线性代数

-7 课 求解 Ax = 0，主变量，特解

一、知识概要

记得上一节中我们讨论了列空间和零空间的相关问题，那么这一节我们从它们的定义过渡到它们的计算，即如何求解出这些空间的一般形式。给出一种可以解出 Ax = 0 中的 x 构成的零空间的算法。

二．消元法求解零空间

记得之前在讲解使用消元法解方程组 Ax = b(第 2 课)时，我们对一种情况是无法处理的，那就是矩阵 A 不可逆的情况。之前对这种情况的解释是：求出的解不唯一。这正好对应了我们现在学到的“空间”概念。

我们首先从最简单的零空间（b = 0）的计算谈起。

2.1 消元法确定主变量与自由变量（消元）

【例】设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$，求由 Ax = 0 中的 x 构成的零空间。

Ax = 0 其实就是一个方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

还是之前学过的消元法来直接处理矩阵 A：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

首先注意 A 矩阵消元之后只有两个主元：1 和 2，主元的个数被称为 **秩**

即 A 的秩（r）为：2

接下来应该是进行回代求解了，但是在这之前，由于消元得到的 U 不是一个严格的上三角矩阵：$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。对角线上的 0 给我们造成了解不唯一的麻烦。所以先来明确几个概念：

自由列

A 的主元

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

主列(主元所在的列)

所谓自由列，就表示其对应的未知变量x_n(n 表示自由列是第 n 列)可以被任意分配值。因为回代求解时只有主元列对应的未知数的解有确定值。所以其“自由”就代表着可以任意赋值

所以这个 U 的主变量(主元)为x_1，x_3。自由变量为x_2，x_4。

2.2 对自由变量赋值覆盖零空间（回代）

1. 首先给自由变量$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$赋值为$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

回代入方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

当$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 时，解向量为：$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. 再给自由变量$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$赋值为$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

再次回代入方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

这次当$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$时，解向量为$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

还有别的给$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$赋值的方法吗？很明显其余的赋值方法都可以被$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$的线性组合所覆盖，所以这两个解向量足够代表零空间的特征了，我们称这两个解向量为：**特解**。其特殊之处便在于给自由变量赋值为了$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

通过**特解的任意倍的线性组合可以构造出整个零空间。**

即 $\begin{cases} \text{Ax} = 0 \text{ 的所有解} \\ \text{Ax} = 0 \text{ 中的 x 构成的零空间} \end{cases}$ 为：

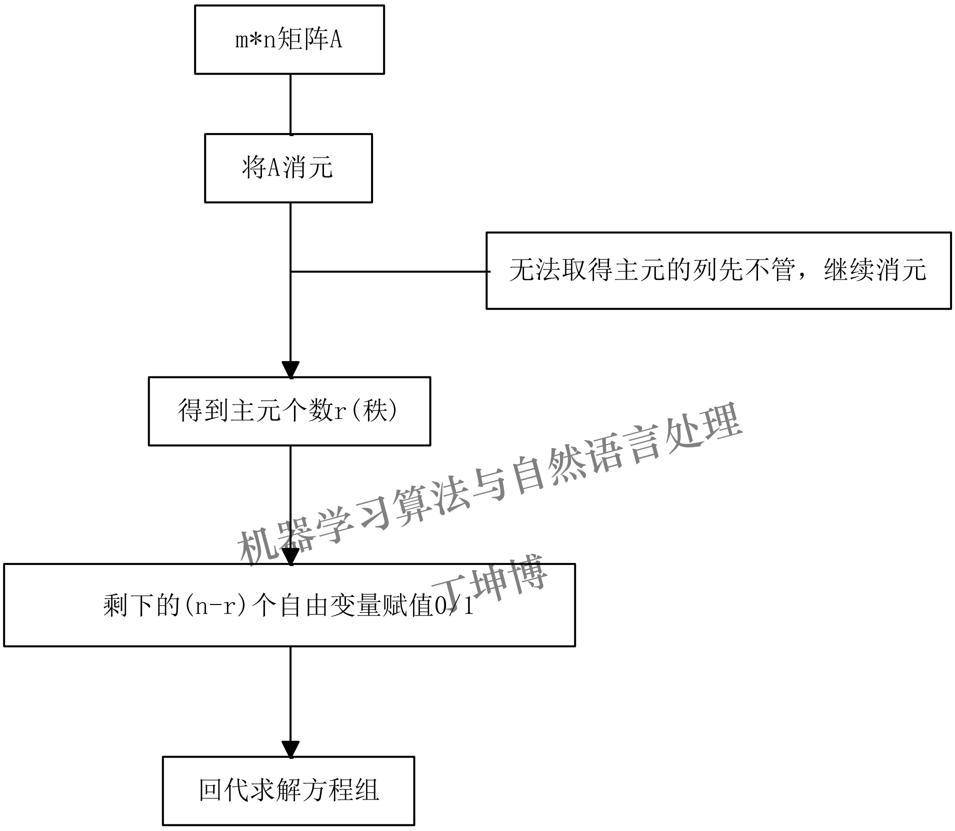
$$\text{x} = \text{c}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.3 算法总结

对于一个 m*n 的矩阵 A，若其秩(R)为 r，那么就意味着其主变量为 r 个，而

自由变量为 n-r 个。也就是只有 r 个方程起作用，而一共有 n 个变量 x，我们将其中的 n-r 个自由变量依次赋值为$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\..\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\..\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\..\\1\end{bmatrix}$。接下来解方程求特解，将特解的任意倍进行线性组合就可以了。

整体流程：



三. 简化行阶梯形式

上面的消元法看上去已经很完美了，但是最后一步解方程还有化简的余地，最后得到的 U 矩阵还可以被进一步化简。

拿上面【例】中的 U 矩阵$\begin{bmatrix}\mathbf{1}&2&2&2\\0&0&\mathbf{2}&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$为例，继续化简：

- 首先向上消元，使主元列**除主元之外都是 0**：$\begin{bmatrix}\mathbf{1}&2&0&-2\\0&0&\mathbf{2}&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

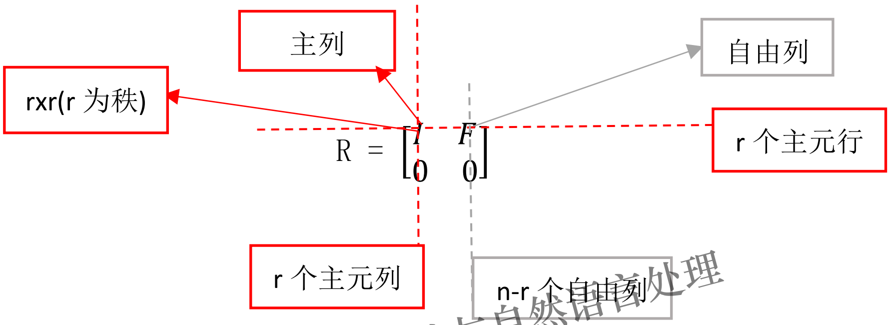
• 提出一列元素公倍数，**使主元均为 1**：$2\begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

注：这就是简化行阶梯形式，将原来的行阶梯型矩阵简化，得到主列，自由列的最简单形式。

• **列交换**，使左上角变为单位阵 I：$2\begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 2 & -2 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

显然，倍数 2 可以略去不看，不影响我们的解。此时的$\begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 2 & -2 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$。

也就是说 m*n 的 A 可以被化简为如下形式：



对比上面的 $R = \begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 2 & -2 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，很好理解 R 的构成。左上角 I 是消元化简之后得到的 r*r 大小的单位阵，代表着主列。右上角的 F 代表着自由列经过化简剩余的形式。

现在假设有一个**零空间矩阵：即零空间矩阵各列由特解组成，记 N 为零空间矩阵。**联系之前学习矩阵乘法时学到的分块乘法，不难得到：

$$Ax = Rx = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{\text{主元}} \\ x_{\text{自由变量}} \end{bmatrix} = RN = 0$$

得到：

$$\text{零空间矩阵 } N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

I[(n-r)∗(n-r)]这个单位阵是将(n-r)个自由变量分别赋值 0/1 得到的

I(r*r)　　F　　-F

再对比上面的例子 $R = \begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 2 & -2 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，其对应零空间矩阵 $N = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

I[(n-r)∗(n-r)]

交换二三行，取 N 的列向量，即为特解$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$。所以 R 可以直接求解零空间。

接下来我们用一道例题熟悉一下这个流程：

【例】 $A = \begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\2&6&8\\2&8&10\end{bmatrix}$，求解 Ax = 0 中 x 构成的零空间。

解：

（1） A 消元为 U：$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\2&6&8\\2&8&10\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = U$（秩 r 为 2）

（2） U 化简为 R：$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = R$（提一行的公倍数不影响解）

（3） 分块，写出零空间矩阵：

I（r*r = 2*2）

F

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\\ \hline 0&0&0\\0&0&0\end{array}\right]$$

-F

$$N = \begin{bmatrix}-F\\I\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c}-1\\-1\\ \hline 1\end{array}\right]$$

I（n-r）*(n-r) = 1*1

五. 学习感悟

这节学习的是计算 Ax = 0 中的 x 构成的零空间的方法，即：消元，找主变量与自由变量，为自由变量赋值，得到特解，特解线性组合得到零空间。后面又介绍了化简 U 变为 R，直接利用 R 的结构得到零空间矩阵 N 的方法。这节重在计算流程，需要加以练习才可以熟练掌握。

-----by Dkb