БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра информатики

О.И.Костюкова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Изложены основные методы, используемые в принятии решений экономического и технического плана, основными из которых являются классические методы линейного и нелинейного программирования, динамическое программирование, игровые методы, методы оптимального управления.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение в теорию принятия решений

Вся наша жизнь пронизана проблемами. Каждый человек ежедневно сталкивается с необходимостью принятия решений. Их так много и принимают их так часто, что в большинстве случаев это просто не осознается. Только наиболее важные и трудные решения как-то выделяются и становятся предметом анализа. При этом основной подход всегда один: собирается точная, надежная и адекватная информация, а затем делается выбор среди возможных решений. Принятие решений – это важная функция управления, являющаяся умением, которым должен овладеть каждый человек, работающий как в бизнесе так и науке. Принятие неоптимальных решений в жизненных и производственных ситуациях уменьшает значительную долю возможностей и ресурсов. И чем сложнее ситуация, тем больше потери. Принятию решений необходимо учиться, и учит этому наука, называемая "Теория принятия решений", которая включает в себя комплекс знаний, содержащих изрядную долю математики.

1.1 Этапы принятия решений

Принятие решений не является каким-то обособленным, единовременным актом. Это процесс, протекающий во времени и состоящий из несколько этапов. Любой процесс в природе – физический, химический, социальный, мыслительный и т.д., будучи предоставленный сам себе, развивается и протекает по некоторым присущим ему закономерностям. Но на этот процесс воздействуют другие процессы, также как и сам он воздействует на них в силу всеобщей связи явлений в природе, что приводит к отклонениям от первоначального развития рассматриваемого процесса, т.е. он протекает по более сложным закономерностям. Все внешние воздействия подразделяются на случайные и управляющие. Случайные воздействия являются следствием взаимодействия рассматриваемых процессов, в то время как управляющие воздействия изменяют ход того процесса, на который они направлены, в желаемом направлении. В связи с этим должен существовать некоторый орган, систематически или по мере необходимости вырабатывающий управляющие воздействия. Такой орган принято называть **системой управления**.

В общем случае под системой понимают объективное единство закономерно связанных друг с другом предметов и явлений в природе и обществе. Характеристики такой системы определяются как характеристиками составляющих систему элементов, так и характеристиками взаимосвязей между ними.

Качество и эффективность работы системы оценивается **критерием эффективности**, который позволяет оценить достижение желаемой цели. Проблема принятия решений возникает только тогда, когда существуют затруднения в достижении необходимой цели. В процессе принятия решений система управления должна располагать ресурсами, обеспечивающими реализацию выбранных управляющих воздействий. Так, в экономических системах решение, направленное на интенсификацию производства должно сопровождаться выделением дополнительных ресурсов – материальных, финансовых и т.д. Но система управления и сама затрачивает некоторые ресурсы, процесс выбора решения из множества возможных также связан с определенными затратами.

Процесс принятия решения начинается с осознания того состояния или ситуации, в которой находится принимающий решение человек. Этот **первый начальный этап** можно считать в определенном смысле предварительным, предшествующим процессу решения. Здесь выявляется удовлетворенность или неудовлетворенность тем состоянием, в котором находится система.

На **втором этапе** формируется желание изменить или сохранить существующее состояние системы определенным образом, т.е. устанавливается цель принятия решения.

Третий этап заключается в определении всех возможных способов или путей достижения цели, перехода в желаемое состояние. Здесь важно в максимальной степени обеспечить полноту возможных решений вплоть до их избыточности. Впоследствии лучше исключить непривлекательное решение, чем пропустить эффективное.

Четвертый этап заключается в выборе из множества возможных решений эффективного, в смысле достижения желаемой цели, с соблюдением при этом некоторых правил выбора. Результатом именно этого этапа является единственное принятое решение. Этот этап является центральным, но он не возможен без первых трех.

Весь процесс принятия решения завершает **пятый этап** —- реализация принятого решения.

Одним из универсальных средств решения любых проблем в настоящее время являются математические модели. В исследовании операций модели описывают поведение систем, включающие во многих случаях в себя коллективы людей, которые ведут себя определенным рациональным образом и могут быть адекватно описаны. Критерий сравнения альтернатив, называемый также критерием оптимизации или целевой функцией, рассматривается как единственный и очевидный.

Все методы принятия решений можно разделить на две группы: формализованные (математические) и неформализованные (эвристические). Формализованные методы, основанные на получении количественных результатов вычислений, используются при разрешении хорошо структурированных и частично слабоструктурированных проблем для оценки вариантов решений, выбора и обоснования оптимального варианта. Неформализованные методы используются при разрешении сложных слабоструктурированных и неструктурированных проблем для генерирования вариантов решений, их анализа и оценки, выбора и обоснования наилучшего решения. В совокупности различные математические методы, объединенные общей задачей обоснования наилучших решений, получили название методов принятия оптимальных решений. В этих методах одними из основных являются следующие группы методов : Математическое программирование представляет собой ряд методов, предназначенных для наилучшего распределения имеющихся ограниченных ресурсов, а также для составления рационального плана операции. Математическое программирование подразделяется на линейное, нелинейное и динамическое. Сюда же обычно относят и методы сетевого планирования. Линейное программирование применяется в тех случаях, когда условия выполнения операции описываются системой линейных уравнений или неравенств. Если указанные зависимости носят нелинейный характер, то применяется метод нелинейного программирования. Динамическое программирование служит для выбора наилучшего плана выполнения многоэтапных действий, когда результат каждого последующего этапа зависит от предыдущего. Сетевое планирование предназначено для составления и реализации рационального плана выполнения операции, состоящей из большого числа взаимосвязанных действий, предусматривающего решение задачи в кратчайший срок и с наилучшими результатами. Теоретико-игровые методы служат для обоснования решений в условиях неопределенности обстановки. К теоретико-игровым методам относятся: теория игр и теория статистических решений. Теория игр используется в тех случаях, когда неопределенность обстановки вызвана сознательными, злонамеренными действиями конфликтующей стороны. Теория статистических решений применяется тогда, когда неопределенность обстановки вызвана объективными обстоятельствами, которые либо неизвестны, либо носят случайный характер. Методы оптимального управления динамическими процессами, описываемыми системами дифференциальных уравнений Наряду с количественными результатами вычислений необходимо при принятии решений учитывать множество обстоятельств качественного характера, не сводящихся к однозначным ответам. Поэтому сохраняют свое значение и методы обоснования решений на основе изучения опыта, интуиции, обобщения результатов, в том числе метод экспертных оценок.

1.2 Математическая постановка задачи принятия решений

При решении задачи принятия решения исследуется система, которая условно изображается прямоугольником, рис. 1.

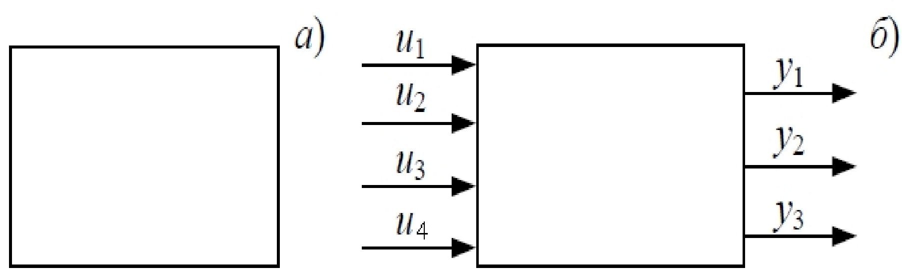


Рис. 1: Система: а) – исследуемая; б) – с входными и выходными параметрами

Определение системы уже было дано. В дальнейшем под системой будем понимать совокупность объектов, предприятий, характеризующихся некоторыми показателями. Все эти показатели или параметры подразделяются прежде всего на входные и выходные. Выходные показатели $y_1,\ y_2, ..., y_n$ графически обозначаются стрелками, выходящими из прямоугольника —- системы (рис. 1, б); к ним относятся такие показатели, как, например, качество продукта, себестоимость, производительность, количество и др. Параметры, которые можно изменить в соответствии с нашим желанием, обозначаются $u_1, u_2, ..., u_m$ (рис. 1, б) и называются входными воздействиями. Такими параметрами могут быть количество финансовых средств, которые вкладываются в то или иное производство, оборудование, поставляемое в тот или иной цех, людские ресурсы и т.п. Входные параметры являются "рулями которыми управляют, изменяя их значение, соответственно изменяются и выходные параметры y_i. Если рассматриваемые процессы являются динамическими, т.е. они развиваются во времени, то входные и выходные параметры являются функциями времени t:

$$y(t) = (y_1(t),\ y_2(t), ..., y_n(t)), \quad u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)), \ \ t \in [t_0, t_*],$$

где $[t_0, t_*]$ — рассматриваемый временной интервал. Вектор $y(t)$ называется состоянием системы в момент времени t, вектор $u(t)$ определяет управляющее воздействие (управление), действующее на систему в момент t.

Выбор тех или иных величин u_i и является решением задачи принятия решений. Если принято решение, следовательно, определены значения выходных параметров y_i , и в этом случае говорят, что система перешла в некоторое новое состояние. Оператор, отражающий зависимость выходных параметров y от входных управляющих параметров u, называется моделью

$$y = f(u). \tag{1.1}$$

Для динамических систем зависимость выходных параметров y от входных управляющих параметров u может задаваться системой обыкновенный дифференциальных уравнений или системой уравнений в частных производных

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(y(t), u(t)). \tag{1.2}$$

Математическая модель представляет собой математическую зависимость, позволяющую без экспериментов, зная управляющие воздействия, определить выходные параметры. Использование моделей очень удобно, так как не всегда можно провести эксперименты, при их проведении можно даже разорить предприятие, однако, имея модель, можно проиграть различные ситуации на ней. После того как принято решение, хорошее или плохое, его необходимо охарактеризовать численно. Для этого вводится целевая функция, позволяющая численно оценить насколько принятое решение хорошо. Эта функция зависит от входных и выходных параметров и обозначается $Q = Q(u, y)$.

Так как выходные параметры y можно выразить через входные u, что часто и делают, то тогда целевая функция будет зависеть только от управляющих показателей — $Q = Q(u)$. И задача заключается в нахождении таких управлений u (или таких решений u), при которых целевая функция достигала бы своего минимального (максимального) значения.

Например, целевой функцией является прибыль – требуется, чтобы она была максимальной, если целевая функция представляет собой себестоимость, то необходимо, чтобы она была минимальной. В конкретных задачах часто накладываются ограничения, например, требуют, чтобы при нахождении максимума целевой функции себестоимость была бы не выше заданной, количество товара по каждой номенклатуре также было бы не меньше заданного и т.д. Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти такое решение, при котором целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение и удовлетворяются все ограничения экономического, технологического планов, которые принято записывать в виде

$$\psi_i(u) \leq 0, i = 1, ..., k.$$

Принимая различные решения, вычисляют в соответствии с ними по модели (1.1) (или по модели (1.2)) значения выходной переменной y, а затем целевой функции Q. После этого среди всех принятых решений ищется такое решение u, при котором значение Q будет наилучшим. Варьировать значениями управляющей переменной u можно только в определенных пределах. Например, денежный вклад должен быть, с одной стороны, больше нуля, а, с другой стороны, меньше некоторого предельного значения, определяемого финансовыми возможностями конкретного лица, т.е. $0 \leq u_i \leq u_{i\ max}$, или, если U – область допустимых значений варьируемых управлений u_i, то $u_i \in U$.

Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти такие управления из области допустимых U, при которых будут выполнены технологические ограничения, а целевая функция примет минимальное значение. Математически данная задача записывается следующим образом: требуется принять такое решение $u^* = (u_1^*, ..., u_m^*)$, принадлежащее области допустимых решений, $u_i^* \in U$, $i = 1, ..., m$, при котором целевая функция достигает своего минимального значения и выполняются связи, определяемые математической моделью $y = f(u)$, а также ограничения в виде неравенств

$\psi_i(u) \leq 0, i = 1, ..., k$, которыми задаются технологические ограничения. Математически задача записывается следующим образом

$$Q(y, u) \to \min,$$

$$y = f(u), \;\; \psi_i(u) \leq 0, i = 1, ..., k, \tag{1.3}$$

$$u_i \in U, \; i = 1, ..., m. \tag{1.4}$$

Управляющие переменные, удовлетворяющие требованиям (1.3) и (1.4), называются допустимым решением. Все остальные решения недопустимы.

Допустимые решения $u^* = (u_1^*, ..., u_m^*)$, при котором целевая функция минимальна, называется оптимальным решением.

Основной задачей теории принятия решения является нахождение оптимального решения. Для этого необходимо: построить модель $y = f(u)$, определить целевую функцию $Q(y, u)$, определить область допустимых управлений U, определить технологические ограничения.

Для решения перечисленных задач применяют различные методы, которые и рассмотрим далее.

Список литературы

[1] Эддоус М., Стэнсфилд Р. Э18 Методы принятия решений/ Пер. с англ. под ред. член-корр. РАН И.И. Елисеевой. — М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. - 590 с.

[2] Бодров В.И., Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Математические методы принятия решений: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004. 124 с.

[3] Орлов А.И. Теория принятия решений. Учебное пособие. - М.: Издательство "Март 2004. - 656 с.

[4] Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000.

2 Линейное программирование

Создание Данцигом в конце 1940-х годов симплекс-метода стало началом современной эры в оптимизации. Этот метод позволил экономистам формулировать большие модели и систематически и эффективно анализировать их. Открытие Данцига совпало с появлением цифровых компьютеров, и симплекс-метод стал одним из первых примеров удачного использования этой новой революционной технологии. С тех пор реализация симплекс-метода постоянно совершенствуется. Сегодня линейное программирование и симплекс-метод - наиболее широко используемые средства оптимизации, и, несмотря на то что в настоящее время появились новые классы эффективных методов (например, метод внутренней точки), актуальность и важность симплекс-метода гарантированы в обозримом будущем.

2.1 Симплекс-метод

2.1.1 Постановка задачи. Нормальная, каноническая формы

Линейное программирование является составной частью задач математического программирования, в которых критерий оптимальности задается в виде линейной функции от входящих в него переменных, кроме того, на эти переменные накладываются некоторые ограничения в форме линейных равенств и неравенств.

Одним из важнейших физических прототипов математической модели задачи линейного программирования является производственная задача. Её содержательная (неформальная) формулировка такова.

На предприятии производится продукция n видов. При этом расходуются ресурсы m типов, имеющиеся в объемах $b_1, b_2, \ldots, b_m$.

Известны затраты a_{ij} i-го ресурса на изготовление единицы продукции j-го вида и прибыль c_j от реализации единицы продукции j-го вида. Требуется найти план производства с максимальной прибылью.

Обозначим через x_j количество единиц планируемой к выпуску продукции j-го типа, $j = \overline{1, n}$.

Тогда

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ — расход i-го сырья при плане производства $(x_j, j=\overline{1,n})$, $i=\overline{1,m}$;

$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ — прибыль от реализации плана производства $(x_j, j=\overline{1,n})$.

Таким образом, наша цель состоит в том, чтобы найти план производства $(x_j, j=\overline{1,n})$, который

- удовлетворяет ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m}; \tag{2.1}$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n}, \tag{2.2}$$

- максимизирует функцию

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{2.3}$$

Функция (2.3) называется *целевой функцией* или *критерием качества.*

Ограничения вида (2.1) называются *основными ограничениями*, а ограничения (2.2) – *прямыми ораничениями.*

Математическая модель решаемой задачи имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m}; \tag{2.4}$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n}.$$

Задача (2.4) — это общий вид задачи линейного программирования **в нормальной форме** (запись покомпонентна).

Удобнее использовать матрично-векторную запись.

Обозначим

$I=\{1,2,\dots,m\}$, $J=\{1,2,\dots,n\}$ — множества индексов,

$c=c(J)=(c_j, j\in J)'$, $b=b(I)=(b_i, i\in I)'$;

$A=A(I,J)=\begin{pmatrix} a_{ij}, j\in J \\ i\in I \end{pmatrix}=(A_j, j\in J)$, $x=x(J)=(x_j, j\in J)$ где A_j — m-вектор, $A'_j=(a_{ij}, i\in I)$, символ $'$ обозначает операцию транспонирования.

Запись $x \geq 0$ означает, что $x_j \geq 0, j \in J$. Используя введенные обозначения, задачу (2.4) можно записать в виде

$$c'x \to \max, \tag{2.5}$$
$$Ax \leq b, x \geq 0.$$

Задача (2.5) — задача линейного программирования в **нормальной форме** (векторно-матричная запись).

Кроме нормальной формы (2.5) существуют другие виды записи общей задачи линейного программирования. Например:

$$\begin{cases} c'x \to \max, \\ Ax = b,\ x \geq 0; \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} c'x \to \max, \\ Ax = b,\ d_* \leq x \leq d^*, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} c'x \to \max, \\ A_1x = b_1,\ A_2x \leq b_2,\ x \geq 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} c'x \to \min, \\ \ldots \end{cases} \tag{2.9}$$

Форма записи (2.6) называется **канонической формой** записи общей задачи линейного программирования. Между общими формами существует тесная взаимосвязь. Каждая из этих форм может быть сведена к другой, т.е. в некотором смысле эти формы эквивалентны.

В дальнейшем в качестве "основной "базовой"формы рассматривается каноническая форма (2.6). Покажем, как задача (2.5), записанная в нормальной форме может быть сведена к задаче в канонической форме.

Пусть задана задача вида (2.5). Требуется записать ее в виде (2.6).

Положим $\overline{n} = n + m,\ \bar{J} = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m\},\ \overline{x} = (x_j, j \in \bar{J}),\ \bar{b} = b,$ $\bar{c}' = (\bar{c}_j, j \in \bar{J}),\ \bar{c}_j = c_j, j = \overline{1, n};\ \bar{c}_j = 0, j = \overline{n+1, n+m},$

$\bar{A} = (A, E) = \begin{pmatrix} \overline{a}_{ij}, j \in \bar{J} \\ i \in I \end{pmatrix}$, $\overline{a}_{ij} = a_{ij}, j \in J, i \in I$; $\overline{a}_{i\,n+i} = 1, i = \overline{1, m}$; $\overline{a}_{ij} = 0$ при $j > n, j \neq i + n$.

С учетом введенных обозначений задачу (2.5) можно записать в эквивалентной канонической форме

$$\bar{c}'\bar{x} \to \max, \bar{A}\bar{x} = \bar{b},\ \bar{x} \geq 0.$$

Если исходная задача является задачей минимизации, то заменим c на $\bar{c} = -c$ и получаем эквивалентную задачу на максимум. Остальные типы переходов к эквивалентным формам записи рассмотрим на практике.

2.1.2 Базисный план

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме

$$c'x \to \max, Ax = b, x \geq 0, \tag{2.10}$$

где

$c \in \mathbb{R}^n$ — вектор стоимости, или вектор целевой функции;

$c'x$ — целевая функция или критерий качества;

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица условий;

$b \in \mathbb{R}^m$ — вектор ограничений;

$A_j = A(I, j)$ — j-ый вектор условий.

n-вектор x, удовлетворяющий ограничениям задачи (2.10) называется **планом** (допустимым планом).

$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ — **множество допустимых планов**,

$Ax = b$ — **основное ограничение**,

$x \geq 0$ — **прямое ограничение**.

Предположим пока, что

$$rank A = m \leq n. \tag{2.11}$$

Допустимый план x^0 называется оптимальным, если $c'x^0 = \max c'x$, где максимум вычисляется по всем допустимым планам $x \in X$.

Определение 1 *План $x = x(J)$ называется* **базисным**, *если существует такое подмножество индексов $J_Б \subset J$, что*

1) $|J_Б| = m$,

2) $x_j = 0, j \in J_Н = J \setminus J_Б$,

3) $\det A_Б \neq 0$, *где* $A_Б = (A_j, j \in J_Б)$.

Множество $J_{\text{Б}}$ — множество базисных индексов,

множество $J_{\text{Н}}$ — множество небазисных индексов,

$A_{\text{Б}} = (A_j, j \in J_{\text{Б}})$ — базисная матрица, $A_{\text{Н}} = (A_j, j \in J_{\text{Н}})$ — небазисная матрица,

$x_{\text{Б}} = (x_j, j \in J_{\text{Б}})$ — базисные компоненты плана,

$x_{\text{Н}} = (x_j, j \in J_{\text{Н}})$ — небазисные компоненты плана.

Определение 2 *Базисный план x называется* **невырожденным**, *если*

$$x_j > 0, j \in J_Б.$$

Примеры. 1. Пусть ограничения задачи имеют вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Вектор $x = (1, 0, 0, 0)$ — план.

Пара $(x, J_{\text{Б}} = \{1, 2\})$ — базисный план.

Пара $(x, J_{\text{Б}} = \{1, 4\})$ также — базисный план.

Пара $(x, J_{\text{Б}} = \{1, 3\})$ не является базисным планом.

Приведенные базисные планы вырожденные.

2. Рассмотрим ограничения вида

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 8x_4 = 6, \ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Пара из допустимого плана $x = (2, 0, 0, 1)$, подмножества индексов $J_{\text{Б}} = \{1, 4\}$ является базисный план (невырожденный).

Замечание 1 *Из определения следует, что для базисного плана выполняются следующие условия $x_Н = 0, Ax = b$. Следовательно, имеем*

$$Ax = A_Б x_Б + A_Н x_Н = A_Б x_Б = b.$$

Из последних соотношений получаем

$$x_{Б} = A_{Б}^{-1}b.$$

Следовательно, мы однозначно можем восстановить базисный план, если задано множество его базисных индексов $J_{Б}$:

$$x_{Н} = 0, x_{Б} = A_{Б}^{-1}b, x = (x_{Б}, x_{Н}).$$

2.1.3 Формула приращения целевой функции

Пусть x — базисный план с базисом $J_{\text{Б}}$ и базисной матрицей $A_{\text{Б}} = (A_j, j \in J_{\text{Б}})$.

Подсчитаем векторы $u \in \mathbb{R}^m$ и $\Delta \in \mathbb{R}^n$ по правилам

$$u' = c'_{\text{Б}} A_{\text{Б}}^{-1}. \tag{2.12}$$

$$\Delta' = (u'A - c') = (\Delta_j, j \in J), \ \ \Delta_j = u'A_j - c_j, \ j \in J. \tag{2.13}$$

Отметим, что по построению

$$\Delta_j = 0, \ j \in J_{\text{Б}}.$$

Вектор u из (2.12) называется m-вектором потенциалов, n-вектор Δ из (2.13) — вектором оценок.

Рассмотрим другой (не обязательно базисный) план $\overline{x} = (\overline{x}_j, j \in J)$.

Обозначим

$$\Delta x = \overline{x} - x.$$

Подсчитаем приращение целевой функции

$$c'\overline{x} - c'x = c'\Delta x. \tag{2.14}$$

Можно показать, что верна следующая формула приращения

$$c'\overline{x} - c'x = -\Delta_{\text{Н}} \Delta x_{\text{Н}} = -\sum_{j \in J_{\text{Н}}} \Delta_j \Delta x_j. \tag{2.15}$$

2.1.4 Критерий оптимальности. Достаточное условие неограниченности целевой функции

Пусть x — базисный план с базисной матрицей $A_Б$. Является ли план x оптимальным?

Для ответа на этот вопрос подсчитаем вектор потенциалов (2.12) и вектор оценок (2.13).

Теорема 1 *(<u>Критерий оптимальности</u>). Рассмотрим базисный план $(x, J_Б)$. Неравенства*

$$\Delta_j \geq 0, j \in J_н, \tag{2.16}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности плана x.

Предположим,что для базисного плана x с базисным множеством $J_Б$ достаточное условие оптимальности (2.16) не выполняется, т.е. $\exists j_0 \in J_н$:

$$\Delta_{j_0} < 0.$$

Рассмотрим случай, когда все компоненты вектора $z = A_Б^{-1} A_{j_0}$ неположительны, т.е.

$$(z_i, i = \overline{1, m})' = A_Б^{-1} A_{j_0} \leq 0.$$

В этом случае легко видеть, что компоненты вектора $\overline{x} = (\overline{x}_Б, \overline{x}_н)$, построенного по правилам

$$\overline{x}_н = \Delta x_н, \quad \Delta x_{j_0} = \theta \geq 0, \Delta x_j = 0, j \in J_н \backslash j_0,$$
$$\overline{x}_Б = x_Б - \theta A_Б^{-1} A_{j_0} = x_Б - \theta z,$$

неотрицательны и удовлетворяют условию $A\bar{x} = b$ при $\forall \theta \geq 0$. Следовательно, вектор $\overline{x}$ — допустимый план при $\forall \theta \geq 0$ и на нем приращение целевой функции равно

$$c'\overline{x} - c'x = -\Delta_{j_0}\theta > 0.$$

При $\theta \to \infty$ целевая функция неограниченно возрастает. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2 *Если среди оценок $\Delta_Н$ базисного плана x существует отрицательная (Δ_{j_0}) и ей соответствует вектор $A_Б^{-1}A_{j_0} = z$ с неположительными компонентами, то целевая функция исходной задачи линейного программирования не ограничена сверху на множестве допустимых планов.*

2.1.5 Итерация

Продолжим анализ базисного плана x с базисной матрицей $A_{\text{Б}}$ и базисным множеством индексов $J_{\text{Б}} = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$.

Рассмотрим случай, когда достаточное условие оптимальности (2.16) не выполняется, и ни для одного индекса $j_0 \in J_{\text{н}}$ с $\Delta_{j_0} < 0$ не выполняется неравенство $z = A_{\text{Б}}^{-1}A_{j_0} \leq 0$, т.е. не выполняется и достаточное условие неограниченности целевой функции.

Построим вектор приращения плана Δx как при доказательстве критерия оптимальности:

$$\Delta x_{j_0} = \theta,\ \Delta x_j = 0, j \in J_{\text{н}} \backslash j_0, \tag{2.17}$$

$$\Delta x_{\text{Б}} = -\theta A_{\text{Б}}^{-1}A_{j_0} = -\theta z, z = A_{\text{Б}}^{-1}A_{j_0} = (z_i, i = \overline{1,m})'.$$

Согласно формуле приращения для плана $\bar{x} = x + \Delta x$ имеем

$$c'\bar{x} = c'x - \Delta_{j_0}\theta,\ \text{где } \Delta_{j_0} < 0$$

Отсюда видно, что чем больше $\theta > 0$, тем лучше (больше) значение целевой функции, следовательно, наша цель выбрать θ максимально большим при условии, что вектор $\bar{x}$ остается планом задачи. Мы отмечали выше, что

$$A\bar{x} = b \quad \text{при} \quad \forall\theta;$$
$$\bar{x}_{\text{н}} = \Delta x_{\text{н}} \geq 0 \quad \text{при} \quad \forall\theta \geq 0.$$

Для $\bar{x}_{\text{Б}}$ имеем

$$\bar{x}_{\text{Б}} = x_{\text{Б}} - \theta A_{\text{Б}}^{-1}A_{j_0} \qquad \text{или}$$
$$\bar{x}_{j_i} = x_{j_i} - \theta z_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Напомним, что $z := A_{\text{Б}}^{-1}A_{j_0} = (z_i, i = 1, ..., m)'$, $J_{\text{Б}} = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$.

Подсчитаем шаги θ_i, $i = 1, ..., m$:

$$\theta_i = \begin{cases} x_{j_i}/z_i, \text{ если } & z_i > 0, \\ \infty, \text{ если } & z_i \le 0, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Очевидно, что θ_i — максимальное значение θ, при котором базисная компонента $\bar{x}_{j_i}$ остается неотрицательной, т.е. выполняется неравенство $\bar{x}_{j_i} \ge 0$. Найдем

$$\theta_0 = \theta_s = \min \theta_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

По построению, θ_0 — максимальное значение θ, при котором вектор $\bar{x}$ является планом.

Построим новый план $\bar{x} = x + \Delta x$, где вектор Δx найден по правилам (2.17) при $\theta = \theta_0$. Значение целевой функции на новом плане $\bar{x}$ равно

$$c'\bar{x} = c'x - \Delta_{j_0}\theta_0 \ge c'x.$$

Причем, если x — невырожденный план (т.е. $x_j > 0, j \in J_{\text{Б}}$), то $\theta^0 > 0$ и, следовательно, $c'\bar{x} > c'x$.

Покажем, что $\bar{x}$ — базисный план. Среди компонент $\bar{x}_j, j \in J_{\text{н}}$, только одна компонента $\bar{x}_{j_0} = \theta_0$ может оказаться отличной от нуля. С другой стороны, среди компонент $\bar{x}_j, j \in J_{\text{Б}}$, одна компонента $\bar{x}_{j_s}$ обязательно равна нулю, ибо по построению

$$\bar{x}_{j_s} = x_{j_s} - \theta_0 z_s = x_{j_s} - x_{j_s} z_s / z_s = 0.$$

Таким образом, $n - m$ компонент

$$\bar{x}_j, j \in \bar{J}_{\text{н}} = (J_{\text{н}} \backslash j_0) \cup j_s$$

плана $\bar{x}$ равны нулю. Остальные переменные $\bar{x}_j, j \in \bar{J}_{\text{Б}} = (J_{\text{Б}} \backslash j_s) \cup j_0$ неотрицательны и им соответствует матрица условий

$$\bar{A}_{\text{Б}} = (A_j, \quad j \in \bar{J}_{\text{Б}}).$$

Покажем, что $\det \bar{A}_{\text{Б}} \ne 0$. Справедливо

Утверждение. *Пусть есть квадратная невырожденная матрица* $A_Б = (A_j, j \in J_Б), \det A_Б \ne 0$, *и обратная к ней матрица* $A_Б^{-1}$. *Рассмотрим матрицу* $\bar{A}_Б = (A_j, j \in \bar{J}_Б), \bar{J}_Б = (J_Б \backslash j_s) \cup j_0$, *получающуюся из* $A_Б$ *заменой столбца* A_{j_s} *на столбец* A_{j_0}. *Тогда*

1) матрица $\bar{A}_Б$ *невырождена тогда и только тогда, когда* $\alpha := e_s{}'A_Б^{-1}A_{j_0} \neq 0$, *где* $e_s = (e_s(i), i = 1, \dots, m)$, $e_s(i) = 0, i \neq s, e_s(s) = 1$.

2) если $\alpha \neq 0$, *то*

$$\bar{A}_Б^{-1} = A_Б^{-1} - A_Б^{-1}(A_{j_0} - A_{j_s})e_s' A_Б^{-1}/\alpha.$$

Подсчитаем число α для нашей матрицы $\bar{A}_Б$:

$$\alpha := e_s{}'A_Б^{-1}A_{j_0} = z_s$$

По построению (см. формулы подсчета θ_i, θ_0) имеем $z_s > 0$, следовательно, согласно Утверждению, имеем $\det \bar{A}_Б \neq 0$. Следовательно, вектор $\bar{x}$ — новый базисный план с новой базисной матрицей $\bar{A}_Б$ и новым базисным индексом $\bar{J}_Б = (J_Б \backslash j_s) \cup j_0$.

Описанный переход $(x, J_Б) \to (\bar{x}, \bar{J}_Б)$ от старого базисного плана x переходим к новому $\bar{x}$ называется симплексной итерацией. Последовательность таких итераций называется Симплекс-методом.

2.1.6 Алгоритм

Из предыдущего видно, что в вычислениях основную роль играет матрица $A_Б^{-1}$, обратная к $A_Б$ (по ней можно восстановить и соответствующий базисный план).

Опишем алгоритм в терминах этой матрицы.

Рассмотрим задачу (2.10), считая, что выполняется условие (2.11).

Для реализации симплекс-метода кроме исходных данных задачи (2.10) (векторов c, b и матрицы A) на каждой итерации необходимо знать следующие параметры:

- текущий базисный план $x = (x_j, j \in J)$ (достаточно знать только его базисные компоненты $x_j, j \in J_Б$);
- соответствующее плану x множество базисных индексов

$$J_Б = \{j_1, j_2, \dots, j_m\};$$

- $m \times m$ — матрицу $B = A_Б^{-1}$, обратную к базисной матрице $A_Б = (A_j, j \in J_Б)$.

Опишем общую итерацию симплекс-метода по шагам.

Шаг 1. Вычислим вектор потенциалов

$$u' = c_{\text{Б}}{}'B, \text{ где } c'_{\text{Б}} = (c_j, j \in J_{\text{Б}}),$$

и оценки

$$\Delta_j = u'A_j - c_j, j \in J_{\text{Н}} = J \backslash J_{\text{Б}}.$$

Шаг 2. Если $\Delta_j \geq 0, j \in J_{\text{Н}}$, то STOP: вектор $x^0 = x$ является оптимальным планом задачи (2.10). В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Выберем индекс $j_0 \in J_{\text{Н}}$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$. Построим вектор

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)' := BA_{j_0}.$$

Если $z_i \leq 0, i = 1, \ldots, m$, то STOP: задача (2.10) не имеет решения в силу неограниченности сверху целевой функции на множестве планов. В противном случае перейдем к шагу 4.

Шаг 4. Найдем минимум

$$\theta_0 = \min_{\substack{i = \overline{1, m}, \\ z_i > 0}} x_{j_i}/z_i$$

и выберем индекс $s, 1 \leq s \leq m$, для которого $z_s > 0$ и $x_{j_s}/z_s = \theta_0$.

Шаг 5. Построим новый базисный план $\bar{x} = (\bar{x}_j, j \in J)$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_{\text{Б}}$ по правилам

$$\bar{x}_j = 0, j \in J_{\text{Н}} \backslash j_0; \ \bar{x}_{j_0} = \theta_0;$$

$$\bar{x}_{j_i} = x_{j_i} - \theta_0 z_i; \ i = 1, ..., m,$$

$$\bar{J}_{\text{Б}} = (J_{\text{Б}} \backslash j_s) \cup j_0 = \{j_1, \ldots, j_{s-1}, j_0, j_{s+1}, \ldots, j_m\}.$$

Шаг 6. Вычислим матрицу $\bar{B}$, обратную к новой базисной матрице $\bar{A}_{\text{Б}} = (A_j, j \in \bar{J}_{\text{Б}})$, по формуле $\bar{B} = MB$, где матрица $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ отличается от единичной $m \times m-$матрицы только s-м столбцом и имеет вид

$$M = (e_1, ..., e_{s-1}, d_s, e_{s+1}, ..., e_m),$$

где

$$d_s = -(z_1, z_2, \ldots, z_{s-1}, -1, z_{s+1}, \ldots, z_m)'/z_s,$$

e_i — единичный m-вектор с единицей на i-м месте.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых плана $\bar{x}$, базиса $\bar{J}_Б$ и матрицы $\bar{B}$, обратной к новой базисной матрице $\bar{A}_Б$.

Замечание 2 *На шаге 3 выбирается индекс* $j_0 \in J_Н$, *для которого* $\Delta_{j_0} < 0$. *В общем случае существуют несколько индексов, удовлетворяющих этому условию. При численной реализации симплекс-метода для выбора* j_0 *можно использовать дополнительные "уточняющие"правила, например, следующие:*

а) $\Delta_{j_0} = \min \Delta_j,\ j \in J_Н,\ \Delta_j < 0,$ *либо*

б) $j_0 = \min\{j \in J_Н : \Delta_j < 0\}$.

Замечание 3 *На шаге 4 выбирается индекс* $j_s \in J_Б$ *или* $1 \le s \le m$, *для которого* $z_s > 0, x_{j_s}/z_s = \theta_0$. *В общем случае этот выбор может оказаться неоднозначным. Можно использовать дополнительные уточняющие правила, например, следующие:*

а) $s = \min\{i \in \{1, \dots, m\} : z_i > 0, x_{j_i}/z_i = \theta_0\}$ *либо*

б) $j_s = \min\{j_i \in J_Б : z_i > 0, x_{j_i}/z_i = \theta_0\}$.

Замечание 4 *В современных версиях симплекс-методах для нахождения вектора потенциалов* u *(см. шаг 1) и вектора* z *(см. шаг 3) решаются системы* $u'A_Б = c_Б{}'$ *и* $A_Б z = A_{j_0}$, *соответственно. Для эффективного решения последних используется* LU*-разложение базисной матрицы* $A_Б$.

Замечание 5 *Легко подсчитать, что приращение целевой функции при переходе от начального базисного плана* x *к новому базисному плану* $\bar{x}$ *равно:* $c'\bar{x} - c'x = \theta_0|\Delta_{j_0}|$. *По построению,* $\Delta_{j_0} < 0, \theta_0 \ge 0$. *Следовательно, при* $\theta_0 > 0$ *происходит "строгое улучшение"плана:* $c'\bar{x} > c'x$. *Из описания шага 4 видно, что в случае невырожденности начального базисного плана* $\{x, J_Б\}$ *всегда верно неравенство* $\theta_0 > 0$.

В случае, когда базисный план x (с базисом $J_Б$) является вырожденным, может реализоваться ситуация: $\theta_0 = 0$. При этом мы получаем $\bar{x} = x, \bar{J}_Б \ne J_Б$. В этом случае не происходит улучшения целевой функции, но итерация может оказаться полезной, так как изменяется базис и новый базис может быть ближе к оптимальному базису, чем старый.

2.2 Конечность симплекс-метода

Алгоритм называется конечным, если его реализация позволяет за конечное число операций (конечное время) построить оптимальный план.

Каждая итерация симплекс метода содержит конечное число операций. Следовательно, для доказательства конечности симплекс-метода достаточно показать конечность числа его итераций.

Каноническую задачу линейного программирования назовём невырожденной, если невырождены все её базисные планы.

Теорема 3 *Пусть задача линейного программирования имеет решение и является невырожденной. Тогда симплекс-метод находит оптимальный план за конечное число итераций, начиная процесс решения с любого начального базисного плана.*

Итерация $\{x, J_Б\} \to \{\bar{x}, \bar{J}_Б\}$ симплекс-метода называется невырожденной, если $c'\bar{x} > c'x$.

Теорема 4 *Симплекс-метод решает задачу линейного программирования за конечное число итераций, если в процессе его реализации не встречается вырожденных итераций.*

Теоремы 3 и 4 доказываются одинаково. Докажем их.

Из определения базисного плана следует, что базисный план $\{x, J_Б\}$ однозначно задаётся базисным множеством $J_Б$. Действительно, зная $J_Б$, соответствующий план $x = (x_Б, x_Н)$ строится по правилу: $x_Н = 0, x_Б = A_Б^{-1}b$.

Как следует из алгоритма симплекс-метода, его итерации ведутся на базисных планах

$$\{x^{(1)}, J_Б^{(1)}\}, \{x^{(2)}, J_Б^{(2)}\}, \ldots, \{x^{(k)}, J_Б^{(k)}\}, \ldots \tag{2.18}$$

Кроме того,по условиям теорем имеют место неравенства

$$c'x^{(1)} < c'x^{(2)} < \cdots < c'x^{(k)} < \ldots \tag{2.19}$$

Из приведенных соотношений следует, что ни один базис в последовательности (2.18) не может повториться дважды. Действительно, допустим, что $J_Б^{(i)} = J_Б^{(j)}$, где $i <$

j. Тогда $x^{(i)} = x^{(j)}$ и значит, $c'x^{(i)} = c'x^{(j)}$, где $i < j$. Однако, это противоречит (2.19). Значит в последовательности (2.18) все базисы $J_Б^{(i)}$ разные. По построению, $J_Б^{(i)} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $|J_Б^{(i)}| = m \leq n$, следовательно, различных базисов может быть только конечное число. Значит возможно только конечное число итераций. Теорема доказана.

При наличии вырожденных итераций при реализации симплекс-метода может возникнуть такая ситуация, когда начиная с некоторого вырожденного базисного плана $\{x,\ J_Б\}$ мы осуществляем последовательность вырожденных итераций

$$\{x,\ J_Б\} \to \{x,\ J_Б^{(1)}\} \to \{x,\ J_Б^{(2)}\} \to ...\{x,\ J_Б^{(s)}\}, \tag{2.20}$$

в которых меняются только базисы $J_Б^{(i)}$ базисного плана x, причем при некотором конечном $s > 1$ имеет место равенство $J_Б^{(s)} = J_Б$.

Очевидно, что если мы продолжим операции симплекс-метода исходя из $\{x,\ J_Б^{(s)}\}$, то опять получим ту же последовательность итерации (2.20) и т. д. Такое явление получило название зацикливания. Первоначально считалось, что зацикливание — крайне редкое явление. Однако позже было замечено, что вероятность возникновения зацикливания увеличивается с ростом размеров задачи. Кроме того, зацикливание является типичным явлением для задач ЛП, возникающих при аппроксимации задач целочисленного программирования. В связи с этим возникла необходимость в разработке специальных приемов борьбы с зацикливанием. К настоящему времени известно много таких приемов. Два из них описаны и обоснованы в []. Приведем один из них, называемый правилом Бленда.

В 1977 г. Р. Блэнд предложил очень простое правило предотвращения зацикливания в симплекс-методе. Это правило сводится к следующему.

При реализации итерации симплекс-метода на шаге 3 индекс $j_0 \in J_Н$, подлежащий вводу в новый базис, однозначно определяется по правилу

$$j_0 = \min\, j,\ j \in J_Н,\ \Delta_j < 0, \tag{2.21}$$

а на шаге 4 индекс $j_s \in J_Б$, подлежащий выводу из базиса, однозначно определяется соотношениями

$$j_s = \min_{i \in \Delta I} j_i, \quad \text{где } \Delta I := \{i \in \{1, ..., m\} : z_i > 0, x_{j_i}/z_i = \theta_0\}. \tag{2.22}$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 5 *При использовании дополнительных правил (2.21), (2.22) симплекс-метод для любой задачи линейного программирования (с заданным начальным базисным планом) за конечное число итераций строит оптимальный базисный план либо обнаруживает неограниченность сверху целевой функции на множестве планов.*

2.3 Первая фаза симплекс-метода

Рассмотрим исходную задачу линейного программирования в канонической форме

$$c'x \to \max, Ax = b, x \geq 0. \tag{2.23}$$

Все предыдущие утверждения и операции симплекс-метода были справедливы в предположении, что для задачи (2.23) выполнены условия

$$A) \qquad \text{rank } A = m \leq n,$$

$$B) \quad \text{ограничения задачи совместны,}$$

$$C) \quad \text{известен начальный базисный план.}$$

Понятно, что для произвольной задачи (2.23) эти условия могут нарушаться. Поэтому, прежде чем применять описанный симплекс-метод необходимо исходную задачу (2.23) привести к такому виду, для которого выполняются условия А)-С).

Проблема нахождения такой начальной информации может оказаться нетривиальной. Действительно, в общем случае по трудоемкости это проблема эквивалентна построению решения некоторой задачи линейного программирования. Для преодоления указанной трудности используется двухфазный симплекс-метод, общая схема которого состоит в следующем.

На первой фазе формируется вспомогательная задача ЛП, которая отличается от исходной задачи (2.23). Вспомогательная задача строится таким образом, что для нее выполняются условия А)-С). Анализ решения вспомогательной задачи позволяет:

1) определить, совместны ли ограничения исходной задачи (2.23);

2) проверить, выполняется ли условие A) для исходной задачи (2.23) и в случае его нарушения обнаружить линейно зависимые основные ограничения и удалить их из условий задачи;

3) в случае совместности ограничений задачи (2.23) построить для нее начальный базисный план x и базис $J_Б$.

Если анализ решения вспомогательной задачи закончился построением начального базисного плана для исходной задачи, то переходим ко второй фазе алгоритма. Вторая фаза состоит в решении исходной задачи описанным выше симплекс-методом, при этом в качестве начальной используется информация, полученная на первой фазе. Опишем подробнее первую фазу алгоритма.

Без ограничения общности будем считать, что в задаче (2.23) вектор b удовлетворяет неравенству $b \geq 0$. (Если это условие нарушается, то для того, чтобы добиться выполнения этого условия, достаточно умножить правую и левую части раденств с $b_i < 0$ на -1.)

Тогда задачу первой фазы можно записать в виде

$$-e'x_u \to \max_{x, x_u}, \ Ax + Ex_u = b, \ x \geq 0, \ x_u \geq 0, \tag{2.24}$$

где $x = (x_j, \ j \in J)$ — исходные переменные, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_u = x(J_u)$, $J_u = \{n + 1, n + 2, \ldots, n + m\}$ — m-вектор искусственных переменных, $E \in R^{m \times m}$ — единичная матрица, $e = (1, 1, 1, \ldots, 1) \in R^m$.

Легко проверить, что вектор (x, x_u) с компонентами

$$x = x(J) = 0, \quad x_u = x(J_u) = b \geq 0 \tag{2.25}$$

является базисным планом задачи (2.24) с базисом

$$J_Б = J_u \subset J \cup J_u.$$

и базисной матрицей $A_Б = E$.

Решим задачу (2.24) симплекс-методом, описанным выше, используя в качестве начального базисный план (2.25). Поскольку целевая функция задачи (2.24) ограничена сверху на множестве ее планов ($-e'x_u \leq 0$), то через конечное число итераций будет построен оптимальный базисный план (x^*, x^*_u) задачи (2.24) и соответствующий ему базис $J^*_Б \subset J \cup J_u, \quad |J^*_Б| = m$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 *Ограничения исходной задачи (2.23) совместны тогда и только тогда, когда компонента x_u^* оптимального базисного плана задачи (2.24) равна нулю.*

Доказательство. **Необходимость.** Если x^* — план задачи (2.23), то $(x^*, x_u^* = 0)$ — решение задачи (2.24), так как этот вектор является планом задачи (2.24) и на нём значение целевой функции достигает максимального значения: оно равно нулю, а для любых других планов имеем $-e'x_u \leq 0$.

Достаточность. Очевидно, если $(x^*, x_u^* = 0)$ — решение задачи (2.24), то x^* — план задачи (2.23). Лемма доказана.

Решение задачи (2.24) симплекс-методом называется **первой фазой решения** задачи (2.23). После решения задачи (2.24) будут построены оптимальный базисный план (x^*, x_u^*) и базисная матрица $A_Б^*$ задачи (2.24).

Пусть задача (2.24) решена и в результате ее решения построены оптимальный базисный план (x^*, x_u^*) и базисная матрица $A_Б^*$ задачи (2.24).

Поведем анализ решения задачи первой фазы. Возможны следующие ситуации

а) $x_u^* \neq 0$;

б) $x_u^* = 0$, $J_Б^* \cap J_u = \varnothing$;

в) $x_u^* = 0$, $J_Б^* \cap J_u \neq \varnothing$.

В случае а) из леммы 1 следует, что исходная задача (2.23) не имеет решения, так как множество ее допустимых планов пусто.

В случае б) вектор x^* — базисный план с базисом $J_Б^* \subset J$ и базисной матрицей $A_Б^* = (A_j, j \in J_Б^*)$. Переходим ко второй фазе симплекс-метода, т.е к решению задачи (2.23) симплекс-методом, исходя из x^*, $J_Б^*$.

Исследуем случай в). Ясно, что вектор x^* является планом задачи (2.23), но множество $J_Б^*$ не является его базисом для задачи (2.23).

Попытаемся построить базис для плана x^* в задаче (2.23).

Пусть $J_Б^* = \{j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots, j_m\}$ и $j_k \in J_u$. Обозначим

$$A_j := e_{j-n},\ j \in J_u; \quad A_Б^* = (A_j,\ j \in J_Б^*);\ \ \alpha_j = e_k'(A_Б^*)^{-1}A_j, \quad j \in J \backslash J_Б^*.$$

Здесь e_i — единичный m-вектор с единицей на i-ом месте.

Возможны подслучаи:

1) $\exists j_0 \in J \backslash J^*_{\text{Б}},\ \alpha_{j_0} \neq 0;$

2) $\alpha_j = 0,\ j \in J \backslash J^*_{\text{Б}}.$

Если реализовался подслучай 1), то оптимальному плану (x^*, x^*_u) задачи (2.24) припишем новый базис

$$\bar{J}^*_{\text{Б}} = (J^*_{\text{Б}} \backslash j_k) \cup j_0. \tag{2.26}$$

Очевидно, что по построению, $\left|\bar{J}^*_{\text{Б}} \cap J_u\right| = |J^*_{\text{Б}} \cap J_u| - 1$. Снова проверяем, какая из ситуаций, б) или в), имеет место для оптимального плана (x^*, x^*_u) задачи (2.24) и нового базиса (2.26).

Подслучай 2) означает, что в исходной задаче (2.23) основное ограничение с индексом $i_0 := j_k - n \in I = \{1, ..., m\}$ является линейно зависимым с остальными основными ограничениями этой задачи. Множество планов задачи (2.23) не изменится, если мы удалим это ограничение, т.е. заменим множество индексов I на $\tilde{I} = I \backslash i_0$.

Для преобразованной задачи (2.23) вспомогательная задача первой фазы получится из задачи (2.24) после удаления ограничения с индексом $i_0 \in I$ и искусственной переменной $x^*_{j_k} = 0, \quad j_k \in J_u$, т.е. заменой множеств I и J_u на $\tilde{I} = I \backslash i_0$ и $\tilde{J}_u = J_u \backslash j_k$. Очевидно, что для новой задачи первой фазы вектор $(x^*_j,\ j \in J \cup \tilde{J}_u)$ является оптимальным базисным планом с базисом $\tilde{J}^*_{\text{Б}} = J^*_{\text{Б}} \backslash j_k$, для которого

$$\left|\tilde{J}^*_{\text{Б}}\right| = \left|\tilde{I}\right| = m - 1,\ \left|\tilde{J}^*_{\text{Б}} \cap \tilde{J}_u\right| = |J^*_{\text{Б}} \cap J_u| - 1.$$

Пусть $B := (A^*_{\text{Б}})^{-1}$ и $\bar{B} := (\bar{A}^*_{\text{Б}})^{-1}$, где $\bar{A}^*_{\text{Б}}$ — новая базисная матрица, соответствующая новым множествам $\tilde{I}, \tilde{J}^*_{\text{Б}}$. Она получается из $A^*_{\text{Б}}$ удалением строки с номером $(j_k - n)$ и k-го столбца. Тогда матрица $\bar{B}$ получается из известной матрицы B удалением из B k-ой строки и $(j_k - n)$-го столбца.

Для плана $(x^*_j,\ j \in J \cup \tilde{J}_u)$ и новых множеств $\tilde{I},\ \tilde{J}^*_{\text{Б}}, \tilde{J}_u$ вновь проверяем, какая из ситуаций, 2 или 3, имеет место. Ясно, что не более чем через m шагов из основных ограничений задачи (2.23) будут исключены все линейно зависимые ограничения и она будет сведена к задаче

$$\begin{aligned} &c'x \to \max, \\ &\bar{A}x = \bar{b}, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.27}$$

где $\bar{A} = (a_{ij},\ i \in \bar{I}, j \in J), \quad \bar{b} = (b_i,\ i \in \bar{I}), \quad \bar{I} \subset I, \quad rank\overline{A} = \bar{m} \leq |J|, \quad \bar{m} = \left|\bar{I}\right|$.

При этом для задачи (2.27) будет построен базисный план x^* с некоторым базисом $J_{\text{Б}} \subset J, \quad |J_{\text{Б}}| = \bar{m}$.

Дальнейшее решение задачи (2.27) осуществляем симплекс-методом, описанным в параграфе 1, используя в качестве начальных построений базисный план x^* с базисом $J_{\text{Б}}$.

Суммируя приведенные выше результаты, заключаем, что две фазы симплекс-метода позволяют за конечное число итераций:

1. обнаружить противоречивость ограничений;
2. исключить линейно зависимые равенства в ограничениях;
3. установить неограниченность целевой функции;
4. построить оптимальный базисный план;

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6 *Если задача (2.23) имеет оптимальный план, то она имеет и оптимальный базисный план.*

Их теоремы 6 следует справедливость утверждения

Утверждение. *Среди оптимальных планов задачи линейного программирования всегда есть оптимальный базисный план.*

Следовательно, поиск решения задачи линейного программирования среди базисных планов оправдан.

Замечание 6 *Задача линейного программирования может иметь несколько оптимальных планов. Если задача линейного программирования имеет более двух оптимальных планов, то среди ее оптимальных планов есть базисные и не базисные.*

В заключение отметим, что к настоящему времени, кроме симплекс-метода, разработано много других эффективных методов решения задач линейного программирования. Наиболее популярными среди них являются двойственный симплекс метод и метод внутренней точки. Описания этих и других метод решения задач линейного программирования можно найти в работах [ ].

Список литературы

[1] Ашманов С.А. Линейное программирование: Учеб. пособие. М. : Наука, 1981.

[2] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации: Учеб. пособие. Мн.: Изд-во БГУ, 1981.

[3] Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столяров Е.М. Методы оптимизации: Учеб. пособие. М.: Наука, 1978.

[4] Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Физматмет, 2000. 264 с.

[5] Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. Spriger-Verlag New York, 1999. 636 p.

[6] Гасс С. Линейное программирование. М.: Физматиз, 1961. 304 с.

[7] Данциг Д. Линейное программирование, его обобщения и применения Издательство: М., Прогресс Год: 1966

[8] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

[9] Evtushenko Yu., Zhadan V., “Stable barrier-projection and barrier-newton methods in linear programming”, Comput. Optimizat. and Appl., 3 (1994), 289–304

3 Транспортные задачи

3.1 Сетевая транспортная задача

Транспортными задачами линейного программирования называются математические модели разнообразных прикладных задач по оптимизации перевозок. К ним сводятся многочисленные задачи, имеющие другую физическую природу.

В данном параграфе для решения транспортных задач в сетевой и матричной формах строится метод потенциалов как реализация прямого симплекс-метода, детально учитывающая специфику новых задач.

3.1.1 Сеть. Поток. Сетевая транспортная задача

Рассмотрим множество $I = \{1, 2, \dots, n\}$ элементов, которое называется узлами.

Предположим, что некоторые пары узлов $i \in I$, $j \in I$ упорядочены. Такую пару обозначим символом (i, j) и назовем дугой с началом i и концом j.

Множество дуг, определенных на множестве $I \times I$, обозначим через U:

$$U \subset \{(i, j) : \ i \in I, j \in I\}.$$

Определение 3 *Совокупность $S = \{I, U\}$ называется (ориентированной) сетью.*

На рисунке узлы будут обозначаться точками, дуги (i, j) — линиями со стрелкой из i в j.

Каждому узлу i припишем число a_i — интенсивность узла. При $a_i > 0$ узел i будем называть узлом производства (источником); при $a_i < 0$ узел i будем называть узлом потребления (стоком); при $a_i = 0$ узел i — транзитный узел (нейтральный).

При изображении сети на рисунке возле узла i указывается величина $|a_i|$ со стрелкой: стрелка, входящая в узел, указывает на узел производства, а стрелка, выходящая из узла, — на узел потребления.

Каждой дуге $(i, j) \in U$ припишем неотрицательное число x_{ij} — дуговой поток (поток по дуге (i, j)).

Обозначим через

$$I_i^+ = I_i^+(U) = \{j \in I : \ \exists (i, j) \in U\}$$

$$I_i^- = I_i^-(U) = \{j \in I : \ \exists (j, i) \in U\}$$

множество узлов, которые соединены с узлом i дугами из U, начинающимися в i (это узлы I_i^+) или оканчивающимися в i (это узлы I_i^-).

Говорят, что в узле i выполнено условие баланса, если имеет место равенство

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i, \tag{3.1}$$

т.е. количество (продукта) потока, поступающее в узел i и произведенного в нем, равно количеству (продукта) потока, выходящего из узла i и потребленного в нем.

Определение 4 *Совокупность* $x = \{x_{ij};\ (i,j) \in U\}$ *дуговых потоков называется потоком на сети* $S = \{I, U\}$, *если она удовлетворяет условиям баланса (3.1) в каждом узле* $i \in I$; *и* $x_{ij} \geq 0$, $(i,j) \in U$.

Число $\sum\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}$, где $c_{ij},\ (i,j) \in U$, — заданные числа, называется стоимостью потока x.

Сетевая транспортная задача (транспортная задача в сетевой форме), именуемая также задачей о потоке минимальной стоимости, состоит в поиске оптимального потока $x^0 = \{x^0_{ij};\ (i,j) \in U\}$ (потока минимальной стоимости), который доставляет решение задаче

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{3.2}$$

$$\sum_{i\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{i\in I_j^-} x_{ji} = a_i,\ i \in I;\ x_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in U.$$

Целевая функция задачи (3.2) и все функции ограничений линейны относительно переменных x_{ij}, $(i,j) \in U$, следовательно, задача (3.2) является задачей линейного программирования. Но задача (3.2) — специальная задача линейного программирования: при ее сведении к канонической форме получается большая матрица условий, которая состоит из ± 1 и большого количества нулей. Поэтому сводить задачу (3.2) к общей задаче линейного программирования в канонической форме и решать ее симплекс-методом не целесообразно. Мы предложим другой метод — метод потенциалов, который являясь методом симплексного типа, максимально учитывает специфику задачи.

Задачу (3.2) можно записать в виде

$$\bar{c}'x \to \max,$$

$$Ax = b,\ x \geq 0,$$

где $x = (x_{ij},\ (i,j) \in U)$, $\bar{c} = -(c_{ij},\ (i,j) \in U)$, $b = (b_i = a_i,\ i \in I)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times|U|}$, $A = (A_{ij}, (i,j) \in U)$, $A_{ij} \in \mathbb{R}^n$, $n = |I|$, $A_{ij} = (a_{ij}(k),\ k \in I)$, $a_{ij}(i) = 1$, $a_{ij}(j) = -1$, $a_{ij}(k) = 0$, $k \in I \backslash \{i,j\}$.

3.1.2 Базисный поток

Введем необходимые понятия из теории сетей.

Дугу (i, j) без ориентации назовем ребром с *граничными узлами* i, j и будем обозначать следующим образом $\{i, j\}$.

Узел сети называется *висячим*, если он граничный узел для единственного (висячего) ребра.

Последовательность различных ребер

$$\{i_1, i_2\},\ \{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{k-1}, i_k\}, \tag{3.3}$$

в которой соседние ребра имеют общие граничные узлы, называется (простой) *цепью*, соединяющей узлы i_1 и i_k.

Если в последовательности узлов $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ этой цепи нет одинаковых, то цепь будем называть элементарной (простой).

Выберем направление движения вдоль цепи. Если это направление совпадает с направлением $i \to j$ дуги (i, j), соответствующей ребру $\{i, j\}$, то дуга (i, j) называется *прямой*. Дуга с противоположным направлением называется *обратной*.

Сеть S называется *связной*, если любые два ее узла можно соединить цепью.

В дальнейшем будем предполагать, что сеть S связная, ибо в противном случае исходная транспортная задача (3.2) распадается на две независимые транспортные задачи меньшей размерности.

Цепь (3.3) с совпадающими узлами i_1 и i_k называется *циклом*.

Лемма 2 *Связанная цепь $S = \{I, U\}$ без циклов либо содержит висячее ребро, либо $|I| = 1$, $|U| = 0$.*

Лемма 3 *Пусть сеть $S = \{I, U\}$ связная. Удаление висячего ребра вместе с висячим узлом или ребра из цикла не нарушает связности сети.*

Определение 5 *Связная сеть $S = \{I, U\}$ называется деревом, если $|I| = |U| + 1$.*

Лемма 4 *Связная сеть S является деревом тогда и только тогда, когда она не содержит циклов.*

Лемма 5 *Каждая пара узлов дерева связана единственной цепью.*

Определение 6 *Для сети $S = \{I, U\}$ сеть $S^* = \{I, U^*\}$, где $U^* \subset U$, называется частичной сетью.*

Определение 7 *Частичная сеть, являющаяся деревом, называется деревом сети.*

Лемма 6 *Пусть $S^* = \{I, U^*\}$ — дерево сети. При любой дуге $(i, j) \in U \backslash U^*$ частичная сеть $S_1 = \{I, U^* \cup (i, j)\}$ содержит ровно один цикл.*

Перейдем к основному вопросу пункта. В симплекс-методе в качестве базиса используется полная система линейно независимых векторов из множества векторов $A_j \in \mathbb{R}^m, j \in J = \{1, ..., n\}$.

Напомним: в симплекс-методе, при условии, что $\operatorname{rank} A = m$, множество $J_Б \subset J$, $|J_Б| = m$, является базисным, если $\det A_Б \neq 0$, $A_Б = (A_j, j \in J_Б)$, т.е. векторы условий $A_j, j \in J_Б$, образуют полную систему линейно независимых векторов в системе векторов $A_j, j \in J$. По определению это означает следующее:

1. уравнение $\sum\limits_{j \in J_Б} A_j x_j = 0$ имеет только нулевое решение $x_j = 0, j \in J_Б$,
2. при $\forall j_0 \in J \setminus J_Б$, система $\sum\limits_{j \in J_Б \cup j_0} A_j x_j = 0$ имеет ненулевое решение $x_j \not\equiv 0,\ j \in J_Б \cup j_0$.

При определении базисного множества $J_Б$ первым способом (т.е. с помощью условия $\det A_Б \neq 0$) мы обязательно должны предположить, что $rankA = m$. При определении базиса вторым способом (т.е. через полную систему линейно независимых векторов) нам не надо предполагать, что $rankA = m$. При использовании этого способа может быть, что $rankA < m$. Последний случай реализуется в транспортной задаче.

Конечно, можно перейти к эквивалентной задаче с $\bar{A}x = \bar{b}$, $\bar{A} \in \mathbb{R}^{\bar{m} \times n}$, $\bar{m} < m$, $rank\bar{A} = \bar{m}$. Но для транспортной задачи этот путь нецелесообразен, так как нарушается специальная структура матрицы A. Поэтому в транспортной задаче при введении базиса воспользуемся вторым способом определения базиса.

Определение 8 *Множество дуг $U_Б \subset U$ сети $S = \{I, U\}$ называется полным, если система*

$$\sum_{j \in I_i^+(U_Б)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_Б)} x_{ji} = 0,\ i \in I; \tag{3.4}$$

имеет только нулевое решение $x_{ij} = 0,\ j \in U_Б$, *а для любой дуги* $(i_0, j_0) \in U \setminus U_Б$ *система*

$$\sum_{j \in I_i^+(U_Б \cup (i_0, j_0))} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_Б \cup (i_0, j_0))} x_{ji} = 0,\ i \in I, \tag{3.5}$$

имеет ненулевое решение $x_{ij} \not\equiv 0$, $(i,j) \in U_Б \cup (i_0, j_0)$.

Теорема 7 *(Критерий полноты множества дуг). В сети* $S = \{I, U\}$ *множество* $U_Б \subset U$ *является полным тогда и только тогда, когда* $S_Б = \{I, U_Б\}$ *— дерево сети.*

Определение 9 *Поток* $x = \{x_{ij}, (i,j) \in U\}$ *называется базисным с базисом* $U_Б \subset U$, *если* $x_{ij} = 0$, $(i,j) \in U_Н$, $U_Н = U \backslash U_Б$, *и* $U_Б$ *— полное множество дуг сети* $S = \{I, U\}$.

Множество $U_Б$ *называется множество базисных дуг, множество* $U_Н = U \setminus U_Б$ *— множеством небазисных дуг.*

Дуговые потоки x_{ij}, $(i,j) \in U_Б$ *назовем базисными дуговыми потоками, а дуговые потоки* x_{ij}, $(i,j) \in U_Н$ *— небазисными дуговыми потоками.*

Определение 10 *Базисный поток* $\{x, U_Б\}$ *называется невырожденным, если*

$$x_{ij} > 0,\ (i,j) \in U_Б.$$

3.1.3 Критерий оптимальности

Пусть $\{x, U_Б\}$ — базисный поток, x — поток, $U_Б \subset U$ — множество базисных дуг.

Каждому узлу $i \in I$ сети $S = \{I, U\}$ применим число u_i (потенциал узла), так чтобы совокупность $u_i,\ i \in I$, удовлетворяла системе уравнений

$$0 = u_i - u_j - c_{ij}, \qquad (i,j) \in U_Б. \tag{3.6}$$

Покажем, что искомые числа существуют. Выберем любой узел $i_1 \in I$, положим $u_{i_1} = 0$. Согласно **лемме 5** каждый узел $i \in I$ можно соединить с i_1 единственной цепью $\{i_1, i_2, \dots, i_s, i\}$ из дуг дерева $S_Б = \{I, U_Б\}$. Рассматривая уравнение (3.6) вдоль (от i_1 до i) дуг этой цепи, определим потенциал u_i узла i по рекуррентным правилам: Например, зная u_{i_k}, находим $u_{i_{k+1}}$ следующим образом

$$u_{i_{k+1}} = \begin{cases} u_{i_k} - c_{i_k i_{k+1}}, & \text{если } (i_k, i_{k+1}) \text{ — прямая дуга}, \\ u_{i_k} + c_{i_{k+1} i_k}, & \text{если } (i_{k+1}, i_k) \text{ — обратная дуга}, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, ..., s, s+1, \; i_{s+1} = i.$$

Имея потенциалы узлов, найдем оценки небазисных дуг по правилу

$$\Delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij}, \quad (i,j) \in U_{\text{н}}. \tag{3.7}$$

Можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 8 *(Критерий оптимальности) Неравенства*

$$\Delta_{ij} \leq 0, \qquad (i,j) \in U_{н}, \tag{3.8}$$

достаточны, а в случае невырожденности необходимы для оптимальности базисного потока x.

Таким образаом, проверка критерия оптимальности сводится к следующим операциям:

- по правилам (3.6), используя множество $U_{\text{Б}}$, находим потенциалы узлов $u_i, i \in I$;
- зная потенциалы узлов, находим оценки Δ_{ij}, $(i,j) \in U_{\text{н}}$, небазисных дуг согласно (3.7);
- проверяем неравенства (3.8) .

3.1.4 Итерация метода потенциалов

Пусть задан начальный базисный поток $\{x, U_{\text{Б}}\}$.

1) Найдем потенциалы u_i, $i \in I$, узлов сети из следующей системы

$$0 = u_i - u_j - c_{ij}, \qquad (i,j) \in U_{\text{Б}}, u_1 = 0.$$

2) Имея потенциалы узлов, найдем оценки небазисных дуг по правилу

$$\Delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij}, \quad (i,j) \in U_{\text{н}}.$$

3) Если выполняются соотношения (3.8), т.е.

$$\Delta_{ij} \leq 0, \quad (i,j) \in U_{\text{н}},$$

то STOP. Согласно критерию оптимальности, текущий поток x является оптимальным.

Если соотношения (3.8) нарушаются, то переходим к шагу 4).

4) Найдем небазисную дугу $(i_0, j_0) \in U_{\text{н}}$, для которой $\Delta_{i_0 j_0} > 0$.

Рассмотрим частичную сеть $S_1 = \{I, U_{\text{Б}} \cup (i_0, j_0)\}$. Согласно Лемме 6, в данной частичной сети существует единственный цикл, причем дуга (i_0, j_0) принадлежим этому циклу. Обозначим через $U_{\text{цикл}} \subset U_{\text{Б}} \cup (i_0, j_0)$ дуги этого цикла. Зададим направления обхода по этому циклу, считая дугу (i_0, j_0) прямой. Тогда множество дуг цикла разобьется на множество прямых $U^+_{\text{цикл}}$ и обратных $U^+_{\text{цикл}}$ дуг

$$U^+_{\text{цикл}} \cup U^-_{\text{цикл}} = U_{\text{цикл}}.$$

Если $U^-_{\text{цикл}} = \emptyset$, то STOP. Задача не имеет решения, т.к. ее целевая функция не ограничена снизу на множестве допустимых потоков.

В случае $U^-_{\text{цикл}} \neq \emptyset$ переходим к шагу 5).

5) Находим число

$$\theta_0 = \theta_{i_* j_*} = x_{i_* j_*} = \min x_{ij}, \qquad (i,j) \in U^-_{\text{цикл}},$$

где $U^-_{\text{цикл}}$– обратные дуги цикла сети $S_1 = \{I, U_{\text{Б}} \cup (i_0, j_0)\}$.

6) Строим новый поток $\bar{x} = (\bar{x}_{ij},\ (i,j) \in U)$ по правилам

$$\overline{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{если } (i,j) \in U \setminus U_{\text{цикл}}; \\ x_{ij} + \theta_0, & \text{если } (i,j) \in U^+_{\text{цикл}}; \\ x_{ij} - \theta_0, & \text{если } (i,j) \in U^-_{\text{цикл}}. \end{cases}$$

7) Новый базис $\overline{U}_{\text{Б}}$, соотвествующий новому потоку $\bar{x}$, по правилу

$$\overline{U}_{\text{Б}} = (U_{\text{Б}} \backslash (i_0, j_0)) \cup (i_*, j_*).$$

Нетрудно показать, что пара $\{\bar{x}, \overline{U}_{\text{Б}}\}$ — базисный поток, на котором значение целевой функции не хуже, чем на начальном потоку $\{x, U_{\text{Б}}\}$.

Переход $\{x, U_{\text{Б}}\} \to \{\overline{x}, \overline{U}_{\text{Б}}\}$ называется итерацией метода потенциалов.

Метод потенциалов для невырожденных транспортных задач (все базисные потоки — невырожденные) является конечным.

3.1.5 Первая фаза метода потенциалов

Для построения начального базисного потока $\{x, U_{\text{в}}\}$ поступаем следующим образом. К сети $S = \{I, U\}$ добавляем искусственный узел $n+1$ с интенсивностью

$$a_{n+1} = \sum_{i \in I} a_i = 0.$$

Отметим, что условие

$$\sum_{i \in I} a_i = 0$$

является необходимым условием для существования потока на сети $S = \{I, U\}$.

Ко множеству дуг U добавим n искусственных дуг вида:

$$\begin{aligned} &(i, n+1), \quad \text{если } i \text{ — источник или нейтральный узел } (a_i \geq 0)\,, \quad i \in I; \\ &(n+1, i), \quad \text{если } i \text{ — сток } (a_i < 0)\,, \quad i \in I. \end{aligned}$$

Множество добавленных искусственных дуг обозначим через $U_{\text{и}}$.

Рассмотрим расширенную сеть $\bar{S} = \{\bar{I}, \bar{U}\}$, $\bar{I} = I \cup \{n+1\}$, $\bar{U} = U \bigcup U_{\text{и}}$.

В расширенной сети $\bar{S} = \{\bar{I}, \bar{U}\}$ множество искусственных дуг $U_{\text{и}}$ является базисным. Определим соответствующий ему базисный поток по правилу:
дуговые потоки вдоль базисных (искусственных) дуг положим равными абсолютным значениям интенсивностей узлов $i \in I$ исходной сети, которым эти дуги инцидентны, остальные дуговые потоки положим равными $x_{ij} = 0, (i,j) \in \bar{U} \setminus U_{\text{и}} = U$.

На расширенной сети $\bar{S} = \{\bar{I}, \bar{U}\}$ рассмотрим следующую задачу о потоке минимальной стоимости

$$\sum_{(i,j) \in U_{\text{И}}} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U})} x_{ji} = a_i, \ i \in \bar{I}, \tag{3.9}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ (i,j) \in \bar{U}.$$

Задача (3.9) и есть задача первой фазы.

Для задачи первой фазы начальный базисный поток уже построен. Целевая функция ограничена снизу:

$$\sum_{(i,j) \in U_{\text{И}}} x_{ij} \geq 0.$$

Следовательно, задача первой фазы имеет решение. Это решение можно найти методом потенциалов.

Пусть $x^* = \{x^*_{ij}, (i,j) \in U \cup U_{\text{И}}\}$ оптимальный базисный поток для задачи первой фазы с базисом $U^*_{\text{Б}} \subset U \cup U_{\text{И}}$. Проанализируем полученное решение.

1. Если $x^*_{ij} \not\equiv 0, (i,j) \in U_{\text{И}}$, то исходная задача не имеет решения.

2. Пусть $x^*_{ij} \equiv 0, (i,j) \in U_{\text{И}}$, и базисное множество дуг $U^*_{\text{Б}}$ содержит единственную искусственную дугу. Удалив эту дугу из $U^*_{\text{Б}}$, получим базисное множество $U_{\text{Б}}$ и соответствующий базисный поток $x = \{x^*_{ij}, (i,j) \in U\}$ для исходной сети. Процесс решения задачи (3.2) продолжаем стандартным методом потенциалов (вторая фаза), исходя из построенного начального базисного потока.

3. Пусть $x^*_{ij} \equiv 0$, $(i,j) \in U_{\text{И}}$, но базисное множество дуг $U^*_{\text{Б}}$ содержит более одной искусственной дуги. Тогда среди небазисных дуг $(i,j) \in U \backslash U^*_{\text{Б}}$ всегда найдется такая дуга (i_*, j_*), что цикл, построенный из базисных дуг $U^*_{\text{Б}}$ и дуги (i_*, j_*), содержит две искусственных дуги (предполагается, что сеть $S = \{I, U\}$– связная). Одну из этих искусственных дуг выводим из множества базисных дуг и вместо нее вводим дугу (i_*, j_*). Через конечное число шагов получаем базис, содержащий только одну искусственную дугу, т. е. приходим к случаю 2).

Важное свойство. Если все интенсивности a_i , $i \in I$ — целые числа, и стоимости потоков ограничены снизу, то среди оптимальных потоков существует целочисленный поток.

3.2 Матричная транспортная задача

3.2.1 Постановка задачи. Базисный план перевозок

Рассмотрим задачу о потоке минимальной стоимости на простой сети $S = \{I, U\}$, в которой множество узлов I состоит из двух непересекающихся подмножеств I_1 (источников) и I_2 (стоков): $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, а множество дуг U — из всевозможных дуг вида (i,j), $i \in I_1$, $j \in I_2$.

Если $|I_1|$, $|I_2|$ — большие, то пользоваться сетевым представлением неудобно. Используют матричную запись. Обозначим $I_1 = \{1, \dots, m\}$, $I_2 = \{1, \dots, n\}$. Пусть

a_i, $i \in I_1$ — объемы производства, b_i, $i \in I_2$ — объемы потребления, c_{ij} — стоимость перевозки из i в j единицы продукта, x_{ij} — объем перевозки по дуге (i, j).

Условия баланса в узлах $i \in I = I_1 \cup I_2$ принимают вид

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1, m}; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1, n}. \tag{3.10}$$

Совокупность чисел $x = (x_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$, удовлетворяющих (3.10) и неравенствам

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = \overline{1, m}, \qquad j = \overline{1, n}, \tag{3.11}$$

назовем планом перевозок.

Стоимость плана перевозок равна

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij} \to \min \tag{3.12}$$

Задача (3.10) - (3.12) — матричная транспортная задача.

Цель данного пункта — перенести методов потенциалов на матричную транспортную задачу. Вначале сформулируем теорему.

Теорема 9 *Для существования плана перевозок в матричной транспортной задаче необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие общего баланса*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{3.13}$$

Поскольку для любого плана перегрузок x выполняются соотношения

$$0 \leq x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j < \infty,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},$$

то множество планов перевозок компактно, следовательно, каждая линейная форма ограничена на этом множестве. Следовательно, условия (3.13) являются критерием существования оптимального плана перевозок.

Перейдем к введению базисного множества клеток и базисного плана перевозок. Рассмотрим $m \times n$-матрицу с элементами-клетками

$$\begin{pmatrix} (i, j),\ j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, m} \end{pmatrix},$$

которую удобно представлять в вибе таблицы

$(1,1)$	$(1,2)$	$\ldots$	$(1,n)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$\ldots$	$(2,n)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$(m,1)$	$(m,2)$	$\ldots$	(m,n)

Рис.

Цепью (простой, элементарной), соединающей клетку (i_1, j_1) с клеткой (i_k, j_k) называются последовательности вида:

$$\{(i_1, j_1),\ (i_1, j_2),\ (i_2, j_2), ..., (i_k, j_k)\}$$

или

$$\{(i_1, j_1),\ (i_2, j_1),\ (i_2, j_2), ..., (i_k, j_k)\},$$

в которых каждые соседние две клетки лежат в одной строке или в одном столбце, но ни в одной строке и ни в одном столбце нет трех последовательных клеток.

Цикл — это цепь, крайние клетки которой лежат в одной строке или в одном столбце. Если в таблице соседние клетки цепи соединить прямыми линиями (звеньями), то соседние звенья цепи всегда будут перпендикулярными.

Определение 11 *Множество клеток* $U_Б \subset U$ *называется* **полным**, *если* $|U_Б| = n + m - 1$ *и из его элементов невозможно составить ни одного цикла.*

Определение 12 *План перевозок* $x = (x_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ *называется* **базисным**, *если* $\exists\ U_Б \subset U$ *такое, что*

1) $U_Б$ *— полное множество,*

2) $x_{ij} = 0,\ (i,j) \in U_Н = U \backslash U_Б$.

Множество $U_Б$ *называемся множеством базисных клеток, множество* $U_Н$ *— множеством небазисных клеток.*

Определение 13 *Базисный план перевозок называется* **невырожденным**, *если*

$$x_{ij} > 0,\ (i,j) \in U_Б.$$

Свойства базисного множества клеток.

Рассмотрим $m \times n-$матрицу (см. Рис.) и базисное множество клеток $U_Б$. Имеют место следующие свойства.

1. В каждом столбце и в каждой строке есть базисная клетка.

2. Существует строка или столбец, в которой лежит только одна базисная клетка.

3. Добавление к базисному множеству $U_{\text{Б}}$ любой клетки $(i_0, j_0) \in U_{\text{Н}}$ создает единственный цикл во множестве $U_{\text{Б}} \cup (i_0, j_0)$.

4. Каждую пару из строк и столбцов можно соединить единственной цепью из элементов $U_{\text{Б}}$.

5. Если $U_{\text{Б}}$ — базисное множество, то базисный поток восстанавливается следующим образом:

   (a) полагаем $x_{ij} = 0,\ (i, j) \in U_{\text{Н}}$.

   (b) ищем базисную клетку (i_1, j_1), единственную в строке i_1 (в столбце j_1).

   (c) полагаем $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ $(x_{i_1 j_1} = b_{j_1})$.

   (d) обьем b_{j_1} заменяем на $b_{j_1} - x_{i_1 j_1}$ $(a_{i_1}$ на $a_{i_1} - x_{i_1 j_1})$ и строку i_1 (столбец j_1) исключаем из рассмотрения.

   (e) с уменьшенной таблицей повторяем операции (5a)-(5d).

3.2.2 Метод минимального элемента

Для матричной транспортной задачи существует несколько способов построения начального базисного плана перевозок. Приведем один из них, известный как метод минимального элемента

Среди чисел $c_{ij},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$, найдем минимальное $c_{i_1 j_1}$. Положим

$$x_{i_1 j_1} = \min\{a_{i_1}, b_{j_1}\}.$$

Если $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ $(x_{i_1 j_1} = b_{i_1})$, то исключаем из рассмотрения строку i_1 (столбец j_1), а число b_{j_1} (a_{i_1}) заменяем на $b_{j_1} - x_{i_1 j_1}$ $(a_{j_1} - x_{i_1 j_1})$. С уменьшенной таблицей повторяем описанные выше операции.

Через конечное число $p,\ p \leq n + m - 1$, шагов будут вычеркнуты все строки и столбцы нашей матрицы и найдены числа $x_{i_k j_k},\ k = \overline{1, p}$, и множество клеток $U_* := \{(i_k, j_k), k = \overline{1, p}\}$.

Для остальных клеток положим $x_{ij} = 0$, $(i, j) \in U \backslash U_*$. Легко убедиться, что построенная совокупность $x = (x_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ — план перевозок, а клетки множества U_* не содержат циклов.

Если $p = m + n - 1$, то множество U_* будет полным. Следовательно, $\{x, U_\text{Б}\}$, где $U_\text{Б} = U_*$, — базисный план перевозок.

Если $p < m + n - 1$, то множество U_* необходимо дополнить $p_0 := m + n - 1 - p$ клетками до полного множества. Это можно сделать следующим образом.

Положим $U_*^0 = U_*$.

Пусть для $k, 0 \leq k < p_0$, найдено множество U_*^k, в котором $p + k$ клеток, которые не содержат цикла. Найдем клетку (она обязательно найдется) $(i_*, j_*) \in U \setminus U_*^k$, такую, что множество $U_*^k \cup (i_*, j_*)$ не содержит циклов. Полагаем $U_*^{k+1} = U_*^k \cup (i_*, j_*)$, заменяем k на $k + 1$ и повторяем описанные выше операции.

Очевидно, что через p_0 шагов будет построено множество $U_*^{p_0}$, в котором $m+n-1$ клеток и эти клетки не образуют циклов. Следовательно, $\{x, U_\text{Б}\}$, где $U_\text{Б} = U_*^{p_0}$, — базисный план перевозок.

3.2.3 Метод потенциалов для матричной транспортной задачи

Пусть $\{x, U_\text{Б}\}$ — базисный план перевозок. Общая итерация метода потенциалов для матричной транспортной задачи состоит из следующих шагов.

1. Некоторой произвольной строке i_1 (столбцу j_1) припишем потенциал u_{i_1} (v_{j_1}).

   Нетрудно показать, что уравнение потенциалов

   $$u_i + v_j = c_{ij}, \; (i, j) \in U_\text{Б},$$

   позволяет найти (однозначно) остальные потенциалы, $u_i, \; i = \overline{1, m}, \; v_j, \; j = \overline{1, n}$.

2. Зная потенциалы $u_i, \; i = \overline{1, m}, \; v_j, \; j = \overline{1, n}$, вычислим оценки

   $$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \; (i, j) \in U_\text{н}.$$

3. Неравенства

   $$\Delta_{ij} \leq 0, \; (i, j) \in U_\text{н}, \tag{3.14}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности базисного плана перевозок $\{x, U_{\text{Б}}\}$.

Если (3.14) выполняется, то $STOP : x^0 = x$ — оптимальный план перевозок.

4. Предположим, что (3.14) не выполняется. Найдем $(i_0, j_0) \in U_{\text{н}}$, такую что

$$\Delta_{i_0 j_0} > 0.$$

Поскольку в матричной транспортной задаче целевая функция ограничена снизу, то в матричной транспортной задаче не может реализовываться ситуация, когда целевая функция $\to$ -∞.

5. С помощью клетки $(i_0 j_0)$ и $U_{\text{Б}}$ строим единственный цикл. Обозначим через $U_{\text{цик}}$ клетки этого цикла. Обойдем этот цикл, начиная горизонтальное движение с клетки (i_0, j_0).

   Среди перевозок, лежащих на концах горизонтальных звеньев этого цикла (аналог обратных дуг) выберем наименьшую:

$$\theta^0 = \theta_{i_* j_*} = x_{i_* j_*} = \min x_{ij},\ (i, j) \in U^{\text{гр}}_{\text{цик}}.$$

   Здесь $U^{\text{гр}}_{\text{цик}}$ — клетки из $U_{\text{цик}}$, лежащие на концах горизонтальных звеньев этого цикла.

   Для невырожденного базисного плана перевозок $\theta^0 > 0$.

6. Строим новый план перевозок по следующим правилам.

   (a) К перевозкам, лежащим на концах вертикальных звеньев из $U_{\text{цикл}}$ добавляем число θ^0;

   (b) от перевозок, лежащих на концах горизонтальных звеньев , вычитаем число θ^0;

   (c) остальные перевозки не меняем.

7. Новому плану перевозок приписываем новый базис

$$\overline{U}_{\text{Б}} = (U_{\text{Б}} \backslash (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0).$$

Новый план перевозок и множество $\overline{U}_{\text{Б}}$ образуют новый базисный план перевозок. Исходя из него переходим к новой итерации.

3.3 Потоки в сетях

Популярность сетевых оптимизационных моделей, которые обычно являются частными случаями моделей ЛП, можно объяснить прежде всего следующими причинами.

Часто они относятся к задачам распределения продукции. Следовательно, модели этого класса имеют экономическую интерпретацию и могут найти применение во многих промышленных фирмах и предприятиях. Кроме того, математическая структура сетей идентична структуре других оптимизационных моделей, на первый взгляд не имеющих с ними ничего общего. Однако указанные две причины не могут служить основанием для выделения сетевых моделей в качестве предмета специального изучения.

Важнейшей причиной, обусловливающей целесообразность такого выделения, являются особенности математических характеристик сетевых моделей. Используя эти особенности, можно существенно повысить эффективность процесса отыскания оптимальных решений задач, которые удаётся описать на «сетевом языке». В реальных примерах сетевые модели часто содержат тысячи переменных и сотни ограничений. В связи с этим применение эффективных методов становится не только выгодным, но просто необходимым.

Наконец, исследуя сети, можно убедиться, что разнообразные, на первый взгляд, совершенно непохожие оптимизационные модели допускают применение общего метода, что, несомненно, обеспечивает существенные преимущества.

Рассмотрим примеры прикладных задач, имеющих сетевую форму, и обсудим методы их решения.

3.3.1 Классическая транспортная задача (в матричной форме)

Имеется n пунктов производства некоторого (одного) продукта. Обозначим через a_i объём производства продукта в i-м пункте производства, $i = \overline{1, n}$. Имеется m пунктов потребления этого продукта. Обозначим через b_j объём потребления продукта в j-м пункте потребления, $j = \overline{1, m}$.

Перевозка единицы продукции из i-го пункта производства в j-й пункт потребления стоит c_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $\quad j = \overline{1, m}$. Требуется составить такой план перевозок продукта от пунктов производства в пункты потребления, чтобы:

1. вывести весь продукт из каждого пункта производства;

   удовлетворить спрос каждого пункта потребления;

2. минимизировать общую стоимость перевозок.

Обозначим через x_{ij} объём продукта, перевозимый из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Математическая модель задачи состоит в следующем: найти такой план перевозок ($x = x_{ij},\ i = \overline{1,n}\ ,\ j = \overline{1,m}$), чтобы

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{3.15}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,n}; \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{3.16}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}. \tag{3.17}$$

Иногда в условия задачи добавляют ещё одно требование: объём перевозки продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления не должен превышать заданного числа d_{ij}. В этом случае ограничение (3.17) заменяется ограничением

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}. \tag{3.18}$$

Задача (3.15) – (3.17) и метод её решения (метод потенциалов) были рассмотрены в подразделе 3.2. Метод решения задачи (3.15), (3.16), (3.18) легко получить из метода решения задачи (3.15) – (3.17), зная правила симплекс-метода для задачи ЛП с двухсторонними ограничениями на переменные, смю [4].

3.3.2 Сетевая модель транспортной задачи (задача о потоке минимальной стоимости).

Большое значение имеет обобщение классической транспортной задачи путём включения в неё случаев, когда некоторые пункты являются транзитными.

Имеется n пунктов $i \in I = \{1,2,\ldots,n\}$, которые связаны между собой системой дорог, которую удобно представлять в виде набора пар

$$(i,j) \in \ U \subset \{\,(i,j)\,,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\,\}.$$

Если пара $(i,\, j) \in U$, то это означает, что есть дорога из i в j. Но это ещё не означает, что есть дорога из j в i. Для существования такой дороги надо, чтобы существовала дуга $(j,\, i) \in U$!

Все пункты $i \in I$ делятся на непересекающиеся три группы:

$$I = I_{\text{пр}} \bigcup I_{\text{потр}} \bigcup I_{\text{тр}},$$

где $i \in I_{\text{пр}}$ – пункты производства; обозначим через $a_i > 0$ объёмы производства в этих пунктах;

$i \in I_{\text{потр}}$ – пункты потребления; обозначим через $a_i < 0$ объёмы потребления в этих пунктах;

$i \in I_{\text{тр}}$ – транзитные пункты, для них $a_i = 0$.

Числа a_i, $i \in I$, называются интенсивностями узлов $i \in I$.

Обозначим через c_{ij}, $(i,\, j) \in U$, стоимость перевозки единицы продукции по дороге (i, j) из i в j. Требуется так организовать перевозки от пунктов производства к пунктам потребления, чтобы:

1. для каждого пункта соблюдалось условие баланса:

   – для пункта производства – сумма произведённого продукта плюс сумма введённого продукта равны сумме вывезенного продукта;

   – для пункта потребления – сумма ввезенного продукта равна потреб-

   лённому продукту плюс сумма вывезенного продукта;

   – для транзитного пункта – сумма ввезённого продукта равна сумме вывезенного продукта;

2. суммарная стоимость всех перевозок была минимальна.

Обозначим через x_{ij} объём перевозки по дуге (i, j). Тогда математическая модель задачи имеет вид

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{3.19}$$

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I, \tag{3.20}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U. \tag{3.21}$$

К сформулированной выше задаче можно добавить ещё одно условие: объём перевозки по дороге (i, j) не должен превышать числа d_{ij}. Тогда ограничение (3.21) заменяется на ограничение

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (i, j) \in U. \tag{3.22}$$

Задача (3.19), (3.20), (3.22) называется задачей о потоке минимальной стоимости с ограничениями на пропускные способности дуг. Методы решения задачи (3.19) – (3.21) рассмотрены в подразделе 3.1, см. также работы [1, 2, 3, 4]. Эти методы легко обощаются на задачи вида (3.19) – (3.20), (3.22).

3.3.3 Многопродуктовая транспортная задача

В задачах, описанных выше, речь шла о перевозках одного вида продукта из пунктов производства в пункты потребления. Можно рассматривать аналогичные задачи, в которых речь идёт о нескольких видах продуктов. Рассмотрим двухпродуктовую задачу.

Пусть есть пункты $i \in I$, связанные сетью дорог $(i, j) \in U$. Каждая дорога $(i, j) \in U$ имеет ограниченную пропускную способность d_{ij}, $(i, j) \in U$.

Для каждого пункта $i \in I$ заданы два числа a_i, b_i:

a_i – интенсивность узла (пункта) i по первому продукту (если $a_i > 0$, то первый продукт производится в i; если $a_i < 0$, то первый продукт потребляется в i; если $a_i = 0$, то пункт i – транзитный по первому продукту);

b_i – интенсивность узла (пункта) i по второму продукту (если $b_i > 0$, то второй продукт производится в i; если $b_i < 0$, то второй продукт потребляется в i, если $b_i = 0$, то i – транзитный пункт по второму продукту).

Заданы числа c_{ij}, f_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции первого и второго видов по дуге $(i, j) \in U$. Требуется найти план перевозок продукции первого и второго вида, такой, что:

1) для каждого узла выполняются условия баланса по продукции первого и второго видов;

2) суммарный объём перевозок продукции первого и второго видов по дуге (i, j) не превосходит её пропускной способности d_{ij};

3) суммарная стоимость перевозок продукции двух видов минимальная.

Обозначим через x_{ij} и y_{ij} объёмы перевозок первого и второго видов продукции по дуге (i,j). Математическая модель двухпродуктовой транспортной задачи имеет вид

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in U} f_{ij}y_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i\in I,$$

$$\sum_{j\in I_i^+} y_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} y_{ji} = b_i, \quad i\in I;$$

$$x_{ij}\geq 0, \quad y_{ij}\geq 0, \quad x_{ij}+y_{ij}\leq d_{ij}, \quad (i,j)\in U.$$

Последнее ограничение кажется малосущественным, однако именно оно значительно усложняет решение последней задачи по сравнению с аналогичной однопродуктовой задачей (3.19), (3.20), (3.22). Методы решения двухпродуктовой транспортной задачи описаны в [3].

3.3.4 Задача о построении дерева кратчайших путей из заданного узла s

Рассмотрим сеть (ориентированную) $S\{I,U\}$ со множеством узлов I и дуг U. Каждой ориентированной дуге (i,j) поставим в соответствие пару точек $\{i,j\}$, которую назовем ребром с граничными узлами i и j. Последовательность различных ребер

$$\{i_1,i_2\},\ \{i_2,i_3\},...,\{i_{k-1},i_k\} \tag{3.23}$$

называется (простой) цепью, соединяющей узлы i_1 и i_k . Пусть данная цепь рассматривается в направлении от узла i_1 к узлу i_k. Если это направление совпадает с направлением $i\to j$ дуги (i,j) в этой цепи, то дуга (i,j) называется *прямой*. Дуга с противоположным направлением называется *обратной*.

Путем из узла $s\in I$ в узел $t\in I$ называется простая цепь, соединяющая s и t, при этом все дуги цепи являются прямыми при движении из s в t.

Цепь (путь) (3.23) с совпадающими узлами i_1 и i_k : $i_1=i_k$ называется *циклом (контуром)*.

Каждой дуге припишем некоторый параметр c_{ij} («стоимость»), который определяет длину дуги (i,j). В этом случае под длиной пути будем понимать сумму длин дуг, образующих данный путь.

Ставится задача о нахождении кратчайшего (минимального) пути из фиксированного узла $s \in I$ в другой заданный узел $t \in I$ или во все другие узлы сети. В последнем случае говорят о задаче построения дерева кратчайших путей. Следует различать три случая:

1. Все дуги сети имеют неотрицательную длину.

2. Некоторые дуги имеют отрицательную длину, но в сети не существует контуров с суммарной отрицательной длиной.

3. В сети существует один или несколько контуров с отрицательной суммарной длиной.

В третьем случае задача о построении кратчайшего пути из s в t может не иметь решения. (Задача будет иметь решение только в том случае, если нет ни одного пути из s в узел i, принадлежащий контуру с отрицательной длиной.) В таких ситуациях используются алгоритмы, позволяющие обнаружить и указать контуры с отрицательной длиной.

Заметим, что отсутствие в сети $S = \{I, U\}$ контуров отрицательной длины и существование пути из i в j для любых i, j являются необходимыми и достаточными условиями существования кратчайшего пути из любого узла $i \in I$ в любой узел $j \in I$.

Можно показать, что задача построения кратчайших путей из заданного узла $s \in I$ во все другие узлы $j \in I \setminus s$ сети $S = \{I, U\}$ является частным случаем задачи о потоке минимальной стоимости на этой сети. Задача имеет вид (3.19)-(3.21), где

$$a_s = n - 1,\ a_i = -1,\ i \in I \setminus s;\ \ n = |I|. \tag{3.24}$$

С учетом того, что все числа $a_i,\ i \in I$, —- целые, можно показать, что задача (3.19)-(3.21), (3.24) имеет оптимальный целочисленный поток. Ранее было доказано, что если в задаче (3.19)-(3.21) существует оптимальный поток, то для нее найдется и оптимальный базисный поток, который определяется следующими свойствами: пусть $x^0 = (x^0_{i,j}, (i,j) \in U)$ —- оптимальный базисный поток, тогда существует такое базисное множество (являющееся деревом) $U^0_{\text{Б}} \subset U$, что

$$x^0_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in U^0_{\text{Б}};\ \ x^0_{ij} = 0,\ (i,j) \in U \setminus U^0_{\text{Б}}.$$

В силу специального подбора чисел $a_i,\ i \in I$, (см. (3.24)), можно утверждать, что

$$x^0_{ij} \geq 1,\ (i,j) \in U^0_{\text{в}}.$$

Учитывая это легко можно показать, что базисное множество $U^0_{\text{в}}$ и будет деревом кратчайших путей из s в $j \in I \setminus s$.

Таким образом, задача о построении дерева кратчайших путей из из заданного узла $s \in I$ во все другие узлы $j \in I \setminus s$ сети $S = \{I, U\}$ может быть решены методом потенциалов, который описан в ..... Отметим, что для частного случая, когда выполняется дополнительное предположение

$$c_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in U,$$

для рассматриваемой задачи построения дерева кратчайших путей можно использовать другие методы, см., например, методы пометок, описанные в [ ].

3.3.5 Задача сетевого планирования

В сетевом планировании исследуются проблемы реализации сложных проектов (комплексов работ), состоящих из большого количества отдельных работ, которые должны выполняться в определенной технологической последовательности. Одна из основных задач сетевого планирования – *расчет времени выполнения проекта.*

Составим сетевую модель задачи. Факт (явление) начала (или окончания) какого-либо множества работ из заданной совокупности работ проекта назовем *событием* и поставим ему в соответствие узел $i \in I$. Работу, которая может начаться после события $iinI$ и которая предшествует событию $j \in I$, обозначим дугой $(i,j) \in U$. Ни одна работа $(i,j) \in U$ не может начаться, если не завершены все работы $(k,i) inU$, $k \in I^-_i = \{k \in I:\ \exists (k,i) \in U\}$, т.е. ни одна работа $(i,j) inU$ не может начаться до наступления события i; момент наступления события i определяется моментом завершения всех работ (k,i), $k \in I^-_i$.

На сети $S = \{I, U\}$ выделим два узла: s – начальное событие (начало выполнения проекта) и t – конечное событие (завершение проекта). По построению верны соотношения

$$I^-_s = \emptyset,\ I^+_t = \emptyset,\ \text{где } I^+_i = \{j \in I:\ \exists (i,j) \in U\}.$$

Каждой дуге $(i,j) \in U$ припишем одну характеристику c_{ij} —- время выполнения работы (i,j). Обозначим через x_i, $i \in I$, момент наступления события i; $x_s = 0$. Из технологических требований, имеющихся в проекте и отраженных в структуре сети S, следуют неравенства

$$x_i + c_{ij} \leq x_j,\ i \in I_j^-,\ j \in I, \tag{3.25}$$

которые означают, что событие j наступает не раньше, чем будут завершены все работы (i,j), $i \in I_j^-$, которые предшествуют этому событию j.

Из (3.25) следует, что в сети S нет контуров. Действительно, предположим, что в S существует контур и обозначим через $U_{\text{контур}} \subset U$ дуги этого контура. Просуммируем неравенства (3.25) по дугам $(i,j) \in U_{\text{контур}}$ и получим

$$\sum_{(i,j) \in U_{\text{контур}}} c_{ij} \leq 0.$$

Однако это противоречит предположению $c_{ij} > 0$, $(i,j) \in U$. Без ограничения общности будем предполагать, что

$$I_i^+ \neq \emptyset,\ i \in I \setminus t;\ \ I_i^- \neq \emptyset,\ i \in I \setminus s,$$

ибо этого всегда можно добиться, модифицируя сеть S и не нарушая технологической последовательности выполнения работ. Минимальное время выполнения проекта определяется **наименьшим числом** x_t, которое в совокупности с числами

$$x_i \geq 0,\ i \in I \setminus t;\ \ x_s = 0 \tag{3.26}$$

удовлетворяет неравенствам (3.25).

Таким образом, рассматриваемая задача вычисления минимального времени выполнения комплекса работ, заданных сетьи $S = \{I, U\}$, может сформулирована следующим образом: найти решение $(x_i^0, i \in I)$ следующей задачи

$$x_t - x_s \to \min, \tag{3.27}$$

$$x_i + c_{ij} \leq x_j,\ i \in I_j^-,\ j \in I,$$

$$x_i \geq 0,\ i \in I;\ \ x_s = 0.$$

Заметим, что сформулированная задача (3.27) является двойственной к задаче о потоке минимальной стоимости на сети S [2, 7] с дуговыми стоимостями $-c_{ij} < 0$, $(i, j) \in U$, и интенсивностями узлов

$$a_s = -1, \;\; a_t = 1, \;\; a_i = 0, i \in I \setminus \{s, t\} \tag{3.28}$$

При этом числа $x_i^0, i \in I$ – оптимальные потенциалы $x_i^0 = u_i, i \in I$, соответствующие оптимальному базисному потоку в задаче о потоке минимальной стоимости. Следовательно, задачу (3.27) также можно решать методом потенциалов, который мы рассмотрели выше.

Используя специфику задачи (3.27), можно предложить и другие методы ее решения.

Отметим еще одно важное свойство рассматриваемой задачи вычисления минимального времени выполнения комплекса работ.

Поскольку для окончания проекта необходимо, чтобы все работы были завершены, то длина каждого пути из s в t, равная сумме $\sum c_{ij}$, вычисленной вдоль дуг пути, не меньше чем x_t^0. Чтобы убедиться в этом, достаточно сложить неравенства (3.25)) вдоль этого пути. С другой стороны, очевидно, что найдется такая последовательность работ, составляющая путь из s в t, общая продолжительность которых равна x_t^0. Таким образом, задача вычисления x_t^0 сводится к поиску пути из s в t с максимальной длиной. Такой путь принято называть критическим.

3.3.6 Задача о назначениях

Задачу о назначениях можно кратко сформулировать следующим образом. Задано n работ, каждую из которых может выполнить любой из n исполнителей. Стоимость выполнения работы i исполнителем j равна c_{ij}. Нужно распределить исполнителей по работам, т.е. назначить по одному исполнителю на каждую работу таким образом, чтобы минимизировать общие затраты.

Построим математическую модель данной задачи. Определим переменную

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если работу } i \text{ исполняет работник } j; \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{3.29}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; i=\overline{1,n}; \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; j=\overline{1,n}; \tag{3.30}$$

$$0 \le x_{ij} \le 1, \quad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.31}$$

$$x_{ij} \text{ — целое}, \quad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,n}. \tag{3.32}$$

Очевидно, что задача (3.29) – (3.31) – частный случай транспортной задачи (3.15), (3.16), (3.18), когда

$$a_i = 1, \quad i=\overline{1,n}; \quad b_j = 1, \quad j=\overline{1,m}, \quad n=m \quad \text{и} \quad d_{ij}=1, \quad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,m}.$$

Нетрудно показать, что задача (3.15), (3.16), (3.18) обладает следующим свойством: она имеет целочисленное решение, если a_i, $i=\overline{1,n}$; b_j, $j=\overline{1,m}$ – целые числа. Следовательно, и задача (3.29) – (3.32) – частный случай задачи (3.15), (3.16), (3.18) – имеет целочисленное решение. Значит, для решения задачи (3.29) – (3.32) можно использовать метод потенциалов, отбросив условия целочисленности. Кроме того, можно заметить, что с учетом специфики задачи (3.29) – (3.32) условия

$$0 \le x_{ij} \le 1, \; i=\overline{1,n}, \; j=\overline{1,n} \tag{3.33}$$

можно заменить на условия

$$0 \le x_{ij}, \; i=\overline{1,n}, \; j=\overline{1,n}. \tag{3.34}$$

Отметим, что задача (3.29) – (3.32) – специальная транспортная задача и для её решения можно разработать другие методы, отличные от метода потенциалов. Одним из таких методов является венгерский метод, описанный в [3].

3.3.7 Задача коммивояжёра

Эта задача относится к следующей ситуации: коммивояжёр собирается посетить каждый из n городов по одному разу, выехав из первого города и вернувшись в него же. Ни один город коммивояжёр не должен посещать дважды. Расстояние между городами i и j равно c_{ij} (если между городами i и j нет дороги, то полагаем $c_{ij} = \infty$). Надо найти кратчайший маршрут коммивояжёра.

Математическая модель этой задачи отображает также ситуацию совершенно иного характера. Имеется n сортов мороженого, которое изготавливается на одном и том же оборудовании. Пусть c_{ij} означает затраты времени на очистку и подготовку оборудования, когда сорт j изготавливается после сорта i. Предполагается, что заданная последовательность производства повторяется каждый день, т.е. оборудование после последнего сорта мороженого опять настраивается на производство первого сорта.

Требуется найти такую последовательность производства, при которой затраты на переналадку были бы минимальными.

Обозначим

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если из города } i \text{ идем в город } j; \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель задачи коммивояжёра совпадает с задачей (3.29) – (3.32) плюс ещё одно дополнительное требование

$$\text{совокупность дуг } U_*(x) = \{\,(i,j) \in U : \ x_{ij} = 1\} \text{ образует один цикл.} \tag{3.35}$$

Дополнительное ограничение (3.35) является существенным. Решив задачи (3.29) – (3.31) (без дополнительного условия (3.35)), мы можем получить такой оптимальный план x^0, для которого множество $U_*(x^0)$ состоит из двух и более циклов, что недопустимо в исходной задаче о коммивояжёре. Отметим, что ограничение (3.35) существенно усложняет решение задачи о коммивояжёре. К настоящему времени разработано много методов решения задачи о коммивояжере. Некоторые из них будут описаны в §4.

3.3.8 Задача о максимальном потоке

Пусть задана некоторая ориентированная сеть $S = \{I,\ U\}$. На каждой дуге $(i,j) \in U$ задано число $d_{ij} \geq 0$ –пропускная способность дуги $(i,j) \in U$. В сети S выделены два узла $s \in I$ и $t \in I$, $s \neq t$; s – источник, t – сток. Требуется найти максимальный поток из узла s в узел t по дугам сети S при условии, что величина x_{ij} дугового потока по дуге $(i,j)\in U$ положительна и не превышает числа d_{ij} – пропускной способности дуги (i,j).

Математическая модель данной задачи имеет вид

$$
\begin{gathered}
v \to \max_{v,x}, \\
\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = \begin{cases} v, & \text{если} \quad i = s, \\ 0, & \text{если} \quad i \in I\setminus\{s,t\}, \\ -v, & \text{если} \quad i = t, \end{cases} \\
0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \quad (i,j)\in U.
\end{gathered}
\tag{3.36}
$$

Покажем, что задача (3.36) является частным случаем задачи о потоке минимальной стоимости. Рассмотрим расширенную сеть $\overline{S} = \{I,\bar{U}\}$, которая получается из исходной сети $S = \{I,\ U\}$ добавлением дуги (t,s): $\bar{U} = U\bigcup(t,s)$.

Положим $a_i = 0$, $i\in I$, $c_{ij} = 0$, $(i,j)\in U$, $c_{ts} = -1$, $d_{ts} = \infty$ и рассмотрим задачу о потоке минимальной стоимости на сети $\overline{S} = \{I,\bar{U}\}$:

$$
\begin{gathered}
\sum_{(i,j)\in\overline{U}} c_{ij}x_{ij} \to \min, \\
\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i\in I; \\
0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \quad (i,j)\in\bar{U}.
\end{gathered}
\tag{3.37}
$$

Очевидно, что задача (3.37) эквивалентна задаче (3.36). Следовательно, для построения максимального потока можно воспользоваться методом потенциалов (см. раздел ...), применив его для решения задачи (3.37), которая эквивалентна задаче о максимальном потоке.

Метод потенциалов рассчитан на решение произвольной задачи вида (3.37), а у нас задача (3.37) имеет ряд специальных особенностей. Учёт этих особенностей позволяет разработать для её решения и другие методы. Эти методы описаны в работах [1,2].

Список литературы

[1] Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон Потоки в Сетях. 1966 Издательство: "Мир"Количество страниц: 276

[2] Йенсен П., Барнес Д. Потоковое программирование. – М.: Радио и связь, 1984.

[3] Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 1–3. – М.: Мир, 1973.

[4] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации: Учеб. пособие. – Мн.: БГУ, 1981.

[5] Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2001

[6] Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975.

[7] Wolsey L.A. Integer Programming. Wiley-Interseries in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, New York, 1996.

4 Задача квадратичного программирования

В данной главе рассматривается задача квадратичного программирования (ЛП). Интерес к таким задачам можно объяснить, по крайней мере, двумя факторами. Во-первых, квадратичные модели широко распространены в приложениях и представляют самостоятельный интерес. Во-вторых, во многих методах нелинейного программирования направление спуска на каждой итерации определяется как решение задачи квадратичного программирования.

4.1 Условия оптимальности

4.1.1 Постановка задачи. Определения

Задача квадратичного программирования в канонической форме состоит в минимизации квадратичной функции

$$f(x) := c'x + \frac{1}{2}x'Dx \to \min \tag{4.1}$$

при линейных ограничениях

$$Ax = b, \; x \geq 0 \tag{4.2}$$

Здесь $A = (A_j, j \in J)$ — $m \times n$-матрица со столбцами A_j, $j \in J = \{1, 2, \ldots, n\}$, x и c — n-векторы, b — m-вектор, D — симметричная ($D = D'$) положительно полуопределенная ($D \geq 0$) $n \times n$-матрица.

Напомним, что матрица $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется **положительно полуопределенной**, если $l'Dl \geq 0$ для любого $l \in \mathbb{R}^n$.

В дальнейшем элементы матрицы D будем обозначать через d_{ij}, т.е.

$$D = \begin{pmatrix} d_{ij}, j \in J \\ i \in J \end{pmatrix}.$$

В задачах квадратичного программирования, как и задачах линейного программирования, вместо линейных ограничений в канонической форме (4.2) можно рассматривать ограничения более общего вида. При этом, используя приемы, описанные при рассмотрении задач линейного программирования, эти ограничения всегда можно свести к ограничениям в канонической форме (4.2).

Без ограничения общности будем считать, что $rank\ A = m \leq n$.

Вектор $x = (x_j, j \in J)$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи (4.1), (4.2), назовем **планом**.

Множество индексов $J_{\text{оп}} \subset J$ назовем **опорой ограничений**, если

$$|J_{\text{оп}}| = m,\ detA_{\text{оп}} \neq 0,\ \text{где } A_{\text{оп}} = (A_j, j \in J_{\text{оп}}). \tag{4.3}$$

Пара $\{x, J_{\text{оп}}\}$ из плана и опоры ограничений называется **опорным планом**.

Опорный план $\{x, J_{\text{оп}}\}$ называется невырожденным, если $x_j > 0,\ j \in J_{\text{оп}}$.

Замечание 7 *Если $x_j = 0,\ j \in J \setminus J_{on}$, то опорный план является базисным, а невырожденный опорный план — невырожденным базисным планом.*

Рассмотрим опорный план $\{x, J_{\text{оп}}\}$. Обозначим

$$\overline{c}(x) = (\overline{c}_j(x),\ j \in J) = c + Dx.$$

Найдем m-вектор потенциалов $u(x)$

$$u'(x) = -\overline{c}'_{\text{оп}}(x)A^{-1}_{\text{оп}},\ \text{где } \overline{c}_{\text{оп}}(x) = (\overline{c}_j(x), j \in J_{\text{оп}}), \tag{4.4}$$

и оценки

$$\Delta_j(x) = u'(x)A_j + \overline{c}_j(x),\ j \in J.$$

Отметим, что, по построению, $\Delta_j(x) = 0, \ j \in J_{\text{оп}}$.

4.1.2 Формула приращения

Пусть $\{x, J_{\text{оп}}\}$ — опорный план. Рассмотрим произвольный план $\overline{x} = x + \Delta x$. Очевидно, что

$$A\Delta x = 0. \tag{4.5}$$

Подсчитаем приращение

$$f(x+\Delta x) - f(x) = c'(x+\Delta x) + \frac{1}{2}(x+\Delta x)'D(x+\Delta x) - c'x - \frac{1}{2}x'Dx =$$

$$= \overline{c}'(x)\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x'D\Delta x = \overline{c}'(x)\Delta x + u'(x)A\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x'D\Delta x = \tag{4.6}$$

$$= \sum_{j\in J}\Delta_j(x)\Delta x_j + \frac{1}{2}\Delta x'D\Delta x = \sum_{j\in J\setminus J_{\text{оп}}}\Delta_j(x)\Delta x_j + \frac{1}{2}\Delta x'D\Delta x.$$

4.1.3 Критерий оптимальности

Теорема 10 *Соотношения*

$$\Delta_j(x) = 0 \ \text{\textit{при}} \ x_j > 0, \ \Delta_j(x) \geq 0 \ \text{\textit{при}} \ x_j = 0, \ j \in J\setminus J_{\text{оп}} \tag{4.7}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана $\{x, J_{\text{оп}}\}$.

Доказательство. **Достаточность.** Пусть соотношения (4.7) выполняются. Рассмотрим любой допустимый план $\overline{x} = x + \Delta x$. Из (4.7) и допустимости плана $\bar{x}$ следует, что

$$\Delta_j(x)\Delta x_j \geq 0, j \in J_{\text{оп}}.$$

Из условия $D\dot{\geq}0$ следует, что $\Delta x'D\Delta x\geq 0$. С учетом последних соотношений из (4.6) получаем:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0.$$

Следовательно, x — оптимальный план.

Необходимость. Предположим противное: $\{x, J_{\text{оп}}\}$ — невырожденный оптимальный опорный план, но соотношения (4.7) нарушаются. Из этого следует, что существует такой индекс $j_0 \in J \backslash J_{\text{оп}}$, что

$$\Delta_{j_0} < 0 \text{ либо } \Delta_{j_0} > 0 \text{ и } x_{j_0} > 0.$$

Построим направление $l = (l_j, j \in J)$ по правилам:

$$l_{j_0} = -\text{sign}\Delta_{j_0},\ l_j = 0,\ j \in J \backslash (J_{\text{оп}} \cup j_0); \tag{4.8}$$

$$l_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{j_0} l_{j_0}.$$

Новый план строим в виде $\overline{x} = x + \theta l$, где $\theta \geq 0$ — некоторый параметр.

Согласно формулам приращения имеем:

$$f(x + \theta l) - f(x) = \theta \Delta_{j_0} l_{j_0} + \frac{1}{2}\theta^2 l' D l = -\theta |\Delta_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta^2 l' D l. \tag{4.9}$$

Ясно, что при достаточно малых $\theta > 0$ имеет место неравенство:

$$f(x + \theta l) - f(x) < 0. \tag{4.10}$$

При выборе $\theta > 0$ мы ещё должны учесть прямые ограничения:

$$x_j + \theta l_j \geq 0,\ j \in J. \tag{4.11}$$

Из условий $x_j > 0,\ j \in J_{\text{оп}}$, и условий $x_{j_0} > 0$ при $l_{j_0} < 0$ следует, что найдется такое число $\theta_0 > 0$, что соотношения (4.11) верны при $\forall \theta \in (0, \theta_0)$.

Из (4.8), (4.10), (4.11) следует, что при достаточно малых $\theta > 0$ вектор $x + \theta l$ является планом и на нем значение целевой функции лучше, чем на оптимальном плане x. Это противоречит оптимальности плана x. Необходимость доказана.

4.1.4 Достаточное условие неограниченности снизу целевой функции

Пусть для опорного плана $\{x, J_{\text{оп}}\}$ существует индекс $j_0 \in J \backslash J_{\text{оп}}$ такой, что $\Delta_{j_0} < 0$ и для вектора l, построенного по правилам (4.8), выполняются соотношения

$$l \geq 0,\ l' D l = 0.$$

Тогда целевая функция задачи (4.1) неограниченно убывает на множестве планов вида $\bar{x} = x + \theta l$, $\theta \to \infty$.

4.2 Конечный метод решения задачи квадратичного программирования

4.2.1 Отсутствие в общем случае оптимальных базисных планов

В линейном программировании (ЛП) далее шло утверждение о том, что если критерий оптимальности и достаточное условие неограниченности не выполняется для данного базисного плана, то мы можем заменить этот план на другой базисный план с нехудшим значением целевой функции.

Для квадратичного программирования можно доказать аналогичное утверждение, заменяя базисный план на опорный. Это утверждение очевидным образом следует из критерия оптимальности, т.к. в невырожденном случае, согласно определению, пара $\{x + \theta l, J_{\text{оп}}\}$ является опорным планом при достаточно малых $\theta > 0$.

Однако, даже если начальный план $\{x, J_{\text{оп}}\}$ был базисным $\{x, J_{\text{оп}}\} = \{x, J_{\text{Б}}\}$, то и в этом случае мы не сможем доказать, что базисный план $\{x, J_{\text{Б}}\}$ можно заменить на новый **базисный** план с нехудшим значением целевой функции!

Это вызвано тем, что среди оптимальных планов задачи квадратичного программирования может не существовать базисных.

Покажем из-за чего возникает такая ситуация.

Предположим, что есть начальный базисный план $\{x, J_{\text{Б}}\}$, $J_{\text{Б}} = J_{on}$, критерий оптимальности и достаточное условие неграниченности целевой функции не выполняется для индекса j_0. Отметим, что в данном случае (т.е. в случае, когда опорный план является базисным) обязательно будет $\Delta_{j_0} < 0$. Построим направление l по правилам (8) и новый план $\bar{x}$ будем искать в виде $\bar{x} = x + \theta l$, где $\theta \geq 0$. Как и в линейном программировании, шаг θ должен быть допустимым по прямым ограничениям, т.е. должны выполняться неравенства $x + \theta l \geq 0$. Из этого следует, что

$$\theta \leq \theta_0 = \min_{j \in J_{\text{Б}} \cup j_0} \theta_j = \theta_{j_*} \tag{4.12}$$

где

$$\theta_j = \begin{cases} \infty, \text{ если } l_j \geq 0, \\ -x_j/l_j, \text{ если } l_j < 0, \end{cases} \quad j \in J_{\text{Б}} \cup j_0.$$

Проанализируем целевую функцию

$$f(x + \theta l) = f(x) + \theta \alpha + \frac{1}{2}\theta^2 \delta,$$

$$\alpha = -|\Delta_{j_0}|, \quad \delta = l'Dl \geq 0.$$

Подсчитаем число

$$\theta_\delta = \begin{cases} \infty, & \text{если } l'Dl = 0, \\ |\Delta_{j_0}|/l'Dl, & \text{если } l'Dl > 0. \end{cases}$$

Очевидно, что при $\theta \in [0, \theta_\delta)$ функция $f(x + \theta l)$ убывает, а при $\theta > \theta_\delta$ эта функция начинает возрастать (см. Рис....).

Следовательно, максимально допустимый шаг вдоль l нужно выбрать по правилу

$$\theta_* = \min\{\theta_0, \theta_\delta\}. \tag{4.13}$$

Если $\theta_* = \theta_0 = \theta_{j_*}$, где $j_* \in J_Б$, то мы можем начальный базисный план $\{x, J_Б\}$ заменить на новый базисный план $\{\bar{x}, \bar{J}_Б\}$, где $\bar{x} = x + \theta_* l$, $\bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_*) \cup j_0$.

Если $\theta_0 = \theta_\delta$, то мы не можем начальный базисный план $\{x, J_Б\}$ заменить на лучший базисный план, так как при любом $\theta \in (0, \theta_*]$ у плана $\bar{x} = x + \theta l$ число ненулевых компонент равно $m + 1 > m$ и, следовательно, ему нельзя приписать никакой базис. Таким образом, наши надежды на то, что задачу квадратичного программирования можно решить, используя только базисные планы, оказались необоснованными.

4.2.2 Конечный метод решения задачи квадратичного программирования

Для описания метода нам понадобится понятие правильного опорного плана.

Определение 14 *Опорный план $\{x, J_{on}\}$ называется правильным, если существует такое подмножество $J_* \subset J$, что*

$$J_{on} \subset J_* \subset \{j \in J : \Delta_j(x) = 0\},$$
$$x_j = 0, j \in J_н = J \backslash J_*,$$
$$\det H_* \neq 0,$$
$$H_* = \begin{pmatrix} D_*, & A'_* \\ A_*, & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_* = (A_j, j \in J_*)$,

$$D_* = \begin{pmatrix} d_{ij}, \ j \in J_* \\ i \in J_* \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что среди оптимальных планов задачи квадратичного программирования всегда существует оптимальный правильный опорный план.

Замечание 8 *Базисный план $\{x, J_Б\}$ — частный случай правильного опорного плана, где $J_Б = J_{оп} = J_*$.*

Опишем конечный алгоритм по шагам.

1. Задан начальный правильный опорный план $\{x, J_{\text{оп}}, J_*\}$. Строим потенциалы $u'(x) = -\bar{c}'_{\text{оп}}(x)A^{-1}_{\text{оп}}$, где $\bar{c}(x) = c + Dx$.

   Вычисляем оценки:

$$\Delta_j = \Delta_j(x) = u'(x)A_j + \bar{c}_j(x), j \in J_{\text{н}} = J \backslash J_*;$$

2. Проверяем критерий оптимальности:

$$\Delta_j \geq 0, j \in J \backslash J_*.$$

   Если он выполняется, то STOP: x — оптимальный план. В противном случае, идем на шаг 3, используя индекс $j_0 \in J \backslash J_*$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$.

3. Построение направления l изменения плана. Положим

$$l_j = 0, j \in J_{\text{н}} \backslash j_0,\ l_{j_0} = 1. \tag{4.14}$$

   Остальные компоненты $l_* = (l_j, j \in J_*)$ выберем некоторым образом (пока не уточняем каким) так, чтобы $Al = 0$. Последнее равенство с учётом (4.14) принимает вид:

$$A_* l_* + A_{j_0} = 0. \tag{4.15}$$

   При этом согласно формуле приращения имеем

$$f(x + \theta l) = f(x) - \theta |\Delta_{j_0}| + \frac{1}{2} \underbrace{l'Dl}_{\delta} \theta^2$$

   где число $\alpha = -|\Delta_{j_0}|$ не зависит от выбора l_*, а число $\delta = l'Dl$ зависит от выбора l_*. Нам выгоднее, чтобы δ было по возможности минимальным. Т.е. при заданных компонентах $l_j, j \in J_н$, (см. (4.14)) мы должны найти компоненты l_* таким образом, чтобы имело место равенство (4.15) и

$$l'Dl = l'_* D_* l_* + d_{j_0 j_0} + 2D'_{*j_0} l_* \to \min_{l_*}. \tag{4.16}$$

Здесь D_{*j_0} – $|J_*|$-вектор с компонентами

$$D_{*j_0} = (d_{jj_0}, j \in J_*)'.$$

Нетрудно показать, что если мы решим систему

$$\begin{cases} D_* l_* + A'_* y + D_{*j_0} = 0, \\ A_* l_* \qquad\quad + A_{j_0} = 0, \end{cases} \tag{4.17}$$

относительно неизвестных $(l_*, y), y \in \mathbb{R}^m$, то l_* и будет искомым решением задачи (4.16), (4.15). Отметим, что система (4.17) имеет единственное решение в силу условия $\det H_* \neq 0$.

Таким образом, мы находим l_* из системы (4.17) и направление l полностью построено.

4. Подсчитаем шаги $\theta_j, j \in J_* \cup j_0$, по правилам

$$\theta_j = \begin{cases} \infty, \text{ если } \ l_j \geq 0, \ j \in J_*; \\ -x_j/l_j, \text{ если } \ l_j < 0, \ j \in J_*; \end{cases}$$

$$\theta_{j_0} = \theta_\delta = \begin{cases} \infty, \text{ если } \ \delta = 0; \\ |\Delta_{j_0}| \backslash \delta, \text{ если } \ \delta > 0; \end{cases} \text{ где } \delta = l'Dl = D'_{*j_0} l_* + A'_{j_0} y + d_{j_0 j_0}.$$

   Находим $\theta_0 = \min \theta_j, j \in J_* \cup j_0$. Обоснование этих правил выбора шага такое же как и в „примитивном“ алгоритме.

   Если $\theta_0 = \infty$, то STOP: целевая функция неограничена снизу на множестве планов. Пусть $\theta_0 = \theta_{j_*} < \infty$, где $j_* \in J_* \cup j_0$.

5. Строим новый план $\bar{x} = x + \theta_0 l$.

6. Строим новые множества $\bar{J}_{оп}$ и $\bar{J}_*$. Предполагается, что множество индексов $J_{оп}$ имеет вид $J_{оп} = \{j_1, j_2, ..., j_s, ..., j_m\}$. Возможны случаи:

   (a) $j_* = j_0$;

(b) $j_* \in J_* \backslash J_{\text{оп}}$;

(c) $j_* = j_s \in J_{\text{оп}}$ и существует такой индекс $j_+ \in J_* \backslash J_{\text{оп}}$, что $e'_s A^{-1}_{\text{оп}} A_{j_+} \neq 0$;

(d) $j_* = j_s \in J_{\text{оп}}$ и $e'_s A^{-1}_{\text{оп}} A_j = 0$, $j \in J_* \backslash J_{\text{оп}}$, либо $J_* = J_{\text{оп}}$.

В случае (6a) полагаем

$$\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}, \quad \bar{J}_* = J_* \cup j_0$$

и переходим к новой итерации, т.е. к шагу 1, используя найденные данные $\bar{x}, \bar{J}_{\text{оп}}, \bar{J}_*$.

В случае (6b) полагаем

$$\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}, \bar{J}_* = J_* \setminus j_*, \bar{j}_0 = j_0, \bar{\Delta}_{j_0} = \Delta_{j_0} + \theta_0 \delta$$

и переходим к шагу 3, используя далее данные $\bar{x}, \bar{J}_{\text{оп}}, \bar{J}_*, \bar{j}_0, \bar{\Delta}_{\bar{j}_0}$ вместо $x, J_{\text{оп}}, J_*, j_0, \Delta_{j_0}$.

В случае (6c) полагаем

$$\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \backslash j_*) \cup j_+, \bar{J}_* = J_* \backslash j_*, \bar{j}_0 = j_0, \bar{\Delta}_{j_0} = \Delta_{j_0} + \theta_0 \delta$$

и переходим к шагу 3, используя обновлённые данные $\bar{x}, \bar{J}_{\text{оп}}, \bar{J}_*, \bar{j}_0, \bar{\Delta}_{\bar{j}_0}$ вместо $x, J_{\text{оп}}, J_*, j_0, \Delta_{j_0}$.

В случае (6d) полагаем

$$\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \backslash j_*) \cup j_0, \bar{J}_* = (J_* \backslash j_*) \cup j_0$$

и переходим к новой итерации (т.е. к шагу 1), используя новые данные $\bar{x}, \bar{J}_{\text{оп}}, \bar{J}_*$.

Замечание 9 *Построение матрицы $\bar{A}^{-1}_{on}$, обратной к новой матрице $\bar{A}_{on} = (A_j, j \in \bar{J}_{on})$, осуществляется по правилам, описанным на шаге 6 симплекс-метода, с использованием матрицы $\bar{A}^{-1}_{on}$.*

По аналогии с ЛП решение системы (2.8) можно строить с помощью матрицы H^{-1}_*, обратной к матрице

$$H_* = \begin{pmatrix} D_* & A'_* \\ A_* & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+m)*(k+m)},$$

по правилу
$$\begin{pmatrix} l_* \\ y \end{pmatrix} = -H_*^{-1} h_{j_0},$$
где $h_{j_0} = \begin{pmatrix} D_{*j_0} \\ A_{j_0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+m}, k = |J_*|$.

При этом нетрудно получить простые формулы построения новой матрицы $\bar{H}_*^{-1}$, зная H_*^{-1}.

Итерацию $\{x, J_{\text{оп}}, J_*\} \to \{\bar{x}, \bar{J}_{\text{оп}}, \bar{J}_*\}$ назовём невырожденной, если $\theta_0 > 0$.

Теорема 11 *Описанный выше алгоритм решает задачу(3.1), (3.2) за конечное число итераций, если в процессе его реализации встречается конечное число вырожденных итераций.*

При аналогии с подразделом 1.5 можно ввести в алгоритм дополнительные правила определения индексов $j_0 \in J_{\text{н}}, j_* \in J_* \cup j_0$, гарантирующие конечность описанного алгоритма без требования невырожденности итераций.

Как видно из описания алгоритма, для начала его работы необходимо знать начальный правильный опорный план. Выше отмечалось, что любой базисный план является правильным опорным планом. Следовательно, для построения информации, необходимой для начала работы данного алгоритма, можно воспользоваться первой фазой симплекс-метода, описанной в подразделе 1.6. При этом, как и в задаче линейного программирования, можно отказаться от предположения о том, что $rankA = m \leq n$, ибо при реализации первой фазы будут обнаружены и удалены все линейно зависимые основные ограничения.

Замечание 10 *При $D = 0$ задача квадратичного программирования (3.1), (3.2) совпадает с задачей линейного программирования (3.6) из раздела 1.*

Список литературы

[1] Kostyukova,Olga; Kostina,Ekaterina. A primal-dual active-set method for convex quadratic programming. Preprint 2003-05 (SFB 359), 2003. Universitat Heidelberg.

[2] Малозёмов В. Н. О методе сопряжённых градиентов // Семинар ?DHA & CAGD?. Избранные доклады. 28 апреля 2012 г. (http://dha.spb.ru/reps12.shtml#0428)

[3] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 320 с.

[4] Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.

[5] Малозёмов В. Н. Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 80 с.

[6] Малозёмов В. Н. Модифицированный симплекс-метод // Семинар ?DHA & CAGD?. Избранные доклады. 20 ноября 2010 г. (http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1120)

5 Выпуклое программирование

Выпуклым программированием (ВП) называется раздел математики, в котором исследуется задача

$$f(x) \to \min, x \in X, \tag{5.1}$$

где $f(x)$ выпуклая функция, заданная на выпуклом множестве X.

При формировании основной задачи выпуклого программирования (5.1) принято множество X задавать в форме

$$X = \{x : g(x) \leq 0, x \in Q\},$$

где $g(x) = (g_i(x), i = \overline{1,m}) \in \mathbb{R}^m$, $g_i(x), i = \overline{1,m}$, — выпуклые функции, Q — выпуклое множество.

5.1 Выпуклые функции и множества

Определение 15 *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для $\forall x_1 \in X$, $\forall x_2 \in X$ имеет место включение*

$$x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X \text{ при } \forall\lambda \in [0,1].$$

Пример: выпуклые множества из $\mathbb{R}^2$ приведены на Рис. ...., невыпуклые множества из $\mathbb{R}^2$ приведены на Рис.....

Определение 16 *Функция $f(x)$, определённая и конечная на выпуклом множестве X, называется выпуклой, если для $\forall x_1, x_2 \in X$ и при всех $\lambda \in [0,1]$ выполняются неравенства*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

1. Если $f(x) \in C^{(1)}$ (т.е. $f(x)$ — гладкая), то $f(x), x \in \mathbb{R}^n$, выпукла тогда и только тогда, когда при всех $x, x_* \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - f(x^*) \geq (x - x^*)' \partial f(x^*)/\partial x. \tag{5.2}$$

2. Если $f(x) \in C^{(2)}, x \in \mathbb{R}^n$, то $f(x), x \in \mathbb{R}^n$ выпукла тогда и только тогда, когда матрица $\partial^2 f(x)/\partial x^2$ неотрицательно определенная на $x \in \mathbb{R}^n$.

Напомним, что симметричная $n \times n$-матрица A называется неотрицательной (положительной), если

$$x'Ax \geq 0 \ \ (x'Ax > 0) \quad \text{при } \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

5.2 Теорема Куна-Таккера

Теоремой Куна-Таккера в выпуклом программировании называется основной результат — критерий оптимальности, сформулированный в терминах седловой точки функции Лагранжа.

5.2.1 Седловая точка функции Лагранжа и решение основной задачи выпуклого программирования

Основная задача выпуклого программирования имеет вид

$$f(x) \to \min, \ \ g(x) \leq 0, x \in Q, \tag{5.3}$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, часто $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$, $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$, $f(x), g_1(x), \ldots, g_m(x)$ — выпуклые функции.

Каждый n-вектор x, удовлетворяющий ограничениям задачи (5.3), называется **планом** (допустимым планом, допустимой точкой). Решение x^0 задачи (5.3)

$$f(x^0) = \min f(x), g(x) \leq 0, x \in Q$$

называется **оптимальным планом**.

Из свойств выпуклых множеств и функций следует, что как множество планов

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, x \in Q\},$$

так и множество оптимальных планов

$$X^0 = \{x : f(x) = f(x^0), x \in X\}$$

являются выпуклыми.

По элементам $f(x)$, $g(x)$ задачи (5.3) составим **функцию Лагранжа**

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda' g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \tag{5.4}$$

и рассмотрим ее при

$$x \in Q, \lambda \geq 0, \lambda = (\lambda_i, i = \overline{1, m}) \in \mathbb{R}^m.$$

Определение 17 *Говорят, что пара $\{x^*, \lambda^*\}$, $\lambda^* \geq 0$, $x^* \in Q$, —* **седловая точка** *функции Лагранжа (5.4), если для всех $x \in Q$, $\lambda \geq 0$ выполняются неравенства*

$$F(x^*, \lambda) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x, \lambda^*). \tag{5.5}$$

Теорема 12 *Если $\{x^*, \lambda^*\}$, $x^* \in Q$, $\lambda^* \geq 0$, — седловая точка функции Лагранжа (5.5), то x^* — оптимальный план задачи (5.3) и выполняются* **условия дополняющей нежесткости**

$$g'(x^*)\lambda^* = 0 \tag{5.6}$$

$$(\Rightarrow g_i(x^*)\lambda_i^* = 0, i = \overline{1, m}).$$

Доказательство. Запишем (5.5) в исходных функциях

$$f(x^*) + \lambda' g(x^*) \leq f(x^*) + g'(x^*)\lambda^* \leq f(x) + g'(x)\lambda^*, x \in Q, \lambda \geq 0. \tag{5.7}$$

Из левого неравенства в (5.7) следует, что

$$\lambda' g(x^*) \leq \lambda^{*'} g(x^*), \forall \lambda \geq 0. \tag{5.8}$$

Для выполнения (5.8) необходимо выполнение неравенства

$$g(x^*) \leq 0,$$

ибо в противном случае (если $\exists \tau_0 \in \{1, \ldots, m\} : g_{i_0}(x^*) > 0$), выбирая λ_{i_0} сколь угодно большим, можно сделать левую часть (5.8) сколь угодно большой. Таким образом, мы показали, что x^* — план задачи (5.3).

Из (5.8) следуют условия дополняющей нежесткости (5.6). Действительно, если допустить, что $g'(x^*)\lambda^* = \alpha < 0$, то, положив $\lambda = \lambda^*/2$, в (5.8) получим противоречие: $\alpha/2 \leq \alpha < 0$. (Допустить, что $g'(x^*)\lambda^* > 0$ мы не можем, так как $\lambda^* \geq 0, g(x^*) \leq 0$.)

С учетом (5.6) правое неравенство в (5.7) переходит в неравенство

$$f(x^*) \leq f(x) + g'(x)\lambda^*. \tag{5.9}$$

Так как $\lambda^* \geq 0$ и для любого **плана** задачи (5.3) верно неравенство $g(x) \leq 0$, то (5.9) можно переписать в виде

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ для любого плана } x \text{ задачи (5.3) }.$$

Следовательно, x^* — оптимальный план задачи (5.3). ⊠

Согласно Теореме 12 для построения оптимального плана задачи (5.3) **достаточно** найди седловую точку функции Лагранжа. Однако не для каждой задачи (5.3) функция Лагранжа имеет седловую точку.

Первые результаты, эквивалентные теореме существования седловой точки функции Лагранжа для гладких задач были получены Куном Г. и Таккером А.

5.2.2 Гладкие задачи. Условия оптимальности

Рассмотрим **гладкую** задачу выпуклого программирования, под которой понимается задача (5.3), в которой функции $f(x)$ и $g(x)$ — гладкие и множество Q имеет вид

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}.$$

Определение 18 *Говорят, что множество планов X (ограничения) основной задачи выпуклого программирования* **регулярно** *(удовлетворяет* **условию Слейтера***), если существует такой план $\overline{x}$, что*

$$g(\overline{x}) < 0.$$

Пусть $I = \{1, \ldots, m\}$, $I_0(x) = \{i \in I : g_i(x) = 0\}$ — множество индексов **ограничений**, **активных** на плане x, $J = \{1, \ldots, n\}$, $J_0(x) = \{j \in J : x_j = 0\}$, $J_+(x) = J \backslash J_0(x)$ — множества индексов нулевых и положительных компонент плана x.

Лемма 7 *Предположим, что множество X планов гладкой задачи (5.3) удовлетворяет условию Слейтера, т.е. существует такой план $\bar{x} \in X$, что*

$$g(\bar{x}) < 0. \tag{5.10}$$

Тогда для любого плана $x^0 \in X$ и любого вектора $l^* \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих системе

$$l'^* \partial g_i(x^0)/\partial x \leq 0, \ i \in I_0(x^0), \ l_j^* \geq 0, \ j \in J_0(x^0), \tag{5.11}$$

найдутся такие число $\alpha_0 > 0$ и функция $t_0(\alpha) > 0$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$, $t \in [0, t_0(\alpha)]$ вектор

$$x(t) = x^0 + l^* t + \alpha(\bar{x} - x^0)t \tag{5.12}$$

является планом задачи (5.3).

Теорема 13 *Пусть x^0 — оптимальный план гладкой задачи (5.3) с регулярным множеством планов. Тогда для каждого вектора l^*, удовлетворяющего системе (5.11), выполняется неравенство*

$$l^{*\prime} \partial f(x^0)/\partial x \geq 0. \tag{5.13}$$

Доказательство. Предположим, что вектор l_* удовлетворяет (5.11), но

$$l^{*\prime} \partial f(x^0)/\partial x < 0. \tag{5.14}$$

Согласно лемме 7 функция (5.12) при $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$, удовлетворяет ограничениям задачи (5.3). При достаточно малых $\alpha > 0$ в силу (5.14) выполняется неравенство

$$\frac{df(x(t))}{dt}\big|_{t=0} = \frac{\partial f'(x(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = (l^* + \alpha(\bar{x} - x^0))'\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} < 0,$$

следовательно, при достаточно малых $\alpha > 0$ верно неравенство $f(x(t)) < f(x^0)$, которое противоречит оптимальности x^0. Следовательно, наше предположение было неверным. Теорема доказана.

Теорема 13 содержит прямое необходимое условие оптимальности в том смысле, что позволяет в случае неоптимальности плана x^0 "улучшить"его, т.е. построить такой план $\tilde{x}$, что $f(\tilde{x}) < f(x^0)$.

Действительно, проверка условий теоремы 13 сводится к решению задачи линейного программирования вида

$$l'\partial f(x^0)/\partial x \to \min_{l},$$

$$l'\partial g_i(x^0)/\partial x \leq 0,\ i \in I_0(x^0), \tag{5.15}$$

$$l_j \geq 0,\ j \in J_0(x^0),$$

с каким-либо нормировочным условием, например,

$$|l_j| \leq 1,\ j \in J, \tag{5.16}$$

для исключения неограниченных решений l^*.

Пусть l^* — решение задачи (5.15), (5.16).

Если $l^{*'}\partial f(x^0)/\partial x = 0$, то необходимое условие оптимальности (5.13) выполняется.

Если $l^{*'}\partial f(x^0)/\partial x < 0$, то по формуле (5.12) строится план $\tilde{x} = x(t)$, для которого $f(\tilde{x}) < f(x^0)$.

Таким образом мы показали, что оптимальность плана $l^* = 0$ в задаче (5.15), (5.16) является необходимым условием оптимальности плана x^0 в задаче (5.3).

Записывая условия оптимальности плана $l^* = 0$ в задаче линейного программирования (5.15), (5.16), мы приходим к следующей форме необходимых условий оптимальности (двойственные необходимые условия оптимальности) плана x^0 в гладкой задаче (5.3).

Теорема 14 *Для оптимальности плана x^0 в гладкой задаче (5.3) с регулярным множеством планов необходимо существование такого неотрицательного m-вектора $\lambda^0 \geq 0$, что выполняются условия*

1. *стационарности:*

$$\frac{\partial F(\lambda^0, x^0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} =: \Delta^0 \geq 0, \tag{5.17}$$

2. *дополняющей нежесткости:*

$$g'(x^0)\lambda^0 = 0, \;\; \Delta^{0'} x^0 = 0. \tag{5.18}$$

Лемма 8 *Из соотношений (5.17), (5.18) следует, что пара $\{\lambda^0, x^0\}$ — седловая точка функции Лагранжа.*

Доказательство. Нам надо показать, что верны соотношения

$$F(\lambda, x^0) \leq F(\lambda^0, x^0) \leq F(\lambda^0, x) \tag{5.19}$$

при любых $\lambda \geq 0$, $x \geq 0$.

В силу (5.18) соотношения (5.19) принимают вид

$$f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^0) \leq f(x^0) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(x)$$

По построению,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^0) \leq 0, \text{ следовательно, } F(\lambda, x^0) \leq F(\lambda^0, x^0).$$

Рассмотрим функцию $F(\lambda^0, x)$, $x \geq 0$. Эта функция является выпуклой, следовательно, для всех $\bar{x} \geq 0$ согласно (5.2) верно

$$F(\lambda^0, \bar{x}) - F(\lambda^0, x^0) \geq (\bar{x} - x^0) \frac{\partial F(\lambda^0, x^0)}{\partial x}. \tag{5.20}$$

Предположим, что второе неравенство в (5.19) не выполняется, т.е. существует $\bar{x} \geq 0$ такой, что

$$F(\lambda^0, \bar{x}) < F(\lambda^0, x^0). \tag{5.21}$$

Из (5.20) и (5.21) получаем

$$0 > F(\lambda^0, \bar{x}) - F(\lambda^0, x^0) \geq (\bar{x} - x^0)' \frac{\partial F(\lambda^0, x^0)}{\partial x} =$$
$$(\bar{x} - x^0)'\Delta^0 = \text{с учетом (5.18)} = \bar{x}'\Delta^0. \quad (5.22)$$

С другой стороны $\Delta^0 \geq 0$ и $\bar{x} \geq 0$, следовательно, $\bar{x}'\Delta^0 \geq 0$.

Получили противоречие. Следовательно, не существует такого $\bar{x} \geq 0$, что верно (5.21). Значит верно $F(\lambda^0, x) \geq F(\lambda^0, x^0)$ для любого $x \geq 0$.

Таким образом мы показали, что в случае гладкости и регулярности задачи (5.3) для существования решения задачи (5.3) необходимо существование седловой точки Лагранжа.

Объединяя лемму 8 с теоремой 12, приходим к следующей теореме.

Теорема 15 *(Кун-Таккер). Для оптимальности плана $x^0 \in X$ основной (гладкой) задачи выпуклого программирования с регулярным множеством планов необходимо и достаточно существование такого неотрицательного m-вектора $\lambda^0 \geq 0$, что пара $\{x^0, \lambda^0\}$ является седловой точкой функции Лагранжа.*

Сформулированная теорема Куна— Таккера занимает центральное место в теории выпуклого программирования. Она связывает решение задачи выпуклого программирование с наличием седловой точки у соответствующей функции Лагранжа. Значение теоремы Куна—Таккера состоит также в том, что она позволяет связать процесс решения оптимизационной задачи с поиском седловых точек функции Лагранжа, т. е., грубо говоря, с максимизацией этой функции по λ и минимизацией по x. На этом свойстве основаны могие численные методы решения задач выпуклого программирования.

Список литературы

[1] У.И. Зангвилл. Нелинейное программирование. — М.: Советское радио, 1973.

[2] С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. Линейное и выпуклое программирование Наука; Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1967 - Всего страниц: 460

[3] В.В. Гороховик. Конечномерные задачи оптимизации. Минск. “Издательский центр БГУ”. 2007.— 239 с.

[4] Yu. Nesterov and A. Nemirovskii. Interior Point Methods in Convex Optimization: Theory and Applications. SIAM, Philadelphia. 1994. p.415

[5] Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications Aharon Ben-Tal, Arkadi Nemirovski SIAM, 2001 - Всего страниц: 488

[6] Primal-Dual Interior-Point Methods Stephen J. Wright SIAM, 1997 - Всего страниц: 289

6 Нелинейное программирование

Нелинейное программирование — это раздел математики, в котором исследуются задачи оптимизации на множествах **конечномерного** пространства. В данной главе мы рассмотрим теоретические вопросы из нелинейного программирования. В следующей главе рассмотрим схемы вычислительных методов нелинейного программирования.

В общей постановке задача нелинейного программирования имеет чрезвычайно простую формулу:

$$f(x) \to \min, x \in X, \tag{6.1}$$

где X — некоторое множество из конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$, $f(x)$ — скалярная или векторная функция, определённая на X.

При такой общей постановке задачи не удаётся получить какие-либо интересные и полезные сведения о её оптимальных планах. Поэтому задача (6.1) исследуется при дополнительных предположениях относительно X и $f(x)$. Это порождает разнообразные классы задач, распространённые в приложениях, и допускает соответствующее классу более детальное описание свойств оптимальных планов.

Выделяют следующие классы:

1. Линейное программирование.

2. Квадратичное программирование.

3. Выпуклое программирование.

4. Задачи нелинейного программирования на безусловный экстремум.

5. Задачи нелинейного программирования на условный экстремум с ограничениями типа равенств.

6. Задачи нелинейного программирования на условный экстремум с ограничениями типа неравенств.

7. Задачи векторной оптимизации.

8. Задачи целочисленного программирования.

6.1 Задачи на безусловный минимум

Для общей постановки задачи нелинейного программирования универсальный метод поиска оптимального плана состоит в **переборе** значений целевой функции на множестве планов. Однако это метод редко используется даже при наличии современных мощных вычислительных средств (слишком велик перебор). Поэтому экстремальные задачи подвергаются, как правило, предварительному математическому исследованию.

Исследование задач направлено

1. на выявление свойств (необходимых условий оптимальности), которыми обладают оптимальные планы и которые позволяют уменьшить объем перебора;

2. на формирование соотношений (достаточных условий оптимальности), выполнение которых гарантирует оптимальность рассматриваемого плана.

Необходимое условие считается тем сильнее, чем меньше неоптимальных планов ему удовлетворяет.

Достаточное условие тем сильнее, чем шире класс задач, оптимальные планы которых ему удовлетворяют. Самые сильные условия необходимые условия оптимальности это те, которые совпадают с достаточными, образуя **критерий оптимальности**.

В оценке необходимых и достаточных условий ведущую роль играет их **конструктивность**, то есть насколько легко эти условия могут быть проверены.

Исследования по необходимым и достаточным условиям оптимальности развиваются в направлении углубления условий обоих типов с целью их сближения. При этом условию приписывают **порядок** k, если в его формулировке участвуют производные до k-го порядка от функций, входящих в формулировку задачи.

6.2 Задачи безусловной оптимизации

В данном подразделе рассмотрим задачи оптимизации, в которых нет дополнительных ограничений на n-вектор x, относительно которого ведется оптимизации. Такие задачи называются задачами безусловной оптимизации или задачами на безусловный экстремум.

6.2.1 Необходимое условие первого порядка. Стационарные точки

Рассмотрим задачу на безусловный минимум.

$$f(x) \to \min, x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.2}$$

где $f(x)$ — определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$.

Определение 19 *Точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется* **оптимальным планом** *(точкой абсолютного или глобального минимума), если*

$$f(x^0) = \min f(x), x \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 20 *Точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется локально оптимальным планом (точкой относительного или локального минимума), если при некотором $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения*

$$f(x^0) = \min f(x), \|x - x^0\| \le \varepsilon, x \in \mathbb{R}^n.$$

Каждый оптимальный план является локально оптимальным, но не наоборот!

Заметим, что в задачах выпуклого (и, следовательно, линейного) программирования каждый локально оптимальный план является оптимальным.

Обозначим через $\partial f(x)/\partial x$ вектор частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \mathrm{grad} f(x).$$

Теорема 16 *На каждом локально оптимальном плане x^0 задачи (6.2) выполняется* **условие стационарности***:*

$$\partial f(x^0)/\partial x = 0, \textit{то есть } \mathrm{grad}\ f(x^0) = 0; \tag{6.3}$$

Доказательство. Предположим противное: $\partial f(x^0)/\partial x \neq 0$. Положим $l = -\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} \neq 0$ и рассмотрим планы вида $x(t) = x^0 + t\ell$ при $t \geq 0$. Подсчитаем

$$\left.\frac{df(x(t))}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial f'(x(t))}{\partial x} \cdot \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{\partial' f(x^0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = -\|\frac{\partial f(x^0)}{\partial x}\| < 0.$$

По построению, $f(x(t))|_{t=0} = f(x^0)$. Из этого следует, что при достаточно малых $t > 0$ имеем $f(x(t)) < f(x^0)$, что противоречит оптимальности x^0.

Приведённое доказательство **конструктивно**, ибо легко проверяется и в случае невыполнения условий (6.3) позволяет перейти к плану с меньшим значением целевой функции.

Это необходимое условие оптимальности положено в основу многих численных методов.

Определение 21 *Решения x уравнения*

$$\mathrm{grad} f(x) = 0 \tag{6.4}$$

называются **стационарными точками** *функции $f(x)$.*

Из этого следует, что оптимальные планы задачи (6.1) находятся среди стационарных точек, а значит, что для построения решения задачи (6.1) достаточно найти все стационарные точки и проверить (перебрать) на них значения целевой функции.

Теорема 16 осуществляет редукцию задачи (6.1) к решению уравнения (6.4). Этот шаг также часто используется при численном решении.

6.2.2 Необходимое условие минимума второго порядка

Пусть теперь $f(x) \in C^{(2)}$. Найдём условие, позволяющее среди стационарных точек функции $f(x)$ отбросить те, которые не могут быть оптимальными планами, тем самым мы сократим перебор.

Теорема 17 *На каждом оптимальном плане x^0 задачи (6.2) матрица вторых производных целевой функции неотрицательно определена:*

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \dot{\geq} 0. \tag{6.5}$$

Доказательство. Предположим противное: существует такой $l \in \mathbb{R}^n$, $l \neq 0$, что $l' \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l < 0$. Рассмотрим множество планов $x(t) = x^0 + tl$ при $t \geq 0$.

Подсчитаем

1. $f(x(t))|_{t=0} = f(x^0)$;

2. $\frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=0} = \frac{\partial' f(x^0)}{\partial x} \cdot l\Big|_{t=0} = 0$;

3. $\frac{d^2}{dt^2} f(x(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(x(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt}\right)\Big|_{t=0} = l' \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l < 0.$

Из перечисленных пунктов следует, что при достаточно малых $t > 0$ имеет место неравенство $f(x(t)) < f(x^0)$, которое противоречит оптимальности x^0, а значит, верно (6.5).

6.2.3 Достаточное условие локального минимума

Идея усиления необходимых условий минимума за счёт привлечения производных высокого порядка ($k > 2$) не получила развития при $n \geq 2$ по двум причинам:

1. резко усложняется проверка условия;

2. существуют задачи, в которых привлечение любой высоты порядка не позволяет удалить из множества стационарных точек все неоптимальные.

Между тем небольшое изменение условий теоремы 17 приводит к **достаточному условию минимума**.

Теорема 18 *Стационарная точка x^* является* **локально** *оптимальной, если матрица вторых производных $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2}$ является положительно определенной:*

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} \dot{>} 0.$$

6.3 Задача на условный минимум. Ограничения типа равенств

6.3.1 Обобщённое правило множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу на условный минимум:

$$f(x) \to \min, \ g(x) = 0, \tag{6.6}$$

где $f(x) \in C^{(1)}$, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$, $g_i(x) \in C, i = 1, ..., m$.

Определение 22 *Вектор x —план задачи (6.6), если $g(x) = 0$. План x^0 называется* **оптимальным планом** *(точкой условно глобального минимума), если*

$$f(x^0) = \min_x f(x) \ \text{ при условии, что } \ g(x) = 0.$$

План x^0 называется **локально оптимальным** *(точкой условно локального минимума), если при некотором $\varepsilon > 0$ верно:*

$$f(x^0) = \min_x f(x) \ \text{ при условии, что } \ g(x) = 0, \|x^0 - x\| \leq \varepsilon.$$

Классическим методом исследования задач на условный минимум является **метод множителей Лагранжа**, который состоит в следующем.

По элементам задачи (6.6) составим **обобщённую функцию Лагранжа**

$$F(x, \overline{\lambda}) = \lambda_0 f(x) + \lambda' g(x),$$

где λ_0 — скаляр, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}^{m+1}$ — **обобщённый вектор Лагранжа**.

Теорема 19 *(Обобщённое правило множителей Лагранжа.) Для любого локально оптимального плана x^0 задачи (6.6) существует ненулевой обобщённый вектор Лагранжа $\bar{\lambda}^0 = (\lambda_0^0, \lambda^0) \neq 0$, такой что*

$$\frac{\partial F(x^0, \bar{\lambda}^0)}{\partial x} = 0, \tag{6.7}$$

т.е. x^0 — стационарная точка функции Лагранжа при $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^0$.

Доказательство. Условие (6.7) перепишем в виде

$$\lambda_0^0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial y_i(x^0)}{\partial x} = 0,\ (\lambda_0^0, \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0) \neq 0. \tag{6.8}$$

Условие (6.8) эквивалентно условию о том, что векторы

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x},\ \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x},\ i = \overline{1, m}, \tag{6.9}$$

линейно зависимы.

Если $m \geq n$, то очевидно, что векторы (6.9) линейно зависимы, следовательно, верно (6.7).

Пусть $m < n$. Предположим, что векторы (6.9) линейно независимы. Рассмотрим систему уравнений

$$f(x) = f(x^0) + \beta,\ g(x) \equiv 0$$

относительно неизвестных x. В силу того, что векторы (6.9) линейно независимы, из теоремы о неявной функции следует, что существует такая n-вектор-функция $x(\beta)$, $\beta \in [-\beta_0, \beta_0]$, что

$$f(x(\beta)) \equiv f(x^0) + \beta,\ g(x(\beta)) \equiv 0 \text{ при } \forall \beta \in [-\beta_0, \beta_0],$$

где $\beta_0 > 0$ — некоторое число.

Значит при $\beta < 0$ имеем

$$f(x(\beta)) < f(x^0),\ g(x(\beta)) = 0,$$

что противоречит оптимальности плана x^0. Полученное противоречие доказывает теорему.

При исследовании задач на условный минимум долгое время (со времён Лагранжа) используется классическая функция Лагранжа:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda' g(x). \tag{6.10}$$

Для функции Лагранжа (6.10) правило множителей Лагранжа, вообще говоря, неверно.

6.3.2 Классическое правило множителей Лагранжа

Выясним, когда при исследовании задачи (6.6) можно использовать классическую функцию Лагранжа (6.10).

Определение 23 *План x^0 называется обыкновенным, если на нем линейно независимы векторы*

$$\frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial g_m(x^0)}{\partial x}. \tag{6.11}$$

Теорема 20 *(Правило множителей Лагранжа) Если на локально оптимальном плане x^0 задачи (6.6) векторы (6.11) линейно независимы, то найдётся такой (единственный) вектор Лагранжа λ^0, что на паре $\{x^0, \lambda^0\}$ выполняются следующие условия-равенства (условия стационарности функции Лагранжа):*

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = 0. \tag{6.12}$$

Определение 24 *Точку x^* называют условно-стационарной, если существует такой m-вектор λ^*, что пара $\{x^*, \lambda^*\}$ — стационарная точка функции Лагранжа, т.е. имеют место равенства*

$$\frac{\partial F(x^* \lambda^*)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial F(x^* \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0. \tag{6.13}$$

Поиск условно-стационарных точек сводится к решению системы (6.13) из $m+n$ уравнений с $m+n$ неизвестными λ, x.

Таким образом правило множителей Лагранжа сводит решение задачи (6.6) к перебору условно-стационарных точек.

6.3.3 Необходимое условие минимума второго порядка. Достаточное условие оптимальности

Рассмотрим задачу (6.6), предполагая, что $f(x), \ g(x) \in C^{(2)}$ и что на оптимальном плане x^0 векторы (6.11) линейно независимы.

Теорема 21 *Пусть x^0 — локально оптимальный план задачи (6.6) и векторы (6.11) линейно независимы, λ^0 — соответствующий плану x^0 вектор множителей Лагранжа, на котором выполняются соотношения (6.12). Тогда квадратичная форма*

$$l' \frac{\partial^2 F(x^0, \lambda^0)}{\partial x^2} l \geq 0$$

неотрицательна на гиперплоскости, заданной уравнениями

$$l'\frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0,\ i = \overline{1, m}.$$

Теорема 22 *Пусть $f(x),\ g(x) \in C^{(2)}$. Для локальной оптимальности в задаче (6.6) условно стационарной точки x^* достаточно, чтобы при соответствующем ей векторе Лагранжа λ^* была положительна квадратичная форма*

$$l'\frac{\partial^2 F(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} l > 0$$

на гиперплоскости

$$l'\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x} = 0,\ i = \overline{1, m}.$$

6.4 Минимизация функций при ограничениях типа неравенств

Нелинейное программирование, как современный этап развития теории классических задач на максимум и минимум, оформилось во второй половине XX века в связи с систематическим исследованием экстремальных задач с ограничениями типа неравенств.

6.4.1 Необходимые условия оптимальности первого порядка

Под задачей минимизации с ограничениями типа неравенств в данном пункте будем понимать задачу

$$f(x) \to \min,\ g(x) \le 0, \tag{6.14}$$

где $f(x),\ g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x)) \in C^{(1)}$.

Определение 25 *Вектор x^0 — план, если $g(x^0) \le 0$.*

План x^0 — (глобально) оптимальный, если

$$f(x^0) = \min_x f(x) \text{ при условии, что } g(x) \le 0.$$

План x^0 — локально оптимальный, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f(x^0) = \min_x f(x)$ при условии, что $g(x) \le 0$, $||x - x^0|| \le \varepsilon$.

Говорят, что на плане x^* ограничение $g_i(x^*) \le 0$ активно (пассивно), если $g_i(x^*) = 0$ $(g_i(x^*) < 0)$.

Обозначим

$$I_a(x^*) = \{i \in \{1, \dots, m\}: \ g_i(x^*) = 0\}.$$

Для задачи (6.14) обобщённая функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, \bar{\lambda}) = \lambda_0 f(x) + \lambda' g(x),$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Теорема 23 *(Обобщённое правило множителей Лагранжа) Для любого локально оптимального плана x^0 задачи (6.14) существует такой ненулевой вектор Лагранжа $\bar{\lambda}^0 = \{\lambda_0^0, \lambda^0\}$, что выполняются условия:*

1. *неотрицательности: $\bar{\lambda}^0 \ge 0$;*

2. *стационарности: $\partial F(x^0, \bar{\lambda}^0)/\partial x = 0$;*

3. *дополняющей нежесткости: $g'(x^0)\lambda^0 = 0$.*

Определение 26 *Будем говорить, что план x^* обыкновенный, если линейно независимы векторы*

$$\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_i}, \ i \in I_a(x^*).$$

Если план x^0 обыкновенный, то вместо обобщённой функции Лагранжа и обобщённого правила множителей Лагранжа, можно использовать классическую функцию Лагранжа и классическое правило.

Теорема 24 *(Классическое правило множителей Лагранжа) Для любого обыкновенного локально оптимального плана x^0 задачи (6.14) существует единственный вектор Лагранжа λ^0, на котором выполняются условия:*

1. *неотрицательности: $\lambda^0 \ge 0$;*

2. *стационарности: $\partial F(x^0, \lambda^0)/\partial x = 0$;*

3. *дополняющей нежесткости: $g'(x^0)\lambda^0 = 0$.*

6.4.2 Необходимое условие оптимальности второго порядка

В этом пункте предположим, что $f(x),\ g(x) \in C^{(2)}$. Пусть x^0 — обыкновенный оптимальный план. Ограничение $g_i(x) \le 0$, активное на плане x^0, назовём жёстким (мягким), если $\lambda_i^0 > 0$ ($\lambda_i^0 = 0$). (Здесь мы предполагаем, что x^0 — обыкновенный оптимальный план и, следовательно, ему соответствует единственный вектор Лагранжа λ^0.)

Обозначим

$$I_a^+(x^0) = \{i \in \{1, \dots, m\} :\ g_i(x^0) = 0,\ \lambda_i^0 > 0\};$$

$$I_a^0(x^0) = \{i \in \{1, \dots, m\} :\ g_i(x^0) = 0,\ \lambda_i^0 = 0\}.$$

Теорема 25 *Пусть x^0 — обыкновенный локально оптимальный план задачи (6.14), λ^0 — соответствующий ему вектор Лагранжа. Тогда на множестве векторов l, удовлетворяющих системе*

$$l'\frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0,\ i \in I_a^+(x^0);$$

$$l'\frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} \le 0,\ i \in I_a^0(x^0),$$

неотрицательна квадратичная форма

$$l'\frac{\partial^2 F(x^0, \lambda^0)}{\partial x^2} l \ge 0.$$

6.4.3 Достаточное условие локальной оптимальности

Пусть в задаче (6.6) $f(x)$ и $g(x) \in C^{(2)}$.

Определение 27 *План x^* задачи (6.14) называется условно-стационарным, если для него существует такой m-вектор λ^*, что выполняются соотношения*

$$\partial F(x^*, \lambda^*)/\partial x = 0,\ g'(x^*)\lambda^* = 0,\ \lambda^* \ge 0.$$

Теорема 26 *Для локальной оптимальности условно-стационарного плана x^* в задаче (6.14) достаточно, чтобы неравенство*

$$l'\frac{\partial^2 F(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} l > 0$$

выполнялось на каждом векторе $l \ne 0$, удовлетворяющем системе

$$l'\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x} = 0,\ i \in I_a^+(x^*);$$

$$l'\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x} \leq 0,\ i \in I_a^0(x^*).$$

Список литературы

[1] В.В. Гороховик. Конечномерные задачи оптимизации. Минск. “Издательский центр БГУ”. 2007.— 239 с.

[2] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации: Учеб. пособие. Мн.: Изд-во БГУ, 1981.

[3] Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столяров Е.М. Методы оптимизации: Учеб. пособие. М.: Наука, 1978.

[4] Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. Spriger-Verlag New York, 1999. 636 p.

[5] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Издательство «Факториал», 2001.

[6] Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.

[7] Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.

7 Вычислительные методы нелинейного программирования

Теория нелинейного программирования (НЛП), занимаясь исследованием важнейших характеристик решений экстремальных задач, позволяющих во многих конкретных случаях получить достаточно полные сведения о результате, служит и фундаментом для построения разнообразных вычислительных методов.

Вычислительные методы НЛП делятся на прямые и непрямые.

Как правило, прямые методы генерируют последовательность векторов

$$x^1, x^2, \dots, x^k, \dots,$$

состоящую из последовательных приближений к решению x^0.

Итерация $x^k \to x^{k+1}$ строится по схеме

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k l^k,$$

где l^k — направление, $\theta_k \geq 0$ — шаг.

Методы отличаются друг от друга способами выбора l^k и θ_k.

Методы делятся на точные и приближенные.

В точных методах на каждой итерации план преобразуется в новый план. Приближенные методы преобразуют одну оценку (приближение) плана в другую.

Методы делятся на конечные и итерационные.

В конечных методах — задача решается за конечное число итераций, в итерационных — за бесконечное число итераций.

Итерационный метод называется сходящимся, если генерирует последовательность векторов, которая сходится к оптимальному плану.

Иногда рассматривают сходимость по целевой функции $f(x^k) \to f(x^0)$ или сходимость к условно стационарной точки $x^k \to x^*$.

Качество итераций в итерационном методе оценивается по скорости сходимости. Если верны неравенства

$$\|x^{k+1} - x^0\| \leq q\|x^k - x^0\|, \qquad 0 < q < 1, \qquad k \geq k_0,$$

то говорят о линейной скорости сходимости.

Если $\|x^{k+1} - x^0\| \leq q\|x^k - x^0\|^\alpha, \qquad k \geq k_0$, то говорят, что метод имеет сверхлинейную скорость, если $1 < \alpha < 2$, и квадратичную, если $\alpha = 2$.

Другие важные характеристики методов:

- требуемый объем оперативной памяти;
- устойчивость к ошибкам округления.

7.1 Методы безусловной минимизации

7.1.1 Аппроксимация функций

Основная идея решения нелинейных задач состоит в аппроксимации задачи, которая основана на аппроксимации элементов этой задачи.

В задаче на безусловный минимум

$$f(x) \to \min, x \in \mathbb{R}^n \tag{7.1}$$

единственным элементом является целевая функция $f(x)$.

Пусть $f(x) \in C^{(1)}$. Функция

$$f_1(x, x^*) = f(x^*) + (x - x^*)' \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \tag{7.2}$$

в окрестности точки $x = x^*$ совпадает с $f(x)$ с точностью до $o(\|x - x^*\|)$, что служит основанием назвать её аппроксимацией первого порядка (линейной аппроксимацией) функции $f(x)$ в окрестности точки x^*.

Если $f(x) \in C^{(2)}$, то функция

$$f_2(x, x^*) = f(x^*) + (x - x^*)' \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + \frac{1}{2}(x - x^*)' \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}(x - x^*) \tag{7.3}$$

называется аппроксимацией второго порядка (квадратичной аппроксимацией) функции $f(x)$ в в окрестности точки x^*, так как

$$|f(x) - f_2(x, x^*)| \leq o(\|x - x^*\|^2).$$

7.1.2 Методы первого порядка

В большинстве методов первого порядка последовательность $x^1, x^2, \ldots$ приближений к оптимальному плану генерируется по правилу

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k l^k,$$

где l^k — направление в точке x^k, $\theta_k \geq 0$ — шаг вдоль l^k.

Направление l^k выбирается из решения задачи

$$f_1(l^k, x^k) = \min_l f_1(l, x^k), \qquad S_k(l, x^k) \leq 1, \tag{7.4}$$

где $f_1(l, x^k) = l' \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}$, $S_k(l, x^k) \leq 1$ — некоторое нормировочное условие. Предполагается, что нормировочное условие таково, что задача (7.4) имеет решение.

Конкретные правила выбора нормировочного условия $S_k(l, x^k)$ и шага θ_k и определяют конкретный метод первого порядка.

Например, можно положить

$$S_k(l, x^k) = l'Dl + d'l, \qquad D = D(x^k)\dot{>}0, \tag{7.5}$$

где D – заданная положительно определенная матрица, d — заданный вектор. При $D = E$, $d = 0$ использование в (7.4) нормировочного условия (7.5) приводит к направлению

$$l^k = -\alpha\frac{\partial f(x^k)}{\partial x}, \alpha = \|\frac{\partial f(x^k)}{\partial x}\| > 0,$$

направлению антиградиента в точке x^k.

Численные методы, основанные на таких направлениях, называются **градиентными**.

Можно использовать и другие нормированные условия:

$$S_k(l, x^k) = \sum_{i=1}^{n}|\sum_{j=1}^{n} d_{ij}l_j - d_i|,$$

$$S_k(l, x^k) = \max_{1\leq i\leq n}|\sum_{j=1}^{n} d_{ij}l_j - d_i|.$$

Здесь d_{ij} – коэффициенты матрицы D, d_i — коэффициенты вектора d.

Перейдём ко второй задаче, возникающей на итерации $x^k \to x^{k+1}$: к проблеме выбора шага θ_k.

При решении этой проблемы используются три основных способа построения шага θ_k :

1. $\theta_k \equiv \theta > 0$,
2. $f(x^k + \theta_k l^k) = \min\limits_{\theta\geq 0} f(x^k + \theta l^k)$,
3. $f(x^k + \theta_k l^k) - f(x^k) \leq \varepsilon\theta_k \frac{\partial f'(x^k)}{\partial x} l^k$,

где ε — заданное число, $0 < \theta < 1$. Первый способ наиболее простой. В совокупности с $l^k = -gradf(x^k)$ он образует градиентный метод минимизации функции $f(x)$.

Второй способ в точности почти не осуществим, так как даже задача одномерной минимизации всегда решается приближённо. Если $l^k = -gradf(x^k)$, то мы получаем градиентный метод наискорейшего спуска.

В третьем способе выбор шага θ_k достигается, например, последовательным дроблением произвольного числа $\theta > 0$.

7.1.3 Методы второго порядка

В методах второго порядка для построения направления l^k используется задача

$$f_2(l^k, x^k) = \min_l f_2(l, x^k), \qquad S(l, x^k) \le 1, \tag{7.6}$$

где $f_2(l, x^k) = l' \frac{\partial f(x^k)}{\partial x} + \frac{1}{2} l' [\frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2}] l$, $\qquad S(l, x^k)$ — нормировочные условия.

Если $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \dot{>} 0$, то задача (7.6) имеет решения и без нормировочного условия.

Далее мы будим рассматривать только этот случай: $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \dot{>} 0$.

Можно проверить,что решение l^k задачи

$$2l' \frac{\partial f(x^k)}{\partial x} + l' [\frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2}] l \to \min, \qquad l \in \mathbb{R}^n$$

имеет вид $l^k = -A_k^{-1} b_k$, где $A_k = \frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2}$, $b_k = \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}$.

Вектор $l^k = -A_k^{-1} b_k$ называется **направлением Ньютона**.

При вычислении шага θ_k используют три способа, рассмотренные в пункте 2.

Если $l^k = -A_k^{-1} b_k$, и используем первый способ построения $\theta_k \equiv 1$, то получаем метод Ньютона.

Если направление l^k строится по правилам

$$l^k = -\widetilde{A}_k^{-1} \widetilde{b}_k,$$

где $\widetilde{A}_k$, $\widetilde{b}_k$ — аппроксимации матрицы A_k и вектора b_k, основанные на значениях $f(x)$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ из малой окрестности точки x^k, то методы называются методами Ньютоновского типа.

Если $\widetilde{A}_k, \widetilde{b}_k$ строятся только по значениям $f(x)$ и $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ на предыдущих итерациях $x^{k-s}, x^{k-s+1}, \ldots, x^k$, то методы называются **квазиньютоновскими**.

Распространены следующие типа построения аппроксимаций A_k, b_k в квазиньютоновских методах:

- $\widetilde{A}_k = \dfrac{\partial^2 f(x^1)}{\partial x^2}, \qquad \widetilde{b}_k = b_k,$
- матрица $\widetilde{A}_k$ аппроксимируется выражениями, составленными с помощью значений $f(x)$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$; $\widetilde{b}_k = b_k$ (квазиньютоновские методы первого порядка),
- матрица $\widetilde{A}_k$ и вектор $\widetilde{b}_k$ аппроксимируются только с помощью значений функции $f(x)$ (квазиньютоновские методы нулевого порядка).

7.1.4 Метод сопряжённых градиентов

Особую популярность среди квазиньютоновских методов приобрел метод сопряжённых градиентов. Этот метод основан на специальном методе решения уравнений:

$$b_k + A_k l = 0 \tag{7.7}$$

в котором матрица A_k^{-1} явно не используется.

В вычислительных методах линейной алгебры показывается, что решение l^k уравнения (7.7) совпадает с вектором m^n, построенным по рекуррентным формулам:

$$p^0 = -\nabla f_2(m^0, x^k), \qquad m^0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$m^{s+1} = m^s + \alpha_s p^s;$$

где

$$p^s = \beta_s p^{s-1} - \nabla f_2(m^s, x^k),$$

$$\alpha_s = -\frac{p^{s\prime} \nabla f_2(m^s, x^k)}{p^{s\prime} A_k p^s}, \;\; \beta_s = -\frac{||\nabla f_2(m^s, x^k)||^2}{||\nabla f_2(m^{s-1}, x^k)||^2},$$

$$s = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Здесь $\nabla f_2(l, x^k) = \partial f_2(l, x^k)/\partial l$.

Своё название эти методы получили по основному свойству градиентов p^s, $\quad s = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$p^{s\prime} A_k p^t = 0, \qquad 0 \le t \le s-1.$$

Это свойство послужило основой для построения многочисленных методов сопряжённых (двойственных) направлений.

7.2 Методы условной минимизации

7.2.1 Задачи с линейными ограничениями. Точные методы

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min, Ax = b, x \in Q \tag{7.8}$$

где $A \in R^{m \times n}, m \le n, rank A = m$.

Последовательные приближения к x^0 строятся по правилу

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k l^k, k = 1, 2, \ldots \quad (7.9)$$

где l^k — решение задачи:

$$f_1(l^k, x^k) = \min f_1(l, x^k), Al = 0, S_k(l, x^k) \leq 1. \quad (7.10)$$

Здесь $S_k(l, x^k) \leq 1$ — нормированное условие.

Если множество планов $X = \{x : Ax = b, x \in Q\}$ — компакт, то в качестве нормировочного условия можно взять условие:

$$x^k + l \in Q, \quad (7.11)$$

полученное из прямого ограничения задачи (7.8).

Решение задачи (7.10), (7.11) называется **условным антиградиентом** в точке x^k.

Методы, в которых в качестве l^k используется условные (анти)градиенты, а шаг θ_k строится по одному из указанных выше правил и с учётом условия $x^{k+1} = x^k + \theta_k l^k \in Q$ называются **методами условного градиента**.

Рассмотрим задачу (7.10) для случая, когда нормировачное условие имеет вид:

$$l'l \leq \alpha, \qquad l_j \geq 0, \text{ если } x_j^k = 0, \qquad j = \overline{1, n}. \quad (7.12)$$

(Здесь мы предполагаем, что $Q = \{x : x \geq 0\}$.)

Решение l^k задачи (7.10), (7.12) с достаточно малым $\alpha > 0$ называется проекцией антиградиента $-gradf(x^k)$ на множество допустимых планов. Исходя из (7.10), (7.12) легко получить формулы для вектора l^k. Вектор l^k по направлению совпадает с решением квадратичной задачи:

$$f_1(l, x^k) + l'l/2 \to \min, \ Al = 0, \ l_j \geq 0, \text{ если } x_j^k = 0, j = \overline{1, n}.$$

Методы, в которых в качестве l^k используется проекция антиградиента, а шаг θ_k выбирается одним из указанных выше способов с учётом дополнительного требования:

$$x^{k+1} \in Q$$

называются **методами проекции градиента**.

7.2.2 Случай нелинейных ограничений

Определение 28 *Линейной аппроксимацией в точке* $x = x^*, -\alpha \le g(x^*) \le 0, \alpha = \alpha(x^*) \ge 0$, *неравенства*

$$g(x) \le 0 \tag{7.13}$$

называется неравенство

$$g_1(x, x^*) = g(x^*) + (x - x^*)' \partial g(x^*)/\partial x \le \beta(x^*),\ \beta(x^*) \ge 0.$$

Если $g(x^*) < -\alpha(x^*)$, то линейной аппроксимацией неравенств (7.13) в точке $x*$ будет "отсутствие всякого ограничения".

Если функцию $g_1(x, x^*)$ заменить на $g_2(x, x^*) = g_1(x, x^*) + (x - x^*)' \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2}(x - x^*)$, то получим квадратичную аппроксимацию неравенства. Но такие аппроксимации используются в вычислительной практике крайне редко.

Определение 29 *Линейной аппроксимацией в точке* $x = x^*, |h(x^*)| \le \alpha, \alpha = \alpha(x^*) \ge 0$, *равенства*

$$h(x) = 0 \tag{7.14}$$

называются неравенства

$$-\beta_*(x^*) \le h_1(x, x^*) := h(x^*) + (x - x^*)' \partial h(x^*)/\partial x \le \beta^*(x^*),\ \beta(x^*),\ \beta_*(x^*) \ge 0.$$

Определение 30 Линейной аппроксимацией задачи

$$f(x) \to \min,\ g(x) \le 0,\ h(x) = 0, \tag{7.15}$$

где $f(x), g(x), h(x) \in C^{(1)}$, *в точке* x^k *называется задача:*

$$f_1(l, x^k) \to \min,\ g_1(l, x^k) \le \beta(x^k), \tag{7.16}$$

$$\beta_*(x^k) \le h_1(l, x^k) \le \beta^*(x^k), S_k(l, x^k) \le 1,$$

полученная в результате линейной аппроксимации целевой функции и функций ограничений исходной задачи.

При квадратичной аппроксимации задачи (7.15) с $f(x) \in C^{(2)}$ меняется **только** целевая функция $f_1(l, x^k)$ на $f_2(l, x^k)$. Ограничения остаются прежними.

Из решения задачи (7.16) находим направление l^k. Шаг θ_k определяется по описанным выше правилам и дополнительным требованиям на точность выполнения ограничений.

7.2.3 Методы штрафных функций

Пусть $X \in \mathbb{R}^n$ — множество планов некоторой задачи НЛП.

Определение 31 *Функцию* $\psi(x, r), x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^1$ *назовём* **внешней штрафной функцией** *множества* X, *если:*

$$\psi(x,r) = \begin{cases} 0, \ \textit{если } x \in X, \\ \to \infty \ \textit{при } r \to \infty, \ \textit{если } x \notin X. \end{cases}$$

Простейшие примеры штрафных функций:

$$\psi(x,r) = r\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x) \text{ для } X = \{x : g_i(x) = 0, i = \overline{1,m}\};$$

$$\psi(x,r) = r\sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(x), 0\} \text{ для } X = \{x : g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}\}.$$

Определение 32 **Внутренней штрафной(барьерной)** *функцией множества* X *называется функция:*

$$\phi(x,r) = \begin{cases} \infty, \ \textit{если } x \notin X, \\ \to 0, \ \textit{если } x \in X, \ x \notin \partial X, \ r \to 0, \\ \to \infty, \ \textit{если } x \in X, \ x \to \partial X. \end{cases}$$

где ∂X *— граница множества* X

Простейшие примеры барьерной функции множества $X = \{x : g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}\}$:

$$\phi(x,r) = \begin{cases} r\sum_{i=1}^{m} 1/g_i(x), \ \text{если } g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}, \\ \infty, \ \text{если } \exists \ g_{i_0}(x) > 0. \end{cases}$$

Физическая интерпретация штрафных функций: $\psi(x,r)$ — величина штрафа за удаление от множества X, $\phi(x,r)$ — величина штрафа за приближение к границе множества X, r — параметр, характеризующий относительную величину штрафа.

Метод (внешних) штрафных функций решение задачи на условный минимум

$$f(x) \to \min, \qquad x \in X \tag{7.17}$$

сводит к решению последовательности (при $r \to \infty$) задач безусловной минимизации

$$f(x_\psi(r)) + \psi(x_\psi(r), r) = \min\{f(x) + \psi(x,r)\}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Метод барьерных (внутренних штрафных) функций задачу (7.17) на условный минимум сводит к последовательности задач (при $r \to 0$) на безусловный минимум

$$f(x_\phi(r)) + \phi(x_\phi(r), r) = \min\{f(x) + \phi(x,r)\}, x \in \mathbb{R}^n.$$

При весьма слабых предположениях справедливы соотношения:

1. $f(x_\psi(r_2)) \leq f(x_\psi(r_1))$, если $r_2 > r_1$; $f(x_\phi(r_2)) \leq f(x_\phi(r_1))$, если $r_2 < r_1$;

2. $f(x_\phi(r)) \to f(x^0)$ при $r \to \infty$; $f(x_\phi(r)) \to f(x^0)$ при $r \to 0$;

3. $\psi(x_\phi(r), r) \to 0$ при $r \to \infty$; $\phi(x_\phi(r), r) \to 0$ при $r \to 0$.

Эти свойства лежат в основе обоснования методов штрафных функций.

Достоинство методов штрафных функций: задача на условный минимум приближается задачами на безусловный минимум.

Недостаток: при добавлении штрафной функции ухудшается структура целевой функции, которая теперь приобретает овражную структуру, что отрицательно сказывается на характеристиках методов безусловной минимизации.

7.3 Регуляризация некорректных задач минимизации

Пусть $f(x) \geq \beta, x \in X \subset \mathbb{R}^n, \beta > -\infty$, и ищется оптимальный план задачи:

$$f(x) \to \min, x \in X$$

с непустым множеством решений X^0.

Определение 33 *Последовательность* $x^k \in X, k = 1, 2, \dots$ *называется* **минимизирующей**, *если* $f(x^k) \to f^0 = \inf\limits_{x \in X} f(x)$, *при* $k \to \infty$.

Определение 34 *Говорят, что задача (7.17) корректна относительно* X^0, *если каждая минимизирующая последовательность* $x^k \in X, k = 1, 2, \dots$ *сходится к множеству* X^0:

$$\rho(x^k, X^0) \to 0, k \to \infty, \tag{7.18}$$

где $\rho(x^k, X) = \inf ||x^k - x||, x \in X,$ *— расстояние от точки* x^k *до множества* X.

Существуют задачи некорректные, минимизирующие последовательности которых не удовлетворяют свойству (7.18).

Пример некорректной задачи:

$$f(x) = x/(1 + x^2) \to \min, x \geq 0.$$

Эта задача имеет единственное решение $x^0 = 0$.

Ясно, что последовательность $x^k = k, k = 1, 2, \dots,$ является минимизирующей. Однако

$$x^k = k \not\to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Основное достоинство (свойство) корректных задач, важное с точки зрения вычислительных методов, состоит в том, что для них элементы минимизирующей последовательности можно брать в качестве приближения к решению.

Справедлива следующая теорема, дающая достаточное условие корректности задачи.

Теорема 27 *Пусть* $f(x) \in \mathbb{C}, x \in X \subset R^n$. *Если при некотором* $c, -\infty < c < \infty$, *множество* $X^c = \{x \in X : f(x) \leq c\}$ *компактно, то задача (7.17) корректна относительно* X^0.

Доказательство. Пусть $x^k \in X^c$, $k = 1, 2, ...,$ — минимизирующая последовательность. Обозначим через X^* множество предельных точек этой последовательности. Из компактности множества X^c следует, что X^* — непустое множество. Пусть

$x^* \in X^*$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, $f^0 \leq f(x^*) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = f^0$, т.е. $x^* \in X^0$. Следовательно свойство (7.18) имеет место. Теорема доказана.

Наряду с задачей (7.17) рассмотрим последовательность **регуляризованных** задач:

$$f(x, \alpha_k) = f(x) + \alpha_k \Omega(x) \to \min, x \in X, k = 1, 2, \dots \tag{7.19}$$

где $\alpha_k > 0, \Omega(x) \geq 0$ — функция, обладающая следующими свойствами:

1. $\Omega(x) \geq 0, \forall x \in X$

2. множество $\Omega_c = \{x : x \in X; \Omega(x) \leq c\}$ является компактным, т.е. из каждой последовательности $\{x_k\} \in \Omega_c$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящуюся к некоторой точке $z \in \Omega_c$.

Функция $\Omega(x)$, обладающая этими свойствами, называется **стабилизатором**.

Можно показать, что задача (7.19) является корректной.

Обозначим через $f^0(\alpha_k)$ — минимальное значение целевой функции задачи (7.19), через $x(\alpha_k, \epsilon_k)$ — её ϵ_k оптимальный план:

$$f^0(\alpha_k) \leq f(x(\alpha_k, \epsilon_k)) + \alpha_k \Omega(x(\alpha_k, \epsilon_k)) \leq f^0(\alpha_k) + \epsilon_k.$$

Теорема 28 *Если* $\alpha_k \to 0, \epsilon_k/\alpha_k \to a < \infty$ *при* $k \to \infty$,
то $\rho(x(\alpha_k, \epsilon_k), X^0) \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Обозначим $x^k = x(\alpha_k, \epsilon_k)$. Следующие неравенства очевидны

$$f^0 = f(x^0) \leq f(x^k) \leq f(x^k) + \alpha_k \Omega(x^k) \leq f^0(\alpha_k) + \epsilon_k \leq$$

$$\leq f(x^0) + \alpha_k \Omega(x^0) + \epsilon_k \leq f(x^k) + \alpha_k \Omega(x^0) + \epsilon_k, \tag{7.20}$$

где $x^0 \in X^0$.

Значит $\Omega(x^k) \leq \Omega(x^0) + \epsilon_k/\alpha_k$. По условию, $\epsilon_k/\alpha_k \to a < \infty$ при $k \to \infty$. Следовательно, все элементы последовательности $x^k, k \geq k^0$, $k^0 < \infty$, принадлежат некоторому множеству уровня $\{x \in X : \Omega(x) \leq \bar{a}\}$ функции $\Omega(x)$, которое по условию компактно. Из (7.20) имеем $f^0 \leq f(x^k) \leq f^0 + \alpha_k \Omega(x^0) + \epsilon_k$. Отсюда с учетом того, что $\alpha_k \to 0$, $\epsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, получаем, что $f(x^k) \to f^0$ при $k \to \infty$, т.е. последовательность $x^k, k = 1, 2, ...$, является минимизирующей.

Выше показано, что

$$x^k \in \{x \in X : \Omega(x) \le \bar{a}\},\ k \ge k^0,\ k^0 < \infty.$$

Обозначим через X^* множество предельных точек этой последовательности. Из компактности множества $\{x \in X : \Omega(x) \le \bar{a}\}$ следует, что X^* — непустое множество. Пусть $x^* \in X^*$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, $f^0 \le f(x^*) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = f^0$, т.е. $x^* \in X^0$. Следовательно $\rho(x^k, X^0) \to 0$ при $k \to \infty$.. Теорема доказана.

Отсюда делаем вывод, что в качестве приближенного решения некорректной задачи (7.17) можно взять приближенное решение задачи (7.19), где α_k — достаточно мало.

Список литературы

[1] Алексеева Е. В., Кутненко О. А., Плясунов А. В. Численные методы оптимизации: Учеб. пособие / Новосиб. ун-т. Новосибирск, 2008. 128 с.

[2] Pinter J. Global Optimization in Action (Continuous and Lipschitz Optimization: Algorithms, Implementations and Applications). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[3] Horst R., Pardalos P.M., ets. Handbook of Global Optimization. –Dordrecht: Kluwer, 1995. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.

[4] Strongin R.G., Sergeyev Ya.D. Global Optimization with Non-Convex Constraints. Sequential and Parallel Algorithms. –Dordrecht: Kluver Academic Publishers. The Netherlands, 2000. 728 pp.

[5] Сухарев А.Г., Тимофеев А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 325с.

[6] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

[7] Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной оптимизации. М.: Мир, 1972.

[8] Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.

[9] Численные методы условной оптимизации. / Под ред. Ф.Гилла и У.Мюррея. М.: Мир,1977.

[10] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

[11] Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975.

[12] Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. М.: Наука, 1989. 316 с.

[13] Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.

[14] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.

[15] Полак Э. Численные методы оптимизации. М.: Мир, 1974.

[16] Евтушенко Ю.Г., Жадан В. Г., “Барьерно-проективные методы решения задач нелинейного программирования”,Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 34:5 (1994), 669–684

8 Игровые методы в теории принятия

Подавляющее большинство социально-экономических решений приходится принимать с учетом противоречивых интересов, относящихся либо к различным лицам или организациям, либо к различным аспектам рассматриваемого явления, либо к тому и другому. В таких случаях невозможно применить традиционные методы оптимизации. В обычных экстремальных задачах речь идет о выборе решения одним лицом, и результат решения зависит от этого выбора, то есть определяется действиями только одного лица. В такую схему не укладываются ситуации, где решения, оптимальные для одной стороны, совсем не оптимальны для другой и результат решения зависит от всех конфликтующих сторон.

Конфликтный характер таких задач не предполагает вражды между участниками, а свидетельствует о различных интересах. Необходимость анализировать подобные ситуации вызвала к жизни специальный математический аппарат — *теорию игр*.

Теория игр представляет собой часть обширной теории, изучающей процессы принятия оптимальных решений. Она дает формальный язык для описания процессов принятия сознательных, целенаправленных решений с участием одного или нескольких лиц в условиях неопределенности и конфликта, вызываемого столкновением интересов конфликтующих сторон.

Теория игр, раздел математики, изучающий формальные модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта. При этом под конфликтом понимается явление, в котором участвуют различные стороны, наделённые различными интересами и возможностями выбирать доступные для них действия в соответствии с этими интересами. Отдельные математические вопросы, касающиеся конфликтов, рассматривались (начиная с 17 в.) многими учёными. Систематическая же математическая теория игр была детально разработана американскими учёными Дж. Нейманом и О. Моргенштерном (1944) как средство математического подхода к явлениям конкурентной экономики. В ходе своего развития теория игр переросла эти рамки и превратилась в общую математическую теорию конфликтов. В рамках теории игр в принципе поддаются математическому описанию военные и правовые конфликты, спортивные состязания, "салонные"игры, а также явления, связанные с биологической борьбой за существование.

В условиях конфликта стремление противника скрыть свои предстоящие действия порождает неопределённость. Наоборот, неопределённость при принятии решений (например, на основе недостаточных данных) можно интерпретировать как конфликт принимающего решения субъекта с природой. Поэтому И. т. рассматривается также как теория принятия оптимальных решений в условиях неопределённости. Она позволяет математизировать некоторые важные аспекты принятия решений в технике, сельском хозяйстве, медицине и социологии. Перспективен подход с позиций теории игр к проблемам управления, планирования и прогнозирования.

Целью теории игр является выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников в конфликтных ситуациях, то есть определение оптимальной стратегии каждого из них.

Практическое значение теории игр состоит в том, что она служит основой моделирования игровых экспериментов, в частности, деловых игр, позволяющих определять оптимальное поведение в сложных ситуациях.

Примеры практического и в том числе экономического содержания призваны, скорее всего, содержательно интерпретировать математические положения теории игр, чем указывать на фактические или возможные их приложения. От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что ведется по вполне определенным правилам. Реальные конфликты обычно трудно поддаются формальному описанию, поэтому любая игра является упрощением исходной задачи, в ней отражаются лишь основные, первостепенные факторы, отражающие суть процесса или явления.

8.1 Матричные игры

8.1.1 Постановка игровой задачи

Основное содержание теории игр состоит в изучении следующей проблемы: «Если n партнеров $P_1, P_2, ..., P_n$ играют в данную игру Г, то как должен вести партию i-ый игрок для достижения наиболее благоприятного для себя исхода?»

Здесь под термином *игра* понимается совокупность предварительно оговоренных правил и условий игры, а термин *партия* связан с частной возможной реализацией этих правил.

В дальнейшем предполагается, что в конце каждой партии игры каждый игрок P_i получает сумму денег v_i, называемую *выигрышем* этого игрока. При этом предполагается, что каждый игрок стремиться максимизировать сумму получаемых им денег.

В большинстве салонных игр общая сумма денег, теряемых проигравшими игроками, равна сумме денег, получаемых выигравшими партнерами. В этом случае для каждой партии

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = 0.$$

Число v_i может быть любого знака, при этом

$v_i > 0$ соответствует выигрышу,

$v_i < 0$ соответствует проигрышу,

$v_i = 0$ соответствует нейтральному исходу.

Игры, в которых алгебраическая сумма выигрышей равна нулю, называются *играми с нулевой суммой*.

Игры так же классифицируются по числу игроков и числу возможных ходов.

Далее игры можно подразделять на*кооперативные* и *некооперативные*. В кооперативных играх партнеры могут образовывать коалиции и играть как команды, тогда как в некооперативных играх каждого игрока интересует лишь его собственный результат.

Игры двух партнеров являются, очевидно, некооперативными.

Мы будем рассматривать только игры двух партнеров с нулевой суммой и конечным числом возможных ходов. Такие игры называются *прямоугольными* или *матричными*, поскольку они задаются платежной матрицей (или матрицей выигрышей)

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij}, & j = \overline{1,n} \\ & i = \overline{1,m} \end{pmatrix}.$$

Первый игрок имеет возможность сделать m выборов (m чистых стратегий), а второй – n выборов (n чистых стратегий). Если первый игрок выбирает i-ю чистую стратегию, а второй j-ю, то выигрыш первого (проигрыш второго) равен a_{ij}, Сумма выигрышей обоих игроков равна нулю.

Задача теории игр заключается в выборе принципов поведения игроков в каждой конкретной ситуации.

Решение игры – это выбор линии поведения игроков, обеспечивающих состояние равновесия, т.е. состояния к которому стремился бы каждый разумный игрок, сознавая, что отступление от этой линии может только уменьшить его выигрыш.

В большинстве конкретных ситуаций невозможно указать такие чистые стратегии игроков, которые обеспечивали бы ситуацию равновесия независимо от поведения противников. Однако теория позволяет выработать такую линию поведения, придерживаясь которой в каждой партии, каждый игрок может обеспечить ситуацию равновесия в среднем (для многих партий) независимо от поведения противника.

Если один из противников не будет в процессе последовательного повторения партий придерживаться правил оптимального выбора стратегий, то средний выигрыш другого противника может увеличиться.

8.1.2 Матричные игры. Смешанные стратегии

Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, каждая компонента которого указывает относительную частоту (вероятность), с которой соответствующая чистая стратегия используется в игре, называется *смешанной стратегией* первого игрока.

Вектор $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ - смешанная стратегия второго игрока. Ясно, что

$$x_i \geq 0, i = 1, m, y_j \geq 0, j = 1, n; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Чистая стратегия может быть может быть определена как смешанная стратегия, в которой все компоненты, кроме одной, равны нулю.

В дальнейшем будем обозначать чистые стратегии обоих игроков в виде единичных векторов

$$e_i = \left(\overbrace{\underbrace{0, 0, ..., 0, 1}_{i}, 0...0}^{m} \right), e_j = \left(\overbrace{\underbrace{0, 0, ..., 0, 1}_{j}, 0...0}^{n} \right).$$

Оптимальная стратегия игрока – это стратегия, обеспечивающая ему максимально возможный *гарантированный средний*выигрыш. (При этом предупреждается, что игра ведется без обмана и подглядывания).

Рассмотрим матричную игру, определяемую матрицей выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если первый партнер P_1 выбирает любую чистую стратегию i, то он уверен, что выиграет по крайней мере $\min\limits_j a_{ij}$.

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то мы имеем: $\min\limits_j a_{1j} = 0$, $\min\limits_j a_{2j} = 1$, $\min\limits_j a_{3j} = -1$.

Поскольку игрок P_1 может выбирать любые i, то естественно предполагать, что он выберет ту стратегию i, при которой его гарантированный выигрыш максимальный. Следовательно, при использовании чистой стратегии игрок P_1 может выиграть не менее

$$\max_i \min_j a_{ij} =: g_1.$$

Число g_1– гарантированный выигрыш игрока P_1, при использовании только чистых стратегий. В нашем примере

$$g_1 = 1 = a_{22} = 1.$$

Если второй игрок P_2 выбирает стратегию j, то наихудшее, что с ним может случиться – это проигрыш в размере $\max\limits_i a_{ij}$. Игрок P_2 может выбирать ту чистую стратегию j, при которой его проигрыш минимален. При выборе этой стратегии игрок P_2 гарантирует, что игрок P_1 не сможет выиграть больше, чем

$$g_2 := \min_j \max_i a_{ij}.$$

Для нашей матрицы $g_2 := \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 3$.

Отметим, что всегда

$$\min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x,y) \geq \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x,y)\,, \text{следовательно } g_2 \geq g_1.$$

Таким образом, в нашем примере при выборе только чистых стратегий игрок P_1 может гарантировать, что он выиграет не менее 1, (а хотел бы выиграть с гарантией больше!); игрок P_2 может гарантировать, что он не проиграет более 3, (а хотел бы проиграть с гарантией меньше!).

Если бы имело место равенство

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v, \tag{8.1}$$

то P_1 может быть уверен, что выиграет не менее v, а игрок P_2 может добиться того, что гарантированно не проиграет больше, чем v.

Матричная игра, для которой имеет место равенство (8.1), наилучшим образом разыгрывается партнерами P_1 и P_2, избирающими соответствующие чистые стратегии. Поскольку при любом отклонении игрока P_1 от этой стратегии его гарантированный выигрыш не увеличивается, (а возможно и уменьшится) и поскольку при каждом отклонении партнера P_2 от своей чистой стратегии он не уменьшит своего проигрыша (а возможно, увеличит его), указанные чистые стратегии естественно назвать оптимальными чистыми стратегиями.

Следующая матричная игра является одной из тех игр, которые имеют оптимальные чистые стратегии:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 3.$$

Поскольку не все матричные игры могут оптимально разыгрываться при помощи чистых стратегий, необходимо ввести понятие оптимальной смешанной стратегии.

Если игрок P_1 при длительном процессе игры выбирает смешанную стратегию $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, т.е. с вероятностью x_i выбирает i-ю чистую стратегию, а игрок P_2 при длительном процессе игры выбирает смешанную стратегию $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, т.е. с вероятностью y_j выбирает j-ю стратегию, то математическое ожидание (средний выигрыш) выигрыша игрока P_1 равен:

$$M\left(x, y\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j = x' A y. \tag{8.2}$$

Соответственно, выигрыш игрока P_2 при этом равен $-M\left(x, y\right)$, т.е. его проигрыш равен $M\left(x, y\right)$.

Функция $M\left(x, y\right)$ называется *функцией платежей.*

Говорят, что ***игра имеет решение в смешанных стратегиях***, если существует такие стратегии x^*, y^* и число v, что при любых смешанных стратегиях x, y выполняется соотношения

$$M\left(x, y^*\right) \le v \le M\left(x^*, y\right). \tag{8.3}$$

Полагая в (8.3) $x = x^*, y = y^*$, получим

$$v = M\left(x^*, y^*\right). \tag{8.4}$$

Число v называется ***ценой игры***.

Неравенство (8.3) означает, что если игрок P_1 будет использовать смешанную стратегию x^* (при длительном процессе игры), то его гарантированный выигрыш равен v, так как при любом y имеем

$$v \leq M\left(x^{*}, y\right).$$

Для игрока P_2 соотношение (8.3) означает, что если игрок P_2 будет придерживаться стратегии y^*, то не проиграет больше, чем v, так как при каждом выборе смешанной стратегии x игроком P_1, имеем

$$M\left(x, y^{*}\right) \leq v.$$

Стратегии x^*, y^*, удовлетворяющие (8.3) называются *оптимальными стратегиями.*

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Игрок P_1 выбирает одну из двух сторон монеты. Игрок P_2, не зная выбора первого игрока, так же выбирает одну из сторон монеты. После того, как оба игрока произвели свой выбор, игрок P_2 платит 1\$ игроку P_1, если выбранные сторону совпали, и -1\$ - в противном случае, т.е. в противном случае игрок P_1 платит игроку P_2 1\$. (Т.е. игрок P_1 играет на максимум, а игрок P_2 на минимум).

Запишем матрицу платежей

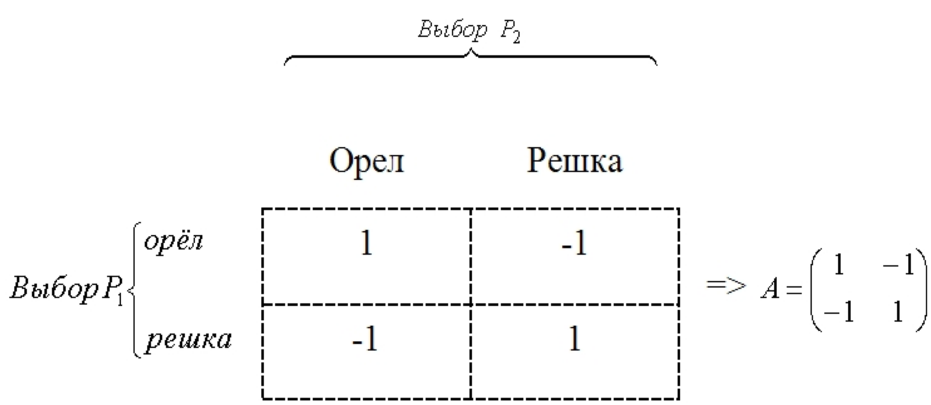


Рис. 2:

Если бы игроки использовали только чистые стратегии (т.е. играли бы только один раз или играли много раз, но использовали один и тот же выбранный заранее фиксированный ход), то игрок P_1, может гарантировать себе выигрыш в размере

$$g_1 = \max_i \min_j a_{ij} = -1,$$

а игрок P_2 может гарантировать, что не проиграет более чем

$$g_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

Но первый игрок хотел бы выиграть больше, а второй проиграть меньше.

Предположим теперь, что игрокам разрешается использовать смешанные стратегии, т.е. предполагается, что игра повторяется много раз и каждый из игроков должен определить с какой частотой (вероятностью) он будет выбирать «орла» и с какой частотой «решку», так, чтобы «улучшить» свой гарантированный результат: для игрока P_1 это означает увеличить свой гарантированный выигрыш, а для P_2 это означает уменьшить свой гарантированный проигрыш.

Очевидно, что в данной простой игре оптимальными смешанными стратегиями будут

$$x^* = \left(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}\right), y^* = \left(y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}\right).$$

Игрок P_1 с вероятностью $\frac{1}{2}$ выбирает «орла», с вероятностью $\frac{1}{2}$ - «решку». Игрок P_2 поступает аналогично. При этом, при использовании стратегий x^*, y^* в длинном процессе игры игрок P_1гарантирует себе выигрыш (средний) $v = 0$ (это больше, чем $g_1 = -1!$), а игрок P_2 гарантирует себе, что не проиграет больше, чем $v = 0$ (это меньше, чем было раньше $g_2 = 1!$).

8.1.3 Пример 2. Игра «в жулика»

Эта игра является примером игры, которая на первый взгляд кажется беспроигрышной для каждого игрока, т.е. имеет цену $v = 0$, но на самом деле это не так.

Каждому из двух партнеров выдается по тузу бубен и треф.P_1получает так же бубновую двойку, а P_2 - трефовую. При первом ходе P_1 выбирает и откладывает одну из своих карт, и P_2 не знающий выбора карты партнером P_1, так же откладывает одну свою карту.

Если были отложены карты одной масти, выигрывает игрок P_1, в противном случае выигравшим считается игрок P_2. Размер выигрыша определяется картой, отложенной победителем (тузу приписывается 1 очко, двойке – 2 очка). Если отложены две двойки, выигрыш равен нулю. Матрица выигрышей этой игры имеет вид

	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$2\clubsuit$
$\diamondsuit$	1	-1	-2
$\clubsuit$	-1	1	1
$2\diamondsuit$	2	-1	0

Поскольку каждый элемент третьей строки не меньше соответствующего элемента первой строки, то игроку P_1 не имеет смысла использовать первую стратегию. Следовательно, можно считать, что $x_1 = 0$. В этом случае говорят, что третья стратегия доминирует над первой. После исключения первой строки матрица выигрышей имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку элементы второго столбца меньше либо равны элементам третьего столбца, то игроку P_2 нет необходимости использовать третью стратегию, следовательно $y_3 = 0$. Из матрицы удалим третий столбец. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Исследование данной матрицы показывает, что она не имеет седловой точки, следовательно данная игра не имеет решения в чистых стратегиях.

Рассмотрим смешанные стратегии. Пусть P_1 с вероятностью s выбирает вторую стратегию, тогда с вероятностью $(1 - s)$ он выбирает третью стратегию и его смешанная стратегия имеет вид

$$x = (x_1 = 0, x_2 = s, x_3 = (1 - s)).$$

Аналогично, дляP_2: пусть он с вероятностью p выбирает первую стратегию, тогда он с вероятностью $(1 - p)$ выбирает вторую стратегию. Его смешанная стратегия имеет вид

$$y = (y_1 = p, y_2 = (1 - p), y_3 = 0).$$

При этом цена игры равна $M(x, y) = (-3s + 2)p + (2s - 1)(1 - p) = \bar{M}(s, p)$. Надо найти такие s^*, p^*, $0 \le s^* \le 1$, $0 \le p^* \le 1$, что $\bar{M}(s, p^*) \le \bar{M}(s^*, p^*) \le \bar{M}(s^*, p)$.

Нетрудно проверить, что в нашем примере

$s^* = \frac{3}{5}$, $p^* = \frac{2}{5}$, следовательно $x^0 = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $y^0 = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$ и $M\left(x^0, y^0\right) = \frac{1}{5}$. Следовательно, эта игра выгодна для игрока P_1. Иными словами, если P_1 избирает свою оптимальную стратегию x^0, а серия игр достаточно длинна, то ему гарантирован, независимо от стратегии y, применяемой игроком P_2, выигрыш не менее, чем $M\left(x^0, y^0\right) = v^0 = \frac{1}{5}$.

Аналогично, если P_2 избирает свою оптимальную стратегию y^0, то при длительной игре он может быть застрахован от проигрыша, большего, чем v^0. (Если он отступит от своей стратегии y^0, то может проиграть больше). Если оба игрока изберут свои оптимальные стратегии, то можно предсказать вероятный исход игры.

Определение. Игра называется *симметричной*, если соответствующая ей матрица выигрышей является кососимметричной, т.е. $a_{ij} = -a_{ji}$.

Утверждение. Цена симметричной игры равна $v = 0$ и оптимальные стратегии обоих игроков совпадают.

Доказательство. Запишем функцию выигрыша для P_1 (проигрыша дляP_2):

$$M\left(x, y\right) = x' A y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j.$$

Легко проверить, что в случае кососимметричной матрицы A и $x = y$ имеем$M\left(x, x\right) = x' A x = 0$.Обозначим через x^0, y^0 оптимальные стратегии игроков P_1 и P_2 соответственно. Имеем

$$\max_x \min_y x' A y = \min_y {x^0}' A y = v.$$

Если P_2 использует любую свою стратегию y, то ${x^0}' A y \geq v$. Но при$y = x^0$ мы знаем, что ${x^0}' A x^0 = 0$, следовательно $0 \geq v$.

Аналогично для игрока P_1:

$$\min_y \max_x x' A y = \max_x x' A y^0 = v.$$

Если P_1 использует каждую свою стратегию x, то $x' A y^0 \leq v$. Для $x = y^0$ получаем ${y^0}' A y^0 = 0$. Следовательно $0 \leq v$.

Из полученных неравенств следует, что $v = 0$, следовательно, цена игры равна нулю и игроки имеют одинаковые смешанные стратегии. Что требовалось доказать.

Выше мы рассматривали два небольших примера и специальную (симметричную игру). Здесь мы смогли найти решения или описать свойства решений. А как поступить в общем случае? Каждая ли матричная игра имеет решение? И если имеет, то как его найти? Ответы на эти вопросы дадим в следующем параграфе.

8.1.4 Эквивалентность матричной игры и задачи линейного программирования

Сформулируем основную теорему теории игр.

Теорема 29 *Каждая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях, т.е. существуют такие смешанные стратегии x^0 и y^0 первого и второго игроков, соответственно, что при любых смешанных стратегиях x, y имеют место неравенства и равенства*

$$M\left(x, y^0\right) \leq M\left(x^0, y^0\right) \leq M\left(x^0, y\right).$$

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} M(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x, y) = M\left(x^0, y^0\right),$$

где

$$X = \left\{x \in R^m : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, m}\right\}, Y = \left\{y \in R^n : \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0, j = \overline{1, n}\right\}$$

- множества смешанных стратегий игроков P_1 и P_2, соответственно.

Пусть задана матрица A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Согласно определению, задача игрока P_1 заключается в том, чтобы найти такое максимальное число v и вектор $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in X$, что

$$M\left(x^0, y\right) \geq v, \text{ для } \forall y \in Y. \tag{8.5}$$

Рассмотрим ограничения (8.5) подробнее:

$$x^{0'} A y \geq v, \forall y \in Y. \tag{8.6}$$

Покажем, что (8.6) эквивалентно условиям

$$x^{0\prime} A e_j \geq v, j = \overline{1,n}. \tag{8.7}$$

(Отметим, что в (8.6) мы имеем континуум ограничений: для$\forall y \in Y$; в (8.7) мы имеем только n ограничений). Действительно, очевидно, что из (8.6) следует (8.7), так как $e_j \in Y, j = \overline{1,n}$. Покажем, что из (8.7) следует (8.6).

Пусть (8.7) имеет место. Рассмотрим $\forall y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y$. Правую и левую части каждого $j-$го неравенства (8.7) умножим на $y_j \geq 0$ и просуммируем все неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} x^{0\prime} A y_j e_j \geq \sum_{j=1}^{n} y_j v. \tag{8.8}$$

Учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, и $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, из (8.8) получаем (8.6). Эквивалентность (8.6) и (8.7) доказана.

Таким образом, мы пришли к тому, что задача игрока P_1 состоит в поиске таких чисел v и вектора x^0, которые являются решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} & v \to \max_{x,v} \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v, j = \overline{1,n}; \\ & \sum_{j=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Задача (8.9) является задачей линейного программирования.

Аналогично, рассуждая за второго игрока P_2, мы приходим к тому, что его задача состоит в нахождении такого минимального числа v и вектора $y^0 \in Y$, при которых

$$M\left(x, y^0\right) \leq v, \forall x \in X. \tag{8.10}$$

Можно показать, что (8.10) эквивалентно условиям $e_j^{\prime} A y^0 \leq 0, i = \overline{1,m}$. Следовательно задача игрока P_2 состоит в нахождении таких числа v и вектораy^0, которые являются решением следующей задачи

$$\begin{aligned} & v \to \min_{v,y}; \\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v, i = \overline{1,m}; \\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0, j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Задача (8.11) является задачей линейного программирования.

Легко проверить, что задачи (8.9) и (8.11) составляют пару двойственных задач! Следовательно, не нужно решать каждую из этих задач отдельно. Из теории двойственности следует, что достаточно решить, например, симплекс-методом одну из этих задач и по оптимальному плану решенной задачи легко восстановить оптимальный план второй задачи.

Таким образом, мы показали, что верна теорема.

Теорема 30 *Каждая матричная игра с платежной матрицей* $A = \begin{pmatrix} a_{ij}, & j = \overline{1,n} \\ & i = \overline{i,m} \end{pmatrix}$ *эквивалентна паре двойственных задач (8.9), (8.11).*

Рассмотрим теперь обратную задачу. Попытаемся представить данную задачу линейного программирования в форме матричной игры.

Каждой паре двойственных задач линейного программирования можно поставить в соответствующую матричную игру, цена и оптимальные стратегии которой позволяют вычислить оптимальные прямой и двойственный планы (если они существуют!).

Подчеркнем, что в то время как матричные игры всегда имеют оптимальные стратегии (т.е. имеют решение), задачи линейного программирования могут и не иметь решений.

Рассмотрим пару двойственных задач

$$\begin{aligned} & c'x \to \max, \\ & Ax \le b, x \ge 0, \end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} & b'y \to \min, \\ & A'y \ge c, y \ge 0. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Здесь $A \in R^{m \times n}$. Построим игру с платежной матрицей

$$\mathit{\Pi} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & & -b \\ -A' & 0 & c \\ b' & -c' & 0 \end{pmatrix} \in R^{(n+m+1)\times(n+m+1)}. \tag{8.14}$$

Отметим, что матрица $\mathit{\Pi}$ является кососимметричной, следовательно, если рассматривать матричную игру с платежной матрицей $\mathit{\Pi}$, то стратегии (оптимальные) первого и второго игроков должны совпадать! Справедлива

Теорема 31 *Пара двойственных задач (8.12), (8.13) имеет решение тогда и только тогда, когда игра с платежной матрицей* (10) *имеет такую оптимальную стратегию*

$$u^* = \left(u_1^*, u_2^*, ..., u_{n+m}^*, u_{n+m+1}^*\right),$$

что $u_{n+m+1}^* > 0$*. При этом*

$$y_i^0 = \frac{u_i^*}{u_{n+m+1}^*}, i = \overline{1,m}; \quad x_j^0 = \frac{u_{m+j}^*}{u_{n+m+1}^*}, j = \overline{1,n}.$$

Таким образом, решение пары двойственных задач линейного программирования сведено к вычислению оптимальных стратегий (которые совпадают!) симметричной игры с платежной матрицейΠ (8.14).

8.1.5 Пример. Задача “Самолёты против зениток”

Найдём оптимальную смешанную стратегию некоторой конкретной игры. Предположим, что сторона А нападает на сторону В. У стороны А имеются два самолёта, несущие мощное поражающее средство. У стороны В имеются четыре зенитки, при помощи которых осуществляется оборона важного объекта. Чтобы объект оказался разрушенным, достаточно, чтобы к нему прорвался хотя бы один самолёт. Для подхода к объекту самолёты могут выбрать любой из четырёх воздушных коридоров (см. рис. 3).

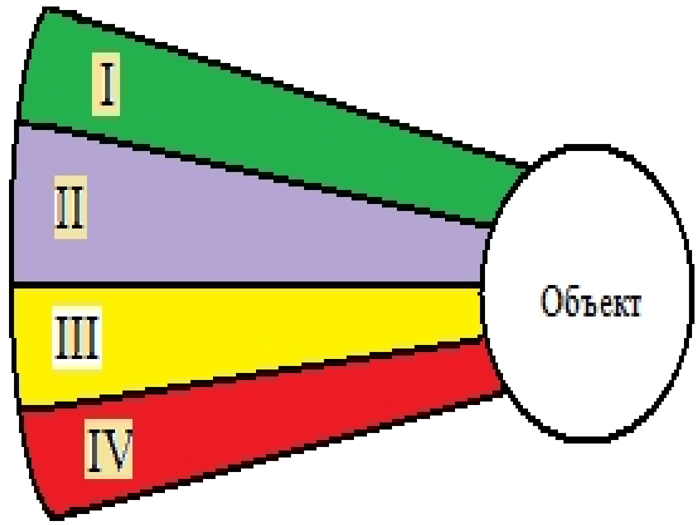


Рис. 3: Воздушные коридоры и объект

У стороны А есть две чистые стратегии: стратегия A_1 — самолёты посылаются в разных воздушных коридорах (безразлично, каких именно), стратегия A_2 — оба самолёта посылаются в каком-то одном из коридоров. Возможные стратегии стороны В таковы: B_1 — поставить по зенитке на каждый коридор, B_2 — поставить по две зенитки на какие-то два коридора (остальные два коридора остаются неохраняемыми, B_3 — поставить две зенитки на один из коридоров и по одной зенитке ещё на два коридора, B_4 — поставить три зенитки на один из коридоров и одну зенитку ещё на один коридор, B_5 — поставить все четыре зенитки на один из коридоров. Стратегии B_4 и B_5 заведомо невыгодны хотя бы потому, что три, а тем более четыре зенитки в пределах одного коридора не нужны, ведь у стороны А всего два самолета. Поэтому ограничимся стратегиями B_1, B_2, B_3.

Предположим, что сторона А выбрала стратегию A_1, сторона В — стратегию B_1. Ясно, что тогда ни один самолёт не прорвётся к объекту — выигрыш стороны А есть нуль (a_{11}=0). Пусть выбраны стратегии A_1 и B_2. В этой ситуации, какие бы два коридора ни выбирала сторона В для размещения пар зениток, у самолётов всегда будут шесть равновероятных вариантов и только один проигрышный. Таким образом, при выборе стратегий A_1 и B_2 вероятный выигрыш стороны А составляет 5/6 (a_{12}=5/6). Рассуждая подобным образом, найдём остальные элементы платёжной матрицы данной игры (см. табл. 6). Нижняя цена игры равна S, верхняя s. Седловой точки нет, оптимальное решение лежит в области смешанных стратегий.

Табл. 6. Платёжная матрица игры

B A	B_1	B_2	B_3	min
A_1	0	5/6	1/2	0
A_2	1	1/2	3/4	1/2
max	1	5/6	**3/4**	

Чтобы найти оптимальную смешанную стратегию, воспользуемся платёжной матрицей (см. табл. 6) и соотношениями (8.3) и (8.4). В результате получим следующую задачу линейного программирования:

$$\nu \to max,$$

$$x_2 \geq \nu,$$
$$\frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq \nu,$$
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \geq \nu,$$
$$x_1 + x_2 = 1, \;\; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

Эта задача имеет оптимальное решение $x_1^0 = 3/8$, $x_2^0 = 5/8$, $\nu^0 = 5/8$. Оптимальный план двойственноей задачи имеет вид

$y_1^0 = 1/4$, $y_2^0 = 3/4$, $y_3^0 = 0$. Итак, оптимальная смешанная стратегия стороны A предполагает использование стратегии A_1 с вероятностью 3/8 и стратегии A_2 с вероятностью 5/8.

Как воспользоваться этой рекомендацией на практике? Если игра происходит один раз, то стороне A следует, по-видимому, избрать стратегию A_2, ведь $p_2 > p_1$. Предположим, что игра совершается многократно (например, по отношению к многим объектам, подлежащим бомбардировке). Если игра повторяется раз N (N»1), то в 3N/8 случаях сторона A должна избрать стратегию A_1, а в 5N/8 случаях стратегию A_2.

Рассмотрим поведение стороны В. При выборе стороной А оптимальной смешанной стратегии её средний выигрыш оказывается в пределах между верхней ценой игры, раной s, и ценой игры v=5/8. При неразумном поведении стороны В выигрыш стороны А может оказаться равным верхней цене игры (и даже может стать больше). Если сторона В, в свою очередь, будет придерживаться оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш игрока А окажется равным цене игры v. Оптимальная смешанная стратегия стороны В сводится к тому, что эта сторона вообще не применяет стратегию $В_3$, стратегию $В_1$ использует с вероятностью $y_1^0 = 1/4$,, а стратегию $В_2$ с вероятностью $y_2^0 = 3/4$. [Тарасов Л. В. Мир, построенный на вероятности. – М.: Просвещение, 1984. – 191 с.].

При решении произвольной конечной игры размера $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$ рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока$\boldsymbol{A}$ (игрока $\boldsymbol{B}$) являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ рекомендуется симплексный метод, для игр размера $\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2}$, $\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{m}$, $\mathbf{m}\times\boldsymbol{2}$ возможно геометрическое решение.

8.2 Поиск равновесия по Нэшу

Перейдем к обсуждению важнейшей области математической экономики, а именно к задачам, к которым сводятся задачи поиска общего экономического равновесия, прогнозирование транспортных потоков и тарифов на грузоперевозки и многие другие.

8.2.1 Равновесие по Нэшу в играх n лиц

Равновесие Нэша (англ. *Nashequilibrium*) названо в честь Джона Форбса Нэша — так в теории игр называется тип решений игры двух и более игроков, в котором ни один участник не может увеличить выигрыш, изменив своё решение в одностороннем порядке, когда другие участники не меняют решения. Такая совокупность стратегий выбранных участниками и их выигрыши называются равновесием Нэша.

Концепция равновесия Нэша (РН) впервые использована не Нэшем; Антуан Огюст Курно показал, как найти то, что мы называем равновесием Нэша, в игре Курно. Соответственно, некоторые авторы называют его **равновесием Нэша-Курно**. Однако Нэш первым показал в своей диссертации по некооперативным играм в 1950-м году, что подобные равновесия должны существовать для всех конечных игр с любым числом игроков. До Нэша это было доказано только для игр с 2 участниками с нулевой суммой Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном (1947).

Отметим, что за свой результат Нэш получил Нобелевскую премию в области экономики в 1994 году.

Игровая постановка задачи. Рассмотрим бескоалиционную игру M лиц, в которой каждый из участников с номером $i \in \{1, ..., M\}$ характеризуется своим множеством допустимых стратегий $K_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}, m_i \geq 1$, и своей функцией полезности $\theta_i(x^1, ..., x^M) : \prod_{i=1}^{M} K_i \to \mathbb{R}$, значение которой он стремится максимизировать. Обозначим

$$N = \{1, ..., M\}, \quad \mathrm{x} = (x^j : j \in N), \quad \mathrm{x}^{N \setminus \{i\}} = (x^j : j \in N,\, j \neq i), \;\; K = \prod_{i=1}^{M} K_i.$$

Точка $\bar{\mathrm{x}} = (\bar{x}^1, ..., \bar{x}^M) \in K$ называется точкой равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре M лиц $\mathrm{NE}(K, \theta)$, если для всех ее участников $i \in N$ имеют место следующие неравенства

$$\theta_i(\bar{x}^i, \bar{\mathrm{x}}^{N \setminus \{i\}}) \geq \theta_i(x^i, \bar{\mathrm{x}}^{N \setminus \{i\}}) \quad \forall x^i \in K_i,$$

т.е. ни один из них не может в одиночку улучшить значение своей функции полезности.

Следующий результат о сведении задачи поиска равновесия по Нэшу к некоторому вариационному неравенству может быть легко установлен суммированием необходимых условий оптимальности первого порядка для задач максимизации функции полезности каждого из участников игры. При этом полное допустимое множество в задаче решения вариационного неравенства представляет собой декартово произведение множеств допустимых стратегий участников игры.

Теорема 32 *Если для всех $i = 1, ..., M$ множества K_i — непустые замкнутые выпуклые подмножества $\mathbb{R}^{m_i}$, $m_i \geq 1$, и функции полезности всех игроков $\theta_i : K \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы и псевдовогнуты по x^i, то точка $\bar{\mathrm{x}} = (\bar{x}^1, ..., \bar{x}^M) \in K$ будет точкой равновесия по Нэшу в том и только в том случае, когда*

$$\sum_{i=1}^{M} F_i(\bar{\mathrm{x}})^T(x^i - \bar{x}^i) \geq 0 \quad \forall \mathrm{x} \in K,$$

т. е. когда эта точка является решением вариационного неравенства VI(K,F) (см. определения в следующем пункте), определяемого множеством K и отображением

$$F = (F_i : i \in N), \quad F : K \to \prod_{i=1}^{M} \mathbb{R}^{m_i}, \tag{8.15}$$

где

$$F_i : K \to \mathbb{R}^{m_i}, \;\; F_i(\mathrm{x}) = -\nabla_{x_i}\, \theta_i(\mathrm{x}). \tag{8.16}$$

Таким образом, задача поиска равновесия по Нэшу весьма естественно формулируется в терминах теории вариационных неравенств. Существование и единственность равновесия по Нэшу может быть установлена при помощи результатов, описанных в[] .

Напомним определение псевдовогнутой функции $f(x)$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть функция $f(x)$ определена на выпуклом множества $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ и дифференцируема по всем направлениям, т.е. для любых $x \in G$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существент

$$f'(x, s) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x + ts) - f(x)}{t}.$$

Функция $f(x)$ называется псевдовыпуклой по x на G, если для любых $x_0 \in G$ и $x \in G$ из неравенства $f'(x_0, x - x_0) \geq 0$ следует неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Отметим, что если функция $f(x)$ является выпуклой и непрерывно-дифференцируемой на выпуклом множестве G, то она является и псевдовыпуклой на G.

Функция $f(x)$, $x \in G$, называется псевдовогнутой, если функция $\bar{f}(x) := -f(x)$, $x \in G$, является псевдовыпуклой.

Теорема 33 *Пусть все K_i — непустые компактные выпуклые подмножества $\mathbb{R}^{m_i}$, $m_i \geq 1$, и функции полезности всех игроков $\theta_i : K \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы и псевдовогнуты по x^i, $i = 1, ..., M$. Тогда решение задачи NE(K, θ) существует.*

8.2.2 Вариационные неравенства.

Пусть X – непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и F — некоторое отображение из X в $\mathbb{R}^n$. Задача решения вариационного неравенства, обозначаемая в дальнейшем VI(X,F), состоит в отыскании вектора $\bar{x} \in X$ такого, что

$$F(\bar{x})'(x - \bar{x}) \geq 0 \quad \text{для всех} \;\; x \in X. \tag{8.17}$$

Обычно полагают, что множество X замкнуто и выпукло, в приложениях оно часто оказывается полиэдральным.

Если $F(x) = \nabla w(x)$ – градиент вещественной дифференцируемой функции $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и множество X выпуклое, то VI(X,F) представляет собой просто перезапись необходимых условий оптимальности первого порядка для задачи

$$\min \;\, w(x), \;\; \text{s.t.} \;\; x \in X.$$

Известно, что непрерывно дифференцируемое отображение F является градиентом некоторой функции $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда его якобиан ∇F симметричен при всех $x \in \mathbb{R}^n$. В этом случае

$$w(x) = \int_0^1 F(x^* + t(x - x^*))^T (x - x^*) dt,$$

где x^* – произвольный фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$. Таким образом, симметричность ∇F является тем ключом, который позволяет переформулировать VI(X,F) как обычную оптимизационную задачу.

В общим случае указанная выше переформулировка является редким исключением. В таких случаях для решений вариационных неравенств можно воспользоваться методами, специально предназначенными для этой цели. Такие методы описаны и обоснованы в работах [7, 8].

Необходимость численного решения задач о равновесии по Нэшу была и остается главным побудительным мотивом развития алгоритмов для задач о дополнительности и вариационных неравенств.

Перейдем к рассмотрению содержательных игровых постановок экономического характера.

8.2.3 Экономическая модель Нэша-Курно производства распределения

Среди многочисленных практических приложений понятия равновесия по Нэше наиболее известной является задача производства-распределения Нэша-Курно. В этой задаче однородный продукт производится несколькими производителями (фирмами), которые трактуются как игроки. Каждая фирма стремится максимизировать свою прибыль, решая оптимизационную задачу, которая состоит в определения количества произведенного и распределенного продукта в предположении, что количества произведенного и распределенного продукта другими фирмами являются входными параметрами этой оптимизационной задачи. В этом контексте равновесие по Нэшу — это такая ситуация, при которой ни одна фирма не может увеличить свою прибыль, изменяя в одностороннем порядке количества произведенного и распределенного ею продукта (т.е. изменяя только контролируемые ею параметры).

Опишем задачу производства-распределения Нэша-Курно с помощью сети, заданной множеством узлов I и множеством дуг $U \subseteq I \times I$.

Имеется M производителей однородной продукции. Каждый производитель f имеет пункты производства в подмножестве узлов $I_f \subseteq I$. Для дуги $(i,j) \in U$обозначим через x_{fij} количество продукта перевозимого фирмой f из пункта i в пункт j по дуге (i,j). Для пункта $i \in I_f$ через s_{fi} обозначим количество продукта, произведенного фирмой f в пункте производства i, через CAP_{fi} обозначим максимальное количество продукта, которое может быть произведено фирмой f в этом пункте и через $C_{fi}(s_{fi})$ стоимость производства s_{fi} единиц продукции фирмой f в пункте i. Аналогично через d_{fi} обозначим количество продукта, продаваемого (предназначенного для продажи) фирмой f в пункте i. Таким образом, общее количество продукта, предназначенного для продажи в пункте j равно

$$Q_j = \sum_{f=1}^{M} d_{fj}.$$

В узле $j \in I$ стоимость единицы продукции определяется обратной функций спроса $p_j(Q_j)$, которая зависит от общего количества продукта Q_j, доставленного всеми фирмами в этот пункт для продажи.

Стоимость транспортировки единицы продукта фирмой f по дуге $(i,j) \in U$ зависит от общего количества продукта, перевозимого этой фирмой по этой дуге, и задается функцией $c_{fij}(x_{fij})$.

Для каждого узла $i \in I$ обозначим через U_i^+ и U_i^-, соответственно, множество дуг из U начинающихся и заканчивающихся в узле i.
Каждая фирма f желает определить следующие переменные

$$\{d_{fj} : j \in I\}, \quad \{s_{fj} : j \in I_f\}, \quad \{x_{fij} : (i,j) \in U\}.$$

Обозначим все эти переменные, определяемые фирмой f, одним общим вектором параметров x^f

$$x^f = (d_{fj}, j \in I; \quad s_{fj}, j \in I_f; \ \ x_{fij}, (i,j) \in U).$$

Ограничения, накладываемые на переменные x^f определяют множество допустимых стратегий (планов) производства-распределения K_f для фирмы f:

$$K_f = \{x^f \geq 0 : s_{fi} \leq CAP_{fi}, \forall i \in I_f; \ d_{fi} + \sum_{(i,j)\in U_i^+} x_{fij} = s_{fi} + \sum_{(j,i)\in U_i^-} x_{fji}, \forall i \in I_f;$$

$$d_{fi} + \sum_{(i,j)\in U_i^+} x_{fij} = \sum_{(j,i)\in U_i^-} x_{fji}, \forall i \in I \backslash I_f\}.$$

Обозначим через $N = \{1, ..., M\}$ множество индексов, определяющих номер фирмы и через $\mathrm{x} = (x^f : f \in N)$ общий вектор переменный всех фирм. Для заданного f будем использовать обозначение

$$\mathrm{x}^{N\backslash f} = (x^g : g \in N\backslash f)$$

для обозначения вектора переменных всех фирм, исключая фирму f.

Функция полезности фирмы f задается соотношением

$$\theta_f(\mathrm{x}) = \theta_f(x^f, \mathrm{x}^{N\backslash f}) = \sum_{j\in I} d_{fj}\, p_j(\sum_{g=1}^{M} d_{gj}) - \sum_{i\in I_f} C_{fi}\,(s_{fi}) - \sum_{(i,j)\in U} x_{fji}\; c_{fij}\,(x_{fji}).$$

Заметим, что эта функция зависит от стратегий других фирм только через переменные d_{gj} для $g \neq f$.

Для фирмы f задача максимизации функции полезности состоит в следующем: при фиксированных стратегиях $\bar{\mathrm{x}}^{N\setminus f} = (\bar{x}^g,\ g \in N\setminus f)$ других фирм найти свою стратегию $\bar{x}^f$, которая является решением задачи

$$\text{максимизировать } \theta_f(x^f, \bar{\mathrm{x}}^{N\setminus f}) \tag{8.18}$$

$$\text{при условии } x^f \in K_f.$$

Общая задача равновесия по Нэше состоит в поиске такого **общего** вектора $\bar{\mathrm{x}} = (\bar{x}^f : f \in N)$, что каждая его векторная компонента $\bar{x}^f$ является решение задачи максимизации функции полезности фирмы f, т.е. задачи (8.18).

Сформулируем описанную выше задачу нахождения точки равновесия по Нэшу $\bar{\mathrm{x}} = (\bar{x}^f : f \in N)$ в виде вариационного неравенства.

Как уже обсуждалось выше, для этого надо потребовать, чтобы для каждой фирмы $f \in N$ ее функция полезности $\theta_f(\mathrm{x}) = \theta_f(x^f, \mathrm{x}^{N\setminus f})$ была вогнутой (псевдовогнутой) по переменной x^f.
Нетрудно показать, что это будет иметь место при выполнении достаточно типичных для экономических задач предположений, например, таких как

А) каждая обратной функций спроса $p_j(Q_j)$ является убывающей;

Б) функция выручки $Q_j p_j(Q_j)$ является вогнутой по Q_j;

В) каждая функция $C_{fi}(s_{fi})$ является выпуклой по s_{fi};

Г) каждая функция транспортных расходов $x_{fij}\ c_{fij}(x_{fij})$ является выпуклой по x_{fij}.

При выполнении этих предположений, согласно Теореме 32 задача поиска точки равновесия по Нэшу эквивалентна вариационному неравеству

$$\mathrm{F}(\bar{\mathrm{x}})^T(\mathrm{x} - \bar{\mathrm{x}}) \geq 0 \quad \forall \mathrm{x} \in K,$$

где $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_f : f \in N), \quad \mathrm{F} : K \to \prod_{f=1}^{M} \mathbb{R}^{m_f}, \quad K = \prod_{f=1}^{M} K_f$

$$\mathrm{F}_f : K \to \mathbb{R}^{m_f},\ \ \mathrm{F}_f(\mathrm{x}) = -\nabla_{x_f}\ \theta_f(\mathrm{x}).$$

Интересно исследовать полученную функцию $\mathrm{F}(\mathrm{x})$, которая задает вариационное неравенство, соответствующее задаче Нэша-Курна, в частности матрицу Якоби этой функции. Мы будем предполагать, что все функции $p_j,\ C_{fi},\ \ c_{fij}$ дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам.

В функции

$$\theta_f(\mathrm{x}) = \theta_f(x^f, \mathrm{x}^{N\setminus f}) = \sum_{j\in I} d_{fj}\, p_j(\sum_{g=1}^{M} d_{gj}) - \sum_{i\in I_f} C_{fi}\,(s_{fi}) - \sum_{(i,j)\in U} x_{fji}\; c_{fij}\,(x_{fji})$$

две последние суммы зависят только от переменных, которыми распоряжается только данная фирма fи производные по этим переменным вычисляются просто. Поэтому сосредоточимся на первой сумме в функции $\theta_f(\mathrm{x})$, определяющей доход фирмы f.

Нетрудно получить следующее выражение

$$\frac{\partial^2\theta_f(\mathrm{x})}{\partial d_{gi}\partial d_{fj}} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j;$$
$$\frac{\partial^2\theta_f(\mathrm{x})}{\partial d_{gi}\partial d_{fj}} = p_j^{'}(Q_j) + d_{fj}p_j^{''}(Q_j), \quad \text{если} \quad i = j,\;\; g \neq f;$$
$$\frac{\partial^2\theta_f(\mathrm{x})}{\partial d_{gi}\partial d_{fj}} = 2p_j^{'}(Q_j) + d_{fj}p_j^{''}(Q_j), \quad \text{если} \quad i = j,\;\; g = f.$$

Здесь и далее для функции $z(y)$ используем следующие обозначения

$$z^{'}(y) = \frac{dz(y)}{dy},\;\; z^{''}(y) = \frac{d^2z(y)}{dy^2}.$$

Основываясь на этом выражении, мы будем представлять матрицу Якобы $J\mathrm{F}(\mathrm{x})$ функции $\mathrm{F}(\mathrm{x})$ в виде блочной матрицы $(J_{f,g}\,\mathrm{F}(\mathrm{x}) : f, g\; = 1, ..., M)$, где $J_{f,g}\,\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \frac{\partial^2\mathrm{F}(\mathrm{x})}{\partial x^f\partial x^g}$. Легко проверить, что каждый диагональный блок этой матрицы есть диагональная матрица, которую можно представить в виде

$$J_{f,f}\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} J_{fd}\mathrm{F}(\mathrm{x}) & 0 & 0 \\ 0 & J_{fs}\mathrm{F}(\mathrm{x}) & 0 \\ 0 & 0 & J_{fx}\mathrm{F}(\mathrm{x}) \end{bmatrix}.$$

Здесь первая матрица $J_{fd}\,\mathrm{F}(\mathrm{x})$ есть $|I| \times |I|$-диагональная матрица с диагональными элементами

$$-2p_j^{'}(Q_j) - d_{fj}\,p_j^{''}(Q_j), \quad j \in I.$$

Вторая матрица $J_{fs}\,\mathrm{F}(\mathrm{x})$ есть $|I_f| \times |I_f|$-диагональная матрица с диагональными элементами $C_{fi}^{''}(s_{fi}), \quad i \in I_f$.

Третья матрица $J_{fx}\,\mathrm{F}(\mathrm{x})$ есть $|U| \times |U|$-диагональная матрица с диагональными элементами $2c_{fij}^{'}(x_{fij}) + x_{fij}\,c_{fij}^{''}(x_{fij}), \quad (i, j) \in U$.

Аналогичным образом, недиагональные блоки $J_{f,g}\,\mathrm{F}(\mathrm{x}),\; f \neq g$ представимы в виде диагональной $(|I| + |I_f| + |U|) \times (|I| + |I_f| + |U|)$-матрицы

$$J_{f,g}\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} J_{fgd}\mathrm{F}(\mathrm{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

у которой только первые $|I|$ элементов могут быть отличными от нуля и имеют вид

$$-p_j^{'}(Q_j) - d_{fj}\, p_j^{''}(Q_j), \quad j \in I.$$

Следовательно, матрица Якоби $J\mathrm{F}(\mathrm{x})$ является сильно разреженной.

В частном случае, когда каждая функция спроса $p_j(Q_j)$ линейна по Q_j, и следовательно, ее вторая производная тождественно равна нулю, получаем $J_{f,g}\,\mathrm{F}(\mathrm{x}) = J_{g,f}\,\mathrm{F}(\mathrm{x})$ для всех $f \neq g$. Значит в этом случае матрица Якоби $J\mathrm{F}(\mathrm{x})$ – симметричная матрица. Следовательно, согласно результат предыдущего пункта, в этом случае задача Нэша-Курно эквивалентна некоторой задаче максимизации на допустимом множестве K.

Эта задача имеет вид

$$\max\ w(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in K, \tag{8.19}$$

где

$$w(\mathrm{x}) = \int_0^1 \mathrm{F}(\mathrm{x}^* + t(\mathrm{x} - \mathrm{x}^*))^T(\mathrm{x} - \mathrm{x}^*)dt,$$

x^* — любой вектор из $\mathbb{R}^m$, $m = \sum_{f=1}^{M} |I_f| + M(|I| + |U|)$.

В этом случае точку равновесия по Нэшу

$$\bar{\mathrm{x}} = (\bar{x}^1, ..., \bar{x}^M), \ \bar{x}^f = (\bar{d}_{fj}, j \in I; \ \ \bar{s}_{fj}, j \in I_f; \ \bar{x}_{fij}, (i,j) \in U), \ f = 1, ..., M,$$

можно найти, решая задачу (8.19). Для этой цели можно использовать известные методы решения задач квадратичного или нелинейного программирования.

В общем случае, когда функция спроса $p_j(Q_j)$ нелинейна по Q_j, нет естественной оптимизационной задачи, определенной на этом же допустимом множестве планов, чьи стационарные точки совпадали бы с точками равновесия по Нэшу в рассматриваемой задаче. В таких случаях для решений вариационных неравенств можно воспользоваться методами, специально предназначенными для этой цели. Такие методы описаны и обоснованы в работах [7, 8].

Таким образом, в этом разделе мы показали, что решение матричных игр сводится к решению стандартной задачи линейного программирования. Поиск решения в виде равновесие по Нэшу в неантагонистических играх n лиц во многих случаях сводится к решению задач нелинейного программирования или вариационных неравенств. Заключении отметим, что фактическое решение некоторых классов бесконечномерный неантагонистических и антагонистических игр сводится к решению дифференциальных и интегральных уравнений. Разрабатываются приближённые и численные методы решения игр. Для многих игр оптимальными оказываются так называемые смешанные стратегии, то есть стратегии, выбираемые случайно (например, по жребию).

Теория игр, будучи теорией принятия решений, может рассматриваться как существенная составная часть математического аппарата операций исследования. Теория игр применяется в экономике, технике, военном деле и даже в антропологии. Основные трудности практического применения теория игр связаны с экономической и социальной природой моделируемых ею явлений и недостаточным умением составлять такие модели на количественном уровне.

Список литературы

[1] Дегтярев Ю.И. Исследование операций. М.: Высшая школа, 1986. 320 с.

[2] Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 708 с.

[3] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. 304 с.

[4] Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики - М.: МГУ, 2005, 272 с.

[5] Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения — Изд-во Лань, 2010, 446 с.

[6] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр — СПб: БХВ-Петербург, 2012, 432 с.

[7] Francisco Facchinei, Jong-Shi Pang. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Volume I. 2003 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg. P. 728

[8] Francisco Facchinei, Jong-Shi Pang. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Volume II. 2003 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg. P. 682.

[9] Christian Kanzow. Inexact semismooth Newton methods for large-scale complementarity problems// Preprint 249 January 2003 University of Wurzburg Institute of Applied Mathematics and Statistics Am Hubland 97074 Wurzburg Germany

[10] И.В.Коннов, И.А.Пастухов. Метод решения общей многозначной задачи дополнительности // Известия вузов. Математика 2011, №2, с. 46–53

[11] Теория игр, Оуэн Г. Издательство: Мир Год издания: 1971 Страниц: 229

[12] 1. Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики - М.: МГУ, 2005, 272 с.

[13] В.И. Бодров, Т.Я. Лазарева, Ю.Ф. Мартемьянов. Математические методы принятия решений: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004. 124 с.

[14] Автор: Крушевский А.В. Теория игр, Издательство: Высшая школа Год издания: 1977 Страниц: 216

[15] Aganagic M., Cottle R.W. A constructive characterization of Q0-matrices with nonnegative principal minors // Math. Progr. 1987. Vol.37, N 2. P.223–231.

[16] Ahn B.H. Computation of Market Equilibria for Policy Analysis: The Project Independed Evaluation Study (PIES) Approach. Garland, N.Y, 1979.

[17] Aubin J.P. Mathematical methods of game and economic theory. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[18] Bertsekas D.P., Gafni E.M. Projection methods for variational inequalities with application to the traffic assignment problem // Math. Prog. Study. 1982. Vol. 17. P. 139–159.

[19] Cottle R.W. The principal pivoting problem // Math. Progr. Ser. B. 1990. Vol.48, N3. P.369–386.

[20] Cottle R.W., Dantzig G.B. Complementarity pivote theory of mathematical programming // Linear Algebra and its Applications. 1968. Vol.1, N1. P.103–125.

[21] Cottle R.W., Habetler G.J., Lemke C.E. Quadratic forms semidefinite over convex cone // Kuhn H.W., ed. Proc. of the Princeton Symp. on Math. Progr. Princeton University Press, Princeton. N.J. 1970, P. 551–565.

[22] Dafermos S. Traffic equilibria and variational inequalities // Transportation Science. 1980. 14. P. 42–54.

[23] Eaves B.C. On the basic theorem of complementarity // Math. Progr. 1971. N 1. P.68–75.

[24] Eaves B.C. The linear complementarity problem // Management Science. Theory ser. 1971. Vol.17, N 9. P.612–634.

[25] Eaves B.C. Homotopies for computation of fixed points // Math. Progr. 1972. Vol.3. P. 1–22.

[26] Ferris M.C., Meeraus A., Rutherford T.F. Computing Wardropian equilibria in a complementarity framework // Optimization: methods and software. 1999. Vol.10. N5. P.669–686.

[27] Friesz T.L, Tobin R.L., Smith T.E. and Harker P.T. A nonlinear complementary formulation and solution procedure for the general derived demand network equilibrium problem // J. of Regional Science. 1983. 23. P. 337–359.

[28] Fukushima M. Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems // Math. Progr. 1992. Vol.53, N 1. P.99–110.

[29] Gabay D. and Moulin H. On the uniqueness and stability of Nashequilibria in noncooperative games // Bensoussan A., Kleindorfer P., Tapiero C.S., eds. Applied Stochastic Control in Econometrics and Managment Science. Amsterdam, 1980. P. 271–292.

[30] Garcia C.B., Zangwill W.I. Pathways to Solutions, Fixed Points and Equilibria. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1981.

[31] Harker P.T. A variational inequality approach for the determination of oligopolistic market equilibrium // Math. Progr. 1984. Vol.30. P. 105–111.

[32] Harker P.T. Predicting Intercity Freight Flows. VNU Science Press, Utrecht, The Netherlands, 1987.

[33] Harker P.T., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications // Math. Progr. Ser. B. 1990. Vol.48, N2. P.161–220.

[34] Karamardian S. Generalized complementarity problem // J. Optimiz. Theor. & Appl. 1971. N 8. P. 161–167.

[35] Karamardian S. The complementarity problem // Math. Progr. 1972. Vol.2, N 1. P.103–129.

[36] Kuhn H.W. Simplicial approximation of fixed points // Proc. of the National Academy of Sciences U.S.A. 1968. 61. P. 1238–1242.

[37] Kuhn H.W., Tucker A.W. Nonlinear programming. Proceedings of the Second Symposium on Mathematics Statistics and Probability. Berkeley, University of California Press, 1951. P. 481–492.

[38] Lawphongpanich S., Hearn D.W. Benders decompozition for variational inequalities // Math. Progr. 1990. Vol.48. N 2. P.231–248.

[39] Lemke C.E. Some pivote schemes for linear complementarity problem // Math. Progr. Study. 1978. Vol.27. P.15–35.

[40] Lemke C.E. and Howson J.T. Equilibrium points of bimatrix games // SIAM Review. 1964. 12. P. 45–78.

[41] Lions J.L. and Stampacchia G. Variational inequalities // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1967. 20. P. 493–519.

[42] Mathiensen L. Computation of econ omic equilibria by a sequence of linear complementarity problems // Math. Progr. Study. 1985. Vol.23. P. 144–162.

[43] Megiddo N. A monotone complementarity problem with feasible solutions but no complementary solutions // Math. Progr. 1977. Vol. 12. P. 131–132.

[44] Megido N., Kojima M. On the existence and uniqueness of solutions in nonlinear complementarity theory // Math. Progr. 1977. Vol. 12. P. 110–130.

[45] Minty G.J. On the Maximal Domain of a hhMonotoneii Function // The Michigan Math. J. 1961. Vol.8. N2. P. 135–138.

[46] Moreau J.J. Proximite et dualite dans un espace Hilberiten // Bull. of Soc. of Math. of France. 1965. 93. P. 273–299.

[47] Murty K.G. Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming. B., 1988.

[48] Nash J.F. Equilibrium points in n -person games // Proc. of the Nat. Acad. of Sciences. 1950. Vol. 36. P. 48–49.

[49] Neumann J., Morgenstern O. Theory of games and economic behavior. 3th ed., Princeton, 1953.

[50] Pang J.S. Solution of the general multicommodity spatial equilibrium problem by variational and complemetarity methods // J. of Regional Science. 1984. 24. P.403–414.

[51] Pang J.S., Chan D. Iterative methods for variational and complementarity problems // Math. Progr. 1982. Vol. 24. P. 284–313.

[52] Pang J.-S., Chandrasekaran R. Linear complementarity problem solvable by a polynomial bounded pivoting algorithm // Math. Progr. Study. 1987. Vol.25. Pt.2. P.13–27.

[53] Peng J.-M. Equivalence of variational inequality problems to unconstrained minimization // Math. Progr. 1997. Vol.78, N3. P.347–355.

[54] Scarf H.E. and Hansen T. Computation of Economic Equilibriua. Yale University Press, New Haven, CT, 1973.

[55] Stone J.C. Sequential optimization and complementarity techniques for computing economics equilibria // Math. Progr. Study. 1985. Vol. 23. P. 173–191.

[56] Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems. Edited by F.Giannessi and A.Maugeri. Plenum Press, N.Y., 1995.

9 Задачи оптимального управления

9.1 Введение

В этой главе рассматриваются задачи оптимального управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот класс экстремальных задач существенно отличается от рассмотренных: если в задачах минимизации функции конечного числа переменных искомая точка минимума являлась точкой n-мерного пространства, то в задачах оптимального управления искомая точка минимума представляет собой функцию, принадлежащую некоторому бесконечномерному функциональному пространству. Такие задачи имеют многочисленные приложения в механике космического полета, в вопросах управления электроприводами, химическими или ядерными реакторами, виброзащиты и т. д. Эффективным средством исследования задач оптимального управления является принцип максимума Понтрягина [587], представляющий собой необходимое условие оптимальности в таких задачах. Принцип максимума, открытый коллективом российских математиков во главе с академиком Л. С. Понтрягиным, наряду с методом динамического программирования представляют собой одно из крупных достижений современной математики и являются краеугольным камнем современной математической теории оптимального управления. Появление этих результатов стимулировало последующее бурное развитие теории экстремальных задач и методов их решения.

Сейчас теория оптимального управления переживает период бурного развития как в связи с наличием трудных и интересных математических проблем, так и в связи с обилием приложений, в том числе и в таких областях, как экономика, биология, медицина, ядерная энергетика и др.

9.2 Примеры задач оптимального управления

Приведем несколько конкретных задач оптимального управления.

Пример 1. Рассмотрим прямолинейное движение тела постоянной массы M под действием управляющего воздействия u, создаваемого установленным на теле двигателем. Обозначим через x координату центра масс тела и предположим, что никакие другие силы на тело не действуют. Тогда в соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения тела имеет вид

$$M\ddot{x}(t) = u(t).$$

Последнее уравнение эквивалентно системе двух уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad M\dot{x}_2(t) = u(t).$$

Пример 2. Движение плоского маятника, подвешенного к точке опоры при помощи жесткого невесомого стержня (рис. 4), как известно, описывается уравнением

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl\sin\theta = M(\tau),$$

где l — длина жесткого стержня маятника, m — масса, сосредоточенная в конце стержня, $I = ml^2$ — момент инерции, g — гравитационная постоянная (ускорение силы тяжести), $b > 0$ — коэффициент демпфирования, t — время, $M(\tau)$ — внешний управляющий момент, $\theta = \theta(t)$ — угол отклонения стержня от точки устойчивого равновесия. Если сделать замену переменной $t\tau\sqrt{mgl/I}$, то это уравнение можно привести к виду

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + \sin\varphi = u(t), \tag{9.1}$$

где

$$\varphi = \varphi(t) = \theta(t\sqrt{I/(mgl)}),\ \beta = b/\sqrt{Imgl},\ u(t) = M(t\sqrt{I/(mgl)})/(mgl).$$

Обозначим $x^1(t) = \varphi(t)$ (угол отклонения маятника), $x^2(t) = \dot{\varphi}(t)$ (скорость маятника). Тогда уравнение (9.1) запишется в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t),\ \dot{x}^2(t) = -\beta x^2(t) - \sin x^1(t) + u(t). \tag{9.2}$$

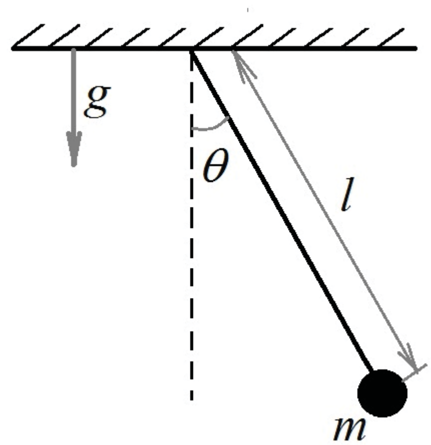


Рис. 4:

Пусть в начальный момент $t = 0$ маятник отклонился на угол $x^1(0) = x_0^1$ и имеет начальную скорость $x^2(0) = x_0^2$. Будем также считать, что функция $u(t)$ — управляющий момент (выбор которого может влиять на движение маятника) — удовлетворяет ограничению

$$|u(t)| \leq \gamma, \quad \gamma = const > 0, \ t \geq 0. \tag{9.3}$$

Здесь возможны следующие постановки задач оптимального управления: выбрать управление $u(t)$, удовлетворяющее условиям (9.3) так, чтобы:

1) за минимальное время T остановить маятник в одной из точек устойчивого равновесия, т. е. добиться выполнения условий

$$x^1(T) = 2\pi k, \quad x^2(T) = 0 \tag{9.4}$$

при некотором $k, = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ (задача быстродействия);

2) за минимальное время T добиться выполнения условия

$$(x^1(T))^2 + (x^2(T))^2 \leq \epsilon,$$

где $\epsilon > 0$ — заданное число;

3) к заданному моменту времени T величина $(x^1(T))^2 + (x^2(T))^2$, или $\int\limits_0^T (x^1(t))^2 dt$, или $\int\limits_0^T ((x^1(t))^2 + (x^2(t))^2) dt$, или $\max\limits_{0 \leq T} |x^1(t)|$, или $\max\limits_{0 \leq T} \max(|x^1(t)|, |x^2(t)|)$ принимала минимально возможное значение, или

4) в заданный момент T выполнялось равенство $x^2(T) = 0$, а величина $x^1(T) = 0$ была максимально возможной (задача о накоплении возмущений), или

5) к заданному моменту T добиться выполнения условий (9.4) и минимизировать величину
$\int\limits_0^T u^2(t) dt$ (условие (9.3) здесь может быть опущено).

Если колебание маятника ограничено какими-либо упорами, то в перечисленных задачах нужно еще требовать выполнения условия вида

$$|x^1(t)| \leq \mu, \quad \mu = const > 0.$$

На управление $u(t)$ вместо условия (9.3) (или наряду с условием (9.3)) могут накладываться ограничения вида

$$\int\limits_0^T u^2(t) dt \leq R,$$

где $R = const > 0$.

При изучении малых колебаний маятника часто полагают $\sin\varphi \approx \varphi$, sin (pnstp, и тогда уравнение (9.1) и эквивалентная ему система становятся линейными и будут иметь вид

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + \varphi = u(t)$$

и соответственно

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t), \;\; \dot{x}^2(t) = -\beta x^2(t) - x^1(t) + u(t).$$

Пример 3. Как известно, движение центра масс космического аппарата и расход массы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{r} = v, \; \dot{v} = gp/G + F, \; \dot{G} = -gq, \; 0 \le t \le T, \tag{9.5}$$

где t — время, $r = r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ — радиус-вектор центра масс аппарата, $v = v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$— скорость центра масс, $G == G(t)$ — текущий вес аппарата, g — коэффициент пропорциональности между массой и весом, $p = p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ — вектор тяги двигателя, $q = q(t)$ — расход рабочего вещества, $F = F(r, t) = (F_1, F_2, F_3)$ — вектор ускорения от гравитационных сил.

В каждый момент времени t движение космического аппарата характеризуется величинами $r(t), v(t), G(t)$, называемыми фазовыми координатами.

Пусть в начальный момент $t = 0$ фазовые координаты аппарата известны:

$$r(0) = r_0, \;\; v(0) = v_0, \;\; G(0) = G_0. \tag{9.6}$$

Величины $q = q(t)$, $p = p(t)$ являются управлением — задавая их по- разному, можно получить различные фазовые траектории (решения) задачи (9.5), (9.6). Конструктивные возможности аппарата, ограниченность ресурсов рабочего вещества накладывают на управление $q(t), p(t)$ ограничения, например, вида

$$p_{min} \le |p(t)| \le p_{max}, \; q_{min} \le |q(t)| \le q_{max}, \; 0 \le t \le T,$$

или $\int\limits_0^T q^2(t)dt \le R$, R = const > 0. Кроме того, на фазовые траектории задачи (9.5), (9.6) могут накладываться некоторые ограничения, вытекающие, например, из условий того, чтобы вес аппарата был не меньше определенной величины или траектория полета проходила вне определенных областей космического пространства (областей повышенной радиации) и др. Здесь возникают задачи выбора управлений $q(t), p(t)$ так, чтобы управления и соответствующие им траектории задачи (9.5), (9.6)удовлетворяли всем наложенным ограничениям, и кроме того, достигалась та или иная цель. Например, здесь возможны следующие задачи:

1) попасть в заданную точку или область космического пространства за минимальное время;

2) к заданному моменту времени попасть в заданную область пространства с заданной скоростью (совершить мягкую посадку, например) и с максимальным весом аппарата или с минимальной затратой энергии;

3) достичь определенной скорости за минимальное время и т. п.

Существует большое число прикладных задач оптимального управления, которые связаны с механикой полета летательных аппаратов в космосе и атмосфере, с работой электроприводов, химических и ядерных реакторов, с вопросами виброзащиты и амортизации, с математической экономикой и т. д.,

9.3 Постановка задачи оптимального управления

Постановка любой конкретной задачи оптимального управления включает в себя ряд факторов: математическую модель управляемого объекта, цель управления (именуемую иногда критерием качества), различного рода ограничения на траекторию системы, управляющее воздействие, длительность процесса управления, класс допустимых управлений и т.д. Остановимся на этих факторах подробнее.

9.3.1 Модели объекта

В зависимости от вида рассматриваемого явления и желаемой степени детализации его изучения могут быть использованы различные типы уравнений: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с последействием, стохастические уравнения, уравнения в частных производных и т.д. Предположим ради определенности, что эволюция объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad t_0 \le t \le t_*. \tag{9.7}$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор (или вектор состояния) системы, $f \in \mathbb{R}^n$ — заданная функция, $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n. Придавая управлению $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$, $t \in [t_0, t_*]$, различные возможные значения, получаем различные состояния $x(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, объекта, среди которых и выбирается оптимальное (то есть наилучшее) в том или ином смысле.

Пример. Рассмотрим прямолинейное движение тела постоянной массы M. Координаты тела будем обозначать через x. При движении тела его координата x изменяется во времени. Производная $\dot{x}$ представляет собой скорость движения тела, а $\ddot{x}$ – ускорение.

Будем предполагать, что на тело действую две внешние силы:

сила трения — $-s\dot{x}$ и

сила упругости — $-kx$.

Кроме того, будем предполагать, что тело снабжено двигателем. Развиваемую двигателем силу воздействия на тело обозначим через u. Таким образом, согласно второму закону Ньютона движение тела с течением времени будет описываться дифференциальным уравнением

$$M\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + u.$$

Как и в предыдущем примере, нетрудно показать, что это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{gathered} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{s}{M}x_2(t) + u(t). \end{gathered} \tag{9.8}$$

Значит в данном примере динамика системы описывается системой (9.8).

Данную систему можно представить в виде (9.7), положив

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)),\ f(t, x, u) = Ax + bu,\ x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R}^1,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{s}{M} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}.$$

9.3.2 Критерий качества (минимизируемый функционал)

Управление системой (9.7) осуществляется для достижения некоторых целей, которые формально записываются в терминах минимизации по u функционалов J, определяемых управлением u и траекторией x, где

$$J = \int_{t_0}^{t_*} F(t, x(t), u(t))dt + \varphi(t_*, x(t_*)) \to \min\,. \tag{9.9}$$

Здесь F и φ — заданные скалярные функции. Задача (9.7), (9.9) именуется задачей О. Больца; если $F \equiv 0$, то задачей А. Майера и, наконец, задачей Лагранжа при $\varphi \equiv 0$.

9.4 Ограничения на траекторию

В некоторых реальных ситуациях траектория системы не может принадлежать тем или иным частям пространства $\mathbb{R}^n$. Указанное обстоятельство находит отражение в ограничении вида $x(t) \in G(t)$, где $G(t)$ — заданная область в $\mathbb{R}^n$. В зависимости от конкретного типа этих ограничений выделяют различные классы задач управления.

В задачах с фиксированными концами начальное состояние $x(t_0)$ и конечное состояние $x(t_*)$ заданы. Если же $x(t_0)$ (или $x(t_*)$) не задано, то получаем задачу со свободным левым (правым) концом. Задача с подвижными концами — это задача, в которой моменты t_0 и t_* фиксированы, а векторы $x(t_0)$ и $x(t_*)$ принадлежат соответственно областям $G(t_0)$ и $G(t_*)$. В ряде случаев ограничения носят интегральный характер и имеют вид

$$\int_{t_0}^{t_*} F_i(t, x(t), u(t))dt \le 0,\ i = 1, ..., p.$$

Если в задаче (9.7), (9.9) начальное положение $x(t_0)$ и конечное $x(t_*)$ заданы, моменты начала движения t_0 и окончания t_* свободны, функция $\varphi \equiv 0$ и $F \equiv 1$, то получаем задачу о переводе системы (9.7) из заданного положения $x(t_0)$ в заданное положение $x(t_*)$ за минимально возможное время. Подобного рода задачи именуются задачами оптимальными по быстродействию.

9.4.1 Ограничения на траекторию

В некоторых реальных ситуациях траектория системы не может принадлежать тем или иным частям пространства $\mathbb{R}^n$. Указанное обстоятельство находит отражение в ограничении вида $x(t) \in G(t)$, где $G(t)$ — заданная область в $\mathbb{R}^n$. В зависимости от конкретного типа этих ограничений выделяют различные классы задач управления.

В задачах с фиксированными концами начальное состояние $x(t_0)$ и конечное состояние $x(t_*)$ заданы. Если же $x(t_0)$ (или $x(t_*)$) не задано, то получаем задачу со свободным левым (правым) концом. Задача с подвижными концами — это задача, в которой моменты t_0 и t_* фиксированы, а векторы $x(t_0)$ и $x(t_*)$ принадлежат соответственно областям $G(t_0)$ и $G(t_*)$. В ряде случаев ограничения носят интегральный характер и имеют вид

$$\int_{t_0}^{t_*} F_i(t, x(t), u(t))dt \leq 0, \ i = 1, ..., p.$$

Если в задаче (9.7), (9.9) начальное положение $x(t_0)$ и конечное $x(t_*)$ заданы, моменты начала движения t_0 и окончания t_* свободны, функция $\varphi \equiv 0$ и $F \equiv 1$, то получаем задачу о переводе системы (9.7) из заданного положения $x(t_0)$ в заданное положение $x(t_*)$ за минимально возможное время. Подобного рода задачи именуются задачами оптимальными по быстродействию.

9.4.2 Ограничения на управление

Информационные ограничения на управление зависят от того, какая именно информация о системе (9.7) доступна при выработке управляющего воздействия. Если вектор $x(t)$ недоступен измерению, то оптимальное управление ищется в классе функций $u(t)$, зависящих только от t. В этом случае оптимальное управление именуется программным. Если же вектор $x(t)$ известен точно при $t_0 \leq t \leq t_*$, то оптимальное управление ищется в виде $u(t, x(t))$ и называется синтезом оптимального управления (или управлением по принципу обратной связи). Отметим, что принцип обратной связи является одним из центральных принципов кибернетики [2]. Техническим примером реализации принципа обратной связи являются центробежные регуляторы И.И. Ползунова (1766) и Дж. Уатта (1784), авиационный автопилот Д. Ольховского (1912) и братьев Сперри (1914), гидравлический усилитель Л. Фарко (1873).

Кроме информационных ограничений возможен и другой тип ограничений, обусловленный ограниченностью ресурсов управления, имеющих вид $u(t) \in U(t)$, где $U(t) \subset \mathbb{R}^m$ — заданное множество.

Подчеркнем, что для детерминированных задач (то есть задач, в которых уравнения движения, критерий качества и ограничения известны точно) оптимальное значение критерия качества (9.9), реализуемое в классе программных управлений и управлений по принципу обратной связи, одно и то же.

9.5 Условия оптимальности

9.5.1 Принцип максимума [3]

Принцип максимума соответствует принципу Вейерштрасса и методу канонических уравнений Гамильтона в классическом вариационном исчислении.

Сформулируем необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для терминальной задачи оптимального управления вмда

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_*; \quad x(t_0) = x_0, \quad g(x(t_*)) = 0, \tag{9.10}$$

$$u(t) \in U, \quad \Phi(x(t_*)) \to \min .$$

Здесь $U \subset R^r$ — заданное множество, x_0 — заданное начальное положения системы, t_0 — заданный момент времени, $g(x), \Phi(x)$ — заданные $m-$вектор функция и скалярная функция. Требуется найти управление $u(t), t \in [t_0, t_*]$, которое переводит систему из заданного начального состояния x_0 на множество $X_* = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ в конечный (терминальный) момент времени t_* и при этом функция $\Phi(x(t_*))$ принимает минимальное значение.

Введем в рассмотрение скалярную функцию H

$$H(x(t), u(t), \psi(t)) = \psi'(t) f(x(t), u(t)),$$

где штрих $'$ — знак транспонирования, и с ее помощью запишем следующую систему дифференциальных уравнений для вспомогательной вектор-функции $\psi(t)$

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\partial H(x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x}. \tag{9.11}$$

Система (9.11) называется сопряженной системой, а вектор-функция $\psi(t)$ — решением сопряженной системы.

Теорема 34 *Предположим, что* $u(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, *— оптимальное управление, а* $x(t)$,$t \in [t_0, t_*]$, *— соответствующая траектория ему траектория. Тогда существует такое* $m-$*вектор* y, *что вдоль решения* $\psi(t)$,$t \in [t_0, t_*]$, *сопряженной системы (9.11) терминальным условие*

$$\psi(t_*) = -\frac{\partial \Phi(x(t_*))}{\partial x} - \frac{\partial g(x(t_*))}{\partial x} y, \tag{9.12}$$

$H(x(t), u, \psi(t))$ *достигает своего максимума по* $u \in U$ *в точке* $u(t)$

$$H(x(t), u(t), \psi(t)) = \max_{u \in U} H(x(t), u, \psi(t)) \;\; \textit{для почти всех } t \in [t_0, t_*]. \tag{9.13}$$

Найдем из соотношения (9.13) зависимость u от ψ, x, то есть

$$u = \tilde{u}(x(t), \psi(t)). \tag{9.14}$$

Далее подставим (9.14) в (9.10), (9.11). В результате получим краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $x(t)$ и $\psi(t)$, и вектора y, среди решений которой только и может находиться оптимальная траектория:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \tilde{u}(x(t), \psi(t))), \;\; t_0 \le t \le t_*; \;\; x(t_0) = x_0, \;\; g(x(t_*)) = 0,$$
$$\dot{\psi}(t) = \frac{\partial H(x(t), \tilde{u}(x(t), \psi(t)), \psi(t))}{\partial x}, \;\; \psi(t_*) = -\frac{\partial F(x(t_*))}{\partial x} - \frac{\partial g(x(t_*))}{\partial x} y.$$

Если оптимальная траектория $x(t)$ и вектор $\psi(t)$ найдены, то оптимальное управление дается выражением (9.14). Отметим, однако, что поскольку соотношения (9.10)-(9.13) суть лишь необходимые условия оптимальности, то необходимо дополнительное обоснование оптимальности траектории и управления, найденных из соотношений (9.10)-(9.13).

9.5.2 Метод динамического программирования [4]

Метод динамического программирования является аналогом метода Гамильтона-Якоби, в котором изучается все поле оптимальных траекторий. Опишем применение метода динамического программирования для задачи (9.10). Выберем и зафиксируем произвольный момент времени $t \in [t_0, t_*]$ и рассмотрим вспомогательную задачу управления (9.10) на отрезке $[t, t_*]$. Обозначим через $V(t, x)$ минимальное значение критерия качества во вспомогательной задаче при начальном условии $x(t) = x$, где x —

произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. При некоторых предположениях функция $V(t,x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \min_{u \in U} f(t,x,u) \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = 0.$$

$$t_0 \le t \le t_*, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{9.15}$$

$$V(t_*,x) = \varphi(x).$$

Решив задачу (9.15) и определив функцию $V(t,x)$, можно затем найти синтез оптимального управления $u(t,x)$ из соотношения

$$\min_{u \in U} f(t,x,u) \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = f(t,x,u(t,x)) \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}. \tag{9.16}$$

Возможность определять именно синтез оптимального управления является характерной чертой метода динамического программирования, особенно существенной в задачах управления при неполной информации. Использование метода динамического программирования при решении конкретных задач сопряжено с необходимостью решать нелинейное уравнение в частных производных (9.15), а также с необходимостью дополнительного исследования оптимальности управления, полученного из (9.16).

Выше была описана универсальная техника решения задач оптимального управления, основанная на применении принципа максимума или метода динамического программирования. Наряду с этими методами при исследовании специальных классов задач оптимального управления могут быть использованы специальные приемы, эффективные именно для данного класса задач. Преимущество этих специальных приемов состоит в том, что с их помощью иногда можно проще осуществить аналогичное исследование рассматриваемой конкретной задачи. Один из таких подходов, опирающийся на теорию двойственности выпуклых функций [5], эффективен для задач, линейных по фазовым координатам. При этом вычисление минимума критерия качества в исходной задаче сводится к вычислению максимума некоторого вспомогательного функционала. Это, в частности, дает возможность изучать задачи, в которых оптимального управления не существует. Другой подход, эффективный для линейных задач (то есть задач линейных и по фазовым координатам, и по управлениям), основан на использовании классической проблемы моментов [6]. Отмеченные выше трудности использования общих необходимых условий оптимальности также приводят к необходимости выделения конкретных классов задач, для которых оказывается возможным эффективное построение решения.

9.5.3 Задача об успокоении твердого тела

Одним из хорошо изученных классов задач оптимального управления являются задачи линейного оптимального быстродействия [3], а также некоторые задачи успокоения движения твердого тела (возникающие, например, в теории управления летательными аппаратами). Рассмотрим в качестве примера одну из них, именно задачу об успокоении твердого тела, вращающегося относительно центра масс O. Обозначим: Ox_i, $i = 1, 2, 3,$ — главные центральные оси инерции тела, x_i — проекция вектора кинетического момента x на ось Ox_i и A, B, C — главные центральные моменты инерции твердого тела. Управление u движением твердого тела осуществляется парой поворотных двигателей, которые можно расположить под любым углом относительно тела. Движение тела относительно центра масс описывается уравнениями Эйлера

$$\dot{x}_1(t) + \frac{C-B}{CB} x_2(t) x_3(t) = u_1(t),\ t \geq 0,$$

$$\dot{x}_2(t) + \frac{A-C}{AC} x_1(t) x_3(t) = u_2(t),\ t \geq 0, \tag{9.17}$$

$$\dot{x}_3(t) + \frac{B-A}{BA} x_1(t) x_2(t) = u_3(t),\ t \geq 0.$$

Тело считается успокоенным, если величина модуля кинетического момента не превосходит заданной величины $R \geq 0$. Предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ значение кинетического момента $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ задано, причем

$$||x(0)|| = \sqrt{x_1^2(0) + x_2^2(0) + x_3^3(0)} \geq R.$$

Пусть далее $T \geq 0$ — первый момент времени, когда $||x(T)|| = R$. Управляющий момент u, подчиненный ограничению $||u(t)|| \leq b$, требуется выбрать так, чтобы минимизировать время T успокоения твердого тела.

Используем для решения этой задачи метод динамического программирования. Для рассматриваемой задачи быстродействия с учетом стационагности системы (9.17) (в ней функция $f(t,x,u)$ явно не зависит от t, т.е. $f(t,x,u) \equiv f(x,u)$) получаем, что $V(t,x) = V(x)$ и соответствующее уравнение в частных производных относительно функции $V(x)$ имеет вид

$$\min_{||u||\le b}\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\left(u_1 - \frac{C-B}{CB}x_2x_3\right) + \frac{\partial V}{\partial x_2}\left(u_2 - \frac{A-C}{AC}x_1x_3\right) + \right.$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x_3}\left(u_3 - \frac{B-A}{AB}x_1x_2\right)\right] = -1,\ ||x|| \ge R, \tag{9.18}$$

$$V(x) = 0 \ \text{ при } \ ||x|| = R.$$

Вычисляя управление u, доставляющее минимум выражения в квадратных скобках (9.18), получим

$$u_i = -b\frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)^2\right)^{-1/2},\ \ ||x|| \ge R. \tag{9.19}$$

Подставляя (9.19) в (9.18), получим нелинейное уравнение в частных производных относительно функции V

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}\left(-\frac{C-B}{CB}x_2x_3\right) + \frac{\partial V}{\partial x_2}\left(-\frac{A-C}{AC}x_1x_3\right) +$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3}\left(-\frac{B-A}{AB}x_1x_2\right) - b\left(\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)^2\right)^{1/2} = -1,\ \ ||x|| \ge R, \tag{9.20}$$

$$V(x) = 0 \ \text{ при } \ ||x|| = R.$$

Будем искать решение задачи (9.20) в виде

$$V(x) = \frac{1}{b}w(||x||),$$

где w - скалярная функция скалярного аргумента $r \ge R$, подлежащая определению. Подставляя это выражение для V в (9.20), получим соотношения, определяющие функцию w :

$$\frac{dw(r)}{dr} = 1,\ \ w(R) = 0,\ \ r \ge R.$$

Отсюда вытекает, что $w(||x||) = ||x|| - R$. Значит, оптимальное управление u, успокаивающее тело и минимальное время успокоения $V(x)$ равны

$$u_i(t) = -bx_i(t)/||x(t)||, \quad V(x(t)) = \frac{1}{b}(||x(t)|| - R), \ \text{ при } \ ||x(t)|| \geq R.$$

Эти выражения показывают, что $||u(t)|| = b$, то есть вектор оптимального управления всегда максимален по величине и направлен против вектора кинетического момента.

9.5.4 Некоторые замечания о вычислительных и приближенных методах

В связи со значительными трудностями построения аналитического решения задач оптимального управления исключительное значение приобрели различные приближенные и численные методы их исследования [7, 8, 9]. В зависимости от алгоритмической основы метода он может быть отнесен к той или иной группе. Охарактеризуем некоторые из них. В основе первой группы методов лежит возможность сведения задачи оптимального управления к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений с помощью принципа максимума с последующим использованием различных алгоритмов задания недостающих начальных условий. Ко второй группе численных методов относятся те, в которых ищется оптимальное управление с помощью итерационных процедур в пространстве управлений. При этом используются формулы для приращений критерия качества при вариации управления, приводящие либо к методам градиентного типа в пространстве управлений, либо к процедурам последовательных приближений. Третью группу составляют численные процедуры, основанные на переборе в пространстве траекторий или методе динамического программирования. Кроме того, имеются методы, эффективные для конкретных классов систем, например для линейных, а также методы, основанные на сведении исходной задачи оптимального управления к задаче математического программирования.Ниже описаны некоторые из упомянутых методов.

1. Опишем подробнее метод последовательных приближений, основанный на использовании метода динамического программирования для задачи (9.10). Зададимся произвольным допустимым управлением $u_0(t, x)$ (нулевым приближением к оптимальному), то есть управлением, при котором существует решение уравнения (9.10) и выполнено ограничение $u_0(t, x) \in U$. Решим далее линейное уравнение частных производных

$\mathbb{R}^n$. При некоторых предположениях функция $V(t, x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial V_0(t,x)}{\partial t} + \min_{u \in U} f(t, x, u_0(t,x)) \frac{\partial V_0(t,x)}{\partial x} = 0,$$

$$t_0 \le t \le t_*, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

$$V_0(t_*, x) = \varphi(x).$$

Функция $V_0(t, x)$ представляет собой значение критерия качества при управлении u_0 и начальном условии $x(t) = x$. После того как функция V_0 определена, найдем следующее приближение $u_1(t, x)$ к оптимальному управлению из соотношения

$$\min_{u \in U} f(t, x, u) \frac{\partial V_0(t,x)}{\partial x} = f(t, x, u_1(t,x)) \frac{\partial V_0(t,x)}{\partial x}.$$

Продолжая указанный процесс, можно построить последовательность управлений $u_k(t, x)$ и функций $V_k(t, x)$, которые в некоторых случаях (например, в линейно-квадратическом) сходятся к решению исходной задачи.

Описанная процедура естественным образом может быть использована и при применении принципа максимума к задаче (9.10). В этом случае необходимые условия оптимальности имеют вид краевой задачи (9.10)-(9.13). Зададимся опять некоторым допустимым управлением $u_0(t)$. Далее найдем при этом управлении соответствующую ему траекторию $x_0(t)$, решая уравнение (9.10) при $u(t) = u_0(t)$. Наконец, подставим $u_0(t)$ и x_0 в (9.11) и определим $\psi_0(t)$. Зная функции $x_0(t)$ и $\psi_0(t)$, определим управление $u_1(t)$ из соотношения

$$H(t, x_0(t), u_1(t), \psi_0(t)) = \max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi_0(t)).$$

Продолжая итерации, построим последовательности $x_k(t)$, $u_k(t)$, которые в некоторых ситуациях сходятся к решению исходной задачи оптимального управления (9.10).

2. Опишем метод решения задач оптимального управления с линейной динамикой, основанные на сведении исходной задачи оптимального управления к задаче математического программирования.

рассмотрим задачу оптимального управления вида (9.10), в которой функция $f(x,u), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$, является линейной

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),\ u(t) \in [-1,1],\ t_0 \le t \le t_*;\ \ x(t_0) = x_*, \tag{9.21}$$

$$g(x(t_*)) = 0,\ \ \Phi(x(t_*)) \to \min. \tag{9.22}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение $x(t)$ системы (9.21) представимо в виде

$$x(t) = F(t,t_0)x_* + \int\limits_{t_0}^{t} F(t,\tau)bu(\tau)d\tau,\ t \in [t_0,t_*], \tag{9.23}$$

где $F(t,\tau)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$F(t,\tau) = F(t)F^{-1}(\tau),\ \ \dot{F}(t) = AF(t), F(t_0) = E. \tag{9.24}$$

Выберем параметр $N > 0$ и разобьем отрезок управления $[t_0,t_*]$ точкими

$$t_j = t_0 + jh, i = 1,...,N,\ h = (t_* - t_0)/(N),$$

на N отрезков $[t_{j-1},t_j], j = 1,...,N$. Сузим клалсс допустимых управлений в задаче (9.21), а имееном, быдем искать решение задачи в классе кусочно-постоянных управлений с допустимыми точками разрыва в фиксированные моменты $t_j, j = 1,...,N-1$, т.е.

$$u(t) = u_j,\ t \in [t_{j-1},t_j), j = 1,...,N;\ |u_j| \le 1, j = 1,...,N. \tag{9.25}$$

Из (9.24), (9.25) получаем выражение для конечного состояния $x(t_*)$ нашей системы

$$x(t_*) = F(t_*,t_0)x_* + \int\limits_{t_0}^{t_*} F(t_*,\tau)bu(\tau)d\tau =$$

$$B_0 + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} F(t_*,\tau)bu_jd\tau = B_0 + \sum_{j=1}^{N} B_ju_j = B_0 + BU, \tag{9.26}$$

где

$$B_0 = F(t_*, t_0)x_*, \; B_j = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} F(t_*, \tau) b d\tau, j = 1, ..., N, \tag{9.27}$$

$$U = (u_j, j = 1, ..., N), B = (B_j, j = 1, ..., N),) \tag{9.28}$$

Подставляя найденное представление $x(t_*) = B_0 + BU$ в (9.22), получаем следующую задачу нелинейного программирования: Найти N-вектор $U = (u_j, j = 1, ..., N)$, который удовлетворяет ограничениям

$$\bar{g}(U) = 0, |u_j| \leq 1, j = 1, ..., N, \tag{9.29}$$

и минимизирует целевую функцию

$$\bar{\Phi}(U) \to \min, \tag{9.30}$$

где

$$\bar{g}(U) = g(B_0 + BU), \; \bar{\Phi}(U) = \Phi(B_0 + BU).$$

Отметим, что для построения векторов B_0, B_j, $j = 1, ..., N$, матрицы B достаточно осуществить следующие построения.

A) Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w}(t) = Aw(t), \; w(t_0) = x_*, t \in [t_0, t_N], \tag{9.31}$$

и найти вектор $w(t_N)$.

B) Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + b, \; y(t_0) = 0, t \in [t_0, t_1], \tag{9.32}$$

и найти вектор $y(t_1)$.

C) Используя $y(t_1)$, проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = Az(t) + b, \; z(t_1) = y(t_1), t \in [t_1, t_N], \tag{9.33}$$

и найти значения $z(t_j)$, $j = 1, ..., N$, решения данной системы в точках t_j, $j = 1, ..., N$.

D) Положить

$$B_0 = w(T_n), \quad B_j = z(t_{N-j+1}),\ j = 1, ..., N.$$

Системы (9.31), (9.32) и (9.33) можно проинтегрировать с помощью стандартных математических пакетов.

Для решения задачи математического программирования можно использовать результаты, отписанные в предыдущих главах.

Отметим, также, что если функции $g(x)$ и $\Phi(x)$ является линейными, т.е. $g(x) = Hx + h$, $\Phi(x) = c'x$, то задача (9.29), (9.30) становиться задаче линейного программирования. В случае $g(x) = Hx + h$, $\Phi(x) = c'x + 0.5x'Dx$ задача (9.29), (9.30) является задачей квадратичного программирования.

Пример. Рассмотрим прямолинейное движение тела постоянной массы M. Координаты тела будем обозначать через x. При движении тела его координата x изменяется во времени. Производная $\dot{x}$ представляет собой скорость движения тела, а $\ddot{x}$ – ускорение.

Будем предполагать, что на тело действую две внешние силы:

сила трения — $-s\dot{x}$ и

сила упругости — $-kx$.

Кроме того, будем предполагать, что тела снабжено двигателем. Развиваемую двигателем силу воздействия на тело обозначим через u. Таким образом, согласно второму закону Ньютона движение тела с течением времени будет описываться дифференциальным уравнением

$$M\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + u.$$

Как и в предыдущем примере, нетрудно показать, что это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{s}{M}x_2(t) + u(t). \end{aligned} \tag{9.34}$$

Значит в данном примере динамика системы описывается системой (9.8).

Предположим, что мы рассматриваем процесс на отрезке времени $t \in [0, t_*]$, где $t_* > 0$ — некоторый фиксированный момент времени.

Также предположим, что известно начальное состояние системы в момент времени $t = 0$: $x_1(0) = x_1^*$, $x_2(0) = x_2^*$, и есть ограничение на силу двигателя $|u(t)| \leq 1,\ t \in [0, t_*]$.

Требуется так управлять двигателем, чтобы в конечный момент времени $t = t_*$ наше тело находилось в состоянии, удовлетворяющем условию $h_1 x_1(t_*) + h_2 x_2(t_*) = h_0$ и терминальный критерий качества $c_1 x_1(t_*) + c_2 x_2(t_*)$ принимал минимальное значение. Таким образом получаем задачу оптимального управления следующего вида

$$\Phi(x_1(t_*), x_2(t_*)) \to \min,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + bu(u),$$

$$x_1(0) = x_1^*, \ \ x_2(0) = x_2^*, \ \ g(x_1(t_*), x_2(t_*)) = 0, \ \ |u(t)| \leq 1, \ t \in [0, t_*],$$

где

$$\Phi(x_1(t_*), x_2(t_*)) = c_1 x_1(t_*) + c_2 x_2(t_*)), \ \ g(x_1(t_*), x_2(t_*)) = h_1 x_1(t_*) + h_2 x_2(t_*) - h_0,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{s}{M} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}.$$

Используя описанный выше подход сведения задачи оптимального управления к задаче нелинейного программирования, решим сформулированную сформулированную задачу при различных значениях исходных данных

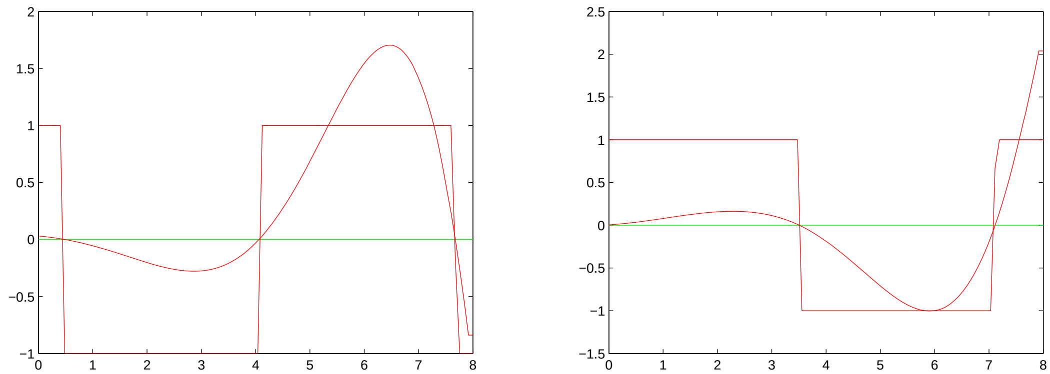
$$k, \ s, M, t_*, x_1^*, \ x_2^*, \ g, \ c_1, \ c_2, \ h_1, \ h_2 = 0. \tag{9.35}$$

Отметим, что в данной задаче функции $g(x)$ и $\Phi(x)$ являются линейными, следовательно, задачи вида (9.29), (9.30) будут задачами линейного программирования.

Отметим также, что в рассматриваемой задаче для матрицы A фундаментальную матрицу $F(t, \tau)$ решений системы $\dot{x} = Ax$ можно найти в явном виде

$$F(t, \tau) = \begin{pmatrix} e^{-t+\tau} + (t-\tau)e^{-t+\tau} & (t-\tau)e^{-t+\tau} \\ -(t-\tau)e^{-t+\tau} & e^{-t+\tau} - (t-\tau)e^{-t+\tau} \end{pmatrix},$$

Поэтому векторы $B_j, j = 0, 1, ..., N$, легдо находятся по формулам (9.27) без интегрирования систем (9.31), (9.32), (9.33).



a) b)

Рис. 5:

I) Определим данные (9.35) следующим обзаром

$$k = 1,\ s = 2, M = 1, t_* = 8, x_1^* = x_2^* = g = 0, c_1 = 0, c_2 = 1, h_1 = 1, h_2 = 0, \qquad (9.36)$$

и решим полученную задачу оптимального управления методом сведения к задаче линейного программирования. В результате получим оптимальное управление вида

$$u(t) = 1, t \in [0, \bar{t});\ \ u(t) = -1, t \in [\bar{t}, t_*),$$

где $\bar{t} = 6.3$.

II) Для данных

$$k = 1,\ s = 1, M = 1, t_* = 8, x_1^* = 0,$$
$$x_2^* = 3, g = 1.3, c_1 = 0, c_2 = 1, h_1 = 1, h_2 = 0 \qquad (9.37)$$

оптимальное управление (красная линия) приведено на Рис. 5, часть а). Оптимальное значение критерия качества равно $x_2^0(t_*) = -0.6441$.

III) Для данных

$$k = 1,\ s = 1, M = 1, t_* = 8, x_1^* = 0,$$
$$x_2^* = 3, g = 1.3, c_1 = 1, c_2 = 0, h_1 = 0, h_2 = 1 \qquad (9.38)$$

оптимальное управление (красная линия) приведено на Рис. 5, часть b). Оптимальное значение критерия качества равно $x_1^0(t_*) = -0.7079$.

На Рис. 5 голубой пунктирной линией приведена функция $\psi'(t)b$, $t \in [t_0, t_*]$, где $\psi(t), t \in [t_0, t_*]$, — решение сопряженной системы (9.11), (9.12) с соответствующим вектором y.

Другие методы решения задач оптимального управления можно найти в работах [17, 18, 19, 20].

Список литературы

[1] Колмановский В.Б. Задачи оптимального управления. Соросовский образовательный журнал. № 6, 1997.

[2] Винер Н. Кибернетика и общество. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

[3] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

[4] Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

[5] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[6] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[7] Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1977. Т. 14.

[8] Afanasiev V.N., Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. Mathematical Theory of Control Systems Design. Dordrecht: Kluwer, 1996.

[9] Беллман Р. Методы вычислений // Автоматика и телемеханика. 1993. № 8. С. 10.

[10] Swan G.W. Application of Control Theory in Medicine. N.Y.: Dekker, 1984.

[11] Рудик А.П. Ядерные реакторы и принцип максимума Понтрягина. М.: Атомиздат, 1970.

[12] Ройтенберг Я.Н. Гироскопы. М.: Наука, 1975.

[13] Брокате М. Оптимальное управление системами гистерезисного типа // Автоматика и телемеханика. 1991. № 12; 1992. № 1.

[14] Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М. Наука. 1969. с. 408.

[15] G. Vossen1 and H. Maurer. On L1-minimization in optimal control and applications to robotics // OPTIMAL CONTROL APPLICATIONS AND METHODS Optim. Control Appl. Meth. 2006; 27:301–321

[16] U. LEDZEWICZ and H. SCHATTLER. Optimal Bang-Bang Controls for a Two-Compartment Model in Cancer Chemotherapy// JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS: Vol. 114, No. 3, pp. 609–637, September 2002

[17] Andreas Schafer, Peter Kuh, Moritz Diehl , Johannes Schloder, Hans Georg Bock. Fast reduced multiple shooting methods for nonlinear model predictive control// Chemical Engineering and Processing 46 (2007) 1200–1214

[18] H.G. Bock, K.-J. Plitt, A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems, in: Proceedings of the 9th IFACWorld Congress, Budapest, Pergamon Press, 1984.

[19] B.L. Braunschweig, C.C. Pantelides, H.I. Britt, S. Sama, Process modeling: the promise of open software architectures, Chem. Eng. Prog. 96 (9) (2000) 65–76.

[20] W. Chen, D.J. Ballance, J. O'Reilly, Model predictive control of nonlinear systems: computational delay and stability, IEE Proc. Contr. Theory Appl. 147 (4) (2000) 387–394.

[21] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001.

[22] Kamien, M.I., Schwarz, N.L. (1981) Dynamic optimization. The calculus of variations and optimal control in economics and management. New York: Elsevier.

[23] Bryson A.E. (2002) Applied linear optimal control: examples and algorithms. Cambridge Univ. Press.