数学建模标题

吴阳诚、莫力炬、张航

2023 年 9 月 8 日

摘要

Your abstract.

1 问题重述

生鲜商超中的蔬菜类产品往往保鲜期较短，若某类蔬菜当日无法卖完，则对商家来说会造成亏损。为了尽量避免这种情况的出现，并获得尽可能高的利润，商家往往选择在凌晨进货。但这也导致了商家进货前无法知道具体的单品与确切的成本价。同时，商家如何采用"成本加成定价"法进行合理定价取得最高利润的问题，也亟待解决。因此，尝试通过进货价格分析与市场需求分析进行科学合理的进货决策与定价决策。根据以上背景及四个所给附件，试解决以下问题：

1.1 问题一

蔬菜各品类及单品之间可能存在一定联系，尝试分析蔬菜各品类与单品间销售量的分布规律与相互关系。

1.2 问题二

现以品类为单位进货，欲建立模型得到各蔬菜品类的销售总量与成本加成定价间的关系；同时通过进货价格分析与市场需求分析，进行对未来一周日补货总量与定价策略的科学制定，从而获得最大收益。

1.3 问题三

由于蔬菜类商品销售空间有限，欲制定单品补货计划，并且控制单品总数在 27-33 个，各单品订购量满足大于等于 2.5 千克。现要求根据 2023 年 6 月 24 日-33 日的可售品种，给出 7 月 1 日的单品补货量和定价策略，尽可能满足市场需求，从而获得最大收益。

1.4 问题四

试提出收集其他的相关数据使得超商能更好地进行蔬菜商品的进货决策与定价决策，并给出理由。

2 问题分析

2.1 问题一的分析

题目要求分析蔬菜各品类与单品间销售量的分布规律与关系。运用附件 1、2。对于销售量在各品类与各单品间的分布规律，用 Excel 得到各品类销售量占总销售量之比，以及各单品销售量占其所在品类销售量之比，从而反映题目所要求的分布规律，同时也体现了各品类与单品的受欢迎程度。对于各品类及单品销售量间的关系，查阅相关资料，有充分理由假设具有如下关系：各品类间蔬菜属于**互补**商品，即顾客为烹饪，会购买不同品类的蔬菜，故**部分品类间蔬菜销售量呈正相关的关系**；同品类中的各单品则属于**替代**商品，即顾客较少购买同品类的不同单品，故**同品类中的部分单品销售量呈负相关的关系**。将极短时间内的多次购买记录视作同一顾客所为，则对其一次消费内的多个品类进行统计，在用 Python 对各个顾客的行为作出统计分析后，得到各品类与单品间的关系，尝试验证假设。

2.2 问题二的分析

题目要求得到各蔬菜品类的销售总量与成本加成定价间的关系，同时要求制定未来一周的日补货总量与定价策略，以期获得最大收益。运用附件 1、2、3。以品类为单位进货，首先运用 Excel 将各周内各品类中单品的销量累加，作为该品类的销售总量，再建立算法得到各周内各品类定价的均价，从而得到各蔬菜品类的销售总量与成本加成定价间的关系。为制定未来一周的日补货总量与定价策略，以需求侧的视角考虑，可利用 Python 对各品类蔬菜过去销量总量数据及定价均价进行分析，利用时间序列预测未来一周顾客对各品类蔬菜的需求与定价预期。以获得最大收益为**目标函数**，以由过去数据所预测的各品类成本及销量与定价的关系为**约束条件**，建立目标规划模型，并给出具体可行的算法。

2.3 问题三的分析

题目要求在满足对各单品数量、订购量、可售种类的限制下，制定 7 月 1 日的日各单品补货量与定价策略，以期获得最大收益。类似于问题二，将利用 Python 预测可售单品的当日成本，并且得到各可售单品的销售总量与成本加成定价间的关系。对于各可售单品的进货组合，有以下两种解决方案：

- 时间序列预测 7 月 1 日顾客对各可售单品蔬菜的需求与定价预期。
- 结合问题二与附件 4 的信息，我们可以得到各品类在市场的受欢迎程度，因此可以采用层次分析法客观地为各品类赋值，并且在各品类内部用与问题二类似的方法预测 7 月 1 日顾客对各可售单品蔬菜的需求与定价预期。由于商品销售空间有限，高权值品类中的热门单品补货量应较大，低权值品类中的热门单品也要有一定的补货量。

以获得最大收益为**目标函数**，以对单品补货的各种限制、可售单品销售总量与成本加成定价的关系、预测的各可售单品成本、尽量满足市场需求为**约束条件**，建立目标规划模型，并给出具体可行的算法。

2.4 问题四的分析

题目要求提出其他的相关数据关数据使得超商能更好地进行蔬菜商品的进货决策与定价决策，并给出理由。以供给侧视角看，供应链数据涉及到货源是否稳定、运输是否及时有保障等；以需求侧视角看，客户反馈等数据能更加灵敏地反映市场需求。以???? 为例，将给出数据模拟商家进货决策与定价决策的过程。

3 模型假设

1. 为确定相近时间内的消费同属一个顾客，假设该商超仅有一个收银台。
2. 假定 2023 年 6 月 24 日-33 日的可售品种即为 7 月 1 日可售品种。

4 符号及变量说明

4.1 符号及变量说明

变量	含义	单位
t_1	商业节目播出时间	min
t_2	新闻节目播出时间	min
t_3	音乐节目播出时间	min
T	总播出时间	min
T_0	总播出时间的最大值	min
S	总盈亏	美元
S_0	总盈亏的目标值	美元
$d_i^{\pm}$	正/负偏差变量 i=1,2,3,4	/
z	目标函数	美元
P_j	第 j 种目标的约束因子 j=1,2	/

表 1: 符号及变量说明

5 模型建立

5.1 多目标规划模型的建立

5.1.1 约束条件

由问题分析可知，我们可以在各节目的时间分配和广播站之间作出联系。我们规定：

$$T = t_1 + t_2 + t_3 \tag{1}$$

而播出时间的理想总时长 T_0 的值规定为：

$$T_0 = 60 \times 12 \tag{2}$$

两者之间存在一种柔性约束关系，故引入 $d_1^{\pm}$ 表示实际播出总时长关于理想状态下的正/负偏差变量。由于正常情况下,T 不超过 T_0, 故有以下约束条件：

$$T + d_1^- - d_1^+ = T_0 \tag{3}$$

同理，商业节目播出时间与新闻节目播出时间也分别满足自身的约束条件，分别如下：

$$t_1 + d_2^- - d_2^+ = \frac{1}{5}T \quad mind_2^+ \longrightarrow 0 \tag{4}$$

$$t_2 + d_3^- - d_3^+ = \frac{1}{12}T \quad mind_3^- \longrightarrow 0 \tag{5}$$

有了与时间相关的约束条件，接下来通过时间与利润建立联系。同样的，我们设定一个总盈亏值的理想目标 S_0, 其公式为:

$$S_0 = 12 \times 60 \times 250 \times \frac{1}{5} \tag{6}$$

而实际的总盈亏值 S 为:

$$S = 250t_1 - 40t_2 - 17.5t_3 + d_4^- - d_4^+ \tag{7}$$

值得注意的是，与利润相关的约束条件优先因子为 P_2, 其优先级不如法律条文规定的播出时间相关的约束条件。故整合以上式子，我们可以得到的多目标规划模型约束条件如下：

$$\begin{cases} T = t_1 + t_2 + t_3, \\ T_0 = 60 \times 12, \\ T + d_1^- - d_1^+ = T_0, \\ t_1 + d_2^- - d_2^+ = \frac{1}{5}T, \\ t_2 + d_3^- - d_3^+ = \frac{1}{12}T, \\ S_0 = 12 \times 60 \times 250 \times \frac{1}{5}, \\ S = 250t_1 - 40t_2 - 17.5t_3 + d_4^- - d_4^+, \\ x_1, x_2, x_3, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, d_1^- - d_1^+, d_4^- - d_4^+ \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

5.1.2 目标函数

由题意可知，该实际问题的目标是不超出法律约束与不少于理想盈利。法律直接约束了各个节目的播出时间，而由于每个节目单位时间下的盈亏情况固定，因此利润高低也直接与各个节目播放的时间相关联。作为多目标规划问题，目标函数是尽量满足或逼近两个目标的过程。而由题设所给的优先等级与前文所得到的约束条件，我们可以得到目标函数如下：

$$max \quad z = P_1 \times (d_1^+ + d_2^+ + d_3^-) + P_2 \times d_4^- \tag{9}$$

5.1.3 模型的最终得出

综上，整合目标函数和约束条件，我们可以得到以下多目标规划数学模型：

$$max \quad z = P_1 \times (d_1^+ + d_2^+ + d_3^-) + P_2 \times d_4^-$$

$$
s.t.\begin{cases}
T=t_1+t_2+t_3,\\
T_0=60\times 12,\\
T+d_1^- - d_1^+ = T_0,\\
t_1+d_2^- - d_2^+ = \frac{1}{5}T,\\
t_2+d_3^- - d_3^+ = \frac{1}{12}T,\\
S_0=12\times 60\times 250\times \frac{1}{5},\\
S=250t_1-40t_2-17.5t_3+d_4^- - d_4^+,\\
x_1,x_2,x_3,d_2^-,d_2^+,d_3^-,d_3^+,d_1^- - d_1^+,d_4^- - d_4^+ \geq 0
\end{cases} \tag{10}
$$

6 模型检验

6.1 仿真检验

6.2 稳定性检验

7 模型评价

7.1 模型优点

7.2 模型缺点

8 模型改进

9 模型推广与应用

10 参考文献

- one
- two
- three

11 附录

代码部分