Шар – интересная геометрическая фигура

Никитин Д.Д.*

Июль 2022

*Факультет Компьютерных Наук НИУ ВШЭ

Аннотация

Данная работа предназначена для учеников 10-11 классов и первых курсов ВУЗов для ознакомления с геометрической фигурой – шар. Также здесь приводится история изучения данной фигуры. Прилагается интерактивная презентация. Все фотографии взяты из открытых источников.

Оглавление

Глава 1

Геометрия фигуры

Счастье – это ***шар****, за которым мы гоняемся, пока он катится, и который мы толкаем ногой, когда он останавливается.*

Пьер Буаст (1765-1824) – французский лексикограф *

1.1 Определения шара

Шар – геометрическое тело, ограниченное сферической или шаровой поверхностью. Все нормали к поверхности сферы сходятся в центре шара, и все точки сферы отстоят на равных расстояниях от центра. [2]

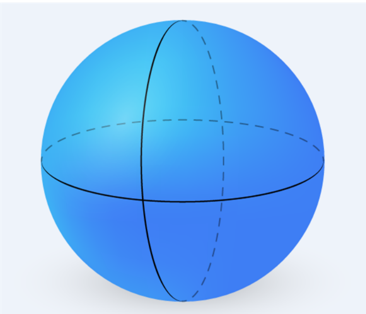

Рис. 1.1: Шар

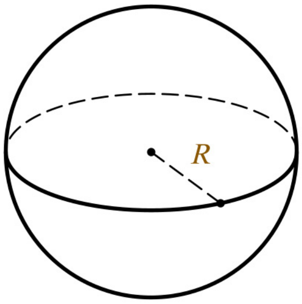

Рис. 1.2: Радиус шара

*Сайт знаменитых цитат kartaslov.ru

1.2 Формулы для шара

Формула объёма n-мерного шара радиуса r в n-мерном евклидовом пространстве:

$$V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot r^n,$$

где Γ – эйлеровская гамма-функция [1]

Далее мы приведём несколько формул для площади и объёма шара в трёхмерном пространстве.

Формулы для метрик шара		
Площадь, S	$4\pi r^2$	πd^2
Объём, V	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{\pi d^3}{6}$

Докажем формулу $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Доказательство. Возьмём четверть круга радиуса r с центром в точке $(0;0)$. Уравнение окружности этого круга: $x^2 + y^2 = r^2$. Откуда $y^2 = r^2 - x^2$. Функция $y = \sqrt{r^2 - x^2}, x \in (0;r)$ непрерывная, убывающая, неотрицательная. При вращении четверти круга вокруг оси Ох образуется полушар, следовательно: $\frac{1}{2}V = \pi \int\limits_0^r (r^2 - x^2)\,dx =$

$$= \pi \cdot (r^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^r = \pi \cdot (r^3 - \frac{r^3}{3}) = \frac{2}{3}\pi r^3 \implies V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \square$$

1. Пусть $\mathbb{R}^d$ – евклидово пространство. Тогда
   (a) если $d = 2$, то $D_r((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq$ $\leq r\}$
   (b) если $d = 3$, то $D_r((x_0, y_0, z_0)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \leq$ $\leq r\}$
2. В иных метриках шар может иметь иную геометрическую форму. Например, определим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ метрику следующим образом:
   $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{d} ||x_i - y_i||, x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)^\top, y = (y_1, y_2, \cdots, y_d)^\top \in \mathbb{R}^d$
   Тогда:
   (a) если $d = 2$, то $U_r(x_0)$ – это открытый *квадрат* с центром в точке x_0 и сторонами длины $\sqrt{2}$, расположенными по диагонали к координатным осям.
   (b) если $d = 3$, то $U_r(x_0)$ – это открытый трёхмерный *октаэдр*.

Кол-во измерений	*Объём шара радиуса R*	*Радиус шара объёма V*
1	$2R$	$V/2$
2	πR^2	$\frac{V^{1/2}}{\sqrt{\pi}}$
3	$\frac{4\pi}{3}R^3$	$(\frac{3V}{4\pi})^{1/3}$
4	$\frac{\pi^2}{2}R^4$	$\frac{(2V)^{1/4}}{\sqrt{\pi}}$

Таблица 1.1: Формулы объёма для некоторых пространств

Таблица 1.1 показывает нам изменение формул при увеличении размерности пространства.*

1.3 Свойства шара

Диаметрально противоположными точками называются любые две точки на поверхности шара, которые соединены диаметром.

Шар имеет следующие свойства:

1. Любое сечение шара плоскостью есть круг.
2. Через любые две *диаметрально противоположные точки* можно провести множество больших кругов для шара.
3. Через любые две точки, кроме *диаметрально противоположных точек*, можно провести только один большой круг для шара.
4. Любые два больших круга одного шара пересекаются по прямой, проходящей через центр шара, а окружности пересекаются в двух *диаметрально противоположных точках.*
5. Если расстояние между центрами любых двух шаров меньше суммы их радиусов и больше модуля разности их радиусов, то такие шары **пересекаются**, а в плоскости пересечения образуется круг. **

*Шар. (10 июля 2022). Википедия, свободная энциклопедия. Загружено 26 июля 2022 с https://ru.wikipedia.org.

**https://ru.onlinemschool.com

Глава 2

История изучения фигуры

2.1 Шар (сфера) в древности

В древности сфера была в большом почете. Астрономические наблюдения над небесным сводом неизменно вызывали образ сферы.

Пифагорейцы учили о существовании десяти сфер Вселенной, по которым якобы двигаются небесные тела. Они утверждали, что расстояние этих тел друг от друга пропорциональны интервалам музыкальной гаммы. В этом усматривали элменты мировой гармонии. В подобных полумистических рассуждениях заключалась пифагорова “музыка сфер".

Аристотель считал, что шарообразная форма, как наиболее совершенная свойственна Луне, Солнцу, Земле и всем мировым телам. Развивая взгляды Евдокса, он полагал, что Земля окружена рядом концентрических сфер.

2.2 Изучение шара

В XI книге "Начал"Евклид определяет шар как фигуру, описанную вращающимся около неподвижного диаметра полукругом. Он доказывает только теорему о том, что объёмы двух шаров относятся как кубы их радиусов, но не выводит формулы и не дает никакого правила, которого, вероятно, и не знал для вычисления площади поверхности сферы или объема шара.

Вывод формулы объема шара и площади поверхности сферы – одно из величайших открытий Архимеда.

а)

б)

в)

г)

Рис. 2.1: История изучения шара в фото *а*) Аристотель, *б*) Архимед, *в*) Евклид, *г*) Книга "Начал"Евклида.

В его произведении «О шаре и цилиндре» имеются следующие теоремы:

- Площадь поверхности сферы равна учетверенной площади ее большего круга.
- Объем шара равен учетверенному объёму конуса, основанием которого служит большой круг, а высотой - радиус шара.
- Объём цилиндра в полтора раза больше объёма вписанного в него шара.
- Площадь поверхности цилиндра, включая основания, равна $\frac{3}{2}$ площади поверхности вписанной сферы. [*]

[*]https://igspl.by

Литература

[1] FWJ Olver, AB Olde Daalhuis, DW Lozier, BI Schneider, RF Boisvert, CW Clark, BR Miller, and BV Saunders. Nist digital library of mathematical functions http://dlmf. nist. gov. *Release*, 1:22, 2016.

[2] Энциклопедический словарь Брокгауза. Ефрона: в 86 т.(82 т. и 4 доп.), 1890.