线性代数

-9 课　线性相关性，基，维数

一、知识概要

之前消元处理矩阵时，经常发现矩阵中有时会有一行或几行本身就是前面几行的线性组合情况，这一节我们就从这种线性相关或线性无关的特征入手，介绍空间中的几个重要的概念：基，维数。

二．线性无关与线性相关

2.1 背景知识

首先强调，接下来我们谈论的概念都是基于**向量组**的，而不是基于矩阵。线性无关，线性相关是向量组内的关系，基也是一个向量组，不要与矩阵概念混淆。

首先从之前学习的 Ax = 0 方程谈起。

假设 m*n 的矩阵 A：

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}}^{n} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}}\right\} m$$

显然，n > m，以这样的矩阵 A 构成的方程 Ax = 0，此时未知数x_n的个数比方程的个数多。未知数一共 n 个，方程一共 m 个。

所以此时 A 的零空间中除零向量以外还有其他向量，原因是这样的 A 一定有自由变量(至少有 n-m 个自由变量)，这就造成了零空间中向量的无穷解。

2.2 线性无关与线性相关

我们之前也接触了线性无关与线性相关的相关概念。接下来直接给出定义：

- **线性无关：**

除系数全为 0 的情况外，没有其他线性组合方式能得到零向量，则这组向量线性无关。

设向量组为 $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$。即 c 不全为 0 时，任何 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots c_nx_n$ 线性组合的结果都不为零，则此向量组线性无关。

- **线性相关：**

除了零组合之外还有其他的线性组合方式能得到零向量，则这组向量线性相关。

注：如果一个向量组中有零向量存在，那么这个向量组一定是线性相关的。

举几个例子感受一下上面的概念：

【例】

1.

v_1与$2v_1$组成的向量组：

$$-2(v_1) + (2v_1) = 0$$ 线性相关

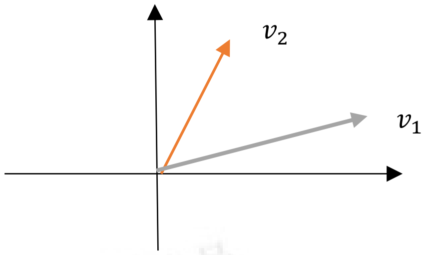
2.

v_1与零向量组成的向量组：

$$0(v_1) + 1(0) = 0$$ 线性相关

3.

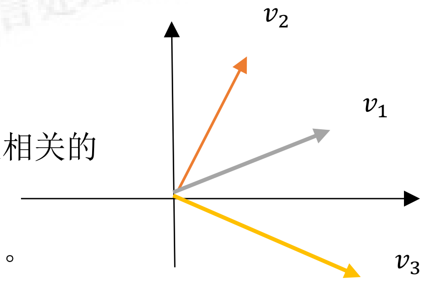
二维平面上不共线的两个向量：



没有线性组合可以使它们构成零向量

所以此向量组线性无关。

4. 二维平面上不共线的三个向量：



二维平面上的三个向量之间一定是线性相关的

- 这里用到了我们上面的背景知识的延伸。

首先构造此图对应的矩阵 A：

$$A = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

很明显，寻找线性组合可以写成如下形式：

$$Ac = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

显然，A 矩阵是 n>m 型的矩阵。而根据我们的背景知识（2.1），Ac = 0 这个方程对应的零空间中，除了零向量肯定还有其他向量，也就是存在一种 c 不全为 0 的情况，使 A 各列线性组合后得到 0。也就是 A 各列的v_1，v_2，v_3线性相关。

很明显，【例】中第 4 题将线性相关与线性无关与零空间联系了起来。

2.3 零空间的作用

根据上面的例题 4，我们再从矩阵的**零空间与矩阵列向量角度**重新定义

向量组的线性相关/无关。假设现有一 m*n 矩阵 A：

- 如果 A 各列向量构成的向量组是线性无关的，那么矩阵 A 的零空间中只有零向量。

- 如果 A 各列向量构成的向量组是线性相关的，那么矩阵 A 零空间中除零向量之外还一定有其他向量。

很好理解上面零空间角度的定义。因为零空间反映的就是 A 各列向量的线性组合。

从**秩的角度**看来：

- 线性无关对应向量组构成的矩阵，秩为 n，此时没有自由变量，零空间中只有零向量存在。
- 线性相关对应向量组构成的矩阵，秩小于 n，有 n-r 个自由变量，零空间中有很多向量。

2.4 生成空间

所谓生成空间，即为此空间由向量$v_1, v_2, v_3 \cdots v_n$即它们的线性组合构成，就称v_1，v_2，$v_3 \cdots v_n$生成了一个空间，可以理解为：把向量组的所有线性组合放到了一个空间里面。

但是$v_1, v_2, v_3 \cdots v_n$不一定是线性无关的，我们更关心线性无关的v_1，v_2，$v_3 \cdots v_n$，因为它们可以表示出空间的特征，这就引出了“基”的概念

三. 基

首先给出“基”的概念：

一组向量v_1，v_2，$v_3 \cdots v_n$，具有两个性质：

（1）v_1，v_2，$v_3 \cdots v_n$线性无关。

（2）v_1，v_2，$v_3 \cdots v_n$生成整个空间。

例：三维空间中的$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$。

△基可以代表空间的很多性质，十分重要。

一个空间的基有很多种，比如三维空间的基还可以是$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\4\\\pi\end{bmatrix}$。但是我们发现，一个空间的不同基，其中向量的个数是一定的。如果 A 是R^n空间的基，

那么 A 中向量的个数就是 n 个。比如三维空间R^3，基一定是三个向量构成的向量组。
这里给出一个性质：

R^n中的 n 个向量构成基，则以这 n 个向量构成的 n*n 矩阵必须可逆。

这个性质很好理解，矩阵可逆就意味着任意两行，两列都线性无关，所以可以构成一组生成空间的基。

四. 维数

上面介绍基的时候提到了“R^n空间的基中向量个数为 n 个。”这个“n”我们称之为**维数**。同一个空间内，即使基不同，基向量的个数也必须相等。

理解维数也很简单，像我们的三维空间，其基一定是三个三维向量（三个向量，每个向量有三个分量），四维空间的基也一定是四个四维向量。

五. 总结

这一节学习了很多概念问题，我们通过一道例题回顾一下

【例】

假设列空间由矩阵 A 确定：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

则有接下来几个问题：

（1） A 的各列是不是 A 列空间的基？

显然不是。

从线性组合角度看，列 1 加列 2 等于列 3，这几列显然线性相关。

或从零空间的角度看来，求 A 的零空间中向量：

$$Ac = 0$$

其中一个特解为：$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，就意味着零空间中不只有零向量。

所以这些列向量线性相关，不能构成基。

（2） 找出 A 列空间的一个基

从 A 的结构看来：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

第 3 列 = 第 1 列 + 第 2 列。

第 4 列 = 第 1 列。

显然，可以取前两列作为基。所以 A 的列空间的维数为：2。

再看 A 矩阵，显然 A 的秩为 2，消元后只有两个主列。所以有：

矩阵 A **的秩** = 矩阵 A 主列的个数 = A **列空间的维数**

这下我们就将矩阵的秩与列空间的维数联系了起来，而更重要的是，我们知道了列空间的维数，那么在这个列空间中随便找两个线性无关的向量，它们就可以构成一组基，这组基就可以生成这个列空间。

（3） A 对应零空间的维数为多少?

所谓零空间维数，即是零空间基的个数，也是 Ax = 0 的特解的个数，还可以理解为：Ax = 0 的解中自由变量的个数。

最简单的方法是解 Ax = 0 这个方程。经过消元，自由变量赋值，回代，最后得到两个特解：

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以此零空间的维数为 2。

类似，有这样一个很简单的公式：

m*n 矩阵中，主列个数为 r，秩为 r，则有：

零空间维数 = n-r

五. 学习感悟

这一节内容十分简单，就是几个概念的介绍：线性相关/无关，基，维数。这一节这几个概念都是用来描述空间的，了解这几个概念之后，我们便将矩阵的秩，矩阵的自由变量等概念与空间的维数，基，线性相关/无关的判定联系起来。便于我们接下来对向量空间的研究。