

一. 知识概要

本节介绍线性变换，从线性变换概念谈起，然后从基和坐标的角度介绍了线性变换的矩阵形式。使得我们对线性变换问题具有更深入的了解。

二. 线性变换

2.1 线性变换

首先直接给出线性变换满足的条件：

【线性变换要满足的性质】

$$(1) \quad T(v+w) = T(v) + T(w)$$

$$(2) \quad T(cv) = cT(v) \quad (\text{由此有: } T(0) = 0)$$

或者可将上面两个式子联系起来，即任何一个线性组合的线性变换等同于 $T(v)$ 和 $T(w)$ 的同样的线性组合：

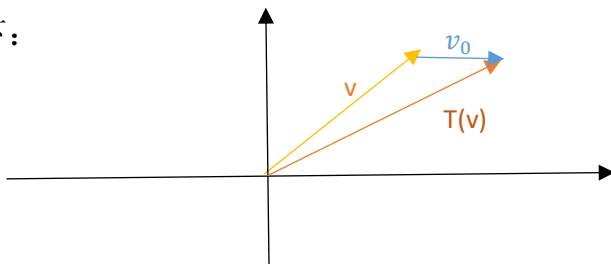
$$T(cv+dw) = c T(v) + dT(w)$$

其中的 $T(\dots)$ 可以理解作为一种函数，有输入，有输出。将输入进行一番作用后得到输出。

例如投影，其输入就是一个向量，输出则是向量在直线上的投影。而投影本身就是一种线性变换。因为满足线性变换的两条性质。这一点画图即可判断，很简单。

接下来通过几个例子来了解这部分内容。

【例 1】平面平移：假如将整个平面都沿着某一方向平移 v_0 。这是一个线性变换吗？示意如下：



分析：

显然不是的。假设我们将向量 v 长度增加一倍，变换之后的向量显然不是原向量变换结果 $T(v)$ 的两倍。甚至这个变换连最基本的 $T(0)=0$ 都不满足。

【例 2】变换 $T(v) = \|v\|$ (求长度) 是一个线性变换吗？

分析：

对于零向量而言， $T(0) = 0$

如果向量翻倍，它的长度也翻倍，没错。但是如果乘的是负数的话，这个变换就不满足数乘的性质了。例如：这里 $T(-v) \neq -T(v)$

故这不是线性变换。

【例 3】给定变换：对于平面内的任意向量，将其逆时针旋转 45 度得到一个新的向量。

分析：

这满足上面的两条性质。旋转后相加或数乘对线性变换运算无影响。所以这个操作 T 是线性变换。

【例 4】给定线性变换： $T(v) = Av$ (A 是矩阵，假设 $T: R^3 \rightarrow R^2$)

分析：

直接代入性质验证：

$$A(v+w) = Av + Aw, \text{ 满足性质一；}$$

$$A(cv) = cAv, \text{ 满足性质二。}$$

所以这是一个线性变换。

根据上面这个例子我们发现，矩阵 A 必然是一个 2×3 型的矩阵。或者说，这个 2×3 矩阵的运算将原本的三维向量变换成了二维向量。这里我们发现一点：可以使用矩阵来描述线性变换。

2.2 线性变换的基向量与坐标

由于对于向量空间而言，所有向量都可以表示为基向量的线性组合。因此，理解一个线性变换，我们只需要了解基向量是怎么变换的：

$$T(v_1), T(v_2), T(v_3), \dots, T(v_n)$$

(其中， v_1 到 v_n 是输入空间的一组基。)

而知道这些就足以确定任何 v 的线性变换，为什么？因为向量空间内的向量 v 是基向量的线性组合。而由线性变换的两条性质易得：**任意的向量的线性变换都可以用基向量的线性变换的结果进行表示。**

数学式表达为：

设 $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$ ，则有：

$$T(v) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \dots + c_nT(v_n)$$

借着这个表达式，这里渗透一些坐标的概念：

我们知道在笛卡尔坐标系下。坐标就是 x, y ——这实际上是取坐标轴上的一组单位向量作为基向量的结果。这里，我们推广来看：

将 v 表示成基向量的线性组合： $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$ 。这里对应的系数即为一组“坐标”。这说明：坐标来自一组基。因此， v 的坐标是一组数字，表示 v 由多少个基向量组成。

2.3 线性变换对应的矩阵表示

接下来，我们试着使用矩阵 A 来表示一个线性变换 $T(R^n \rightarrow R^m)$

我们设 T 表示从 n 维空间到 m 维空间的变换。这里，我们需要两组基：

- (1) 输入空间的一组基来描述输入向量。
- (2) 输出空间的一组基，以确定输出向量的坐标。

令 v_1, v_2, \dots, v_n 是来自于 R^n 空间的一组基， w_1, w_2, \dots, w_m 是来自于 R^m 空间的一组基。对于一个向量，通过基将它表示出来，就能得到它的坐标。

下面我们来举一个具体的例子。

【例】

设定平面内的线性变换：将平面内的向量投影到一条定直线上。

我们选定该定直线上的一个单位向量作为第一个基向量 v_1 ，在直线的垂直方向上我们可以取到另一个单位向量作为基向量 v_2 。这两个基向量构成了输入空间的一组基。

注意：这里的变换是从平面到平面，所以输入向量与输出向量共用一组基。那么现在的问题是：我们怎么确定矩阵 A 来描述变换？

step1: 分析变换对于基向量的影响

我们先看该变换对于这两个基向量的影响。

对于投影而言, $T(v_1)=v_1$, $T(v_2)=0$

于是, 对于一个输入向量 $v(c_1, c_2)$ 而言, 得到的输出向量就是 $(c_1, 0)$

Step2: 将变换写成矩阵形式

找到描述这一变换过程的矩阵 A, 将该变换写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

回顾这个例子: 选取的基一组与直线同向, 一组与直线垂直垂直。之前介绍投影时说过, 它们实际上都是投影的特征向量。所以得到的矩阵 A 是一个对角阵, 对角线上都是特征值。

这就证明了结论:

如果以特征向量为基, 可以得到线性变换的矩阵 A 是对角阵 Λ , 对角线上都是特征值

此外, 值得注意的是: 选取特征向量作为基得到的矩阵是最好的, 可以尝试使用其他基 (例如坐标系下的标准基 $(1, 0)$ 与 $(0, 1)$) 对应得到的变换矩阵 A 将会相对复杂许多。

好的, 通过上面的介绍, 我们就知道了, 线性变换过程可以用矩阵 A 来表示。那么现在如何确定矩阵 A 呢?

令 v_1, v_2, \dots, v_n 是来自于 R^n 空间的一组基, w_1, w_2, \dots, w_m 是来自于 R^m 空间的一组基。

求矩阵 A 的方法:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \end{aligned}$$

其中 a 表示 A 矩阵中对应位置的元素。也就是说, 计算 A 矩阵的方法是: 选取基向量 v_1, v_2, \dots, v_n 。通过线性变换得到输出向量 $T(v_1), T(v_2), \dots$ 在输出空间里, $T(v_i)$ 就是输出基的线性组合 ($a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$ 之类), 这个线性组合的系数就是矩阵 A 的第 i 列。

通过这种方式得到的矩阵 A, 如果给定输入坐标, 就有:

$$A(\text{输入的坐标}) = \text{输出坐标}$$

$$(\text{向量输入坐标乘上矩阵 A} = \text{输出的空间中的坐标})$$

例如，输入的坐标为 $(1, 0, \dots, 0)$ 。这就意味着输入向量为基向量 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$,

使用 A 乘上输入坐标。得到的是 A 的第一列元素： $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ 这样的一组数字。而它们就是 $T(v_1)$ 的坐标。这种计算方法对所有基向量都成立。

【例】设定线性变换 $T = \frac{d}{dx}$ (求导数)

输入： $c_1 + c_2x + c_3x^2$ 基： $1, x, x^2$

输出： $c_2 + 2c_3x$ 基： $1, x$

下面我们来求对应的矩阵 A

分析：

A 应当满足：

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 2c_3 \end{bmatrix}$$

可以求得：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

三. 学习感悟

本节针对线性变换进行了解释，尤其是最后的矩阵解释，确定输入输出空间的基后：

• 当已知线性变换矩阵 A 与输入的坐标，则可以使用 A 乘上输入的坐标，进而得到输出坐标。再使用输出坐标与输出空间的基进行组合得到输出的向量。

• 而如果已知输入坐标与输出坐标，就可以用另一个角度理解上面提到过的 $A(\text{输入的坐标}) = \text{输出坐标}$ 。即在这个关系式中代入基向量的坐标如 $(1, 0, \dots, 0)$ ，这样一来 A 的各列即为已知的输出坐标。或者说是已知的输出向量剥离输出空间的基之后得到的坐标。进而确定 A 的各列，确定 A 矩阵。