一篇文章入门无网格方法(1)

原创 邓子平 多物理场仿真技术

我们知道在有限元，边界元，矩量法等数值计算方法中，都是以网格为基础的。关于网格划分的介绍，参考一篇文章入门网格划分。

考虑到有限差分，FDTD（时域有限差分）等方法也有网格，且这种网格和有限元方法网格有本质的区别。为了严谨和统一，笔者将以下内容作为区分是否有网格的标准：

即网格的拓扑结构是否在计算仿真中得到了使用。

拓扑结构即连接网格的方式，举几个例子：

1. 三角形，三个点，连接网格的方式为点1，点2， 点3，这种拓扑结构在有限元仿真中作为形函数使用，因此是有网格结构。

2. 二维的FDTD 元胞网格，每个节点被其它四个节点包围，虽然在显示中每个网格为四边形，但是并没有连接点1,2,3,4的拓扑信息，因此可以认为FDTD是一种无网格方法。

3. 使用扫掠生成的六面体三维梁网格单元。六面体一般直接使用四边形扫掠生成，因此比较规则，虽然网格看起来和三维FDTD一模一样，但是因为每个六面体会有基函数和形函数表达，因此是有网格方法，但是在具体网格类型上属于结构化网格，即非常规则整齐的网格。

4. 一维梁单元，一维的梁单元在几何表达上只有一条直线，两个点，但在计算中需要连接点的直线拓扑关系，因此也是有网格方法。

5. 格子玻尔兹曼方法，该方法主要计算分子之间的关系，不存在分子之间的拓扑关系，因此是无网格方法。

6. 边界元中，需要使用二维的网格计算三维内容，使用一维网格计算二维内容，也是一种有网格方法。

7. 有限体积法中会使用变形的拓扑网格结构，因此是一种有网格方法。

无网格方法的核心在于不使用网格拓扑构造的形函数，多数无网格方法构造的试函数是非线性的逼近或者拟合，不具有插值特性，或者使用粒子系统，因此当施加荷载或者添加边界条件时，需要用新的方法，比如拉格朗日乘子，直接配点，以及罚函数等。

按照计算原理，笔者把无网格方法分为三类：

第一类，构建新的形函数：

1.光滑粒子法(Smooth Particle Hydrodynamics Method, 也简写成SPH)

2.移动最小二乘法(Moving Least-Squares Approximation, 简称MLS)

3.重构核粒子法(Reproducing Kernel Particle Method, 简称RKPM)

4.单位分解(The Partition of unity method)

5.径向基函数法(Radial Basis Functions ,简称RBF)

6.点插值(Point Interpolation Method，简称PIM)

7.移动Kriging插值法(Moving Kriging Interpolation method)

第二类：使用粒子系统

1.格子玻尔兹曼(Lattice Boltzman method，LBM)

2.离散元(Discrete Element Method, DEM)

第三类：使用Grid

1.有限差分/时域有限差分(FDM/FDTD)

无网格方法优点：不需要划分网格，不存在划分网格失败的情况，只需要节点信息，在计算过程中很容易进行加密和稀疏；而且一般无网格方法具有高阶连续性，且形式灵活，对于高梯度，大变形，奇异性等问题有较好的求解结果。对于粒子系统，可以很好的模拟不连续系统模型。

无网格方法有其固有优点，但缺点也是显而易见的，主要体现在以下两点：

1. 很多无网格方法并没有完善的数学理论基础，比如在收敛性，稳定性以及误差估计方面，还在探索阶段。这就导致工程应用上如果出现问题，很难解决。

2.无网格方法在计算效率上没有优势，有限元方法中的形函数取用统一的多项式函数，方便简单，而大部分无网格方法需要针对点取形函数，形函数有可能不同而且复杂，在计算对应矩阵的时候费时费力；再比如三维FDTD，需要在XYZ三个方向内嵌循环，计算量巨大。

无网格方法的其它相关缺点也直接间接和这两项相关。