为常应变单元，即一个单元内应变不发生变化，为了保证精度，所以在物体应变变化大的地方要加密网格。

弹性力学偏微分方程中的应力，应变通过变换也都可以用 场函数来表示，推导可参考有限元书（目前市面上关于有限元大都是力学方面的）。

由物体平衡时，物体整体势能最小，将势能函数取变分可得到2D静力平面问题的矩阵表达式，表达式中包含了刚度矩阵，位移向量和节点荷载向量，根据整理的公式，就可以直接用代码实现了。

平面热传递：

因为温度是标量，所以推导求解比力学问题要简单，场函数定义为：

F=a1+a2*x+a3*y

仍然可以利用前面的推导，得出任意一点场函数的表达式。

平面温度场方程为：

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+q_v-\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=0$$

以第一类边界为例，带入泛函计算，最后可得泛函表达式：

$$[K]^e\{T\}^e+[N]^e\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}^e-\{p\}^e$$

公式的推导参考 《有限单元法在传热学中的应用》

针对稳态，第二项可以去掉。

平面电磁

场函数F取静电势/磁势,电场/磁场

考虑如下二阶微分方程：

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\beta\Phi=f$$

常用的二维拉普拉斯方程，泊松方程和赫姆霍兹方程都是上述方程的特殊形式

利用变分建立该函数的泛函，将场函数带入泛函，最后可推导出单个单元方程

[K]{F}-B=0

下一步和静力学一样，组装成总体刚度矩阵，求解

在电磁计算中，使用三角面片网格会出现伪解的现象，而且由于是多种材料，在处理边界时会比较困难，于是引入了矢量单元，将自由度赋在边而不是节点上（edge element），具体参考《电磁场有限元方法》

平面声学

场函数F 取声压

声学中需要求解波动方程

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p^2}{\partial t^2}$$

右边的P为声压。对于简谐振动，可以改写成赫姆霍兹方程（Helmholtz）

得出该方程的泛函，也可以通过能量平衡原理导出泛函。取第一边界条件，场函数带入可求得

[K]*F=a[B]

之后可求得声压和频率

平面流体

流体主要求解Navier-Stokes方程

理论上三角形单元是可以用来求解流体N-S方程的，实际上由流体的特点，有限元通常使用四边形和六面体。考虑到计算效率，目前CFD软件用得最多的还是有限体积法。

对于三角形二阶单元（每条边上有一个点，一个单元共有6个点）以及高阶，推导过程类似。工程上二阶单元已经能很好满足要求。有些商业软件提供了高阶单元（p单元），高阶单元的好处是只需少量网格，针对某些特殊case，可以在不改变网格情况下，通过升阶提升精度。

有限元是求解偏微分方程一种方法，如果想开发有限元程序，求解偏微分方程是绕不过去的槛。不过好在科学家和数学家们已经做了很多研究，不用我们自己去推导头疼的公式，只要记住公式和结论都行了，力学中二阶的四面体单元刚度矩阵有30*30=900个数据，实在没办法自己推导。但是作为有限元开发，了解推理过程对开发是非常有好处的。