图像处理实验报告

姓名：吴阳诚

学号：210810507

院系：理学院

专业：数据科学与大数据技术

班级：5 班

实验一、CV 模型实验

目的和意义

本实验采用 C++语言，通过基础代码完成对 CV 模型的复现。

通过对 CV 模型的复现，可以体会能量泛函在图像分割上的应用，同时理解能量泛函的求解算法。

模型介绍与说明

CV 模型是一个基于区域的活动轮廓模型，相比其他活动轮廓模型，CV 模型具有如下几个优点。

CV 模型是基于 Mumford-Shah 分割技巧和水平集方法，而不是基于边界函数使得演变曲线停在想要的边缘上。而且即使初始图像含有噪声，也不需要光滑初始图像，边缘的位置仍可以很好地被检测和保留。CV 模型可以检测不是由梯度定义的边缘或者是非常光滑的边缘，而对于这些边缘，经典的活动轮廓模型是不适用的。最后 CV 模型可以仅从一条初始曲线自动地检测内部轮廓，而且初始曲线的位置不必环绕待检测的物体，可以在图像的任意位置。这是 CV 模型一个非常重要的优点。

但是 CV 模型主要适用于具有同质区域的图像，对于不均匀强度背景的图像则效果较差。在 CV 模型里，常量 c1 和 c2 用来近似区域 inside(C) 和 outside(C) 内的图像强度，很显然，这只是一种粗糙的近似，而不包含图像的局部强度信息，因此 CV 模型不适用于图像强度不均匀的场景。

模型的数学原理

CV 的能量泛函模型如下：

$$F^{CV}(c_1, c_2, C) = \lambda_1 \int_{inside} |u_0(x,y) - c_1|^2 dx\,dy + \lambda_2 \int_{outside} |u_0(x,y) - c_2|^2 dx\,dy + \nu |C| .$$

其中 $\nu, \lambda_1, \lambda_2$ 为参数

前两项为数据拟合项，最后一项为长度项。

引入水平集函数$\phi(x,y)=0$表示边界 C ($\phi < 0{:}\, outside; \phi > 0{:}\, inside$)，引入 Heaviside 函数作为边界内外的示性函数。这样，曲线内外就能进行统一表达。另外，进行正规化近似表示，得到正规化的能量函数表达：

$$F_\varepsilon^{CV}(c_1,c_2,\phi)=\lambda_1\int_\Omega|u_0(x,y)-c_1|^2 H_\varepsilon(\phi(x,y))dxdy$$
$$+\lambda_2\int_\Omega|u_0(x,y)-c_2|^2[1-H_\varepsilon(\phi(x,y))]dxdy$$
$$+\nu\int_\Omega|\nabla H_\varepsilon(\phi(x,y))|dxdy$$

其中 $H_\varepsilon(z)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\right]\quad(\varepsilon>0)$

$$\delta_\varepsilon(z)=H_\varepsilon'(z)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+z^2}$$

之后采用标准的梯度下降法，采用交替极小化格式，求解c_1,c_2,ϕ：

$$c_1(\phi)=\frac{\int_\Omega u_0(x,y)H_\varepsilon(\phi(x,y))dxdy}{\int_\Omega H_\varepsilon(\phi(x,y))dxdy}$$

$$c_2(\phi)=\frac{\int_\Omega u_0(x,y)H_\varepsilon(\phi(x,y))dxdy}{\int_\Omega[1-H_\varepsilon(\phi(x,y))]dxdy}$$

ϕ的梯度下降流方程：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\frac{\partial F}{\partial\phi}=\delta_\varepsilon(\phi)\left[\nu\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)-\lambda_1(u_0-c_1)^2+\lambda_2(u_0-c_2)^2\right]$$

程序设计流程

依照数学原理进行，进行离散化处理，得到程序。代码见附录。

初始化 phi 数组，仅仅外部一小圈为 1，内部均为-1.

离散化处理：

实验结果

结论与讨论

可以看到，对于图像强度均匀的图片，CV 模型有较好的分割效果。但是它在图像强度不均匀的场景表现并不够好。

1. 实验二、RSF 模型实验

目的和意义

本实验采用 C++语言，对经典的 RSF 模型通过基础代码进行复现。本实验能够加深对于 RSF 这一基于局部信息的图像分割模型的理解，体会该算法与 CV 模型的差异。

模型介绍与说明

不同于 CV 模型用两个常量 c1 和 c2 来近似轮廓线 C 两侧的区域 inside(C) 和 outside(C)内的图像强度。RSF 模型用两个拟合函数$f_1(x)$和$f_2(x)$来拟合 C 两侧的区域内的图像强度。注意到 f_1和 f_2 的值是随着中心点 x 的变化而变化的。f_1和 f_2的这种空间变化性质使得 RSF 模型从本质上区别于 CV 模型，这种空间变化性质来源于空间变化的核函数 K_σ 的局部化性质。RSF 模型的区域可伸缩性也来源于核函数K_σ 的尺度参数 σ， 可以控制局部区域的大小，从小的邻域到整个定义域，这样就可以在一个可控制尺度的区域内充分利用图像的强度信息用于引导活动轮廓线的移动。

RSF 模型通过使用核函数K_σ充分利用图像的局部强度信息，因此该模型可以分割具有图像强度不均匀性质的图像，而且对于一些具有弱边界的物体如血管等的分割有很好的效果。

但是 RSF 模型仅仅利用图像的局部信息可能会导致能量泛函的局部极小，因此 RSF 模型的分割结果会更加依赖于轮廓线的初始化。此外，因为 RSF 模型是非凸的，这也是导致局部极小解存在的一个原因。

模型的数学原理

RSF 的能量泛函如下：

引入高斯核函数：

$$K_\sigma(\vec{u})=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-|\vec{u}|^2/2\sigma^2}$$

$$\Omega_1=inside(C),\ \Omega_2=outside(C)$$

$$\mathcal{F}^{RSF}(C,f_1(\vec{x}),f_2(\vec{x}))=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\int_\Omega\left(\int_\Omega K(\vec{x}-\vec{y})\left|u_0(\vec{y})-f_i(\vec{x})\right|^2d\vec{y}\right)d\vec{x}$$

$$+\nu|C|$$

（$\lambda_1,\lambda_2>0$；$f_1(\vec{x})\ f_2(\vec{x})$ 近似 $\vec{x}$ 邻域的图像强度）

对该泛函模型，类似地，引入水平集函数进行统一表示，同时添加一项水平级正则项（用来保持水平集函数的正规性，保证计算精确性，同时避免重新初始化水平集函数的过程），最后进行光滑化，得到如下光滑的 RSF 水平集格式的能量泛函：

$$\mathcal{F}^{RSF}(\phi,f_1,f_2)=\mathcal{E}_\varepsilon^{RSF}(\phi,f_1,f_2)+\nu\mathcal{L}_\varepsilon(\phi)+\mu\mathcal{P}(\phi)$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\int_\Omega\left(\int_\Omega K_\sigma(\vec{x}-\vec{y})\left|u_0(\vec{y})-f_i(\vec{x})\right|^2M_i^\varepsilon(\phi(\vec{y}))d\vec{y}\right)d\vec{x}$$

$$+\nu\int_\Omega\left|\nabla H_\varepsilon(\phi(\vec{x}))\right|d\vec{x}$$

$$+\int_\Omega\frac{1}{2}\left(|\nabla\phi(\vec{x})|-1\right)^2d\vec{x}$$

$$=\int_\Omega\Big[\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\left(\int_\Omega K_\sigma(\vec{x}-\vec{y})\left|u_0(\vec{y})-f_i(\vec{x})\right|^2M_i^\varepsilon(\phi(\vec{y}))\right)d\vec{y}$$

$$+\nu\left|\nabla H_\varepsilon(\phi(\vec{x}))\right|+\frac{1}{2}\left(|\nabla\phi(\vec{x})|-1\right)^2\Big]d\vec{x}$$

其中 $M_1^\varepsilon(\phi)=H_\varepsilon(\phi)$，$M_2^\varepsilon(\phi)=1-H_\varepsilon(\phi)$

为了极小化该能量泛函，采用标准的梯度下降法，交替极小化格式，求解f_1,f_2,ϕ如下：

$$f_1(\vec{x}) = \frac{K_\sigma(\vec{x}) * [M_1^\varepsilon(\phi(\vec{x}))u_0(\vec{x})]}{K_\sigma(\vec{x}) * M_1^\varepsilon(\phi(\vec{x}))}$$

$$f_2(\vec{x}) = \frac{K_\sigma(\vec{x}) * [M_2^\varepsilon(\phi(\vec{x}))u_0(\vec{x})]}{K_\sigma(\vec{x}) * M_2^\varepsilon(\phi(\vec{x}))}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\delta_\varepsilon(\phi)(\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2) + \nu\delta_\varepsilon(\phi)\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) + \mu\left(\nabla^2\phi - \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right)$$

其中 $e_1(\vec{x}) = \int_\Omega K_\sigma(\vec{y}-\vec{x})\,|u_0(\vec{x}) - f_1(\vec{y})|^2\,d\vec{y}$

$e_2(\vec{x}) = \int_\Omega K_\sigma(\vec{y}-\vec{x})\,|u_0(\vec{x}) - f_2(\vec{y})|^2\,d\vec{y}$

程序设计流程

依照数学过程，离散化处理，转化为程序。代码见附录。

实验结果

结论与讨论

可以注意到，对于图像强度不均匀的场景，RSF 的分割效果较 CV 有较大的提升。不过，RSF 也暴露出对初始形状相当敏感的问题，调节初始参数是一件困难的事情。

附录 代码

实验一

实验二