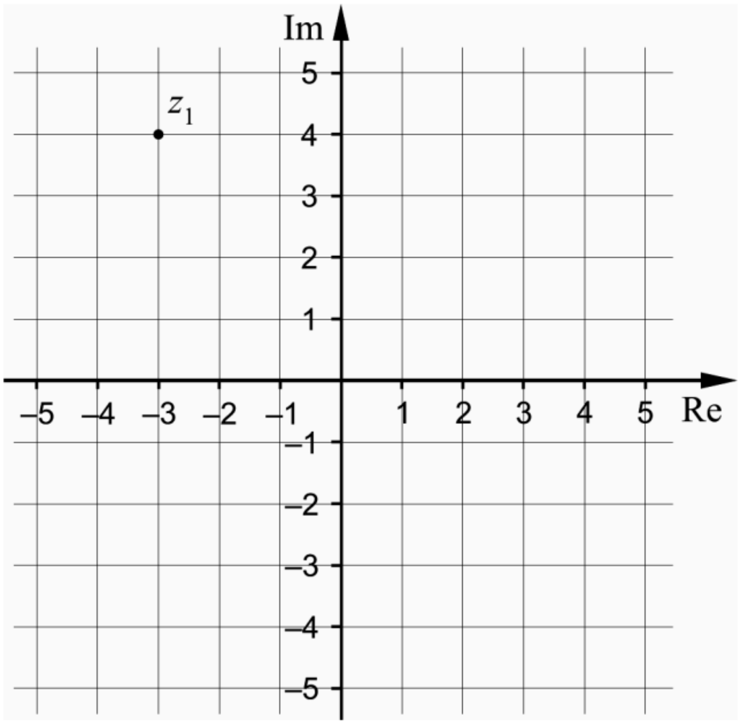
Övningsprov komplexa tal ma4

1. Figuren visar ett komplext talplan där talet z_1 är markerat.



a) Markera $\overline{z_1}$ (konjugatet till z_1) *Räcker med svar*

b) Markera ett tal z_2 i första kvadranten så att $Im_{z_1} > Re_{z_2}$ *Räcker med svar*

c) Markera talet $z_3 = i \cdot z_1$ *Räcker med svar*

d) Ange talet $z_4 = (-1) \cdot z_1$ på polär form
Avrunda argumentet på lämpligt vis

e) Rita i det komplexa talplanet det område som beskrivs av

$|z + 3 - 2i| \leq 1$

E

2. Betrakta polynomet $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

a) Visa med hjälp av faktorsatsen att (x - 3) är en faktor till polynomet.
(Lös utan polynomdivision!)

b) Vilken rest ges om polynomet divideras med (x + 1) ?
(Tips: kan lösas utan att genomföra divisionen!)

E

3. Betrakta de komplexa talen $z = 3 + 2i$ och $w = 3 - 4i$
Utför beräkningen z/w och svara på rektangulär form.

E

4. Betrakta talet $z = 1 + i$

a) Beräkna $arg(z^{10})$, svara i grader och inom intervallet $0° \leq arg(z^{10}) \leq 360°$.

b) Hitta ett tal w sådant att $w \cdot z^{10} = 3i$.
Förenkla ditt svar så långt det går.

C

5. Lös ekvationen och skissa rötterna grafiskt som vektorer i det komplexa talplanet.
Svara på valfri form.

$$z^3 = \frac{i}{8}$$

C

6. Ekvationen $z^3 + az^2 + bz = 28$, där a och b är reella tal, har en rot $z_1 = 2i$.
Bestäm ekvationens övriga rötter.

C

7. Betrakta talet

$$z = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

För vilka reella värden på m gäller att z^m är ett reellt tal?

A

8. Bestäm alla z sådana att $e^z = \sqrt{12} + 2i$

A

9. En kvadrat ritas in centrerad i det komplexa talplanet. Kvadratens hörn ligger på talplanets axlar, och dess area är 5 areaenheter.

Formulera en ekvation vars rötter sammanfaller med kvadratens hörn.

Svara i utvecklad form förenklat så långt det går.

A

10. Ekvationen $z^p = i$ får olika rötter beroende på heltalsvärdet p.
Bestäm alla heltalsvärden p för vilka $z_1 = cos9^\circ + isin9^\circ$ är en rot till ekvationen.

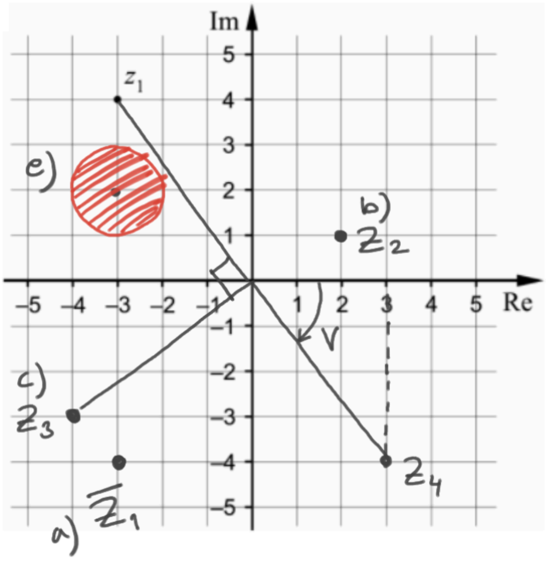
A

Facit

1	Se lösningsförslag
2a	Se lösningsförslag
2b	-24
3	(1/25) + (18/25)i
4a	90°
4b	w = 3/32
5	z_1 = 0,5(cos 30° + isin 30°), z_2 = 0,5(cos 150° + isin 150°), z_3 = 0,5(cos 270° + isin 270°) (samt se bild lösningsförslag)
6	z_1 = 2i, z_1 = -2i, z_3 = 7
7	m = (3/2)*n, där n är ett heltal
8	z = ln4 + ((π/6) + 2πn), där n är ett heltal
9	z^4 = 25/4
10	p = 10 + 40n, där n är ett heltal

Nästa sida, lösningsförslag

1)



d) $z_4 = 3 - 4i$

$|z_4| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$v = -\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx -53^\circ$

Svar: $z_4 = 5(\cos -53^\circ + i\sin -53^\circ)$

e) $|z + 3 - 2i| \leq 1$

$|z - (2i - 3)| \leq 1$

cirkel med mittpunkt i $(2i-3)$

2) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

a) Enl. faktorsatsen måste $p(3) = 0$ om $(x-3)$ är en faktor.

$p(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 =$

$= 27 - 54 + 33 - 6 = 0$

Alltså: $(x-3)$ är faktor, V.S.V!

b) Enl. restsatsen är resten då $p(x)$ divideras med $(x+1)$ lika med $p(-1)$

$(x - (-1))$

$p(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 11(-1) - 6 =$

$= -1 - 6 - 11 - 6 = -24$

Svar: -24

3) $z = 3+2i$

$w = 3-4i$

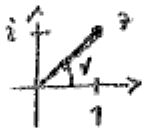
$$\frac{z}{w} = \frac{3+2i}{3-4i} = \frac{(3+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} =$$

$$= \frac{(3+2i)(3+4i)}{9+16} = \frac{(3+2i)(3+4i)}{25} =$$

$$= \frac{9+12i+6i-8}{25} = \frac{1+18i}{25} = \underline{\underline{\frac{1}{25} + \frac{18}{25}i}}$$

$$(= 0{,}04 + 0{,}72i)$$

4) $z = 1 + i$



$v = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ$

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

a) $z = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

$z^{10} = (\sqrt{2})^{10}\,(\cos(45^\circ \cdot 10) + i \sin(45^\circ \cdot 10))$, de Moivres formel

$= (2^{0,5})^{10}\,(\cos \underbrace{450^\circ}_{= 90^\circ + 360^\circ} + i \sin 450^\circ)$

$= 2^5\,(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

Svar: $\arg(z^{10}) = 90^\circ$

b) 1) Antag $w = r(\cos v + i \sin v)$

2) $w \cdot z^{10} = r(\cos v + i \sin v) \cdot 2^5 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

$= r \cdot 2^5 (\cos(v + 90^\circ) + i \sin(v + 90^\circ))$

3) $3i = 3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

4) Ger ekv:

$r \cdot 2^5 (\cos(v + 90^\circ) + i \sin(v + 90^\circ)) =$

$= 3\,(\cos(90^\circ) + i \sin(90^\circ))$

5) $r \cdot 2^5 = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2^5} = \frac{3}{32}$

$v + 90^\circ = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$, $n = 0$ ger $v = 0^\circ$

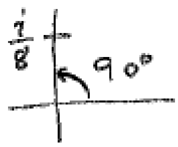
Svar: $w = \frac{3}{32}(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = \underline{\frac{3}{32}}$

5) $z^3 = \frac{i}{8}$

1) Antag $z = r(\cos v + i\sin v)$, v i grader

2) $z^3 = r^3(\cos 3v + i\sin 3v)$, de Moivres formel

3) $\frac{i}{8} = \frac{1}{8}(\cos 90° + i\sin 90°)$



4) Ger ekv:

$$r^3(\cos 3v + i\sin 3v) = \frac{1}{8}(\cos 90° + i\sin 90°)$$

5) Vi får:

$$r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}5$$

$$3v = 90° + n \cdot 360°$$

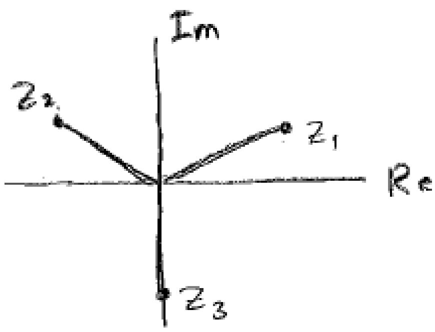
$$v = 30° + n \cdot 120°$$

6) Tre lösningar:

$n = 0$ ger $v = 30°$ och $z_1 = 0{,}5(\cos 30° + i\sin 30°)$

$n = 1$ $v = 150°$ $z_2 = 0{,}5(\cos 150° + i\sin 150°)$

$n = 2$ $v = 270°$ $z_3 = 0{,}5(\cos 270° + i\sin 270°)$



6) $z^3 + az^2 + bz = 28$

$z^3 + az^2 + bz - 28 = 0$

1) Stoppar in $z_1 = 2i$, ger:

$(2i)^3 + a(2i)^2 + b(2i) - 28 = 0$

$8i^3 + 4i^2a + 2ib - 28 = 0$

$-8i - 4a + 2ib - 28 = 0$

2) Jämför V.L. och H.L.:

Re: $-4a - 28 = 0 \Rightarrow 4a = -28 \Rightarrow a = -7$

Im: $-8 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$

Nu har vi ekvationen!

$z^3 - 7z^2 + 4z - 28 = 0$

3) Reella koefficienter, då måste $z_2 = -2i$ även vara rot. Samt $(z - 2i)\underbrace{(z - (-2i))}_{= z + 2i}$ faktorer enligt faktorsatsen.

$(z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$

6) forts

4) Polynomdivision

$$\begin{array}{l} z - 7 \\ \hline z^3 - 7z^2 + 4z - 28 \quad \big|\ \underline{z^2 + 4} \\ -(z^3 + 4z) \\ \hline 0 - 7z^2 - 28 \\ -(-7z^2 - 28) \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

5) Vi har nu faktoriserat ekvationen:

$$(z - 2i)(z + 2i)(z - 7) = 0$$

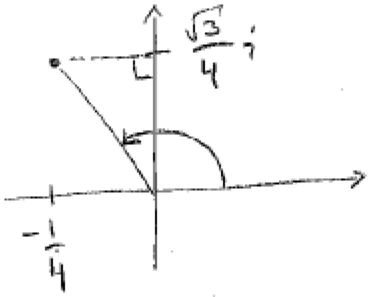
$z_1 = 2i$

$z_2 = -2i$ Svar.

$z_3 = 7$

7)

1) $z = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$



$V = 90° + \arctan\left(\frac{1/4}{\sqrt{3}/4}\right)$

$= 90° + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

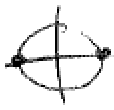
$= 90° + 30° = 120°$

2) $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0,5$

3) $z = 0,5\,(\cos 120° + i \sin 120°)$

4) $z^m = 0,5^m\,(\cos(m \cdot 120°) + i \sin(m \cdot 120°))$, de Moivres formel

5) z^m är reellt om $i \sin(m \cdot 120°) = 0$,



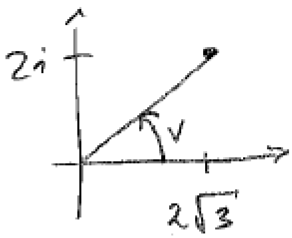
dvs då: $m \cdot 120° = n \cdot 180°$

$m = n \cdot \frac{180°}{120°} = n \cdot \frac{3}{2}$

6) <u>Svar:</u> för $m = \frac{3}{2} \cdot n$ där n är ett heltal.

8) $e^{z} = \sqrt{12} + 2i$

1) $H.L. = \sqrt{12} + 2i = \sqrt{4 \cdot 3} + 2i = 2\sqrt{3} + 2i$



$v = \arctan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{\pi}{6}$

$\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$

$H.L. = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$, Eulers formel

2) Antag $z = a+bi$, ger:

$V.L. = e^{z} = e^{a+bi} = e^{a} \cdot e^{bi}$

3) Vi får:

$e^{a} \cdot e^{bi} = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$

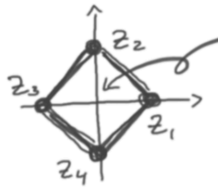
$e^{a} = 4 \Rightarrow a = \ln 4$

$b = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

4) <u>Svar:</u> $z = \ln 4 + \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)i$, n ett heltal.

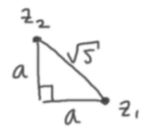
9)

1) Skiss



Area 5, sidlängd $\sqrt{5}$

2) Ger triangeln:



Pyth. sats:

$$a^2 + a^2 = \sqrt{5}^2$$

$$2a^2 = 5$$

$$a = \sqrt{\tfrac{5}{2}} \quad (a>0)$$

3) Ger $z_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $z_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}\,i$

samt med symmetrin:

$$z_3 = -\sqrt{\tfrac{5}{2}}, \quad z_4 = -\sqrt{\tfrac{5}{2}}\,i$$

4) Om ekvationen är $f(z) = 0$ får vi med faktorsatsen att $(z - z_1)$, $(z - z_2)$, $(z - z_3)$ o $(z - z_4)$ är faktorer till $f(z)$. Vi skapar ekvationen:

$$\left(z - \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)\left(z - \sqrt{\tfrac{5}{2}}\,i\right)\left(z + \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)\left(z + \sqrt{\tfrac{5}{2}}\,i\right) = 0$$

$$\left(z^2 - \tfrac{5}{2}\right)\left(z - \sqrt{\tfrac{5}{2}}\,i\right)\left(z + \sqrt{\tfrac{5}{2}}\,i\right) = 0$$

$$\left(z^2 - \tfrac{5}{2}\right)\left(z^2 + \tfrac{5}{2}\right)$$

$$z^4 - \tfrac{25}{4} = 0$$

Konjugat-regeln

Svar: $z^4 = \frac{25}{4}$

10) $z^p = i$

1) Antag $z = r(\cos v + i\sin v)$

ger $z^p = r^p(\cos pv + i\sin pv)$, de Moivres formel

2) H.L. $= i = (\cos 90° + i\sin 90°)$

3) Ger ekv:

$$r^p(\cos pv + i\sin pv) = (\cos 90° + i\sin 90°)$$

ger $pv = 90° + 360°\cdot n$

4) $v = 9°$ ger ekv:

$$p \cdot 9 = 90 + 360n$$

$$p = 10 + 40n$$

5) **Svar:** $p = 10 + 40n$ där n är heltal