计算方法

▷ 一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
有限差分法

9.3 一阶微分方程组与高阶方程的数值解

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
▷ 一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
有限差分法

9.3.1 一阶微分方程组

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1\big(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\big), \\ y_2'(x) = f_2\big(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\big), \\ \quad\vdots \\ y_n'(x) = f_n\big(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\big), \\ y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \cdots,\ y_n(x_0) = y_{n0}. \end{cases}$$

其中$a < x \le b$.

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
▷ 一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
有限差分法

若记

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}(x) = \big(y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\big)^T, \\
&\boldsymbol{y}_0 = \big(y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{n0}\big)^T, \\
&\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = (f_1(x, \boldsymbol{y}), f_2(x, \boldsymbol{y}), \cdots, f_n(x, \boldsymbol{y}))^T,
\end{aligned}
$$

则微分方程组可以写成向量形式

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x)), a < x \le b, \\
\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{y}_0.
\end{cases}
$$

微分方程组初值问题在形式上与单个微分方程初值问题完全相同，只是数量函数在此变成了向量函数.

因此，求解单个一阶微分方程初值问题的数值方法，可以完全平移到求解一阶微分方程组的初值问题中，只不过是将单个方程中的函数换为向量函数即可.

例如，针对一阶微分方程组，我们可以给出标准四级四阶R-K方法如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{1}{6}(\boldsymbol{K}_1 + 2\boldsymbol{K}_2 + 2\boldsymbol{K}_3 + \boldsymbol{K}_4), \\ \boldsymbol{K}_1 = h\boldsymbol{f}(x_i, \boldsymbol{y}_i), \\ \boldsymbol{K}_2 = h\boldsymbol{f}(x_i + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{K}_1), \\ \boldsymbol{K}_3 = h\boldsymbol{f}(x_i + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{K}_2), \\ \boldsymbol{K}_4 = h\boldsymbol{f}(x_i + h, \boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{K}_3). \end{cases}$$

其分量形式为:

$$\begin{cases} y_{i+1,j} = y_{i,j} + \frac{1}{6}(K_{1j} + 2K_{2j} + 2K_{3j} + K_{4j}), \\ K_{1j} = hf_j(x_i; y_{i1}, y_{i2}, \cdots, y_{in}), \\ K_{2j} = hf_j(x_i + \frac{h}{2}; y_{i1} + \frac{K_{11}}{2}, y_{i2} + \frac{K_{12}}{2}, \cdots, y_{in} + \frac{K_{1n}}{2}), \; j = 1, 2, \cdots, n \\ K_{3j} = hf_j(x_i + \frac{h}{2}; y_{i1} + \frac{K_{21}}{2}, y_{i2} + \frac{K_{22}}{2}, \cdots, y_{in} + \frac{K_{2n}}{2}), \\ K_{4j} = hf_j(x_i + h; y_{i1} + K_{31}, y_{i2} + K_{32}, \cdots, y_{in} + K_{3n}). \end{cases}$$

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
▷ 一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
有限差分法

定理9.3.1 设$\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$在$n+1$维区域$D=\{(x,\boldsymbol{y})|a\le x\le b,\ -\infty<y_i<\infty,\ i=1,2,\cdots,n\}$上连续，关于$\boldsymbol{y}$满足利普希茨条件，即存在常数$L$，使得

$$\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(x,\bar{\boldsymbol{y}})\|\le L\|\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}}\|,$$

对任意的$x\in[a,b]$以及$\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{y}}$都成立，则如下微分方程组初值问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}'(x)=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x)),a<x\le b,\\ \boldsymbol{y}(a)=\boldsymbol{y}_0,\end{cases}$$

存在唯一连续解$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x)$.

与标量方程类似，今后我们均假定$\boldsymbol{f}$满足利普希茨条件.

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
▷ 一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
有限差分法

考虑一类形式简单的线性方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x), \\ \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

其中$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，其特征值为$\lambda_i(i = 1, 2, \cdots, n)$且$Re(\lambda_i) < 0$，记

$$s = \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} |Re(\lambda_i)|}{\min\limits_{1 \le i \le n} |Re(\lambda_i)|},$$

称s为该方程组的刚性比. 若$s >> 1$，$\boldsymbol{A}$为病态矩阵，对应的方程组称为刚性方程组(stiff方程组).

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
▷ 一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
有限差分法

对于前面给出的一般非线性方程组，将向量函数$\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$关于$\boldsymbol{y}$的雅可比矩阵记为

$$J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

设其特征值为$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，且$Re(\lambda_i)<0$. 这时的刚性比和刚性方程的定义同前.

通常$s\geq 10$就认为方程组是刚性的，s越大，方程组病态越严重. 在数值求解的过程中必须采用绝对稳定性较好的方法，否则误差的累计往往会淹没真解. 有关刚性方程组的数值解法，通常需要进行专题讨论.

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
▷ 高阶常微分方程
边值问题数值解法
有限差分法

9.3.2 高阶常微分方程

m阶常微分方程初值问题为

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{(m)} = f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'', \cdots, \boldsymbol{y}^{(m-1)}), \quad a < x \leq b, \\ \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{y}_0,\ \boldsymbol{y}'(a) = \boldsymbol{y}_0', \cdots,\ \boldsymbol{y}^{(m-1)}(a) = \boldsymbol{y}_0^{(m-1)}. \end{cases}$$

求解高阶微分方程初值问题是将其转化为一阶微分方程组来求解.

为此引进新的变量$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}', \cdots, \boldsymbol{y}_m = \boldsymbol{y}^{(m-1)}$, 即可将$m$ 阶微分方程转化为如下的一阶微分方程组.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1' = \boldsymbol{y}_2, \\ \boldsymbol{y}_2' = \boldsymbol{y}_3, \\ \cdots \\ \boldsymbol{y}_{m-1}' = \boldsymbol{y}_m, \\ \boldsymbol{y}_m' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m), \\ \boldsymbol{y}_1(a) = \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_2(a) = \boldsymbol{y}_0', \cdots, \boldsymbol{y}_m(a) = \boldsymbol{y}_0^{(m-1)}. \end{cases}$$

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
▷ 高阶常微分方程
边值问题数值解法
有限差分法

例 将下列高阶微分方程化为一阶微分方程组初值问题:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^{2x}\sin x, \quad 0 < x \le 1, \\ y(0) = -0.4, \quad y'(0) = -0.6. \end{cases}$$

解: 令$y_1 = y, y_2 = y'$, 则原二阶微分方程化为一阶微分方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = e^{2x}\sin x - 2y_1 + 2y_2, \\ y_1(0) = -0.4, \quad y_2(0) = -0.6. \end{cases}$$

若记

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ e^{2x}\sin x - 2y_1 + 2y_2 \end{pmatrix},$$

我们可将该一阶方程组写为相应向量形式.

针对这一一阶方程组, 我们可以用前面与标量方程数值解法对应的方法数值求解, 例如用标准的四级四阶龙格-库塔法求解:

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
▷ 高阶常微分方程
边值问题数值解法
有限差分法

$$\boldsymbol{K}_1 = h\boldsymbol{f}(x_i, \boldsymbol{y}_i) = h\begin{pmatrix} y_{2i} \\ e^{2x_i}\sin x_i - 2y_{1i} + 2y_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_2 = h\boldsymbol{f}(x_i + \tfrac{1}{2}h, \boldsymbol{y}_i + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{K}_1) = \begin{pmatrix} K_{21} \\ K_{22} \end{pmatrix}$$

$$= h\begin{pmatrix} y_{2i} + \frac{1}{2}K_{12} \\ e^{2(x_i+h/2)}\sin(x_i + \frac{h}{2}) - 2(y_{1i} + \frac{K_{11}}{2}) + 2(y_{2i} + \frac{K_{12}}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_3 = h\boldsymbol{f}(x_i + \tfrac{1}{2}h, \boldsymbol{y}_i + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{K}_2) = \begin{pmatrix} K_{31} \\ K_{32} \end{pmatrix}$$

$$= h\begin{pmatrix} y_{2i} + \frac{1}{2}K_{22} \\ e^{2(x_i+h/2)}\sin(x_i + \frac{h}{2}) - 2(y_{1i} + \frac{K_{21}}{2}) + 2(y_{2i} + \frac{K_{22}}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_4 = h\boldsymbol{f}(x_i + h, \boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{K}_3)$$

$$= h\begin{pmatrix} y_{2i} + K_{32} \\ e^{2(x_i+h)}\sin(x_i + h) - 2(y_{1i} + K_{31}) + 2(y_{2i} + K_{32}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{41} \\ K_{42} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \tfrac{1}{6}(\boldsymbol{K}_1 + 2\boldsymbol{K}_2 + 2\boldsymbol{K}_3 + \boldsymbol{K}_4)$$

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
▷ 边值问题数值解法
有限差分法

9.4 边值问题数值解法

考虑二阶常微分方程

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b.$$

第一类边值条件 $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$
第二类边值条件 $y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta.$
第三类边值条件 $y'(a) - \alpha_0 y(a) = \alpha_1, \quad y'(b) + \beta_0 y(b) = \beta_1.$
其中$\alpha_0 \geq 0,\ \beta_0 \geq 0,\ \alpha_0 + \beta_0 > 0.$
微分方程分别结合第一、第二、第三边值条件，则称其为第一、第二、第三边值问题.

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
▷ 有限差分法

9.4.1 有限差分法

有限差分法是求解常微分方程边值问题的一种基本数值方法，该法用数值微分公式近似替代微分方程和边界条件中的导数，把微分方程离散化成一个代数方程组(差分方程组). 求解这个差分方程组，将差分方程组的解作为微分方程边值问题的近似解. 这种解称为差分解.

考虑求解如下二阶常微分方程第一边值问题

$$\begin{cases} y''(x) - q(x)y(x) = f(x), \quad a < x < b, \\ \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

其中$q(x), f(x)$是已知函数且$q(x) \geq 0, \alpha, \beta$是已知常数.

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
▷ 有限差分法

将求解区间$[a,b]$分成n等份，即取步长$h=(b-a)/n$，令节点$x_i=a+ih(i=0,1,2,\cdots,n)$. 在内节点$x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$处微分方程为

$$y''(x_i)-q(x_i)y(x_i)=f(x_i),\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

代入数值微分公式

$$y''(x_i)=\frac{y(x_{i-1})-2y(x_i)+y(x_{i+1})}{h^2}-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)$$

得

$$\frac{y(x_{i-1})-2y(x_i)+y(x_{i+1})}{h^2}-q(x_i)y(x_i)=f(x_i)+\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i),\quad i=1,2,\cdots$$

略去截断误差项，并记$q_i=q(x_i),f_i=f(x_i)$，令$\{y_i\}$满足方程

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
▷ 有限差分法

$$\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}-q_iy_i=f_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

上式即

$$(*)\qquad y_{i-1}-(2+h^2q_i)y_i+y_{i+1}=h^2f_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

称为差分方程组，略去的项

$$R[x_i]=\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)$$

称为差分方程逼近微分方程的截断误差.

(*)式是一个含有$n+1$个未知量$y_i\ (i=0,1,\cdots,n)$，而只有$n-1$个方程的线性方程组. 要使该方程组有唯一解，这需要根据边值条件或者减少两个未知量或者增补两个方程.

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
▷ 有限差分法

对于第一边值问题，由于边值条件$y_0 = \alpha, y_n = \beta$已知，则其差分方程组为

$$\begin{cases} -(2+h^2q_1)y_1 + y_2 = h^2 f_1 - \alpha, \\ y_{i-1} - (2+h^2q_i)y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 2,3,\cdots,n-2, \\ y_{n-2} - (2+h^2q_{n-1})y_{n-1} = h^2 f_{n-1} - \beta. \end{cases}$$

注意到$q_i \geq 0\,(q(x) \geq 0)$，这是一个(弱)对角占优的三对角方程组，其解存在且唯一，可用追赶法解之.

对于第二边值问题，为保证略去的截断误差为$O(h^2)$，在边界处的一阶导数用三点数值微分公式替代，即

$$\begin{cases} y'(x_0) = \frac{-3y(x_0)+4y(x_1)-y(x_2)}{2h} + \frac{h^2}{3}y'''(\xi_0), \\ y'(x_n) = \frac{y(x_{n-2})-4y(x_{n-1})+3y(x_n)}{2h} + \frac{h^2}{3}y'''(\xi_n). \end{cases}$$

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
▷ 有限差分法

与方程组(*)联立，可得第二边值问题的差分方程组:

$$\begin{cases} -3y_0 + 4y_1 - y_2 = 2h\alpha, \\ y_{i-1} - (2 + h^2 q_i)y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n = 2h\beta. \end{cases}$$

消去以上方程中的y_0和y_n，得

$$\begin{cases} -(\frac{2}{3} + h^2 q_1)y_1 + \frac{2}{3}y_2 = h^2 f_1 + \frac{2}{3}h\alpha, \\ y_{i-1} - (2 + h^2 q_i)y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 2, \cdots, n-2, \\ \frac{2}{3}y_{n-2} - (\frac{2}{3} + h^2 q_{n-1})y_{n-1} = h^2 f_{n-1} - \frac{2}{3}h\beta. \end{cases}$$

显然，这也是一个(弱)对角占优的三对角方程组，其解存在且唯一，用追赶法解之.

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
▷ 有限差分法

对于第三边值问题，用与第二边值问题同样的方法可以建立其差分方程组为

$$\begin{cases} -(3+2h\alpha_0)y_0+4y_1-y_2=2h\alpha_1, \\ y_{i-1}-(2+h^2q_i)y_i+y_{i+1}=h^2f_i, \quad i=1,2,\cdots,n-1, \\ y_{n-2}-4y_{n-1}+(3+2h\beta_0)y_n=2h\beta_1. \end{cases}$$

由$\alpha_0,\beta_0\geq 0$以及$\alpha_0+\beta_0>0$可以证明这个差分方程组的解存在且唯一. 但用追赶法求解这个线性方程组时，不能保证计算过程中的数值稳定性. 为了使离散化后得到的差分方程组求解是数值稳定的，采用一种新的节点划分方法. 即令

$$h=(b-a)/n,\ x_i=a+(i-1/2)h, \quad i=0,1,\cdots,n+1.$$

在内点$x_i(i=1,2,\cdots,n)$上的差分方程仍然为(*)

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
▷ 有限差分法

而对在边界点a,b处的$y'(a)$、$y'(b)$和$y(a)$、$y(b)$分别利用公式

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\xi), \\ y(x) = \frac{y(x-h)+y(x+h)}{2} - \frac{h^2}{2}y''(\xi). \end{cases}$$

近似计算. 于是由第三边值条件得两个方程

$$\frac{y_1-y_0}{h} - \alpha_0\frac{y_0+y_1}{2} = \alpha_1, \quad \frac{y_{n+1}-y_n}{h} + \beta_0\frac{y_n+y_{n+1}}{2} = \beta_1.$$

即

$$-\frac{1+h\alpha_0/2}{1-h\alpha_0/2}y_0 + y_1 = \frac{h\alpha_1}{1-h\alpha_0/2},$$

$$y_n - \frac{1+h\beta_0/2}{1-h\beta_0/2}y_{n+1} = -\frac{h\beta_1}{1-h\beta_0/2}.$$

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
▷ 有限差分法

将以上两方程与方程(*)联立，则得第三边值条件的另一种差分方程组

$$\begin{cases} -\frac{1+h\alpha_0/2}{1-h\alpha_0/2}y_0 + y_1 = \frac{h\alpha_1}{1-h\alpha_0/2}, \\ y_{i-1} - (2+h^2q_i)y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \\ y_n - \frac{1+h\beta_0/2}{1-h\beta_0/2}y_{n+1} = -\frac{h\beta_1}{1-h\beta_0/2}. \end{cases}$$

这是一个(弱)对角占优的三对角方程组，可用追赶法求解.

对于更一般的线性常微分方程边值问题

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad a < x < b, \\ \alpha_0 y'(a) + \alpha_1 y(a) = \alpha_2, \\ \beta_0 y'(b) + \beta_1 y(b) = \beta_2. \end{cases}$$

（其中$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0.$）的离散化，
令$h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih \ (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$.

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
▷ 有限差分法

为保证略去的截断误差为$O(h^2)$，二阶导数用二阶中心差商替换，在端点处的一阶导数用刚才使用的三点差商公式替换，方程中的一阶导数用

$$y'(x_i)=\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}-\frac{h^2}{6}y'''(\xi_i)$$

代替，略去误差项后得到差分方程组

$$\begin{cases}\frac{\alpha_0(-3y_0+4y_1-y_2)}{2h}+\alpha_1y_0=\alpha_2,\\ \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+\frac{p_i(y_{i+1}-y_{i-1})}{2h}+q_iy_i=f_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1,\\ \frac{\beta_0(y_{n-2}-4y_{n-1}+3y_n)}{2h}+\beta_1y_n=\beta_2.\end{cases}$$

解此方程组可得差分解$y_i(i=0,1,\cdots,n)$.

一阶微分方程组与高阶方程的数值解
一阶微分方程组
高阶常微分方程
边值问题数值解法
▷ 有限差分法

例9.4.1 取$h=0.25$，用差分法解

$$\begin{cases} y''-y=-x, & 0<x<1, \\ y(0)=0,\ y(1)=0. \end{cases}$$

解: $n=1/h=4$, $x_i=ih=0.25i$ $(i=0,1,2,3,4)$. 有

$$\begin{cases} -2.062\,5y_1+y_2=-0.015\,625, \\ y_1-2.062\,5y_2+y_3=-0.031\,25, \\ y_2-2.062\,5y_3=-0.046\,875. \end{cases}$$

解之，得$y_1=0.0348852, y_2=0.0563258, y_3=0.0500365$.

理论解是

$$y(x)=x-\frac{e^x-e^{-x}}{e-e^{-1}}.$$

$y(x)$在x_1,x_2,x_3处的值分别为$0.0350476, 0.0565908, 0.0502758$.