Statik & Hållfasthetslära
Projektrapport

Tobias Ericsson
David Neinhardt
Grupp 1

toberics@chalmers.se
davidnei@chalmers.se

2025-02-17

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

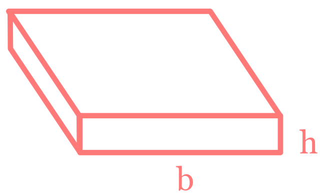
Statik & Hållfasthetslära Projektrapport 1
- Laster 3
  - Egenlast 3
  - Linjelaster 4
  - Punktlast 4
- Temperaturspel 5
  - Temperaturökning 5
- Reaktionskrafter & snittkrafter 6
  - Reaktionskrafter 6
  - Snittkrafter 7
- Snittkraftsdiagram 10
  - Reaktionskrafter 11
  - Snittkrafter 11
  - Max- snittkrafter & böjmoment 13
- Yttröghetsmoment och normalspänningsberäkning 15
  - Yttröghetsmoment 15
  - Normalspänning 16
  - Jämförelse 18
- Sjkuvspänningsberäkningar i brobalken 19
  - Maximal böjskuvspänning 19
  - Skjuvspänning balklivet 20
- Appendix / Beräkningar 22

Laster

Uppgift **GC1** handlar om laster och frågar då efter att räkna ut vikter och laster på varje balk. Detta görs i olika steg och efterfrågar variabler såsom **W_d** *(Egenlast)* och **P_b** *(ny punktlast)*. Samt omvandla ytlaster **w_s** och **w_t** till linjelaster.

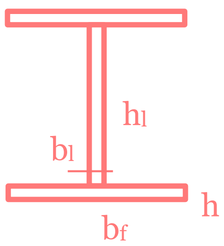
Till en början beräknas egenlasten. Först beräknas egenlasten för trädäcket som ligger på balkarna, sedan beräknas egenlasten för stålbalkarna som sedan adderas med trädäcket.

Egenlast



Tvärsnittsarean för trädäcket beräknas med arean per meter längd:

$$A_{trä} = b \cdot h$$



Tvärsnittsarean för balken beräknas med att slå ihop de tre rektangulära areor som urgör I-Profilen av stålbalken:

$$A_{stål} = 2(2 \cdot h_f \cdot b_f + b_l \cdot h_l)$$

Med tvärsnittsarean för trädäcket och stålbalken multipliceras nu dessa med respektives densitet:

$$W_{trä} = A_{trä} \cdot \gamma_{trä} = 3.38kN/m$$
$$W_{stål} = A_{stål} \cdot \gamma_{stål} = 2.18kN/m$$

Addera dessa egenvikter så fås till sist egenvikten för bron som påverkar varje balk:

$$W_d = \frac{W_{stål} + W_{trä}}{2} = 2.78kN/m$$

Vilket alltså innebär att varje balk bär egenvikten 2.78kN/m.

Uppgiften vill nu att de givna ytlaster skall omvandlas till linjelaster, dvs i samma förmat som den tidigare beräknade egenlasten. Detta görs enkelt nog genom att multiplicera med en längd, vilket i detta fall är bredden på trädäcket dividerat med två, då två balkar tar upp den här vikten.

Linjelaster

För både **w_s** *(snölasten)* och **w_t** *(trängsellasten)* görs samma beräkning som tidigare nämnt. Dessa linjelaster kan även slås ihop för att få en total linjelast över hel bron per meter:

$$W_s = w_s \cdot \frac{b}{2} = 3.07kN/m$$
$$W_t = w_t \cdot \frac{b}{2} = 6.14kN/m$$
$$W_{tot} = W_d + W_s + W_t = 12.00kN/m$$

W_s och **W_t** är nu de nya lasterna i formatet av en linjelast.

Sist finns det en punktlast ***(P)*** som verkar över hela bron, uppgiften frågar då vad denna punktlast ***(P_b)*** som verkar på varje balk har för last. Ännu en gång kan detta lösas simpelt med att dividera med två eftersom det finns två balkar som jämt fördelar lasten över hela bron tillsamans.

Punktlast

P_b beräknas följande:

$$P_b = \frac{P}{2} = 15kN$$

Varje balk tar alltså emot en punktlast som är hälften av det som verkar bron.

Temperaturspel

Nästa uppgift **GC2** ställer en enkel fråga; Hur hög temperaturökning kan ske innan bron expanderar in i sig självt?
Givet är att vid temperaturen *21℃* finns en glipa mellan balkarna på *53 mm* där balkarna kan röra sig fritt fram och tillbaka. I förklaringen för uppgiften beskrivs att två balkar kan röra sig fritt fram och tillbaka, medan i en bild i samma uppgift visualiseras balkarna med två stöd, där ett av stöden är fast medan det andra kan rulla. Detta betyder att dessa förklaringar och visualliseringar skrider emot varandra.
I uträkningen som sker nedan kommer resultatet inte att differera med hur uppgiften väljs att tolkas. Däremot kommer en **2:a** tolkas på ett av följande sätt:

- Balken blir **dubbel** så stor åt ett håll då den hålls fast i ena endan.
- Eftersom balkarna rör sig fritt åt båda hållen expanderar balkarna **mot varandra.**

Temperaturökning

I lösning av uppgiften kommer formeln för linjär termoelasticitet att användas, och därav variabler att ansättas till följande:

$$\delta = L\alpha\Delta T$$ [1]

δ { •Maximala längden = 0.053m

T { •Start temperaturen = 21°C

Formeln skrivs om med hänsyn på temperaturökningen:

$$\Delta T = \frac{\delta}{L\alpha}$$

Sedan skrivs den om ytterligare efter uppgiftens kriterier, såsom att det finns två balkar och en start temperatur:

$$\Delta T = \frac{\delta}{2L\alpha} = 153°C$$
$$T_{tot} = \Delta T + T = 174°C$$

Detta visar att vid en ökning på ungefär 153°C kommer få balkarna att expandera tillräckligt för dem att expandera in i varandra.

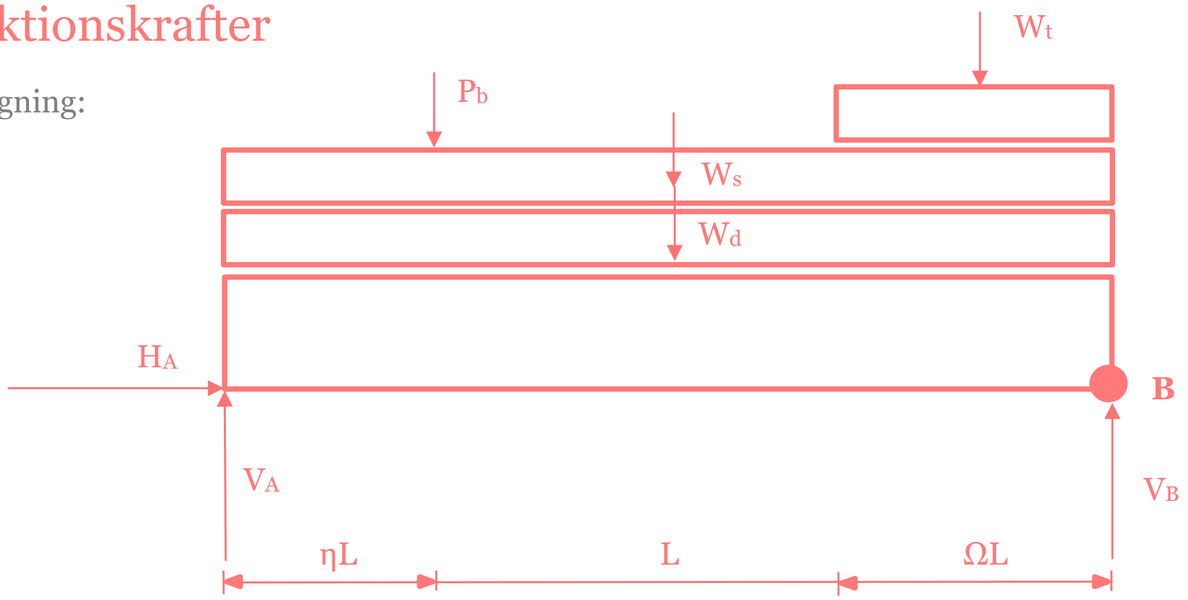
[1] Intoduktion till hållfastighetslära Enaxliga tillstånd s.27

Reaktionskrafter & snittkrafter

GC3 som är nästa uppgift kommer med två frågor. I första delen skall algebraiska uttryck för de reaktionskrafter vid det vänstra och högra stödet införas och bestämmas. Detta görs i termer av yttre laster och genom att ställa upp global jämvikt.
I den andra delen skall snittkrafterna **T(x)** och **M(x)** teckans som algebraiska uttryck längs balken. Här skall snittmetoden användas genom att dela in balken i lämpliga snitt som sedan tecknar **T_I(x)**, **T_{II}(x)**, **M_I(x)** m.m.

Reaktionskrafter

Friläggning:



Globaljämvikt ställs upp för att bestämma reaktionskrafterna vid A och B.

Globaljämvikt:

$$\uparrow: V_A + V_B - P_b - L(W_d + W_s) - W_t \cdot \Omega L = 0$$
$$\rightarrow: H_A = 0$$
$$\overset{\curvearrowleft}{B}: V_A \cdot L - P_b(L - \eta L) - \frac{L^2}{2}(W_d + W_s) - W_t \cdot \frac{(\Omega L)^2}{2} = 0$$

För att hitta reaktionskrafterna stoppas nu jämviktsekvationerna in i ett system där de är beroende av varandra:

$$V_A = P_b + L(W_d + W_s + W_t\Omega) - V_B$$
$$V_B L = P_b L + L^2(W_d + W_s + W_t\Omega) - P_b(L - \eta L) - \frac{L^2}{2}(W_d + W_s) - W_t \cdot \frac{(\Omega L)^2}{2}$$

Uträkning och förenkling av detta ger följande:

$$\begin{cases} V_A = P_b(1-\eta) + \frac{L}{2}(W_d + W_s + W_t\Omega^2) \\ V_B = P_b\eta + \frac{L}{2}(W_d + W_s) + W_t\Omega\left(L - \frac{\Omega L}{2}\right) \\ H_A = 0 \end{cases}$$ [2]

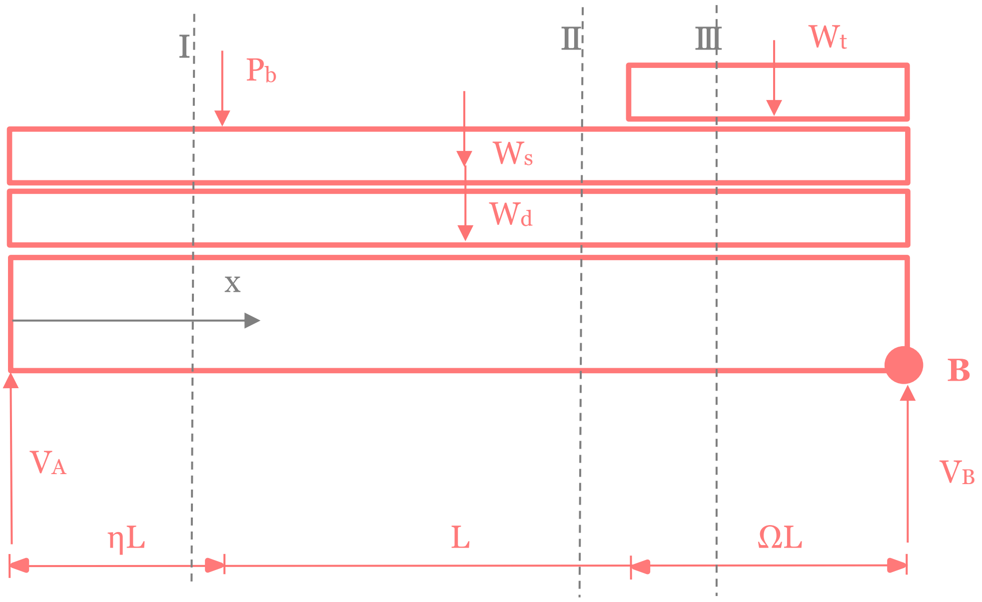
Skulle värden sättas in fås det att $\mathbf{V_A}$ är *64.63kN*, $\mathbf{V_B}$ är *81.09kN* och sist $\mathbf{H_A}$ är *0.0N*.

Snittkrafter

Friläggningen som tidigare gjorts delas nu upp i snitt **I**, **II** och **III,** och en kraft **x** ansätts från vänster mot höger inom balken. Detta för att sedan beräkna snitten $\mathbf{T_I(x)}$, $\mathbf{T_{II}(x)}$ och $\mathbf{T_{III}(x)}$, och momenten $\mathbf{M_I(x)}$, $\mathbf{M_{II}(x)}$ och $\mathbf{M_{III}(x)}$. Snitten definieras enligt följande.

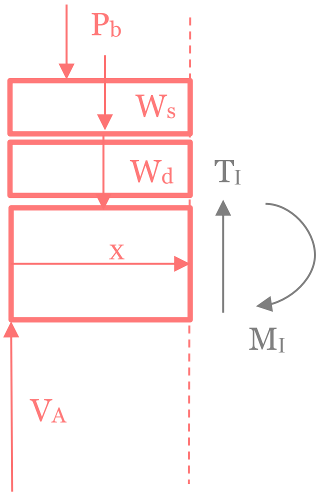
$$\begin{cases} \mathrm{I}: \; 0 < x < \eta L \\ \mathrm{II}: \; \eta L < x < L(1-\Omega) \\ \mathrm{III}: \; L(1-\Omega) < x < L \end{cases}$$

Detta görs för att undersöka förändringen av tvärkraften och momentet då en ny yttre kraft verkar på det nya snittet jämfört med det tidigare snittet. I detta fall gäller det första snittet innan punktlasten ($\boldsymbol{P_b}$), det andra efter punktlasten ($\boldsymbol{P_b}$) och det tredje då trängsellasten ($\boldsymbol{W_t}$) verkar på snittet. [3]



[2] Beräkning 1 i appendix
[3] Direkt snittmetod, Introduktion till hållfasthetslära Enaxliga tillstånd s.80

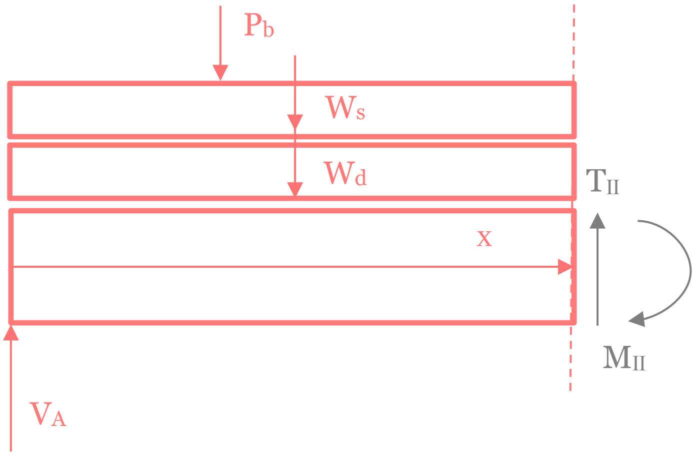
Fall I:



$$\uparrow: T_I + V_A - W_d x - W_s x = 0 \implies T_I(x) = (W_d + W_s)x - V_A$$

$$\overset{\curvearrowright}{x}: M_I + V_A x - \frac{x^2}{2}(W_d + W_s) = 0 \implies M_I(x) = (W_d + W_s)\frac{x^2}{2} - V_A x$$

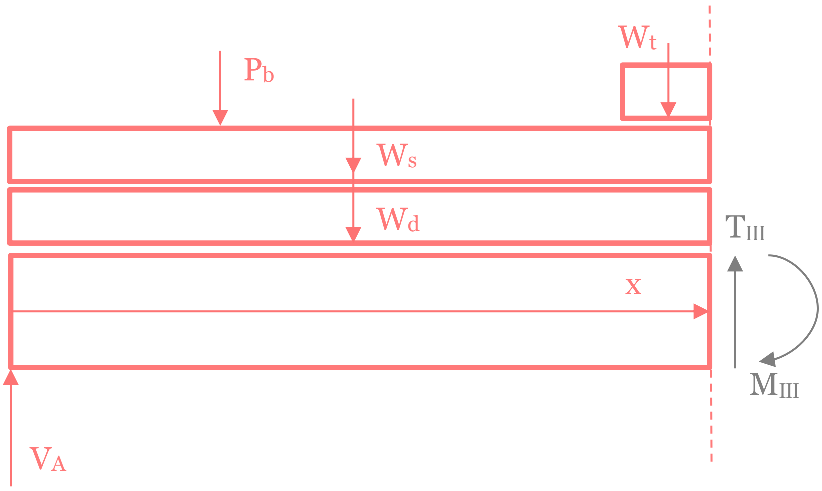
Fall II:



$$\uparrow: T_{II} + V_A - P_b - W_d x - W_s x = 0 \implies T_{II}(x) = P_b + (W_d + W_s)x - V_A$$

$$\overset{\curvearrowright}{x}: M_{II} + V_A x - P_b(x - \eta L) - \frac{x^2}{2}(W_d + W_s) = 0 \implies M_{II}(x) = P_b(x - \eta L) + (W_d + W_s)\frac{x^2}{2} - V_A x$$

Fall III:



$$\uparrow: T_{III} + V_A - P_b - W_d x - W_s x - W_t\big(x - (L - \Omega L)\big) = 0$$

$$\implies T_{III}(x) = P_b + (W_d + W_s)x + W_t(x + \Omega L - L) - V_A$$

$$\overset{\curvearrowright}{x}: M_{III} + V_A x - P_b(x - \eta L) - \frac{x^2}{2}(W_d + W_s) - W_t\frac{(x + \Omega L - L)^2}{2} = 0$$

$$\implies M_{III}(x) = P_b(x - \eta L) + (W_d + W_s)\frac{x^2}{2} + W_t\frac{(x + \Omega L - L)^2}{2} - V_A x$$

Sammanställning av detta ger:

-Snittkrafter:

$$\begin{cases} T_I(x) = (W_d + W_s)x - V_A \quad då\ 0 < x < \eta L \\ T_{II}(x) = P_b + (W_d + W_s)x - V_A \quad då\ \eta L < x < L - \Omega L \\ T_{III}(x) = P_b + (W_d + W_s)x + W_t(x + \Omega L - L) - V_A \quad då\ L - \Omega L < x < L \end{cases}$$

-Moment:

$$\begin{cases} M_I(x) = (W_d + W_s)\frac{x^2}{2} - V_A x \quad då\ 0 < x < \eta L \\ M_{II}(x) = P_b(x - \eta L) + (W_d + W_s)\frac{x^2}{2} - V_A x \quad då\ \eta L < x < L - \Omega L \\ M_{III}(x) = P_b(x - \eta L) + (W_d + W_s)\frac{x^2}{2} + W_t\frac{(x + \Omega L - L)^2}{2} - V_A x \quad då\ L - \Omega L < x < L \end{cases}$$ [4]

Med snittkrafterna och momenten nu tecknade kommer de att användas i den kod som sedan skrivs i **GC4** där de uttrycks i *if-termer…*

[4] Beräkning **2** & **3** i appendix

Snittkraftsdiagram

Näst på tur löses GC4, där kodning nu tar sin första plats. Deluppgifterna givna följer att beräkna reaktionskrafterna som tidigare bestämts med hjälp av Python, och sedan stämma av att de befinner sig i en global jämvikt. Sedan skall momenten (**M**) och tvärsnittskrafterna (**T**) visualiseras genom en plottning av (**x**) för längden (**L**). Med hjälp av denna plottning skall maximal böjning och positionen där det uppkommer att besvaras i en *x-koordinat* (längd från origo).
Hela uppgiften kommer använda sig av samma standardvärden, där de som tillkommer kommer finnas med i varje kodsnippet i kronologisk ordning.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# --- Geometri [m] ---
h_f = 20e-3  # Flänstjocklek
b_f = 220e-3  # Flänsbredd
h_l = 520e-3  # Livhöjd
b_l = 10e-3  # Livbredd
L = 14.45  # Balkens längd
b = 4.095  # Brobredd
h = 125e-3  # Träskiva höjd
# --- Laster ---
w_s = 1.5e3  # Snölast [N/m^2]
w_t = 3.0e3  # Trängsellast [N/m^2]
P = 30e3  # Punktlast [N]
eta = 0.31
omega = 0.52
# --- Material ---
densitet_stål = 78e3  # [N/m^3]
densitet_trä = 6.6e3  # [N/m^3]
E_modul = 210e9  # Elasticitetsmodul [Pa]
sigma_y = 200e6  # Flytgräns [Pa]
alpha_stål = 1.2e-5  # Temperaturutvidgning [1/°C]
# --- Lastberäkningar ---
W_d = 2 * (2 * h_f * b_f + b_l * h_l) * densitet_stål + b * h * densitet_trä  # [N/m]
W_d = W_d / 2 # Beräkna per balk
W_s = w_s * b / 2  # [N/m]
W_t = w_t * b / 2  # [N/m]
W_tot = W_d + W_s + W_t  # Total linjelast [N/m]
P_b = P / 2  # Punktlast per balk
```

Dvs, kod kommer i kortare snippets där de följande snippets är beroende av de förgående, i följd av en diskussion och en beskriving av resultatet från koden.

Reaktionskrafter

För att starta igång uppgiften görs det första efterfrågade. Reaktionskrafterna som tidigare ställts upp sätts nu in i koden och beräknas med de givna värderna. För att ta reda på om global jämvikt är uppnådd kollas sedan om dessa är lika med noll (eller alternativt ett toleransvärde). Om detta stämmer eller inte, retuneras då en bekräftelse med följande svar.

```
# GC4
# --- Reaktionskrafter ---
VB = P_b * eta + L/2 * (W_d + W_s) + W_t * omega * (L - omega * L / 2)
VA = P_b + L * (W_d + W_s + W_t * omega) - VB

V_f = VA + VB - P_b - W_d*L - W_s*L - W_t*L*omega
B_m = VA*L - P_b*L*(1-eta) - W_d*L**2/2 - W_s*L**2/2 - W_t*(L*omega)**2/2
print(f"\nVertikalkraft: {V_f} N")
print(f"Böjmoment: {B_m} Nm")

tol = 1e-10  # Tolerans
if V_f < tol and B_m < tol:
    print("\nBalken är i global jämvikt.")
else:
    print(f"\nBalken är INTE i global jämvikt.")
```

Givet första resultatet då toleransen var vald som noll, så blev det aldrig en globaljämvikt. Efter att ha insett att jämvikten konvergerar mot noll men aldrig blir noll (förmodligen på grund av datorns inkompetens att beräkna matematik, men samt brist på precision vid indata) valdes ett tolerans värde på tio decimaler.
Efter att koden körts med sitt nya tolernas värde, uppnådes global jämvit i balken! Då fås även en vertikalkraft på *-7.28 pN* och ett böjmoment på *-40.75 nNm*.

TERMINAL
Vertikalkraft: -7.275957614183426e-12 N
Böjmoment: -4.0745362639427185e-10 Nm

Balken är i global jämvikt.

Snittkrafter

Näst ska en graf plottas ut av **M(x)** och **T(x)** för alla **x**. En variabel **x** skapas med längden **L** med *1000 noder*. Detta **x** kommer att användas för att beräkna funktionerna **M(x)** och **T(x).** Funktionerna definieras som följande i koden nedan. Med funktionerna definierade skapas två arrayer med värderna för snittkrafterna respektive momenten som sedan kan användas för att plotta ut snittkrafdternas och moments grafer.

```python
# --- Snittkrafter ---
x = np.linspace(0, L, 1000)  # Balkens längdindelning
def T(x):
    if 0 <= x < eta*L:
        return (W_d + W_s) * x - VA
    elif eta*L < x < L - omega*L:
        return P_b + (W_d + W_s) * x - VA
    elif L - omega*L < x <= L:
        return P_b + (W_d + W_s) * x + W_t*(x + omega*L - L) - VA

def M(x):
    if 0 <= x < eta*L:
        return (W_d + W_s) * x**2 / 2 - VA * x
    elif eta*L < x < L - omega*L:
        return P_b * (x - eta*L) + (W_d + W_s) * x**2 / 2 - VA * x
    elif L - omega*L < x <= L:
        return P_b*(x - eta*L) + (W_d + W_s)*x**2/2 + W_t*(x + omega*L - L)**2/2 - VA*x

T_x = np.array([T(xi) for xi in x])
M_x = np.array([M(xi) for xi in x])

# --- Plotta snittkraftsdiagram ---
plt.figure(figsize=(10,5))
plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(x, T_x *10**-3, label="Tvärkraft T(x)")
plt.axhline(0, color='black', linestyle='--')
plt.xlabel("x [m]")
plt.ylabel("T [kN]")
plt.legend()
plt.grid()

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(x, M_x * 10**-3, label="Böjmoment M(x)", color='r')
plt.axhline(0, color='black', linestyle='--')
plt.xlabel("x [m]")
plt.ylabel("M [kNm]")
plt.legend()
plt.grid()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

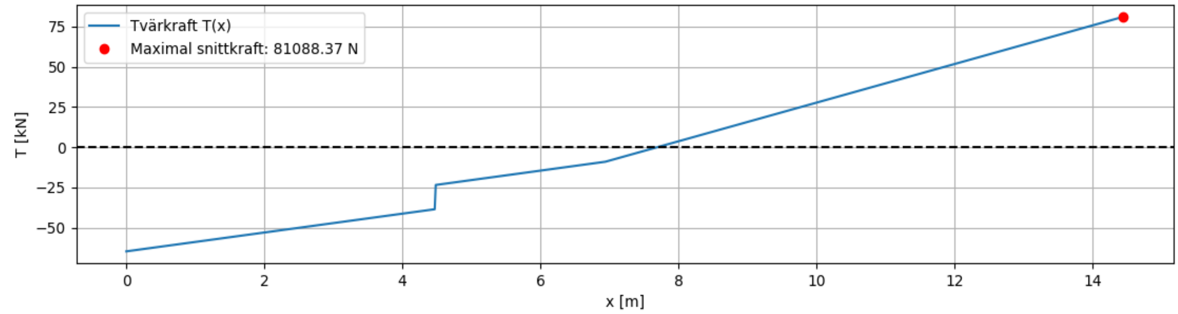
Körs denna koden vidare så kommer mycket riktigt två grafer plottas ut där man ser att snittkrafterna ökar med en blandning av linjärt och exponentiellt. Böjmomentet tar däremot formen av en andragradsfunktion med en minimipunkt. Innan dessa grafer visas upp kan detta snyggt kombineras med nästa uppgift…

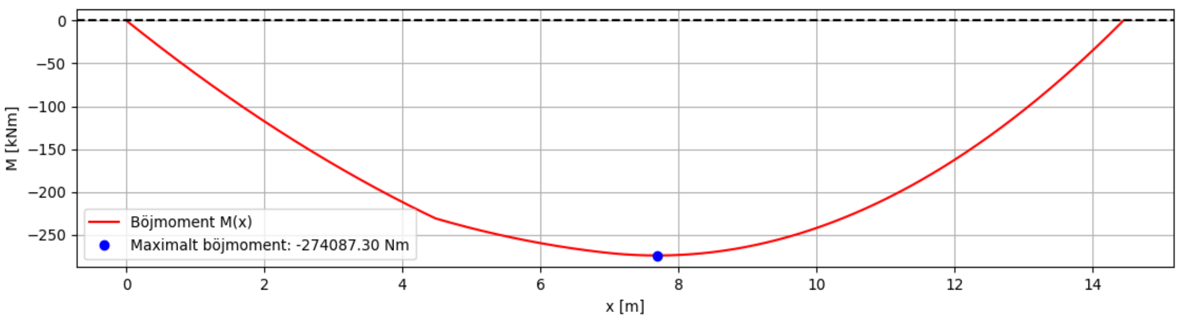
Max- snittkrafter & böjmoment

Sist i denna uppgift skall terminalen skriva ut vad den största snittkraften är respektive största böjmomentet. Det skall även förekomma vart dessa förekommer i grafen. Varför graferna inte visades i förra steget är på grund av att möjligheten av att kombiniera grafen med eventuellt plottning av max punkterna i samma graf. Det kan göras på följande sätt.

```
# --- Maximala snittkrafter och böjmoment ---
# Hitta max snittkraft
T_max = np.max(T_x)
x_Tmax = x[np.argmax(T_x)]  # x-koordinat där max kraft uppstår

# Hitta max böjmoment
M_max = np.min(M_x)
x_Mmax = x[np.argmin(M_x)]  # x-koordinat där max moment uppstår

# --- Plotta snittkraftsdiagram ---
# ...
plt.plot(x_Tmax, T_max * 10**-3, 'ro', label=f"Maximal snittkraft: {T_max:.2f} N")
# ...
plt.plot(x_Mmax, M_max * 10**-3, 'bo', label=f"Maximalt böjmoment: {M_max:.2f} Nm")
plt.tight_layout()
plt.show()

print(f"\nMaximal snittkraft: {T_max:.2f} N vid x = {x_Tmax:.2f} m")
print(f"Maximalt böjmoment: {M_max:.2f} Nm vid x = {x_Mmax:.2f} m")
```

Maximala snittkraften beräknas enkelt med att hämta det största värdet i ***T_x*** (arrayen med alla snittkraftrer). Likandant för det största böjmomentet, då skillnanden i detta fall blir att hämta det minsta värdet i ***M_x*** (arrayen med alla böjmoment) då det största negativa värdet är vad som sökes. Detta kan sedan printas ut i terminalen alternativt plotta ut i grafen tillsamans med funktionerna **T** och **M**.





Genom att analysera och granska grafen kan det tydligt framgå att de stämmer. Att tvärkrafterna ökar och blir högre vid större x stämmer överens med beräkningarna från **GC3**. Samt att böjmomentet utformar sig till att lägga högst stress på mitten av bron med någon fördel åt höger stämmer överens med generel kunskap om fyskikaliska egenskaper hos material, där den svagare punkten på ett liggande avlångt föremål tenderar att röra sig mot mitten (eller tyngdpunkten).

TERMINAL
Maximal snittkraft: 81088.37 N vid x = 14.45 m
Maximalt böjmoment: -274087.30 Nm vid x = 7.70 m

Fullständig och reviderad kod finns i appendix!

Yttröghetsmoment och normalspänningsberäkning

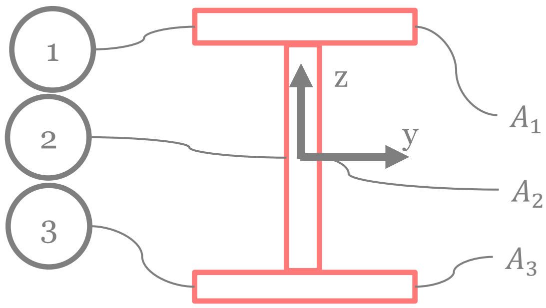
I nästa steg löses **GC5**, där en kombination av handberäkningar och kodning används för att analysera normalspänningen i balken. Först beräknas yttröghetsmomentet $\mathbf{I_y}$ för huvudbalkarnas I-tvärsnitt manuellt, där tvärsnittet ej kan betraktas som tunnväggigt. Därefter används Python för att visualisera hur normalspänningen varierar över tvärsnittets höjd **z** i det snitt där maximalt böjmoment uppkommer (som bestämdes i **GC4c**).
Förutom att plottningen ger en tydlig bild av spänningsfördelningen beräknas också den maximala drag- och tryckspänningen, samt deras exakta positioner i balken i koordinatsystemet **(x,y,z)**.
Slutligen jämförs den maximala dragspänningen med stålmaterialets flytgräns för att avgöra om plasticering sker vid denna punkt.
Precis som tidigare används standardvärden genom hela uppgiften, och nya värden anges vid behov i varje kodsnutt i en logisk ordning.

Yttröghetsmoment

Yttröghet för de olika elementen 1, 2 och 3:

$$I_{y_1} = I_{y_3} = \frac{b_f h_f^3}{12}$$

$$I_{y_2} = \frac{b_l h_l^3}{12}$$ [5]



Parallellförflyttning:

$$A_i\left(z_{TP_i} - z_{TP}\right)^2$$

I detta fall är $\boldsymbol{z_{TP} = 0}$, vilket gör att parallellförflyttningen blir $\boldsymbol{A_i z_{TP_i}^2}$, där $\boldsymbol{A_i}$ är tvärsnittsarean för varje del och $\boldsymbol{z_{TP_i}}$ är avståndet från tvärsnittets ytcentrum till delen *i:s* ytcentrum i *z-led*.

Tyngdpunkter:

$$\begin{cases} Z_{TP1} = \dfrac{h_l + h_f}{2} \\ Z_{TP2} = 0 \\ Z_{TP3} = -\dfrac{h_l + h_f}{2} \end{cases}$$

[5] Detta kommer från formeln för yttröghet för rektangulära delar (https://www.youtube.com/watch?v=2gccUOoNFRg&ab_channel=DeMechanica).

Parallellförflyttningarna blir alltså:

$$P_1 = P_3 = b_f h_f \left(\frac{h_l + h_f}{2}\right)^2$$
$$P_2 = 0$$

Sammantaget fås från Steiners sats: [6]

$$I_y = \sum \left(I_{y_i} + A_i\left(z_{TP_i} - z_{TP}\right)^2\right) = 2\left(\frac{b_f {h_f}^3}{12} + b_f h_f \left(\frac{h_l + h_f}{2}\right)^2\right) + \frac{b_l {h_l}^3}{12} \approx 0.00076\, m^4$$ [7]

Yttröghetsmomenten blir alltså $I_y \approx 0.00076\, m^4$.

Normalspänning

Nu efter att detta gjorts förhand kan det jämföras med nästa del som är att skriva ett program som beräknar samma sak, med ett tillägg av av beräkning och plottning av normalspänningen samt den maximala tryck- och dragspänningen. Först beräknas yttrögghestmomentet på samma sätt som tidigare gjorts. Sedan definieras n
ormalspänningen med **z_max** och **z_min**.

```
# GC5:
# --- Yttröghetsmoment ---
A_f = b_f * h_f  # Flänsarea
d = (h_l / 2) + (h_f / 2)  # Avstånd från neutralaxeln till flänscentrum
I = 2 * ((b_f * h_f**3) / 12 + A_f * d**2) + (b_l * h_l**3) / 12
print(f"\nYttröghetsmoment I: {I:.6f} m^4")

# --- Normalspänningsberäkning ---
z_max = h_l/2 + h_f  # Överkanten av balken
z_min = -(h_l/2 + h_f)  # Underkanten av balken
```

Yttröghetsmomentet beräknas genom precis som innan:

$$I = 2\left(\frac{b_f {h_f}^3}{12} + b_f h_f \left(\frac{h_l + h_f}{2}\right)^2\right) + \frac{b_l {h_l}^3}{12}$$

⇨

I = 2 * ((b_f * h_f**3) / 12 + A_f * d**2) + (b_l * h_l**3) / 12

Normalspänningen definieras genom att beräkna överkanten och underkanten av balken, dvs halva livens höjd adderat med höjden av flänsen, och det negativa för underkanten.

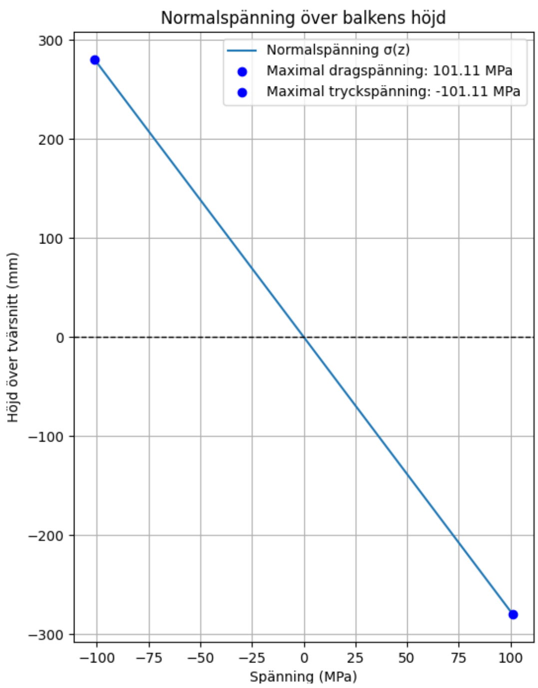
[6] Sats 30.1.1, Handbok och formelsamling i hållfasthetslära
[7] Beräkning 4 i appendix

Med normalspänningen definierad kan grafen för normalspänningen plottas ut, och beräkningrna för maximala drag- och tryckspänningarna printas ut. Först beräknas maximala draget och trycket. Sedan är det bara att beräkna alla normalspänningar över balkens höjd för att sedan kunna plotta ut grafen.

```python
sigma_max_drag = (M_max * z_min) / I
sigma_max_tryck = (M_max * z_max) / I

print(f"\nMaximal dragspänning: {sigma_max_drag / 1e6:.2f} MPa vid (x={x_Mmax:.2f} m,
→ y=0, z={z_min:.3f} m)")
print(f"Maximal tryckspänning: {sigma_max_tryck / 1e6:.2f} MPa vid (x={x_Mmax:.2f} m,
→ y=0, z={z_max:.3f} m)")

# --- Plotta normalspänningen ---
z_vals = np.linspace(z_min, z_max, 100)  # Höjd över tvärsnittet
sigma_vals = (M_max * z_vals) / I  # Normalspänning

plt.figure(figsize=(6, 8))
plt.plot(sigma_vals / 1e6, z_vals * 1e3, label="Normalspänning σ(z)")
plt.plot(sigma_max_drag / 1e6, z_min * 1e3, 'bo', label=f"Maximal dragspänning:
→ {sigma_max_drag / 1e6:.2f} MPa")
plt.plot(sigma_max_tryck / 1e6, z_max * 1e3, 'bo', label=f"Maximal tryckspänning:
→ {sigma_max_tryck / 1e6:.2f} MPa")
plt.axhline(0, color="black", linestyle="--", linewidth=1)
plt.xlabel("Spänning (MPa)")
plt.ylabel("Höjd över tvärsnitt (mm)")
plt.title("Normalspänning över balkens höjd")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Den maximala tryck- och dragspänningen kan enkelt beräknas genom att multipliciera överkanten med det maximala böjmomentet för att sedan dividera det med yttröghetsmomentet, detsamma för underkanten. När detta printas ut fås en maximal dragspänning på *101.11 Mpa* och en maximal tryckspänning på *-101.11 Mpa*.

Att sedan plotta ut grafen är inget nytt från tidigare. *100 x-värden* skapas och används för att beräkna spänningen i varje punkt. Då fås en linjär graf där spänningen minskar med höjden på ett intervall av den maximala drag- och tryckspänningen.



Jämförelse

Sist skall den maximala dragspänningen jämföras med stålets flytgräns. Om dragspänningen är högre så kommer det resultera i att balken plasticierar, dvs deformeras och återgår inte till sin ursprungliga from. Är dragspänningen mindre än flytgränsen så resluterar det i att spänningen inte är hög nog för att få balken att plasticiera. Detta i kod är simpelt nog en *if-sats* som kollar just det.

```
# --- Jämförelse med flytgräns ---
if max(abs(sigma_max_drag), abs(sigma_max_tryck)) / 1e6 > sigma_y:
    print("\nBRO PLASTICERAR! Maxspänningen överskrider flytgränsen.")
else:
    print("\nBron klarar belastningen utan att plasticera.")
```

Då den maximala dragspänningen är 101.11 MPa och flytgränsen är 200 MPa så är svaret givet att bron inte bör plasticiera. Körs koden fås även samma resultat! Koden är även anpassad för absolutbeloppet för den amximala trycket ifall det skulle behövas.

TERMINAL

```
Yttröghetsmoment I: 0.000759 m^4

Maximal dragspänning: 101.11 MPa vid (x=7.70 m, y=0, z=-0.280 m)
Maximal tryckspänning: -101.11 MPa vid (x=7.70 m, y=0, z=0.280 m)

Bron klarar belastningen utan att plasticera.
```

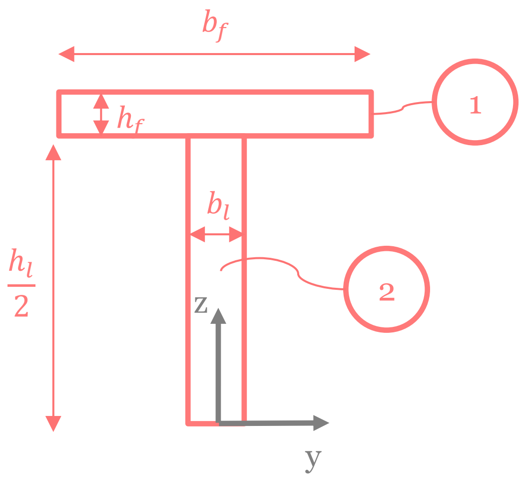
Fullständig och reviderad kod finns i appendix!

Sjkuvspänningsberäkningar i brobalken

I **GC6** analyseras skjuvspänningarna i brobalken genom både handberäkningar och teoretiska överväganden. Först bestäms den maximala böjskjuvspänningen i balken, inklusive dess exakta position i koordinatsystemet **(x,y,z)**. Detta görs genom att använda resultaten från föregående beräkningar, särskilt de krafter och moment som bestämdes i **GC4** och **GC5**.
Därefter undersöks skjuvspänningen i balklivet vid övergången mellan överkant balkliv och överfläns för samma *x-koordinat* som i den första deluppgiften. Denna beräkning ger en djupare förståelse för hur skjuvspänningen varierar i olika delar av tvärsnittet och är avgörande för att bedöma brobalkens strukturella integritet.

Maximal böjskuvspänning

För att beräkna den maximala böjskuvspänningen i balken börjar vi först med att lägga ett snitt genom balklivet vid $z = 0$ och fokuserar på den avsnittade delen ovanför snittet. Anledningen till att snittet görs vid z = 0 är för att skjuvspänningen kommer att vara maximal vid denna punkt.[8] Denna del består av två sammansatta rektanglar enligt figuren till höger.



Inledningsvis kollar vi på flänsdelen och livet, som har areorna:

$$A_1^* = b_f h_f$$
$$A_2^* = b_l \frac{h_l}{2}$$

Samt att dess tyngdpunkt ligger vid:

$$Z_{TP_1} = \frac{h_l}{2} + \frac{h_f}{2} = \frac{h_l + h_f}{2}$$

Det statiska momentet för denna del kan nu beräknas enligt:

$$S_1^* = Z_{TP_1} A_1^* = \frac{h_l + h_f}{2} \cdot b_f h_f$$

[8] Introduktion till hållfasthetslära Enaxliga tillstånd s.106

Och dess tyngdpunkt ges av symmetriskäl och har z-koordinaten:

$$Z_{TP_2} = \frac{h_l}{4}$$

Detta gör att det statiska momentet för livet blir:

$$S_2^* = Z_{TP_2} A_2^* = \frac{h_l}{4} \cdot b_l \frac{h_l}{2}$$

Det totala statiska momentet för balkdelen ovanför det gjorda snittet fås sedan genom addition enligt:

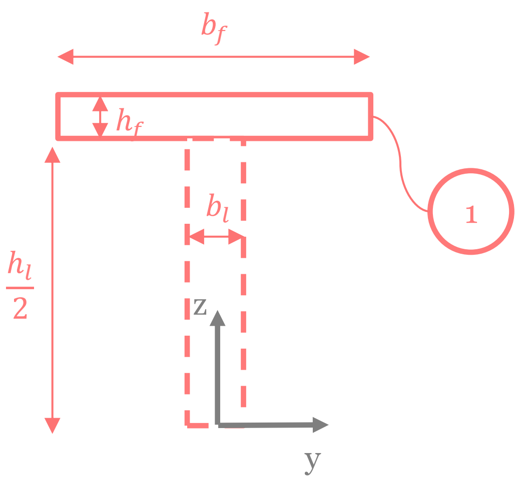
$$S^* = S_1^* + S_2^* = A_1 Z_{TP_1} + A_2 Z_{TP_2} = b_f h_f \cdot \frac{h_l + h_f}{2} + b_l \cdot \frac{h_l}{2} \cdot \frac{h_l}{4} = b_f h_f \cdot \frac{h_l + h_f}{2} + b_l \cdot \frac{h_l^2}{8} = \frac{b_f h_f (h_l + h_f)}{2} + \frac{b_l h_l^2}{8}$$

Skjuvspänningen kan nu bestämmas genom att använda Grashoffs formel. [9]

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot S^*}{I_y \cdot b_l} = \frac{T_{max}\left(\frac{b_f h_f (h_l + h_f)}{2} + \frac{b_l h_l^2}{8}\right)}{\left(2\left(\frac{b_f h_f{}^3}{12} + b_f h_f \left(\frac{h_l + h_f}{2}\right)^2\right) + \frac{b_l h_l{}^3}{12}\right) b_l} \approx 16.302\ MPa$$

Då **T(x)** är som störst är vid $x = 14.45\ m$, vilket går att utläsas från grafen för tvärsnittskrafterna. $\boldsymbol{T_{max}}$:s värde vid detta x-värde uppmäts sedan till ca *81.09 kN*. Det största böjskjuvsspänningen ges då $z = 0$, dvs i tvärsnittets tyngdpunkt. Böjskjuvspänningen varierar ej längs livets y-koordinat vilket gör att y kan vara vad som helst längs $\boldsymbol{b_l}$, dvs $-\frac{\mathbf{b_l}}{\mathbf{2}} \leq \mathbf{y} \leq \frac{\mathbf{b_l}}{\mathbf{2}}$, förslagsvis vid $y = 0$. Då fås koordinaterna *(14.45, 0, 0)*.

Skjuvspänning balklivet



För att beräkna skjuvspänningen i balklivet precis i anslutning mellan överkant balkliv och överfläns återanvänder vi figuren från den tidigare deluppgiften men gör ett nytt snitt vid z =$\frac{h_l}{2}$, dvs vid anslutningen mellan livet och flänsen, och fokuserar på flänsdelen ovanför snittet.

Area och tyngdpunkt för denna del är redan beräknade i deluppgift a), och det gäller alltså att det statiska momentet för denna del är:

$$S^* = S_1^* = A_1 Z_{TP_f} = b_f h_f \cdot \frac{h_l + h_f}{2} = \frac{b_f h_f (h_l + h_f)}{2}$$

[9] (4.27), Introduktion till hållfasthetslära Enaxliga tillstånd s.104

$$\tau\left(z = \frac{h_l}{2}\right) = \frac{T_{max} \cdot S^*}{I_y \cdot b_l} = \frac{T_{max}\left(\frac{b_f h_f \left(h_l + h_f\right)}{2}\right)}{\left(2\left(\frac{b_f h_f^{\,3}}{12} + b_f h_f \left(\frac{h_l + h_f}{2}\right)^2\right) + \frac{b_l h_l^{\,3}}{12}\right) b_l} \approx 12.692\ MPa$$

Givet samma x-koordinat som i deluppgift a), blir alltså skjuvspänningen i balklivet i anslutningen mellan överkant balkliv och överfläns $\tau\left(z = \frac{h_l}{2}\right) \approx 12.692\ MPa$

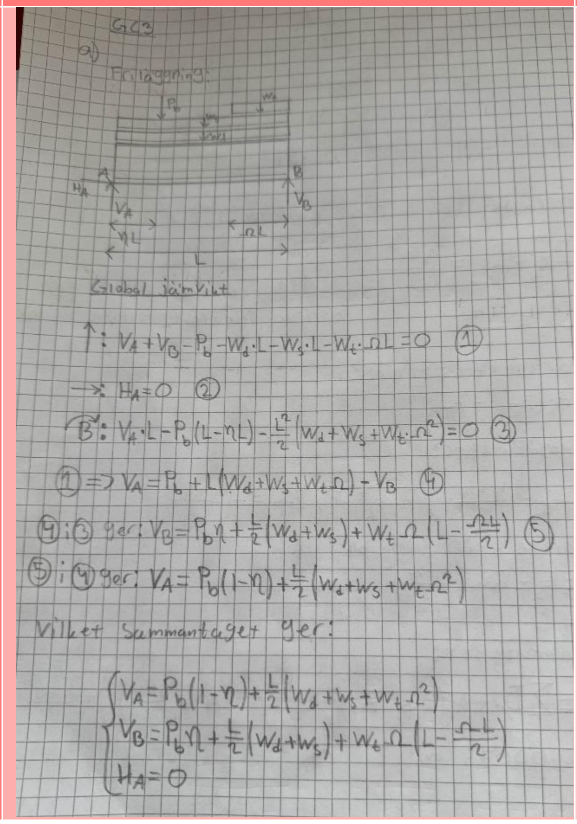
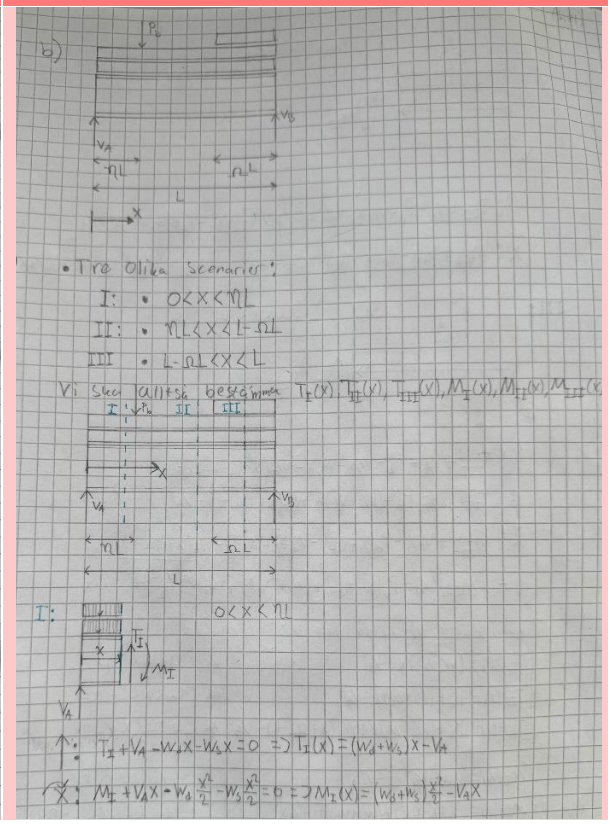
Appendix / Beräkningar

Här finner ni alla referenser, beräkningar,verktyg och koder som användts i projektet.

Fullständig projektkod (GC-bro)

Referenser som har använts:

- Hållfastighetes föreläsningsanteckningar
- Introduktion till hållfastighetslära Enaxliga tillstånd
- Handbok och formelsamling i hållfastighetslära

Index	1	2
Beräkningar		

GC3

a)

Frilägging:

Global jämvikt

$\uparrow: V_A + V_B - P_b - W_d \cdot L - W_s \cdot L - W_t \cdot \Omega L = 0$ (1)

$\rightarrow: H_A = 0$ (2)

$B: V_A \cdot L - P_b(L - \eta L) - \frac{L^2}{2}(W_d + W_s + W_t \cdot \Omega^2) = 0$ (3)

$(1) \Rightarrow V_A = P_b + L(W_d + W_s + W_t \Omega) - V_B$ (4)

(4) i (3) ger: $V_B = P_b \eta + \frac{L}{2}(W_d + W_s) + W_t \Omega \left(L - \frac{\Omega L}{2}\right)$ (5)

(5) i (4) ger: $V_A = P_b(1-\eta) + \frac{L}{2}(W_d + W_s + W_t \Omega^2)$

Vilket sammantaget ger:

$$\begin{cases} V_A = P_b(1-\eta) + \frac{L}{2}(W_d + W_s + W_t \Omega^2) \\ V_B = P_b \eta + \frac{L}{2}(W_d + W_s) + W_t \Omega \left(L - \frac{\Omega L}{2}\right) \\ H_A = 0 \end{cases}$$

b)

• Tre olika scenarier:

I: • $0 < x < \eta L$

II: • $\eta L < x < L - \Omega L$

III • $L - \Omega L < x < L$

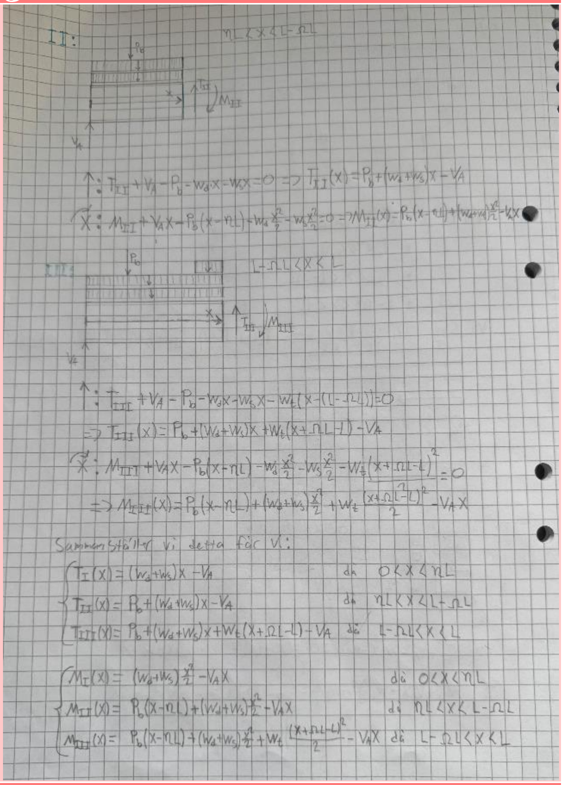
Vi ska alltså bestämma $T_I(x), T_{II}(x), T_{III}(x), M_I(x), M_{II}(x), M_{III}(x)$

I: $0 < x < \eta L$

$\uparrow: T_I + V_A - W_d x - W_s x = 0 \Rightarrow T_I(x) = (W_d + W_s)x - V_A$

$x: M_I + V_A x - W_d \frac{x^2}{2} - W_s \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow M_I(x) = (W_d + W_s)\frac{x^2}{2} - V_A x$

3



II: $\eta L < x < L - \Omega L$

$\uparrow: T_{II} + V_A - P_b - w_d x - w_s x = 0 \Rightarrow T_{II}(x) = P_b + (w_d + w_s)x - V_A$

$\curvearrowleft x: M_{II} + V_A x - P_b(x - \eta L) + w_d \frac{x^2}{2} - w_s \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow M_{II}(x) = P_b(x - \eta L) + (w_d + w_s)\frac{x^2}{2} - V_A x$

III: $L - \Omega L < x < L$

$\uparrow: T_{III} + V_A - P_b - w_d x - w_s x - w_t(x - (L - \Omega L)) = 0$

$\Rightarrow T_{III}(x) = P_b + (w_d + w_s)x + w_t(x + \Omega L - L) - V_A$

$\curvearrowleft x: M_{III} + V_A x - P_b(x - \eta L) - w_d \frac{x^2}{2} - w_s \frac{x^2}{2} - w_t \frac{(x + \Omega L - L)^2}{2} = 0$

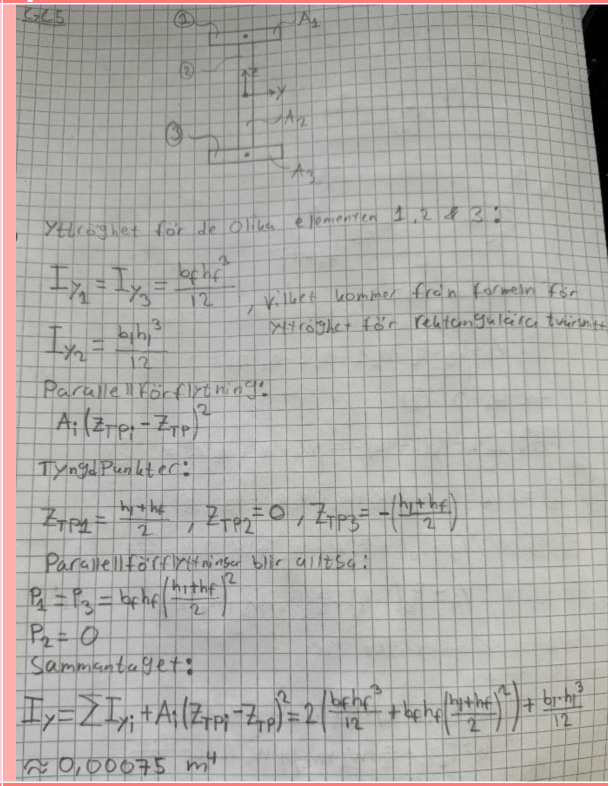
$\Rightarrow M_{III}(x) = P_b(x - \eta L) + (w_d + w_s)\frac{x^2}{2} + w_t \frac{(x + \Omega L - L)^2}{2} - V_A x$

Sammanställer vi detta får vi:

$$\begin{cases} T_I(x) = (w_d + w_s)x - V_A & \text{då } 0 < x < \eta L \\ T_{II}(x) = P_b + (w_d + w_s)x - V_A & \text{då } \eta L < x < L - \Omega L \\ T_{III}(x) = P_b + (w_d + w_s)x + w_t(x + \Omega L - L) - V_A & \text{då } L - \Omega L < x < L \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_I(x) = (w_d + w_s)\frac{x^2}{2} - V_A x & \text{då } 0 < x < \eta L \\ M_{II}(x) = P_b(x - \eta L) + (w_d + w_s)\frac{x^2}{2} - V_A x & \text{då } \eta L < x < L - \Omega L \\ M_{III}(x) = P_b(x - \eta L) + (w_d + w_s)\frac{x^2}{2} + w_t \frac{(x + \Omega L - L)^2}{2} - V_A x & \text{då } L - \Omega L < x < L \end{cases}$$

4



GC5

Yttröghet för de olika elementen 1, 2 & 3:

$I_{y_1} = I_{y_3} = \frac{b_f h_f^3}{12}$, vilket kommer från formeln för yttröghet för rektangulära tvärsnitt

$I_{y_2} = \frac{b_1 h_1^3}{12}$

Parallellförflyttning:

$A_i (z_{TP_i} - z_{TP})^2$

Tyngdpunkter:

$z_{TP1} = \frac{h_1 + h_f}{2}$, $z_{TP2} = 0$, $z_{TP3} = -\left(\frac{h_1 + h_f}{2}\right)$

Parallellförflyttningar blir alltså:

$P_1 = P_3 = b_f h_f \left(\frac{h_1 + h_f}{2}\right)^2$

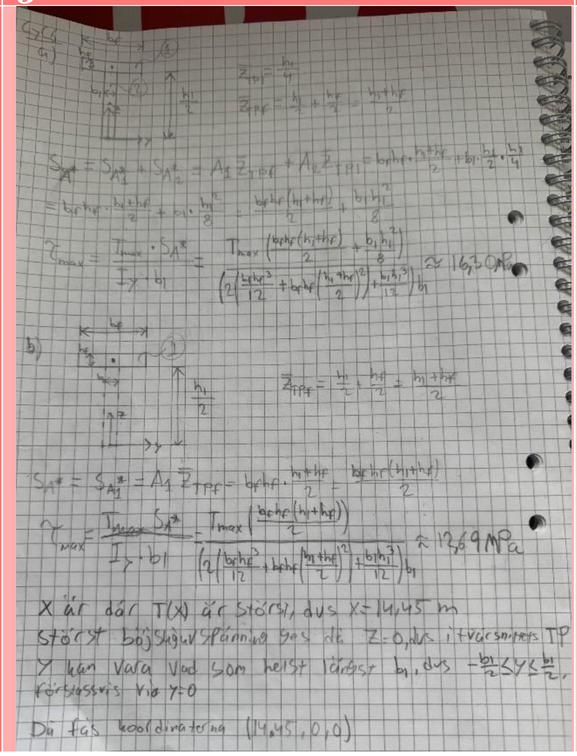
$P_2 = 0$

Sammantaget:

$$I_y = \sum I_{y_i} + A_i (z_{TP_i} - z_{TP})^2 = 2\left(\frac{b_f h_f^3}{12} + b_f h_f \left(\frac{h_1 + h_f}{2}\right)^2\right) + \frac{b_1 h_1^3}{12}$$

$\approx 0{,}00075 \text{ m}^4$

5



GC6

a)

$\bar{z}_{TP1} = \frac{h_1}{4}$

$\bar{z}_{TPf} = \frac{h_1}{2} + \frac{h_f}{2} = \frac{h_1 + h_f}{2}$

$S_A^* = S_{A_1}^* + S_{A_2}^* = A_1 \bar{z}_{TPf} + A_2 \bar{z}_{TP1} = b_f h_f \cdot \frac{h_1 + h_f}{2} + b_1 \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{4}$

$= b_f h_f \cdot \frac{h_1 + h_f}{2} + b_1 \cdot \frac{h_1^2}{8} = \frac{b_f h_f (h_1 + h_f)}{2} + \frac{b_1 h_1^2}{8}$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot S_A^*}{I_y \cdot b_1} = \frac{T_{max}\left(\frac{b_f h_f (h_1 + h_f)}{2} + \frac{b_1 h_1^2}{8}\right)}{\left(2\left(\frac{b_f h_f^3}{12} + b_f h_f \left(\frac{h_1 + h_f}{2}\right)^2\right) + \frac{b_1 h_1^3}{12}\right) b_1} \approx 16{,}30 \text{ MPa}$$

b)

$\bar{z}_{TPf} = \frac{h_1}{2} + \frac{h_f}{2} = \frac{h_1 + h_f}{2}$

$S_A^* = S_{A_1}^* = A_1 \bar{z}_{TPf} = b_f h_f \cdot \frac{h_1 + h_f}{2} = \frac{b_f h_f (h_1 + h_f)}{2}$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} S_A^*}{I_y \cdot b_1} = \frac{T_{max}\left(\frac{b_f h_f (h_1 + h_f)}{2}\right)}{\left(2\left(\frac{b_f h_f^3}{12} + b_f h_f \left(\frac{h_1 + h_f}{2}\right)^2\right) + \frac{b_1 h_1^3}{12}\right) b_1} \approx 13{,}69 \text{ MPa}$$

X är där T(X) är störst, dvs X = 14,45 m

Störst böjskjuvspänning fås då Z = 0, dvs i tvärsnittets TP

Y kan vara vad som helst längst b_1, dvs $-\frac{b_1}{2} \leq y \leq \frac{b_1}{2}$, förslagsvis vid $y = 0$

Då fås koordinaterna (14,45, 0, 0)