

快速多级子算法（FMM）介绍和实现

原创 www.cae-sim.com [多物理场仿真技术](#)



国内对FMM（Fast Multipole Method）的介绍都比较复杂，涉及大量的计算公式。

本文试图用最简单的语言介绍FMM的原理和实现，并介绍使用C++开发的快速多级算法模块，用户可自定义核函数，收敛标准，截断系数等参数，可用于实际工程，后续会介绍FMM与边界元方法（Boundary Element Method）/ 矩量法（Method of Moment）结合解决大规模声场，电磁场问题。

在前面简单介绍了快速多级算法 FMM。快速多级子算法能加快解决非对称满秩矩阵，扩展了矩量法，边界元等方法的应用规模，使其能解决较大规模的实际工程问题。

以下是电磁计算软件FEKO中关于多层快速多级算法（MultiLevelFMM）的介绍，是对FMM的一种改进：

https://www.feko.info/product-detail/numerical_methods/mlfmm

1. 概述

FMM算法的提出来源于多粒子系统相互作用的势场计算，比如带电粒子或者天体之间引力等。以静电场为例，空间中N个带点离子构成的系统，第i个离子所在位置的静电势 $A(x_i)$ 表示为：

$$A(x_i) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{r_{ij}}$$

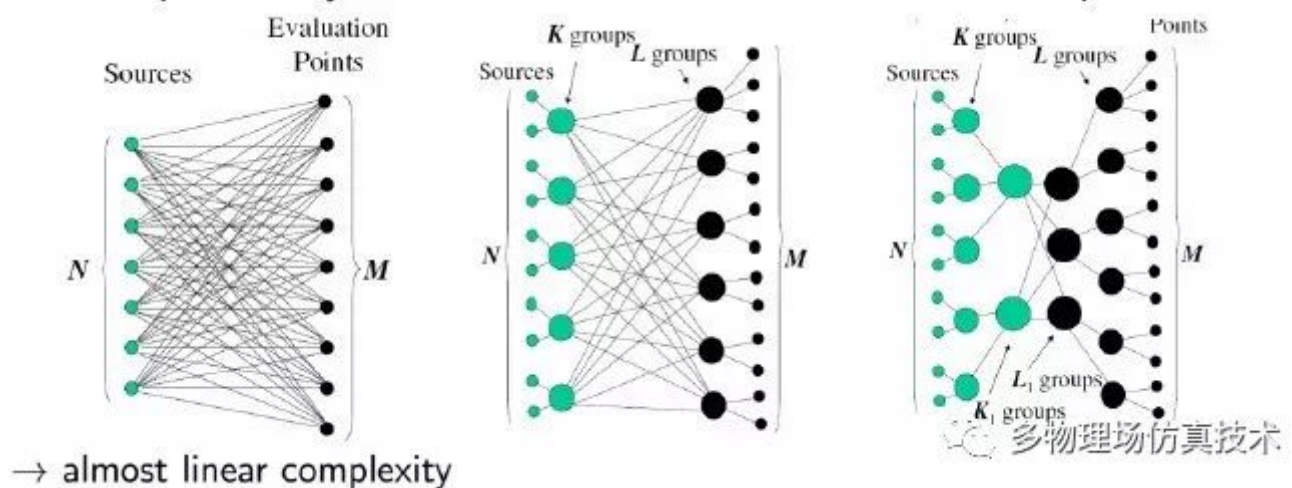
其中

1. i不等于j;

2. x_i 是第 i 个粒子所在的坐标;
3. m_j 是第 j 个粒子所占的权重, 与带电量呈正比;
4. r_{ij} 是第 i 个粒子和第 j 个粒子之间的距离;

按照常规计算方法, 对 N 个粒子实现求和问题, 计算量达到 $O(N^2)$;

在BEM MOM 等数值计算中, 一次这样的求和也就是一次矩阵和向量的乘法迭代。

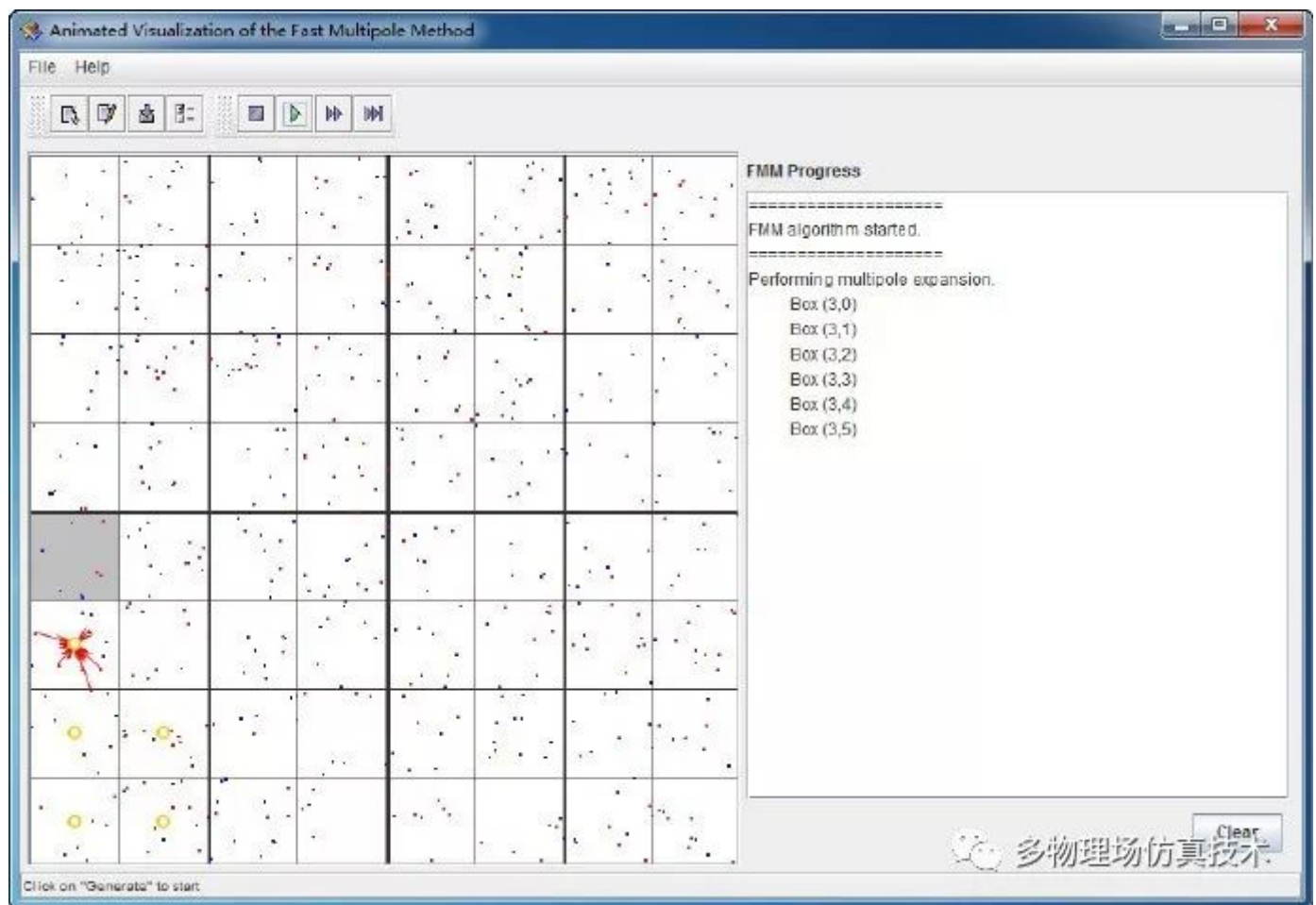


FMM的实现基本思想是以树形结构为基础, 通过多级展开和局部展开, 把原对象进行分层分组, 将 $N*N$ 的关系转换为少数组对象之间的关系 (如上图), 从而减少计算量。该算法实现的核心是如何把每个对象归纳到一组对象中, 这个主要是通过动态树结构来实现的。

计算过程如下:

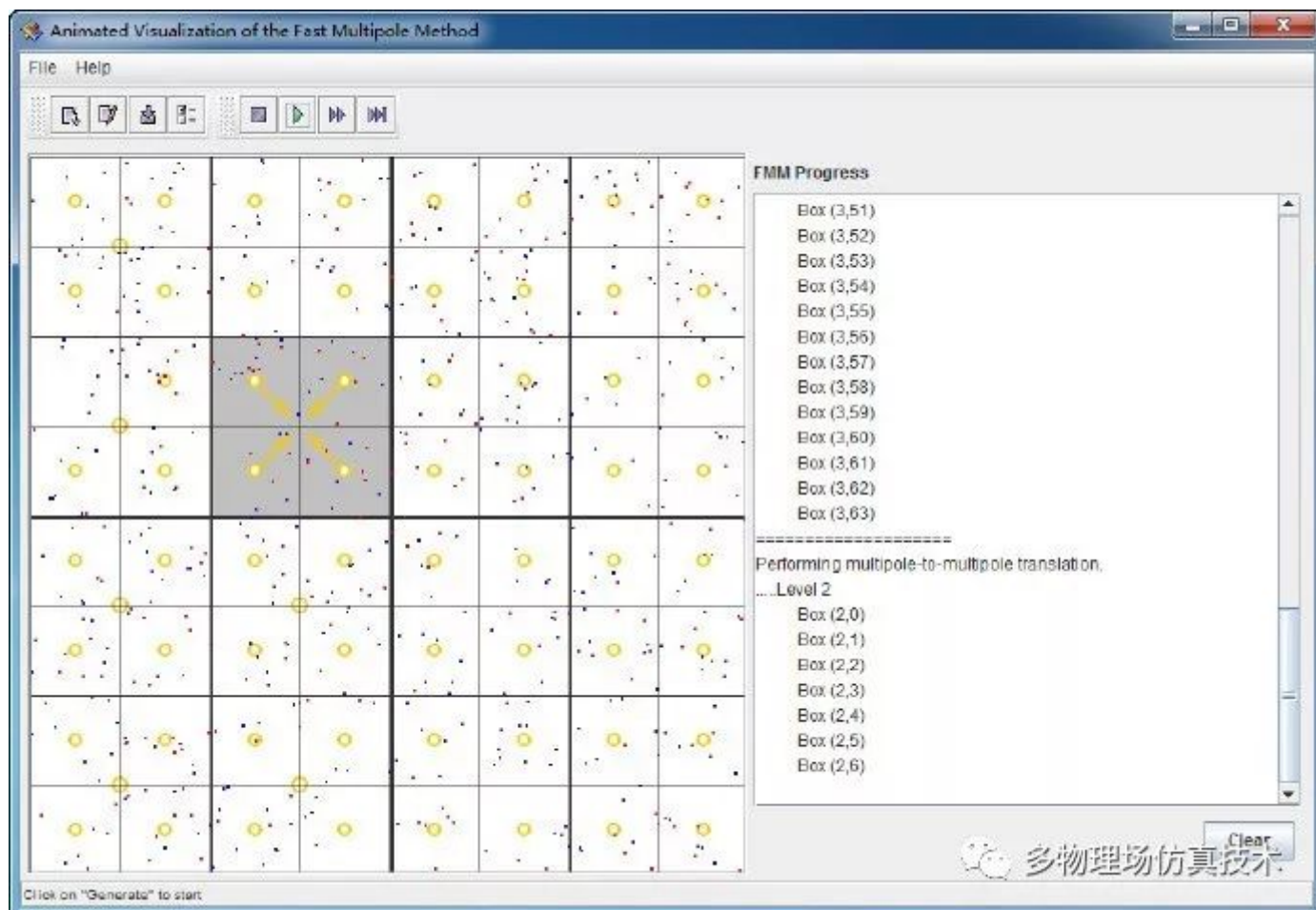
1. 多级展开:

多级展开将叶子节点内 (每个小方块内) 所有多级展开系数累加, 即可以得到该叶子节点的多级展开系数, 展开节点为叶子节点的中心。



2.多级-多级转换 (Level-2)

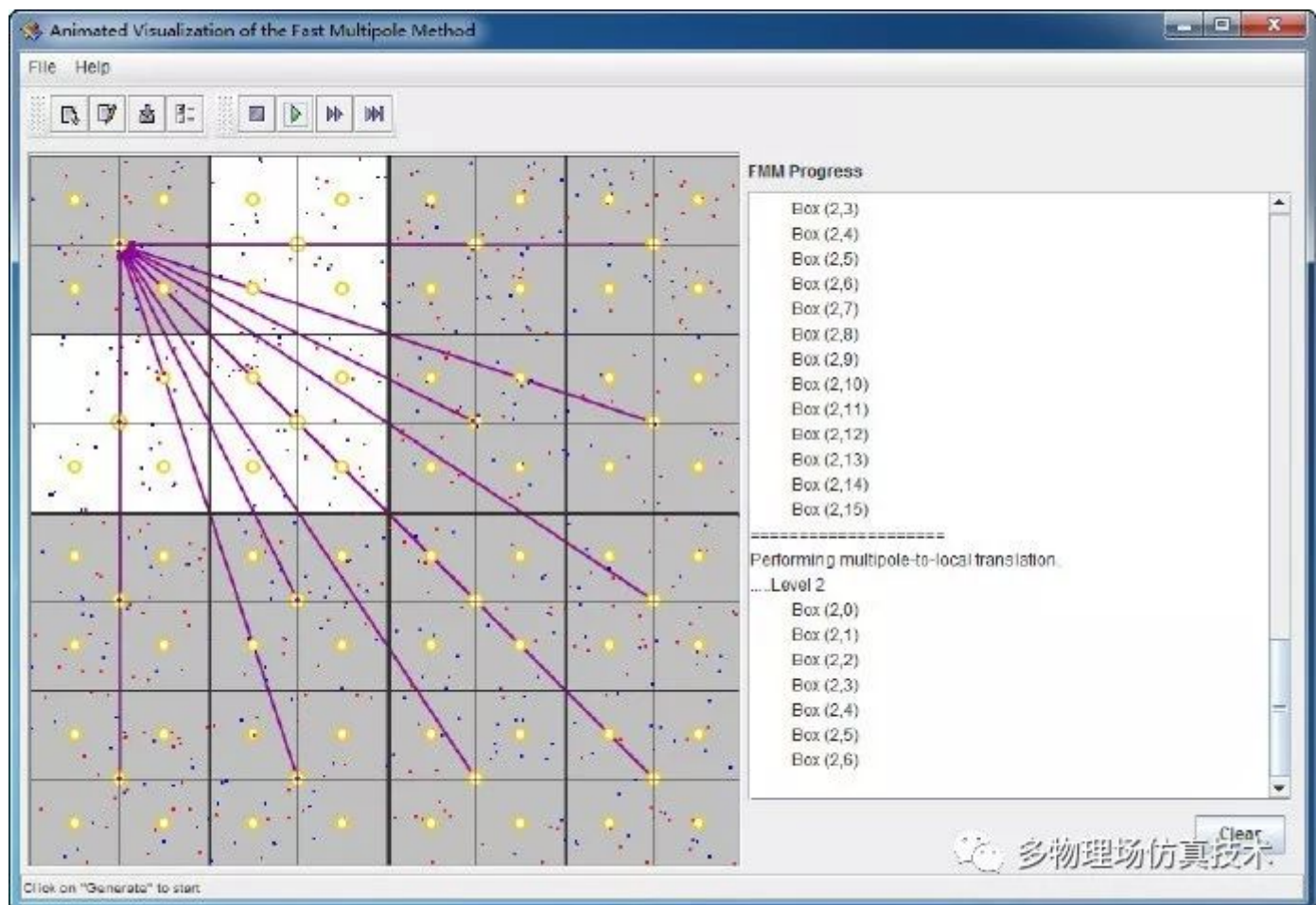
将源点和目标点系数进行转换



3.多级-局部转换 (Level-2)

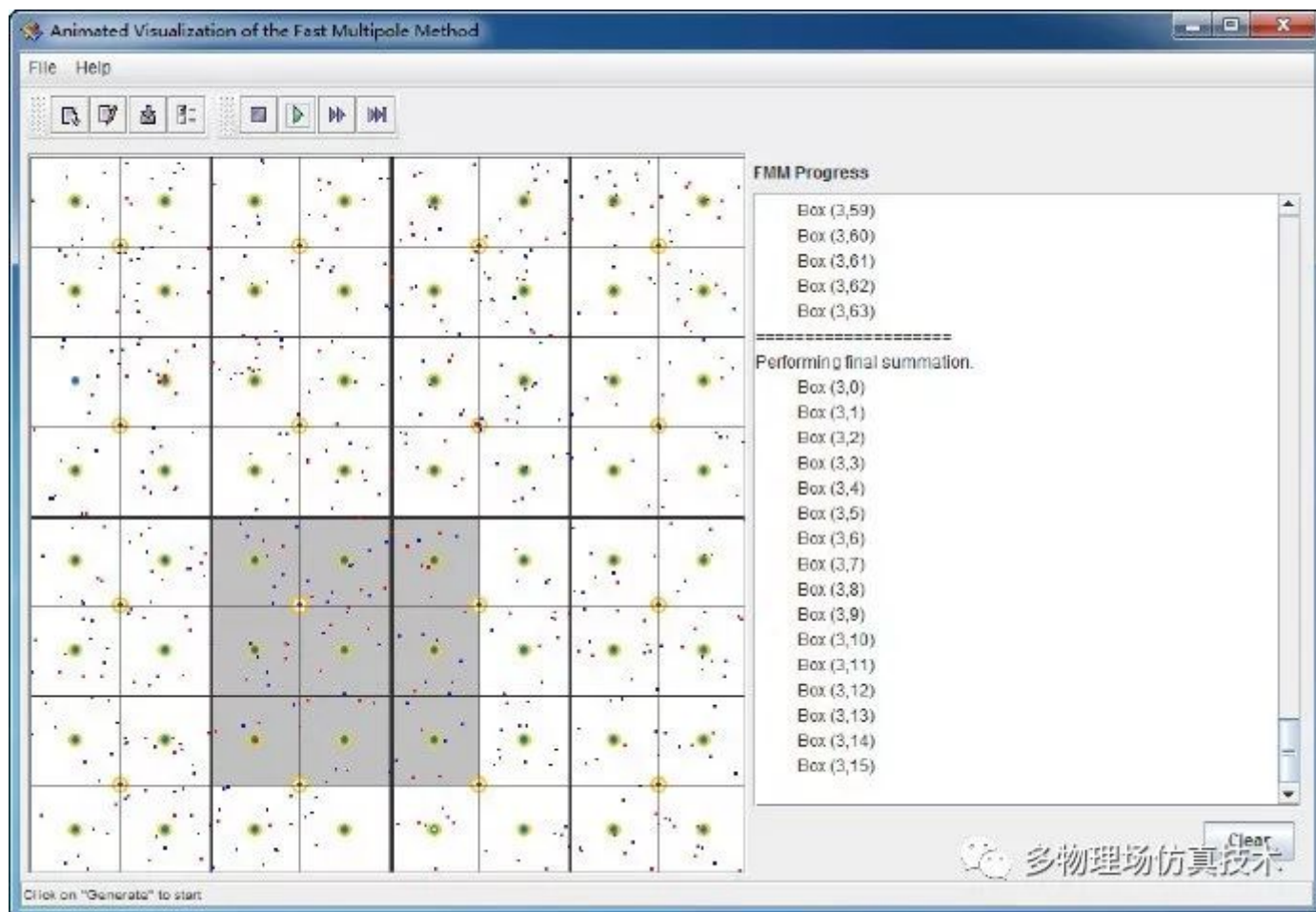
利用多级展开向局部展开系数的传递关系式，将该节点的“相互作用表”（紫色直线连接区域部分即为左上角点的相互作用表）中所有节点的多级展开系数传递，并累加到该节点的局部展开系数，局部展开点是该点的中心

4.局部-局部转换 (Level-2)



5. 多级-局部转换 (Level-3)

6. 最终求和



2. 实现

FMM基础模块，该模块采用C++开发，使用面向对象思想，定义了基础的核函数，并实现了几种简单的核函数，用户可以继承定义自己的核函数，从而应用到流体，电磁，声场等各种需要计算非对称满秩矩阵的数值计算方法中。

基本函数和数据结构：

主要函数：

CreateFMMTree //递归的方法构建节点，生成四叉树或者八叉树结构;

L2L/Local2Local //局部到局部转换;

M2L/Moment2Local //多级到局部转换;

M2M/Moment2Moment //多级到多级转换;

UpwardPass //树结构向上遍历;

DownwardPass //树结构向下遍历;

下图显示了采用Laplace核函数，**一次迭代即 矩阵*向量**，FMM和高斯迭代 所用的时间比较，可以看出FMM所用时间与N几乎呈线性，而且精度很高。考虑到求解线性方程组时需要计算N次，在N

达到几万以后，高斯迭代法在PC上基本求不出结果。

