

## 线性代数

### -1 课 方程组的几何解释

#### 一、知识概要

本节开始，我们一起来学习线性代数的有关知识，首节我们从解方程谈起，学习线性代数的应用之一就是求解复杂方程问题，本节核心之一即为从行图像与列图像的角度解方程。

#### 二. 方程组的几何解释基础

##### 2.1 二维的行图像

我们首先通过一个例子来从行图像角度求解方程：

##### 【例 1】

$$\text{求解方程: } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

我们首先按行将方程写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

系数矩阵 未知向量 向量

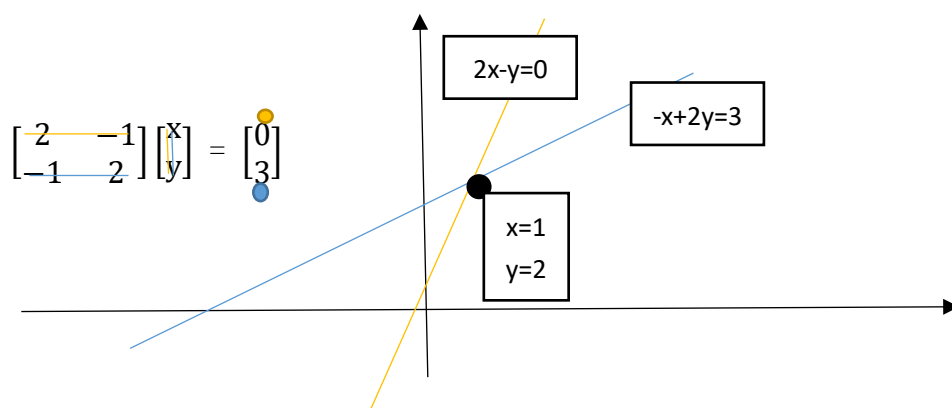
系数矩阵(A)：将方程系数按行提取出来，构成一个矩阵

未知向量(x)：将方程未知数提取出来，按列构成一个向量。

向量(b)：将等号右侧结果按列提取，构成一个向量

接下来我们通过行图像来求解这个方程：

所谓行图像，就是在系数矩阵上，一次取一行构成方程，在坐标系上作图。和我们在初等数学中学习的作图求解方程的过程无异。



## 2.2 二维的列图像

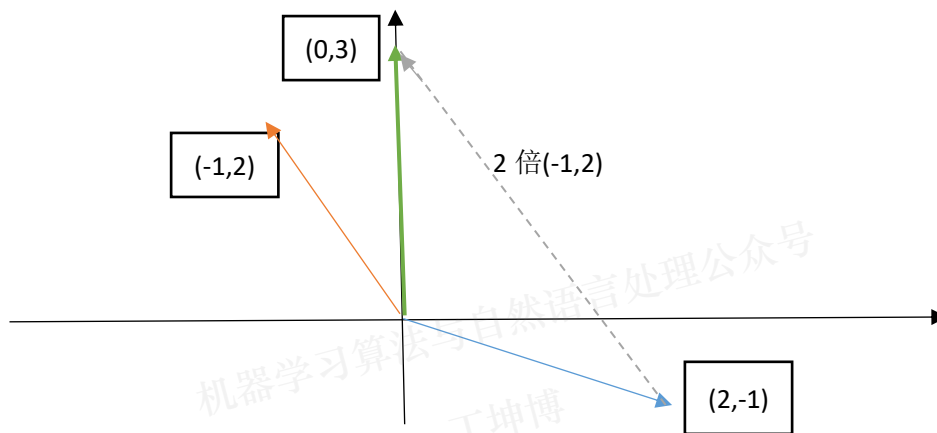
从列图像角度，我们再求解这个方程  $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

这一次我们求解过程中，我们将方程按列提取，使用的矩阵为：

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

如上，我们使用列向量构成系数矩阵，将问题化为：将向量  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  与向量  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  正确组合，使得其结果构成  $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。

接下来我们使用列图像求解此方程：



即寻找合适的  $x, y$  使得  $x$  倍的  $(2,-1) + y$  倍的  $(-1,2)$  得到最终的向量  $(0,3)$ 。在很明显能看出来， $1$  倍  $(2,-1) + 2$  倍  $(-1,2)$  即满足条件。反映在图像上，明显结果正确。

我们再想一想，仅仅对于  $x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$  这个方程，如果我们任意取  $x$  和  $y$ ，那么我们得到的是什么呢？很明显，能得到任意方向的向量，这些向量布满整个平面。这里我们先不做展开，有一些印象就好。

## 三. 方程组的几何解释推广

### 3.1 高维行图像

我们将方程维数推广，从三维开始， $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases}$ ，如果我们继续使用

做行图像求解，那么会得到一个很复杂的图像。

矩阵如下：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ 方程: } Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

如果绘制行图像，很明显这是一个三个平面相交得到一点，我们想直接看出这个点的性质可谓是难上加难，比较靠谱的思路是先联立其中两个平面，使其相交于一条直线，在研究这条直线与平面相交于哪个点，最后得到点坐标即为方程的解。这个求解过程对于三维来说或许还算合理，那四维呢？五维甚至更高维数呢？直观上很难直接绘制更高维数的图像，这种行图像受到的限制也越来越多。

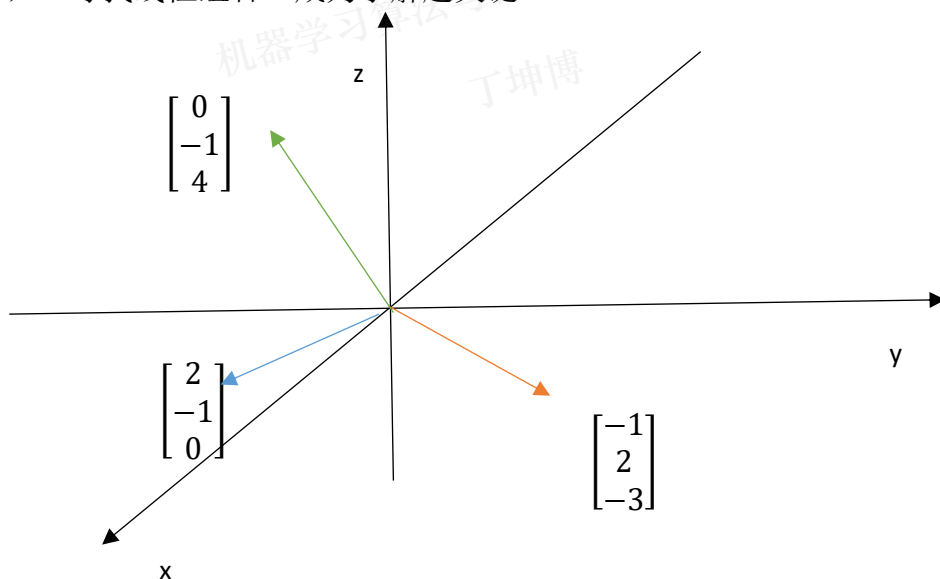
### 3.2 高维列图像

还是那个例子， $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases}$ ，如果我们使用列图像的思路进行计算，那

矩阵形式就变为：

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

左侧是线性组合，右侧是合适的线性组合组成的结果，这样一来思路就清晰多了，“寻找线性组合”成为了解题关键。



很明显这道题是一个特例，我们只需要取  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$ 。就得到了结果，这在行图像之中并不明显。当然，之所以我们更推荐使用列图像求解方程，是因为这是一种更系统的求解方法，即寻找线性组合，而不用绘制每个行方程的图像之后寻找那个很难看出来的点。另外一个优势在于，如果我们改变最后的结果

b，例如本题中，我们将其改为  $x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ，那么我们

就重新寻找一个线性组合就够了，但是如果我们使用的是行图像呢？那意味着我们要完全重画三个平面图像，就简便性来讲，两种方法高下立判。

另外，还要注意的一点是对任意的  $b$  是不是都能求解  $Ax = b$  这个矩阵方程呢？也就是对  $3 \times 3$  的系数矩阵  $A$ ，其列的线性组合是不是都可以覆盖整个三维空间呢？对于我们举的这个例子来说，一定可以，还有我们上面  $2 \times 2$  的那个例子，也可以覆盖整个平面，但是有一些矩阵就是不行的，比如三个列向量本身就构成了一个平面，那么这样的三个向量组合成的向量只能活动在这个平面上，肯定无法覆盖

一个三维空间，比如三个列向量分别为： $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 。这三个向量就构

成了一个平面。其中  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 。这样的矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$  构成的方程

$Ax = b$ ，其中的  $b$  就无法覆盖整个三维空间，也就无法实现：对任意的  $b$ ，都能求解  $Ax = b$  这个方程。

### 3.3 矩阵乘法

例如  $Ax$ ，如果我们已知一个矩阵  $A$  和一个向量  $x$ ，那么我们就怎么求解它们的积呢？例如  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ， $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，我们这样求：

- 方法 1：将矩阵  $A$  看做列向量的组合：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

即  $x$  每个分量与矩阵中各的列向量相乘，再将其求和。看做  $A$  各列的线性组合。

- 方法 2：将矩阵  $A$  看做行向量的组合：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,5) \cdot (1,2) \\ (1,3) \cdot (1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

即采用这个方式进行向量乘法： $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 5 \\ 1 \times 1 + 2 \times 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 5 \\ 1 \times 1 + 2 \times 3 \end{bmatrix}$$

## 四、学习感悟

这部分内容是对线性代数概念的初涉，从解方程谈起，引进列空间的概念，可以发现从列空间角度将求解方程变化为求列向量的线性组合，这个方式更加科学。

介绍了矩阵乘法，这部分内容重在理解。

机器学习算法与自然语言处理公众号  
丁坤博